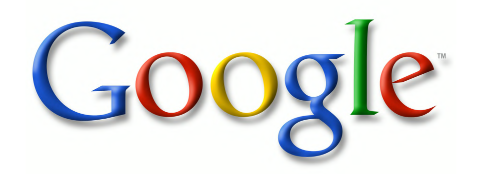
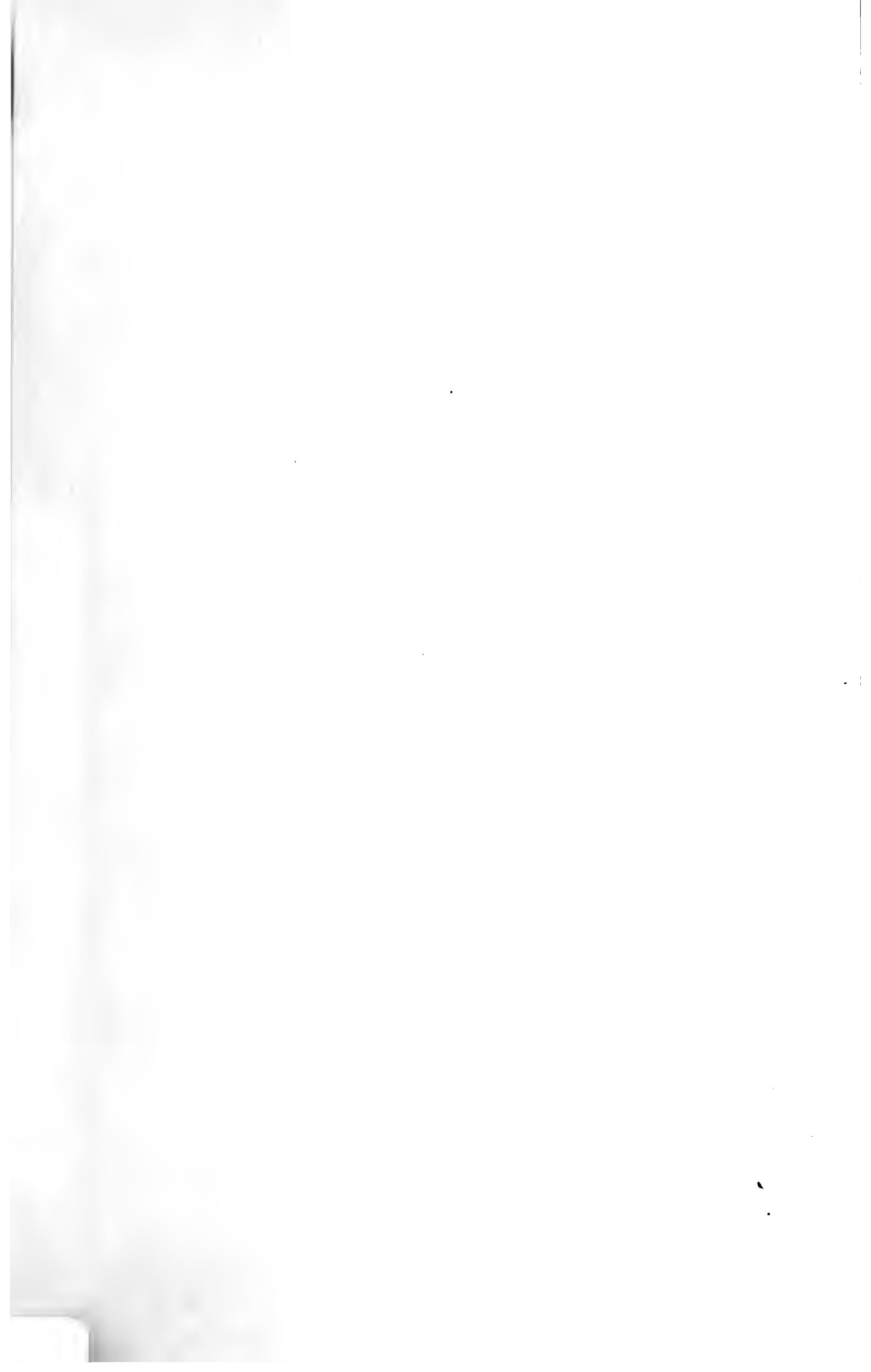










VORLESUNGEN ÜBER GEOMETRIE.

VON

ALFRED CLEBSCH.

BEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FERDINAND LINDEMANN.

MIT EINEM VORWORTE VON FELIX KLEIN.

ERSTER BAND.

GEOMETRIE DER EBENE.

MIT 78 HOLZSCHINTTEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Vorrede.

Als Clebsch vor nunmehr drei Jahren, auf der Höhe seiner Wirksamkeit, durch einen plötzlichen Tod dahingerafft wurde, entstand im Kreise seiner Freunde und Schüler alsbald der Plan, eine Herausgabe wenigstens seiner geometrischen Vorlesungen zu veranstalten. Waren sie doch das hauptsächliche Mittel gewesen, durch welches er einen immer wachsenden Kreis von Zuhörern um sich gesammelt hatte.

Aber die Aufgabe erwies sich grösser und umfassender, als man zu Anfang hatte glauben können. Die Vorlesungen Clebsch's enthalten in der Form, in welcher sie in verschiedenen nachgeschriebenen Heften vorliegen, nicht eigentlich Abgeschlossenes; Clebsch hatte wechselnd bald diesen, bald jenen Gegenstand berührt, ohne systematische Vollständigkeit anzustreben. Bei einem Werke, das zugleich ein Lehrbuch sein sollte, musste der Stoff nach einheitlichen Principien durchgearbeitet, es musste manche Lücke ergänzt werden; es konnte endlich nur in Clebsch's eigenem Sinne liegen, wenn der Versuch gemacht wurde, die Darstellung bis zu dem neuesten, von der Wissenschaft in den letzten Jahren gewonnenen Standpunkte durchzuführen.

Man wird Herrn Dr. Lindemann hohen Dank wissen, dass er diese umfangreiche und schwierige Aufgabe mit ebensoviel Hingebung als Verständniss in Angriff genommen hat. Es ist das Werk dadurch, zumal in den späteren Partieen, namentlich auch sein eigen geworden; verschiedene Abschnitte mussten von ihm, auf Grund der Originalarbeiten, überhaupt erst entworfen werden. Aber der Name Clebsch durfte voranstehen — nicht bloss, weil Clebsch die Veranlassung zum Entstehen des Buches abgegeben, und weil die Umgränzung des

Stoffes doch immer seinen Vorlesungen conform bemessen wurde — sondern weil der innere Gehalt des Buches durchaus auf ihn zurückgeht: sein ist die Art der Darstellung, die durchgehends angestrebt wurde, — von ihm lernten wir Anderen die Tendenz, auch fremde Untersuchungen umfassend in Betracht zu ziehen und mit den eigenen zu verweben, — aus Dankbarkeit gegen ihn entstand der Plan des Werkes und gelang die seitherige Durchführung.

München, Februar 1876.

Felix Klein.

Vorbemerkungen des Herausgebers.

Die nachstehenden Bemerkungen sollen dazu dienen, die Entstehungsweise des vorliegenden Bandes und die bei Abfassung desselben befolgten Gesichtspunkte darzulegen; insbesondere muss ich dabei angeben, in wie weit der Inhalt desselben den Vorlesungen und nachgelassenen Manuscripten meines hochverehrten Lehrers entnommen ist, in wie weit ich entsprechend dem für das Ganze angenommenen Plane genöthigt war, das vorhandene Material, sei es durch Darstellung fremder, sei es durch Einschaltung eigener Untersuchungen zu ergänzen.

Die folgenden Vorlesungen von Clebsch bilden die Grundlage des Buches:

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Sommer 1871.
2) Theorie der algebraischen Curven. Winter 1871/72.
3) Theorie der algebraischen Formen. Sommer 1872.

Für die Bearbeitung derselben sind mir neben eigenen Aufzeichnungen besonders die Hefte der Herren Ahlborn und Godt von Nutzen gewesen. Ausserdem standen mir für die in früheren Jahren von Clebsch gehaltenen Vorlesungen Hefte der Herren Baule, Dieckmann, Klein und Riecke zu Gebote; letztere behandeln ebenfalls die genannten Gegenstände, jedoch in gedrängterer Fassung, überdies die Theorie der Abel'schen Integrale. Ferner konnte ich für die Vorlesungen 1) und 2) ein kurz gehaltenes Manuscript von Clebsch benutzen, welches zunächst für die letzterwähnten früheren Vorträge entworfen zu sein scheint und wohl mit demjenigen identisch ist, auf das sich Herr Fiedler für einige Stellen seiner Bearbeitung von Salmon's Kegelschnitttheorie bezieht (vgl. die Vorrede zu diesem Buche). Endlich wurde der Inhalt eines Manuscriptes über die Theorie der Connexe, welches von Clebsch unvollendet hinterlassen wurde, möglichst verwerthet.

Um diesen reichen, doch mannigfach getheilten Stoff zu einem Ganzen zusammenzufügen, waren selbstverständlich manche Aenderungen in Anordnung desselben, sowie gelegentliche Ergänzungen nothwendig. Ueberdies aber erweiterte sich mir während der Arbeit allmälig der Plan des Werkes; immer mehr erschien es wünschens-

werth, auch neuere Untersuchungen unter die algebraischen Gesichtspunkte einzuordnen, von denen der Gedankengang in Clebsch's Vorträgen beherrscht ward, insbesondere solche Theorien in ihrer neueren Entwicklung zu verfolgen, deren Ausbildung auch eine naturgemässe Erweiterung des in jenen Vorlesungen gebotenen Stoffes zu fordern schien, und so *im Anschlusse an* Clebsch einen in gewisser Richtung vollständigen Ueberblick über die heutige geometrisch-algebraische Forschung zu geben. Eben diese allmälige Verrückung des gesteckten Zieles bezeichnet zum grossen Theile den Charakter des vorliegenden Buches und damit auch manche Mängel desselben. Es ist keineswegs ein in sich vollendetes Werk, an welchem alle Unebenheiten mit sorgfältig bessernder Hand vermieden wären; vielleicht war bei Auswahl des Stoffes in den zugefügten Ergänzungen die Richtung meines Interesses und des Fortschreitens meiner Entwicklung von grösserem Einflusse, als eine rein objective Beurtheilung des Ganzen für zulässig halten dürfte. Immerhin hoffe ich jedoch, gewisse Anschauungen und Methoden, die sonst nur in dem engeren Kreise von Clebsch's Freunden und Schülern gekannt und benutzt wurden, allgemeiner zugänglich gemacht zu haben; und dies um so mehr, als diejenigen Gebiete, in denen sie am meisten zum Ausdrucke gelangen, in den seitherigen Lehrbüchern nicht behandelt oder doch nur kurz berührt sind.

Sollte es mir schliesslich gelungen sein, mich dem bezeichneten Ziele einigermassen zu nähern, so habe ich dies zu nicht geringem Theile der freundschaftlichen und stets bereitwilligen Unterstützung des Herrn Klein zu verdanken, mit welchem mich sowohl während meines Aufenthaltes in Erlangen (Ostern 1873 bis dahin 1875), als nachher in München (bis Ostern 1876) ein reger wissenschaftlicher Verkehr immer enger verband, und dessen wohlthätiger Einfluss auf meine Arbeiten daher wohl grösser ist, als dass er sich mit Worten, durch Anführung von Einzelheiten, würde schildern lassen. Ich beschränke mich darauf, dankbar hervorzuheben, dass es vor Allem sein Bestreben war, mir bei Anordnung und Sichtung des reichen Stoffes und beim Zusammenfassen verschiedenartiger Untersuchungen unter einheitliche Gesichtspunkte fördernd zur Seite zu stehen. In München hat Herr Brill sich mit gleicher Bereitwilligkeit um die Förderung meines Unternehmens bemüht (besonders für einzelne Abschnitte der vierten und sechsten Abtheilung); auch ihm spreche ich daher meinen lebhaft gefühlten Dank aus. Im Winter 1874/75 hatte ich überdies Gelegenheit, mit Herrn Gordan in persönlichen Verkehr zu treten, und so verdanke ich ihm ebenfalls manch' schätzenswerthe Bemerkung, wie auch an einzelnen Stellen des Buches besonders hervorgehoben ist. —

Im Folgenden möge noch kurz geschildert werden, wie der gegebene Stoff geordnet und verarbeitet wurde; diejenigen Gegenstände, welche nicht den Vorlesungen von Clebsch oder den betreffenden Originalaufsätzen desselben entnommen wurden, will ich kurz als „hinzugefügt“ bezeichnen.

Die *ersten beiden Abtheilungen* sind eine Wiedergabe der oben unter 1) genannten Vorlesung von Clebsch.

In der *dritten Abtheilung* findet man im Grossen und Ganzen den Inhalt der Vorlesung 3) wieder, insoweit letztere die Theorie der binären Formen, der ternären Formen im Allgemeinen und der ternären quadratischen Formen behandelte. Es mussten indess verschiedene Umstellungen, Abkürzungen und Erweiterungen vorgenommen werden, um den geometrischen Inhalt der algebraischen Theorien mehr hervortreten zu lassen; und dies konnte um so eher geschehen, als die Algebra der binären Formen von Clebsch selbst in einem grösseren Werke behandelt ist. Die Theorie der Polaren binärer Formen und der Involutionen (p. 203 ff.) ist einem besonderen Manuscripte von Clebsch entnommen. Der Abschnitt über Collineationen im ternären Gebiete (p. 250—264) bildete ursprünglich die Einleitung zu den oben unter 2) genannten Vorträgen. Die Theorie der algebraischen Formen habe ich, abweichend von der zeitlichen Aufeinanderfolge obiger Vorträge, *vor* die der algebraischen Curven gestellt, um mich in letzterer gelegentlich der durch erstere gewonnenen Vorstellungen, Bezeichnungsweisen und Rechnungsmethoden bedienen zu können. Hinzugefügt sind (p. 272 f.) in etwas modificirter Form die Untersuchungen über die Darstellung invarianter Eigenschaften durch Verschwinden von Functionalinvarianten und (p. 288 ff.) die Ableitung des vollständigen Systems zweier ternären quadratischen Formen (nach einer Mittheilung des Herrn Gordan), ferner die Aufstellung der Invariantenrelationen, durch welche die besonderen Lagen zweier Kegelschnitte gegen einander charakterisirt werden. Die Berechnung der Relationen zwischen ihren verschiedenen quadratischen Covarianten dagegen ist wieder den Vorträgen von Clebsch entnommen.

In der *vierten Abtheilung* sind die ersten vier Abschnitte (p. 305—372) eine Bearbeitung der ersten Hälfte der Vorlesung 2), an einzelnen Stellen modificirt in Folge der voraufgeschickten Theorie der algebraischen Formen, zum grösseren Theile aber wohl ohne Kenntniss der letzteren verständlich. Es sind hinzugefügt die Sätze von Nöther über die Gleichung $f = A\varphi + B\psi$ (p. 338 ff.), die mittelst symbolischer Rechnung geführten Beweise für das Verhalten der Hesse'schen Curve in den singulären Punkten der Grundcurve (p. 354), die directe Bestimmung der Wendetangenten der Steiner-

schen Curve (p. 365) und eine Erweiterung des Satzes über die Spitzen der letzteren. Die Abschnitte über Systeme von Curven, über das erweiterte Correspondenzprincip und über die eindeutige Abbildung zweier Ebenen auf einander sind ihrem ganzen Umfange nach auf Grund der betreffenden Originalaufsätze ausgearbeitet; nur die algebraische Behandlung der Elementarsysteme von Kegelschnitten (p. 393—395) ist einem Seminarvortrage von Clebsch aus dem Winter 1870/71 entnommen; über die Cremona'schen Transformationen gab derselbe eine kurze Uebersicht in seinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen (Winter 1870/71) und über Raumgeometrie (Winter 1868/69). In den genannten Abschnitten wird man vielleicht, wenn nicht in den Resultaten, doch in den Beweisen einiges Neue finden; ich darf hier erwähnen: die Bestimmung des Verhaltens der Jacobischen Curve in gemeinsamen Punkten der drei Grundcurven (p. 377), die Beweise für die Sätze von Chasles und Cremona über Kegelschnittsysteme (p. 398 ff.), die algebraischen Erörterungen über Zeuthen's Theorie der Curvensysteme (p. 419 ff.), die Berechnung der Coincidenzcurve für die einfachsten Fälle der Correspondenz auf einer Curve beliebigen Geschlechts (p. 446 ff.), die Untersuchungen über Schaaren von Curven, welche dieselbe feste Curve berühren (p. 454 ff.) und die Ableitung des Brill'schen Reciprocitätsgesetzes für solche Schaaren mit Hülfe des erweiterten Correspondenzprincips.

Die *fünfte Abtheilung* enthält in ihren ersten drei Abschnitten die Fortsetzung der Vorlesung 2); hinzugefügt habe ich die Untersuchungen über Kegelschnitt-Netze und -Gewebe (p. 519 ff. nach Rosanes) und die Bemerkungen über den Zusammenhang der Grassmann'schen Erzeugungsweise mit der Chasles'schen. Die Theorie der ternären cubischen Formen ist eine Darstellung des betreffenden Theiles von Vorlesung 3), doch über die Grenzen der letzteren hinaus fortgeführt und durch Einschaltung geometrischer Ueberlegungen erweitert. Der sechste Abschnitt bildete seinem geometrischen Inhalte nach den Schluss der Vorlesung 2). Die Abschnitte über die Anwendung der elliptischen Functionen und über die Parameterdarstellung sind selbstständig von mir ausgearbeitet. Erstere berührte Clebsch nur kurz am Schlusse seiner Vorlesung über elliptische Functionen (Sommer 1872); der letzteren ist die Einführung der Hermite'schen H-Functionen direct entnommen (p. 627). Ich hebe noch den Versuch hervor, gewisse algebraische Eliminationsaufgaben durch Benutzung der Theilungsgleichungen für elliptische Functionen zu lösen (p. 652 ff.).

Die *sechste Abtheilung* ist eine vollständig selbstständige Bearbeitung des in ihr gegebenen Stoffes; eine solche glaubte ich um so

mehr unternehmen zu dürfen, als der Zusammenhang der Theorie der Abel'schen Functionen mit der Geometrie eine der schönsten Entdeckungen ist, welche wir Clebsch verdanken, und als diese Anwendungen in dem Werke von Clebsch und Gordan über Abel'sche Functionen nur beiläufig berücksichtigt werden. Die rein algebraischen Untersuchungen sind zum Theile als Ergänzungen der betreffenden Abschnitte in der vierten Abtheilung aufzufassen. Man findet auch hier einige vielleicht neue Gesichtspunkte und Beweise; ich nenne: die Darstellung des directen Beweises für die Erhaltung des Geschlechts bei eindeutiger Transformation (p. 662 ff.), die Ableitung der Brill'schen Formeln für simultane Correspondenzen auf einer Curve (p. 720 ff.), die Zerlegung algebraischer Differentialausdrücke in Summen von Normaldifferentialen (p. 778 ff.), die Ableitung des Jacobi'schen Satzes und des Abel'schen Theorems aus ihm (p. 818 ff.), die Erledigung des erweiterten Umkehrproblems für den Fall $p = 2$ auf Grund Riemann'scher Principien (p. 867 ff.) und die Behandlung der Curven vom Geschlechte Null (p. 889 ff.).

In der *siebenten Abtheilung* ist auf Grund des Schlusses der Vorlesung 3) und des oben erwähnten Manuscriptes von Clebsch die Theorie der Connexe dargestellt; da letztere noch durchaus in ihren Anfängen steht, ist die ganze Abtheilung mehr als Anhang zu betrachten. Hinzugefügt habe ich einige Abzählungen auf p. 940 und 957, die Ableitung der Eigenschaften der durch $F = 0$ und $\Phi = 0$ bezeichneten Curven (p. 969), die Beispiele für die Bestimmung von Hauptcoincidenzcurven (p. 978 ff.), eine ausführlichere Behandlung des Connexes (1, 1) auf Grund der im Texte genannten Aufsätze, die allgemeinen Sätze über den Connex (1, n) und Godt's Untersuchungen über den Connex (1, 2). Dem Manuscripte von Clebsch sind insbesondere entnommen: Die Berechnung des conjugirten Connexes eines Connexes (2, 2), die Bemerkungen über die Differentiale mehrfacher algebraischen Integrale und die Entwicklung auf p. 977. Den begrifflichen Entwicklungen über die Integration einer Differentialgleichung, sowie der Behandlung der Lie'schen Berührungstransformationen liegt ein schriftlicher Entwurf des Herrn Klein zu Grunde, welchen mir derselbe gütigst zur Benutzung überliess.

Endlich muss ich hier noch einige Worte über die *Literaturnachweise* anschliessen. Clebsch pflegte in seinen Vorträgen nur die allerwichtigsten Originalaufsätze zu erwähnen, und demgemäss habe ich mich in den betreffenden Theilen dieses Werkes auf nur kurze historische Notizen beschränkt, die durchaus nicht den Anspruch auf Vollständigkeit machen, die aber hinreichen werden, um den Leser in die Literatur einzuführen. In den von mir selbstständiger bearbeiteten Abschnitten dagegen hielt ich es für meine Pflicht, die benutzten

Quellen vollständig anzugeben; und so musste in den Citaten hinsichtlich ihrer Vertheilung auf die letztgenannten und die ersteren Abschnitte nothwendig eine gewisse Ungleichmässigkeit entstehen. Einige derselben habe ich in den „Verbesserungen und Zusätzen“ noch vervollständigen können. Diese Verbesserungen wurden leider in grösserer Zahl nöthig; manche derselben verdanke ich den gütigen Mittheilungen der Herren Nöther, Wedekind und Zeuthen.

Dem Herrn Verleger bin ich für die Bereitwilligkeit, mit welcher derselbe meinen Wünschen stets entgegengekommen ist, in ausserordentlicher Weise verpflichtet, um so mehr, als der seit October 1873 begonnene Druck in Folge der Entstehungsweise des Werkes, und in letzterer Zeit durch störende Ortsveränderungen meinerseits, wiederholt für längere Zeit unterbrochen werden musste.

Seedorf in Lauenburg, 10. Septb. 1876.

F. Lindemann.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Einleitende Betrachtungen. — Punktreihen und Strahlbüschel.

I. Darstellung geometrischer Oerter durch Gleichungen. — Vorbereitende Aufgaben.

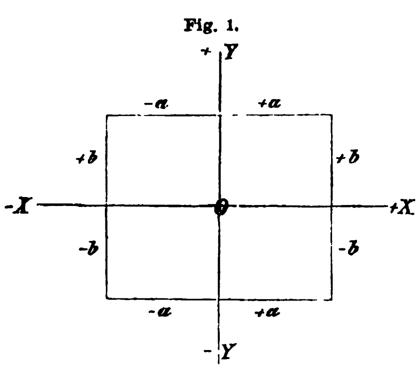
Die *analytische Geometrie*, mit der wir uns vorwiegend beschäftigen werden, basirt auf der geregelten Benutzung gewisser einfacher Hülfsmittel, durch welche es gelingt, geometrische Probleme in eine algebraische Form einzukleiden, ja geradezu alle krummen Linien und Flächen durch Gleichungen darzustellen. Diese Behandlungsweise der Geometrie unterscheidet sich wesentlich von der Anwendung der Rechnung, wie sie z. B. in der Lehre von den Proportionen üblich ist. Während letztere schon sehr alt ist, datirt die eigentliche analytische Geometrie aus der Mitte des 17. Jahrhunderts: es ist Descartes, welcher sich das ausserordentliche Verdienst erworben hat, die Wissenschaft um die von uns bezeichnete Disciplin bereichert zu haben, um so für alle Zeiten die Schranken der alten Geometrie zu brechen. Durch Einführung der sogenannten *Coordinaten**) schuf er ein Werkzeug, durch welches, wie er sich ausdrückte, die Möglichkeit gegeben war, eine jede geometrische Aufgabe zu lösen, d. h. für jede den Anzatz zu machen, sie in bestimmter Weise zu formuliren. Und in der That ist noch immer durch diese Form der Fragestellung der Charakter analytisch-geometrischer Untersuchungen bedingt, hauptsächlich auch gegenüber den Methoden der neueren *synthetischen* Geometrie, die wir später berühren werden.

Die Grundlage der analytischen Geometrie bildet demnach die Auffindung eines Mittels, welches uns in den Stand setzt, jeden Punkt der Ebene durch Zahlen zu charakterisiren; und diese Aufgabe löst sich einfach durch Analogie mit der Trigonometrie. In letzterer bestimmen wir jeden Punkt eines mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises durch zwei Strecken, den sinus und den cosinus, welche stets der Bedingung genügen müssen, dass die Summe ihrer Quadrate gleich

*) Das grundlegende Werk von Descartes erschien 1637 unter dem Titel: Géométrie.

der Einheit ist. Lassen wir dagegen diese Bedingungsgleichung bei Seite, so können wir ebenso jeden Punkt der Ebene durch zwei Strecken charakterisiren: seinen Abstand von einer festen Geraden, *der Ordinate*, und das Stück, welches auf dieser festen Geraden von einem festen Punkte derselben aus gerechnet, durch den Fusspunkt der Ordinate abgeschnitten wird, *die Abscisse*. Lässt man dann zwischen diesen beiden Grössen wieder die Bedingung bestehen, dass die Summe ihrer Quadrate gleich der Einheit sei, so erhält man alle Punkte eines mit dem Radius 1 um jenen festen Punkt beschriebenen Kreises. Der augenscheinlichen Gleichberechtigung zwischen Ordinate und Abscisse entsprechend nahm man später zwei in einem willkührlich gewählten Punkte der Ebene, *dem Anfangspunkte*, sich senkrecht durchschneidende Gerade als *Coordinatenaxen*, und charakterisirte einen Punkt durch seine Abstände von diesen Axen: *seine Coordinaten*. In Folge dieser Festsetzungen gehört nun zwar zu jedem Punkte ein bestimmtes Paar von Coordinaten; es ist aber nicht umgekehrt durch Angabe zweier Coordinaten ein Punkt eindeutig bestimmt; sondern es gibt je vier Punkte, deren Coordinaten dieselben Grössen sind, entsprechend den vier Quadranten, in welche die Ebene durch die Coordinatenaxen getheilt wird. Es muss also noch ein Mittel hinzutreten, diese vier Punkte zu trennen; und dies geschieht wieder analog, wie in der Trigonometrie, durch Vorsetzen verschiedener Vorzeichen. Man unterscheidet nämlich die beiden Erstreckungen jeder Coordinatenaxe zu beiden Seiten des Anfangspunktes als die positive und die negative und bezeichnet eine Coordinate als positiv oder negativ, jenachdem das betreffende Loth sich auf der Seite der positiven oder der negativen Erstreckung der parallelen Axe befindet. Die beiden Axen unterscheidet man als X- und Y-Axe; die von dem zu bestimmenden Punkte aus auf sie gefällten Lothe werden dann die Y- und X-Coordinate genannt und in der Regel durch y und x bezeichnet (vergl. Fig. 1). Das somit aufgestellte Coordinatensystem, in dem nunmehr jedes Coordinatenpaar einschliesslich des Vorzeichens nur *einen* Punkt der Ebene definirt, wird in neuerer Zeit nur in den angewandten Zweigen der Mathematik, besonders also in der Mechanik, noch ausschliesslich verwendet; für unsere rein geometrischen Speculationen dagegen werden wir uns später eines allgemeineren Coordinatensystems bedienen. Es ist überhaupt nicht schwer, eine unbegrenzte Reihe

Fig. 1.



verschiedener Systeme der Art aufzustellen; es kommt nur darauf an, für die jedesmal vorliegenden Probleme das möglichst passende zu wählen.

An die hier gegebene Coordinatenbestimmung schliesst sich sofort eine andere, in der ein Punkt nicht durch die beiden Grössen x und y, sondern durch seine Entfernung r von einem festen Punkte, *dem Anfangspunkte*, und den Winkel α dieser Strecke gegen eine durch den Anfangspunkt gehende feste Gerade bestimmt wird. Dabei wird man freilich r mit einem bestimmten Vorzeichen und α zwischen 0 und 360° nehmen müssen, wenn man will, dass zu jedem Punkte nur ein Coordinatenpaar gehört. Der Uebergang von diesem sogenannten *Polarcoordinatensysteme* zu unserem rechtwinkligen ist einfach gegeben; es ist nämlich die *Entfernung eines Punktes* x, y *vom Anfangspunkte:*

$$(1) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

und *der Winkel dieser Linie gegen die* X-*Axe* bestimmt durch

$$(2) \qquad r\cos\alpha = x\,,\quad r\sin\alpha = y\,,\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}\,,$$

Gleichungen, welche uns die Coordinaten x, y durch die Polarcoordinaten r, α ausdrücken lehren, und umgekehrt.

Welches Coordinatensystem wir aber auch wählen mögen, immer sind *zwei* Grössen nöthig, um einen einzelnen Punkt zu bestimmen; ist nur eine solche Grösse, nur eine Bedingung für einen Punkt gegeben, so gibt es eine unendliche Anzahl von Punkten, die alle dieser Bedingung genügen und in ihrer Gesammtheit *einen geometrischen Ort, eine Curve,* darstellen. Halten wir z. B. die Richtung α fest und lassen die Entfernung r unbestimmt, so beschreibt der Punkt, dessen Coordinaten der letzten Gleichung (2) genügen, eine Gerade, die durch den Anfangspunkt geht; halten wir dagegen die Entfernung r fest und lassen α unbestimmt, so stellt die Gleichung (1) einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt und dessen Radius gleich r ist, es ist die *Gleichung des Kreises*, wie (2) *die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie.* Ebenso stellen die Gleichungen

$$x = 0\,,\quad y = 0\,,$$

wo das eine Mal y das andere Mal x unbestimmt bleibt, die Y- resp. X-Axe dar, während

$$x = a$$

eichung einer in der Entfernung a zur Y-Axe gezogenen Paral-
t.

r Begriff des geometrischen Ortes, für welchen wir soeben einige
betrachteten, ist für die analytische Geometrie fundamental:
dium dieser Oerter, d. h., für die Ebene, der Curven und ihrer

Eigenschaften, können wir geradezu als Aufgabe derselben bezeichnen. Eine Curve wird also gebildet von allen Punkten, die nur *einer* Bedingung genügen, welche wir durch eine Beziehung zwischen ihren Coordinaten gegeben denken. Der fundamentale Begriff des geometrischen Ortes fällt sonach zusammen mit dem Begriffe einer Gleichung zwischen den Coordinaten x, y; d. h. eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

stellt eine Linie in der Ebene dar, und die Eintheilung der Curven kommt zurück auf die der Gleichungen. Die heutige Geometrie der Ebene beschränkt sich jedoch wesentlich auf die Untersuchung der *algebraischen Curven*, d. h. derjenigen, in deren Gleichungen nur positive und ganze Potenzen von x und y vorkommen. So interessant nämlich auch gewisse andere, transcendente Curven in ihren Eigenschaften sind, so wichtig dieselben auch für gewisse Anwendungen erscheinen, so ist uns die wahre Natur der transcendenten Functionen noch zu sehr verschlossen, als dass wir die durch sie darstellbaren Curven in ihrem inneren Zusammenhange behandeln könnten, während besonders durch neuere Untersuchungen in der Kenntniss der algebraischen Functionen wesentliche Fortschritte gemacht sind, so dass hier der rein geometrischen Speculation ein weites, aber durch allgemeine Principien übersichtliches Gebiet eröffnet ist.

Man theilt die algebraischen Curven zunächst ein nach ihrer Ordnung, d. h. nach der grössten Anzahl von Factoren x oder y, welche in der Gleichung der Curve mit einander multiplicirt vorkommen *(höchste vorkommende Dimension)*. Bei dieser Abzählung richten wir zuvor die Gleichung durch passende Multiplication so ein, dass eine ganze, rationale Function von x und y gleich Null gesetzt wird. So ist also z. B. nach (1) der Kreis eine Curve der zweiten, nach (2) die gerade Linie eine Curve von der ersten Ordnung. Die Curven der ersten und zweiten Ordnung werden uns zunächst vorwiegend beschäftigen; wir werden auf die Theorie derselben aber erst dann ausführlicher eingehen, nachdem wir im Folgenden durch einige vorbebereitende Aufgaben mit den wichtigsten bei ihnen auftretenden Gestalten bekannt geworden sind. Von ganz anderem, allgemeinerem Gesichtspunkte werden wir später auf dieselben zurückkommen.

1. Es sind zwei Punkte (1 und 2) gegeben, es soll ihre Entfernung (r) und die Richtung ihrer Verbindungslinie bestimmt werden.

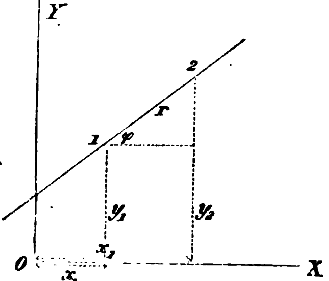
Wir unterscheiden die Coordinaten der beiden Punkte du[illegible] beigefügte Indices; sie seien also x_1, y_1 und x_2, y_2. Die Lös[illegible] Aufgabe folgt dann unmittelbar aus beistehender Fig. 2; es i[illegible]

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

und zwar überzeugt man sich leicht, dass diese Formel [illegible]

bleibt, wenn auch die beiden Punkte nicht, wie in der Zeichnung, in dem positiven Quadranten des Coordinatensystems liegen.

Die *Richtung der Strecke 1 - 2**) dagegen, d. h. ihr Winkel gegen die X-Axe ist bestimmt durch:



$$x_2 - x_1 = r \cos \varphi$$
$$y_2 - y_1 = r \sin \varphi ,$$

also
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Ist der Punkt 2 nicht selbst gegeben, sondern nur seine Entfernung von 1, so haben wir für ihn nur *eine* Bedingung, er beschreibt also einen geometrischen Ort, den mit dem Halbmesser r um 1 beschriebenen Kreis. *Die Gleichung des letzteren* ist demnach, wenn wir die Coordinaten des beweglichen Punktes ohne Index schreiben:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

Es sei zweitens die Richtung der Linie 1 - 2 gegeben, aber nicht die Entfernung r; dann muss, wenn 1 fest angenommen wird, der Punkt 2 immer auf einer bestimmten durch 1 gehenden Geraden bleiben, die unter dem Winkel φ gegen die X-Axe geneigt ist, und es ist also

$$(y - y_1) \cos \varphi - (x - x_1) \sin \varphi = 0$$

die *Gleichung dieser Geraden.*

2. *Es seien zwei Punkte (1 und 2) gegeben, es soll der geometrische Ort eines Punktes bestimmt werden, für welchen die Summe der Abstände von den beiden gegebenen Punkten constant ist.*

Bei Lösung dieser Aufgabe machen wir von dem besonderen Hülfsmittel Gebrauch, welches die analytische Geometrie mit Rücksicht auf die Wahl des Coordinatensystems bietet, und dessen geschickte Anwendung nicht selten die Lösung gestellter Probleme wesentlich vereinfacht. Hier nehmen wir die Verbindungslinie der gegebenen Punkte zur X-Axe, und die Y-Axe legen wir der Symmetrie wegen durch den Mittelpunkt dieser Verbindungslinie. Die Entfernung eines jeden der beiden Punkte vom Anfangspunkte sei e, die constante Summe ihrer Entfernungen von dem beweglichen Punkte sei $2a$. Bezeichnen wir ferner die letzteren Entfernungen selbst mit r_1 und r_2, so ist für den dritten Punkt:

---

*) Wir unterscheiden die Strecke 1 - 2 von der Strecke 2 - 1, je nach der Richtung, in welcher wir sie durchlaufen denken.

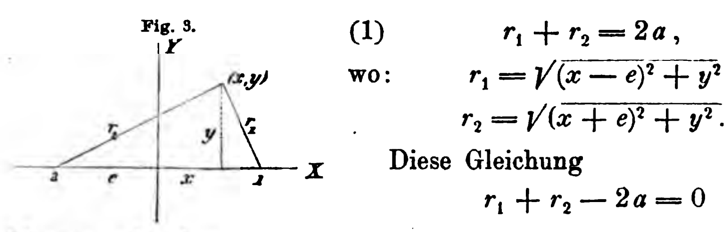


Fig. 3.

$$(1) \qquad r_1 + r_2 = 2a\,,$$

wo:

$$r_1 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}\,.$$

Diese Gleichung

$$r_1 + r_2 - 2a = 0$$

können wir aber durch Multiplication mit geeigneten Factoren von den in r_1 und r_2 enthaltenen Irrationalitäten befreien. Multipliciren wir nämlich zunächst mit

$$r_1 - r_2 - 2a\,,$$

so verschwindet die Irrationalität von r_2; die von r_1 wird aufgehoben, wenn wir weiter mit

$$(r_1 - r_2 + 2a)\,(r_1 + r_2 + 2a)$$

multipliciren.

Wir setzen also an Stelle von (1) die Gleichung:

$$(2) \qquad (r_1 + r_2 - 2a)\,(r_1 - r_2 - 2a)\,(r_1 - r_2 + 2a)\,(r_1 + r_2 + 2a) = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$(3) \qquad 0 = 16a^4 - 8a^2\,(r_1^2 + r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2\,.$$

Diese Gleichung ist aber nicht mehr die ursprüngliche, sondern sie ist noch mit Factoren multiplicirt. Es kann daher die Frage entstehen, ob die neue Gleichung auch stets die Bedingung der Aufgabe darstellt; und das ist in der That nicht immer der Fall. Der durch die Gleichung (2) dargestellte geometrische Ort sagt nur aus, dass das Product der vier Factoren Null ist, dass also einer von ihnen verschwindet, wobei aber keineswegs der erste Factor ausgezeichnet ist; und nur *sein* Verschwinden wird ja in unserer Aufgabe gefordert. Der letzte Factor kann nicht verschwinden, da r_1 und r_2 wesentlich positiv sind. Es ist also entweder

$$r_1 + r_2 = 2a\,,$$

oder es verschwindet einer der beiden anderen Factoren, d. h. es ist:

$$r_1 - r_2 = 2a \quad \text{oder} \quad r_2 - r_1 = 2a\,,$$

was nicht wesentlich verschieden ist. Unser geometrischer Ort stellt also eine Curve dar, bei der entweder die Summe oder die Differenz der Entfernungen des beschreibenden Punktes von zwei festen Punkten constant, $= 2a$, ist; und wir haben somit diese beiden Aufgaben gleichzeitig behandelt. Welcher dieser beiden Fälle eintritt, entscheidet sich aus dem Grössenverhältnisse von $2a$ zu $2e$ mit Hülfe der Sätze über Summe und Differenz zweier Seiten im Dreieck. Ist nämlich $a > e$, so ist in dem durch den beweglichen und die beiden festen Punkte bestimmten

Dreieck $2a$ nothwendig die *Summe* der Seiten, da ihre Differenz nicht grösser, als die dritte sein darf; ist aber $a < e$, so kann $2a$ nur die *Differenz* der beiden Entfernungen sein, da sonst die Summe zweier Seiten kleiner, als die dritte wäre. *Die Gleichung (3) stellt also eine Curve dar, für deren Punkte die Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten constant ist, je nachdem $a > e$ oder $a < e$ ist.*

Drücken wir r_1, r_2 wieder durch x, y und e aus, so wird diese Gleichung (3):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0 .$$

Ist hier $a > e$, so wird $a^2 - e^2$ positiv, $= b^2$, also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

eine Curve, die den Namen *Ellipse* führt. Im zweiten Falle, d. h. für $a < e$, ist $a^2 - e^2$ negativ, $= - b^2$, und unsere Gleichung wird:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

eine Curve, welche man als *Hyperbel* zu bezeichnen pflegt. Was die Gestalt beider Curven angeht, so erhellt aus ihren Gleichungen, welche nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten, sofort, dass immer 4 symmetrisch gegen die Coordinatenaxen liegende Punkte ihnen genügen, d. h. 4 Punkte, deren Coordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Jede der Curven besteht also aus vier congruenten Theilen, und wir brauchen dieselben nur in einem Quadranten des Coordinatensystems zu untersuchen.

Bei der Ellipse sehen wir ferner, dass x nie grösser als a, y nie grösser als b werden kann, dass also die Curve ganz im Endlichen liegt, begrenzt von vier Geraden, die wir in den Abständen a und b respective zur Y- und X-Axe parallel zu ziehen haben. Punkt für Punkt können wir die Ellipse auch einfach construiren, wenn wir die Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit der Identität:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

beachten. Setzen wir nämlich

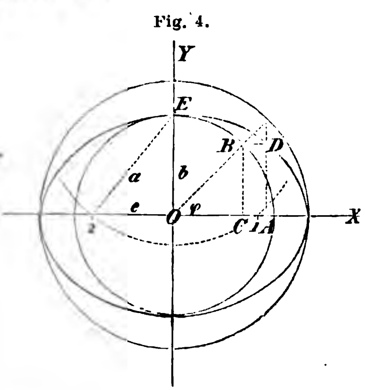
$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi , \end{aligned} \tag{6}$$

so wird die Gleichung (4) unabhängig von φ erfüllt, und wir erhalten alle Punkte der Curve, wenn wir φ von 0 bis 2π variiren lassen. Diese Darstellungsweise eines Punktes, bei welcher seine Coordinaten von einer dritten Variabeln, *einem Parameter*, abhängig gemacht werden, ist der Darstellung der von dem Punkte beschriebenen Curve durch eine *Gleichung* völlig gleichberechtigt; die letztere ergiebt sich wieder durch Elimination des Parameters. Diese neue Form, in der ein geome-

trischer Ort hier auftritt, wird uns später sogar ein wichtiges Hülfsmittel zur Eintheilung der Curven höherer Ordnung sein, indem wir dabei auf die Natur der Functionen, welche den Parameter mit den Coordinaten verknüpfen, Gewicht legen.

Unsere Gleichungen (6) ergeben nun unmittelbar folgende Construction für die Ellipse: wir beschreiben um den Anfangspunkt O einen Kreis mit dem Radius a, einen zweiten mit dem Radius b und ziehen von O aus einen unter beliebigem Winkel φ gegen die X-Axe geneigten Strahl; alsdann ist (vergl. Fig. 4):

Fig. 4.



$$OA = x = a \cos \varphi$$
$$BC = y = b \sin \varphi,$$

und also ist D ein Punkt der Ellipse, und in dieser Weise ist die Curve nach ihrer ganzen Erstreckung zu zeichnen. Die Construction der *Brennpunkte*, d. h. der beiden festen Punkte, von denen aus wir ursprünglich zu der Ellipse geführt wurden, ergibt sich aus der Relation

$$e^2 = a^2 - b^2;$$

sie werden also durch einen mit dem Radius a um den Punkt E beschriebenen Kreis auf der X-Axe ausgeschnitten. Die Entfernung e eines Brennpunktes vom Anfangspunkte wird *Excentricität der Ellipse genannt*; verschwindet dieselbe, ist also $a = b$, so geht die Gleichung in die des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2$$

über. Die Grössen a und b werden bezüglich als *grosse und kleine halbe Axe der Ellipse* bezeichnet.

Bei der Hyperbel haben wir ebenfalls vier congruente Theile; es kann ferner, wie der Anblick der Gleichung zeigt, x nie kleiner als a werden, während wir für das Wachsthum von y keine Grenze angeben können. In dem Streifen, den wir erhalten, wenn wir zur Y-Axe im Abstande $\pm a$ von ihr Parallele ziehen, befindet sich folglich kein Punkt der Curve. Im Uebrigen wird x und y in Betreff der Grösse nicht beschränkt; die Hyperbel erstreckt sich demnach in's Unendliche.

Um ihren Verlauf näher kennen zu lernen, ziehen wir durch den Anfangspunkt, unter irgend einem Winkel φ gegen die X-Axe geneigt, eine Linie und suchen die auf ihr befindlichen Punkte der Curve. Bezeichnen wir die Entfernung eines solchen Punktes vom Anfangspunkte mit r, setzen also

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi,$$

so ergibt die Gleichung der Curve (5) für r eine quadratische Gleichung:

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}};$$

und auf jedem solchen Strahle liegen also im Allgemeinen 2 Punkte. Lassen wir φ von 0 an wachsen, so wird im Nenner das erste Glied immer kleiner, das zweite immer grösser, d. h. r wächst von a an constinuirlich und erreicht für

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

einen unendlich grossen Werth, während r für noch grössere Werthe von φ imaginär wird. Nennen wir diesen Winkel, der die Richtung der unendlich fernen Punkte der Hyperbel gibt, α, so ist

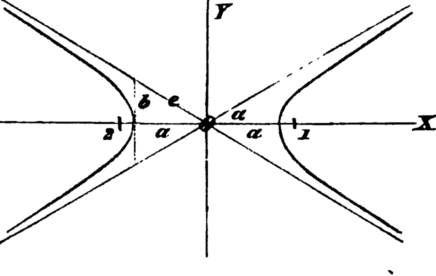
$$\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}.$$

Es gibt somit zwei symmetrisch gegen die Coordinatenaxen liegende Linien, denen sich die Curve unbegrenzt nähert, ohne sie jemals zu erreichen, zwei Linien, welche aus diesem Grunde *Asymptoten der Hyperbel* genannt werden. Ihr geometrischer Zusammenhang mit den beiden *Brennpunkten*, wie wir wieder unsere festen Ausgangspunkte nennen, ergibt sich aus der Gleichung:

$$a^2 + b^2 = e^2,$$

mit deren Hülfe wir die Asymptoten einfach construiren können (vergl. Fig. 5).

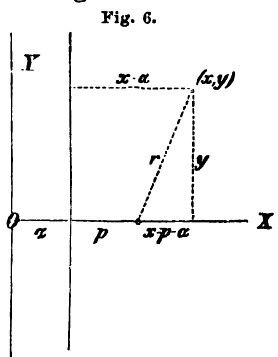
Fig. 5.



Nehmen wir $a = b$ an, so erhalten wir eine Curve, *die gleichseitige Hyperbel*, welche zu der Hyperbel in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zur Ellipse; sie ist besonders dadurch ausgezeichnet, dass ihre beiden Asymptoten zu einander rechtwinklig sind.

3. *Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, für welchen der Quotient seiner Abstände von einem gegebenen festen Punkte und einer gegebenen festen Geraden constant ist.*

Fig. 6.



Wir legen zunächst wieder das Coordinatensystem so, dass die analytischen Operationen eine möglichst einfache Gestalt gewinnen: Zur X-Axe wählen wir die von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällte Senkrechte, deren Länge p sein möge; den Anfangspunkt nehmen wir,

um gleichzeitig alle hier möglichen Fälle zu erhalten, zunächst noch beliebig, etwa im Abstande α von der Geraden, an; für den constanten Quotienten sei der Werth m gegeben. Alsdann wird die Gleichung unseres geometrischen Ortes (vergl. Fig. 6):

$$r = \sqrt{(x - p - \alpha)^2 + y^2} = m\,(x - \alpha),$$

oder, wenn wir das Wurzelzeichen fortschaffen:

$$0 = (m^2 - 1)\,x^2 - 2\,((m^2 - 1)\,\alpha - p)\,x + m^2\alpha^2 - (p + \alpha)^2 - y^2,$$

eine Gleichung, welche in ihrer Ordnung mit der obigen für Ellipse und Hyperbel übereinstimmt, auch, abgesehen von dem Gliede mit x, ihnen ganz analog gebaut ist. Dies Glied aber lässt sich, wenn nicht $m = 1$ ist, welchen Fall wir nachher behandeln werden, durch passende Wahl von α herausschaffen. In der That brauchen wir nur

$$\alpha = \frac{p}{m^2 - 1}$$

zu setzen, um die Gleichung des Ortes in der uns bekannten Form

$$\frac{x^2}{\frac{m^2}{(1 - m^2)^2}\,p^2} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{1 - m^2}\,p^2} - 1 = 0$$

zu erhalten: es ist die Gleichung der Ellipse für $m < 1$, der Hyperbel für $m > 1$. Es folgt also:

Ist ein Punkt und eine Gerade gegeben, und ein zweiter Punkt bewegt sich so, dass der Quotient seiner Abstände von jenem Punkte und jener Geraden constant bleibt, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, wenn er immer dem gegebenen Punkte, eine Hyperbel, wenn er immer der gegebenen Geraden näher bleibt.

Wir sehen hier einen gewissen Punkt und eine gewisse Gerade in enger Beziehung zu unseren beiden Curven zweiter Ordnung, und eine kleine Rechnung wird zeigen, dass der Punkt einer der uns schon bekannten Brennpunkte ist. Es sei zuerst $m < 1$ (Ellipse); dann sind die Quadrate der halben grossen und der halben kleinen Axe gegeben durch

$$a^2 = \frac{m^2}{(1 - m^2)^2}\,p^2, \quad b^2 = \frac{m^2}{1 - m^2}\,p^2,$$

und es ist also:

$$e^2 = a^2 - b^2 = \frac{m^4}{(1 - m^2)^2}\,p^2,$$

oder:

$$e = \frac{m^2 p}{1 - m^2}.$$

Ferner ist die Entfernung des gegebenen festen Punktes vom Anfangspunkte

$$= p + \alpha = \frac{m^2 p}{1 - m^2} = e,$$

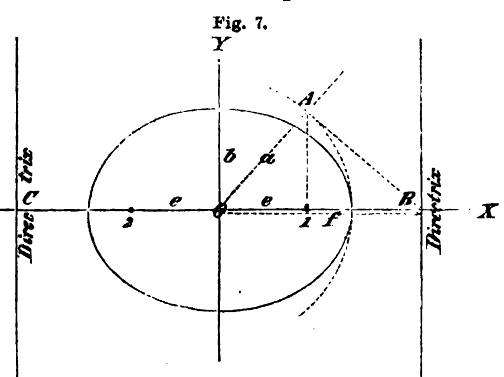
also gleich der Entfernung des Brennpunktes vom Anfangspunkte; beide Punkte sind folglich identisch. Ebenso steht natürlich eine zweite Gerade zu dem andern Brennpunkte in derselben Beziehung, wie es die Symmetrie der Curve gegen die Y-Axe erfordert; beide Linien werden als *Directricen der Ellipse* bezeichnet. Die Berechnung des Abstandes f einer solchen vom *Mittelpunkte der Ellipse* (d. h. dem Anfangspunkte bei unserer Coordinatenbestimmung) führt zu einer einfachen Construction der Directrix. Es ist nämlich

$$b^2 = ep, \text{ folglich:}$$

$$f = e + p = \frac{b^2 + e^2}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d. h. *die halbe grosse Axe ist mittlere Proportionale zwischen der Excentricität und der Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte.* Zur Construction errichtet man also (vergl. Fig. 7) in einem Brennpunkte (1) ein Loth auf der X-Axe, schneidet dies in A mit einem um O mit dem Radius a beschriebenen Kreise, und errichtet auf OA ein Loth, welches in B den Schnittpunkt der Directrix mit der X-Axe bestimmt. Die zweite Linie der Art ist parallel zu dieser in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte; beide nehmen die Curve in ihre Mitte ($CO = OB$).

Fig. 7.



Ganz ähnlich gestalten sich diese Verhältnisse bei der Hyperbel ($m > 1$), nur liegen die Directricen hier in dem *inneren* Raume so, dass sie die Curve ebenfalls nicht treffen. In der That, setzen wir, um zur Hyperbel überzugehen, in den für die Ellipse geltenden Gleichungen $-b^2$ statt b^2, so erhalten wir für den Abstand der Directrix vom Anfangspunkte:

$$f = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

die halbe grosse Axe ist also wieder mittlere Proportionale zwischen der Entfernung des Brennpunktes und der Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte, und daraus ergibt sich eine einfache Construction der letzteren, ähnlich wie bei der Ellipse.

Es bleibt uns noch übrig, den Fall $m = 1$ zu untersuchen, *wo*

also der bewegliche Punkt von dem festen Punkte und der festen Geraden gleich weit entfernt bleibt. Unsere ursprüngliche Gleichung wird dann:

$$y^2 - 2px + p(p + 2\alpha) = 0;$$

setzt man also:

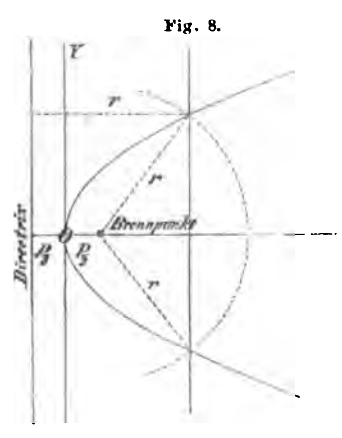
$$\alpha = -\frac{p}{2},$$

so geht sie über in:

$$y^2 = 2px,$$

ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung, *die Parabel*, deren Gleichung x nicht im Quadrate enthält. Ferner zeigt die Form der Gleichung, dass x nie negativ werden kann; die Curve liegt also ganz auf einer Seite der Y-Axe und erstreckt sich auf dieser, vom Anfangspunkte als Scheitel beginnend, in's Unendliche. Die Eigenschaft der Parabel, von welcher wir ausgingen, ergibt eine einfache Construction derselben: Man beschreibt um den festen Punkt, *den Brennpunkt der Parabel*, mit beliebigem Radius (r) einen Kreis und schneidet diesen mit einer Parallelen zur Y-Axe, welche von der festen Geraden, *der Directrix der Parabel*, um die Länge jenes Radius entfernt ist: die beiden Schnittpunkte sind dann Punkte der Curve (vergl. Fig. 8).

Fig. 8.



4. *Es soll der Flächeninhalt des durch drei gegebene Punkte bestimmten Dreiecks berechnet werden.*

Nehmen wir zunächst den Anfangspunkt der Coordinaten als in einem der Punkte gelegen an. Ziehen wir durch jeden der beiden anderen (1 und 2) eine Parallele zur X- und Y-Axe (vgl. Fig. 9), so sieht man sofort, dass der Inhalt des fraglichen Dreiecks gegeben ist durch:

Fig 9.

$$\varDelta = x_1 y_2 - \tfrac{1}{2} x_2 y_2 - \tfrac{1}{2} x_1 y_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Ertheilen wir nunmehr dem dritten Punkte die Coordinaten x_0, y_0, so haben wir in diesem Ausdrucke nur $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $y_1 - y_0$, $y_2 - y_0$ statt x_1, x_2, y_1, y_2 einzusetzen, wodurch wir erhalten:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 + x_0 y_1 + x_2 y_0 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1).$$

Der vor uns stehende Ausdruck ist wegen der Anordnung seiner Glie-

der besonders beachtenswerth, es ist eine sogenannte *Determinante*. Man versteht hierunter im Allgemeinen eine nach gewissem Gesetze aufgebaute, algebraische Combination einer quadratischen Anzahl von Elementen, deren Natur am besten an Beispielen zu erläutern sein wird. Das einfachste Beispiel liefert die *zweigliedrige Determinante aus vier Elementen:*

$$ab' - ba',$$

wofür man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

schreibt; und auf diese werden alle mehrgliedrigen Determinanten durch ein recurrirendes Verfahren zurückgeführt. Die nächst höhere Stufe würde die *aus 9 Elementen zu bildende dreigliedrige Determinante:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

ergeben. Der Uebersichtlichkeit wegen gebraucht man jedoch in einer Determinante, d. h. in einem Schema der vor uns stehenden Art, für die einzelnen Elemente besser denselben Buchstaben und unterscheidet sie durch obere und untere Indices, von denen der eine die Verticalreihe, der andere die Horizontalreihe angibt, welcher das Glied in unserem Schema angehört. Man schreibt also eine dreigliedrige Determinante in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Die Bildung des hierdurch repräsentirten algebraischen Ausdruckes lässt sich nunmehr in folgender Weise aussprechen:

Die Determinante ist gleich dem Aggregate der Glieder, welche aus dem Diagonalgliede obigen Schema's durch Permutation der oberen (oder unteren) Indices entstehen, wenn man bei jeder Vertauschung zweier Indices das Vorzeichen des betreffenden Gliedes ändert; es darf dabei natürlich kein Glied zweimal vorkommen. Wir haben hiernach:

$$\begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \quad a_{,}''' \; a_{,,}'' \; a_{,,,}' - a_{,,}' \; a_{,}'' \; a_{,,,}''' \\ - a_{,}' \; a_{,,,}'' \; a_{,,}''' - a_{,,,}' \; a_{,,}'' \; a_{,}''' \\ + a_{,,}' \; a_{,,,}'' \; a_{,}''' + a_{,,,}' \; a_{,}'' \; a_{,,}'''. \end{array}$$

Analoges gilt für n-gliedrige Determinanten, bei denen $n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ Permutationen nöthig sein werden; eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dabei immer *gleich viel positive und negative*

Glieder vorkommen müssen. Doch wollen wir hier auf die allgemeine Determinantentheorie nicht näher eingehen*), wir beschränken uns auf die Angabe einiger Sätze, welche wir im Folgenden wiederholt gebrauchen werden.

Zunächst bemerkt man, dass unsere Entwicklung der Determinante sich nicht ändert, wenn wir obere und untere Indices vertauschen, d. h. *die Determinante behält denselben Werth, wenn man Horizontal- und Verticalreihen vertauscht*:

$$R = \begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,,}' & a_{,,,}' \\ a_{,}'' & a_{,,}'' & a_{,,,}'' \\ a_{,}''' & a_{,,}''' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Ferner ist es charakteristisch für die Entwicklung der Determinante, dass *in jedem Gliede nur ein Element aus jeder Horizontal- oder Vertical-Reihe vorkommt*; wir können demnach diese Glieder nach den Elementen einer Reihe ordnen, also z. B. schreiben:

$$R = a_{,}'(a_{,,}''a_{,,,}''' - a_{,,}'''a_{,,,}'') + a_{,}''(a_{,,}'''a_{,,,}' - a_{,,}'a_{,,,}''')$$
$$+ a_{,}'''(a_{,,}'a_{,,,}'' - a_{,,}''a_{,,,}').$$

Ein Blick auf diese Entwicklung zeigt, dass der (untere) Index der Glieder der bevorzugten Reihe in ihren Factoren nicht vorkommt, dass ferner die letzteren selbst wieder zweigliedrige Determinanten sind; und analog gelingt bei mehrgliedrigen Determinanten durch Wiederholung des Verfahrens die Zurückführung auf Determinanten von weniger Gliedern, die man dann selbst wieder in ähnlicher Weise zerlegen kann. Diese niederen Determinanten werden in ihrer Stellung zu der gegebenen Determinante als *Unterdeterminanten* bezeichnet; einem jeden Elemente von R entspricht eine solche: sie ist der Factor, mit welchem dasselbe in der Entwicklung von R multiplicirt erscheint. Wir bezeichnen sie mit einem grossen Buchstaben und setzen diesem dieselben Indices bei, welche dem entsprechenden Elemente zukommen. Die so resultirenden 9 Unterdeterminanten können wir dann in dem Schema:

$$\begin{matrix} A_{,}' & A_{,}'' & A_{,}''' \\ A_{,,}' & A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}' & A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{matrix}$$

*) Die Determinantentheorie ist in neuerer Zeit, auch in elementarer Weise, so vielfach behandelt, dass es wohl überflüssig ist, sie nochmals zu wiederholen; es kann daher für die späteren Abtheilungen dieser Vorlesungen auf die bezüglichen Lehrbücher verwiesen werden. Vgl. besonders:

Hesse: Die Determinanten, elementar behandelt. Leipzig 1871.

Hattendorf: Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Hannover 1872, und das ausführlichere Werk von Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. Im Texte sind nur die in der ersten Abtheilung gebrauchten Sätze angegeben.

zusammenstellen, wo z. B.

$$A_{\prime}' = \begin{vmatrix} a_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix}, \qquad A_{\prime\prime}''' = \begin{vmatrix} a_{\prime}'' & a_{\prime}' \\ a_{\prime\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}' \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

Zufolge unserer Definition der Unterdeterminanten *können wir R aus ihnen erzeugen, indem wir eine Reihe von Elementen resp. mit den Unterdeterminanten der entsprechenden Reihe multipliciren und diese Producte addiren.* Wir erhalten so, wenn wir nach den Horizontalreihen ordnen:

$$\begin{aligned} R &= a_{\prime}' A_{\prime}' + a_{\prime}'' A_{\prime}'' + a_{\prime}''' A_{\prime}''' \\ &= a_{\prime\prime}' A_{\prime\prime}' + a_{\prime\prime}'' A_{\prime\prime}'' + a_{\prime\prime}''' A_{\prime\prime}''' \\ &= a_{\prime\prime\prime}' A_{\prime\prime\prime}' + a_{\prime\prime\prime}'' A_{\prime\prime\prime}'' + a_{\prime\prime\prime}''' A_{\prime\prime\prime}''', \end{aligned}$$

oder wenn wir nach den Verticalreihen ordnen:

$$\begin{aligned} R &= a_{\prime}' A_{\prime}' + a_{\prime\prime}' A_{\prime\prime}' + a_{\prime\prime\prime}' A_{\prime\prime\prime}' \\ &= a_{\prime}'' A_{\prime}'' + a_{\prime\prime}'' A_{\prime\prime}'' + a_{\prime\prime\prime}'' A_{\prime\prime\prime}'' \\ &= a_{\prime}''' A_{\prime}''' + a_{\prime\prime}''' A_{\prime\prime}''' + a_{\prime\prime\prime}''' A_{\prime\prime\prime}'''. \end{aligned}$$

Für dreigliedrige Determinanten lässt sich ein einfaches mechanisches Gesetz angeben, um die Bildung der Unterdeterminanten, und somit die Entwicklung der Determinante selbst zu erleichtern; man schreibe nämlich die ersten beiden Verticalreihen noch einmal rechts neben die Determinante, also:

$$\left|\begin{array}{ccccc|ccc} a_{\prime}' & & a_{\prime}'' & & a_{\prime}''' & & a_{\prime}' & & a_{\prime}'' \\ & \searrow & & \times & & >\!< & & \swarrow & \\ a_{\prime\prime}' & & a_{\prime\prime}'' & & a_{\prime\prime}''' & & a_{\prime\prime}' & & a_{\prime\prime}'' \\ & \swarrow & & \times & & >\!< & & \searrow & \\ a_{\prime\prime\prime}' & & a_{\prime\prime\prime}'' & & a_{\prime\prime\prime}''' & & a_{\prime\prime\prime}' & & a_{\prime\prime\prime}'' \end{array}\right.,$$

und verbinde die Elemente durch schräg durchlaufende Linien, wie es hier geschehen ist. Je drei auf einer solchen Linie stehende Glieder geben dann, mit einander multiplicirt, ein Glied der Determinante, und zwar ist es positiv, wenn die betreffende Linie von links oben nach rechts unten, negativ, wenn sie von rechts oben nach links unten läuft. Dies lässt uns sofort die Richtigkeit des Satzes erkennen:

Wenn zwei Horizontal- oder Vertical-Reihen mit einander vertauscht werden, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen; also ist:

$$R' = \begin{vmatrix} a_{\prime\prime}' & a_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime}''' \\ a_{\prime}' & a_{\prime}'' & a_{\prime}''' \\ a_{\prime\prime\prime}' & a_{\prime\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix} = -R.$$

Man erkennt nämlich bei Anwendung der eben angegebenen Regel zur Entwickelung von R' sofort, dass ein Glied, welches früher auf einer von links nach rechts laufenden Linie stand, nunmehr auf einer von rechts nach links laufenden steht und umgekehrt. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist der andere:

Wenn in einer Determinante zwei parallele Reihen Glied für Glied einander gleich sind, so verschwindet dieselbe; eine Vertauschung der beiden Reihen nämlich würde eine Vorzeichenänderung erfordern, ohne dass die Determinante selbst doch verändert wird. Hieraus folgt unmittelbar: *Multiplicirt man die Unterdeterminanten einer Reihe respective mit den Elementen einer zu der entsprechenden Elementenreihe parallelen Reihe, so ist die Summe der Producte stets Null.* Also z. B.:

$$0 = a_{,}'A_{,,}' + a_{,}''A_{,,}'' + a_{,}'''A_{,,}''', \text{ oder:}$$
$$0 = a_{,}'A_{,}'' + a_{,,}'A_{,,}' + a_{,,,}'A_{,,,}''.$$

Und als eine Folge dieses Satzes erscheint der folgende, welcher zur Berechnung einer Determinante oft von Wichtigkeit wird: *Der Werth einer Determinante wird nicht geändert, wenn man die Elemente einer Reihe um ein Vielfaches der Elemente einer parallelen Reihe vermehrt oder vermindert*, d. h. es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{,}' + m a_{,}''' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' + m a_{,,}''' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' + m a_{,,,}''' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Denn entwickelt man nach den Gliedern der ersten Verticalreihe und ihren Unterdeterminanten, so liefern die mit m multiplicirten Glieder einen verschwindenden Beitrag.

Eine der wichtigsten Anwendungen für die Determinantentheorie bietet die *Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen*, welche durch sie in einfacher Weise ermöglicht wird. Wir beschränken uns auch hier auf die Behandlung von *drei* linearen Gleichungen mit *drei* Unbekannten: x_1, x_2, x_3. Diese Gleichungen seien in der Form gegeben:

$$\begin{aligned} a_{,}' x_1 + a_{,,}' x_2 + a_{,,,}' x_3 &= y' \\ a_{,}'' x_1 + a_{,,}'' x_2 + a_{,,,}'' x_3 &= y'' \\ a_{,}''' x_1 + a_{,,}''' x_2 + a_{,,,}''' x_3 &= y''', \end{aligned}$$

und wir setzen:

$$R = \begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,,}' & a_{,,,}' \\ a_{,}'' & a_{,,}'' & a_{,,,}'' \\ a_{,}''' & a_{,,}''' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Die Lösung obiger Gleichungen erhalten wir dann unmittelbar in folgender Weise: wir multipliciren dieselben bezüglich mit den Unterdeterminanten $A_{,}'$, $A_{,}''$, $A_{,}'''$ und addiren; alsdann fallen nach einem früheren Satze alle anderen Glieder fort, und es bleibt nur:

$$R x_1 = A_{,}'y' + A_{,}''y'' + A_{,}'''y'''.$$

Ebenso erhält man durch Multiplication mit $A_{,,}'$, $A_{,,}''$, $A_{,,}'''$ und $A_{,,,}'$, $A_{,,,}''$, $A_{,,,}'''$ respective:

$$Rx_2 = A_{,,}' y' + A_{,,}'' y'' + A_{,,}''' y'''$$
$$Rx_3 = A_{,,,}' y' + A_{,,,}'' y'' + A_{,,,}''' y''',$$

und damit ist unsere Aufgabe gelöst. Die Bildung der rechts stehenden Ausdrücke geschieht demnach dadurch, dass man in R die Elemente der ersten, zweiten, dritten Verticalreihe durch y', y'', y''' ersetzt.

Ist insbesondere $y' = 0$ und $y'' = 0$ gegeben, so haben wir:

$$x_1 = \frac{y'''}{R} A_{,}'''$$
$$x_2 = \frac{y'''}{R} A_{,,}'''$$
$$x_3 = \frac{y'''}{R} A_{,,,}''',$$

und daraus ergibt sich:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{,}''' : A_{,,}''' : A_{,,,}''',$$

eine Gleichung, welche unabhängig von dem Werthe von y''' besteht. Sind uns demnach nur zwei homogene lineare Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben:

$$a_{,}' x_1 + a_{,,}' x_2 + a_{,,,}' x_3 = 0$$
$$a_{,}'' x_1 + a_{,,}'' x_2 + a_{,,,}''' x_3 = 0,$$

so können wir diese selbst zwar nicht daraus bestimmen, wohl aber ihre Verhältnisse; *dieselben sind nach wie vor gleich den betr. Unterdeterminanten*, wie man auch finden würde, wenn man die gegebenen Gleichungen als zwei nicht homogene mit den Unbekannten $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ ansehen wollte. Die Unterdeterminanten mit 3 oberen Indices hängen ja auch nur von den in den beiden ersten Gleichungen vorkommenden Constanten ab.

Verschwindet endlich auch y''', so haben wir nach der Division mit x_3 drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die im Allgemeinen nicht gleichzeitig zu befriedigen sein werden; sondern es muss, damit sie zusammen bestehen können, den Coëfficienten eine Bedingung auferlegt werden: es muss eine gewisse Function derselben, *ihre Resultante*, verschwinden, eine Gleichung, welche man aus den 3 Gleichungen durch Elimination der Unbekannten erhält. Ist nämlich gegeben:

$$a_{,}' x_1 + a_{,,}' x_2 + a_{,,,}' x_3 = 0$$
$$a_{,}'' x_1 + a_{,,}'' x_2 + a_{,,,}'' x_3 = 0$$
$$a_{,}''' x_1 + a_{,,}''' x_2 + a_{,,,}''' x_3 = 0,$$

so finden wir durch unsere allgemeine Lösung für lineare Gleichungen:

$$Rx_1 = 0, \quad Rx_2 = 0, \quad Rx_3 = 0.$$

Es muss also entweder

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

sein, eine Lösung, durch die alle homogenen Gleichungen unserer Art selbstverständlich erfüllt sind, oder es muss die Gleichung

$$R = 0$$

bestehen; und diese ist das Resultat der Elimination der Unbekannten aus den gegebenen Gleichungen. Ganz Analoges gilt für n Variable und n-gliedrige Determinanten; wir haben:

Wenn n homogene lineare Gleichungen zusammen bestehen sollen, so muss die Determinante ihrer Coëfficienten verschwinden.

Aus der allgemeinen Lösung, welche wir für die 3 nicht homogenen Gleichungen fanden, indem wir die x durch die y ausdrückten, müssen wir natürlich rückwärts die y wieder aus den x berechnen können, und zwar durch ein ganz analoges Verfahren. Statt der Determinante R werden wir dabei die aus den Unterdeterminanten A zu bildende Determinante nöthig haben, nämlich:

$$S = \begin{vmatrix} A_{,}' & A_{,}'' & A_{,}''' \\ A_{,,}' & A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}' & A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{vmatrix},$$

die Determinante des adjungirten Systems; denn mit diesem Ausdrucke bezeichnet man das System der Unterdeterminanten A gegenüber dem der ursprünglichen Elemente a. Bezeichnen wir ferner die Unterdeterminanten von S durch obere und untere Indices, setzen also z. B.

$$S_{,}' = \begin{vmatrix} A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{vmatrix},$$

so erhalten wir als Auflösung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Sy' &= R\,(S_{,}'\,x_1 + S_{,,}'\,x_2 + S_{,,,}'\,x_3) \\ Sy'' &= R\,(S_{,}''\,x_1 + S_{,,}''\,x_2 + S_{,,,}''\,x_3) \\ Sy''' &= R\,(S_{,}'''x_1 + S_{,,}'''x_2 + S_{,,,}'''x_3)\,. \end{aligned}$$

Da diese wieder mit den ursprünglich gegebenen identisch sein müssen, so folgt:

$$a_{,}' = \frac{R}{S}\,S_{,}', \quad a_{,,}' = \frac{R}{S}\,S_{,,}', \quad a_{,,,}' = \frac{R}{S}\,S_{,,,}', \text{ u. s. f.}$$

Nun ist aber nach dem sogleich zu erwähnenden Multiplicationssatze der Determinanten:

$$S = R^2,$$

und somit erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned} S_{,}' &= Ra_{,}'\,, & S_{,,}' &= Ra_{,,}'\,, & S_{,,,}' &= Ra_{,,,}' \\ S_{,}'' &= Ra_{,}''\,, & S_{,,}'' &= Ra_{,,}''\,, & S_{,,,}'' &= Ra_{,,,}'' \\ S_{,}''' &= Ra_{,}'''\,, & S_{,,}''' &= Ra_{,,}'''\,, & S_{,,,}''' &= Ra_{,,,}'''\,. \end{aligned}$$

Das soeben benutzte *Multiplicationstheorem* besteht aber in Folgendem: Sind zwei Determinanten mit den Elementen a und b gegeben, so ist ihr Product:

$$\begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,,}' & a_{,,,}' \\ a_{,}'' & a_{,,}'' & a_{,,,}'' \\ a_{,}''' & a_{,,}''' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{,}' & b_{,,}' & b_{,,,}' \\ b_{,}'' & b_{,,}'' & b_{,,,}'' \\ b_{,}''' & b_{,,}''' & b_{,,,}''' \end{vmatrix}$$

selbst eine Determinante, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_{,}'b_{,}'+a_{,}''b_{,}''+a_{,}'''b_{,}''', & a_{,}'b_{,,}'+a_{,}''b_{,,}''+a_{,}'''b_{,,}''', & a_{,}'b_{,,,}'+a_{,}''b_{,,,}''+a_{,}'''b_{,,,}''' \\ a_{,,}'b_{,}'+a_{,,}''b_{,}''+a_{,,}'''b_{,}''', & a_{,,}'b_{,,}'+a_{,,}''b_{,,}''+a_{,,}'''b_{,,}''', & a_{,,}'b_{,,,}'+a_{,,}''b_{,,,}''+a_{,,}'''b_{,,,}''' \\ a_{,,,}'b_{,}'+a_{,,,}''b_{,}''+a_{,,,}'''b_{,}''', & a_{,,,}'b_{,,}'+a_{,,,}''b_{,,}''+a_{,,,}'''b_{,,}''', & a_{,,,}'b_{,,,}'+a_{,,,}''b_{,,,}''+a_{,,,}'''b_{,,,}''' \end{vmatrix},$$

wobei die Elemente der resultirenden Determinante gebildet werden aus den Summen der Producte der Elemente irgend einer Reihe der einen Determinante in die entsprechenden Elemente irgend einer Reihe der andern. Ber Beweis dafür ergibt sich durch Zerlegung der grossen Determinante in eine Summe von lauter einzelnen, einfacher gebildeten, und zwar in folgender Weise. Entwickeln wir zunächst nach den Elementen einer Verticalreihe, so erhalten wir ersichtlich, da jedes der drei Elemente aus einer Summe von drei Grössen besteht, eine Summe von 9 Gliedern, die wir auch als Summe von drei Determinanten schreiben können, der Art, dass in ihnen jedesmal die erste Verticalreihe aus drei in der ersten Verticalreihe der grossen Determinante unter einander stehenden Elementen besteht, während die beiden andern Verticalreihen ungeändert bleiben. Lösen wir weiter auch diese nach einander in Summen neuer Determinanten auf, so erhalten wir schliesslich ein Aggregat von 27 einzelnen dreigliedrigen Determinanten: Wir können uns dieselben entstanden denken, indem wir jede der 9 Verticalreihen der grossen Determinante mit je zwei anderen dieser Reihen, welche überhaupt mit ihr multiplicirt vorkommen können, zu einer Determinante vereinigen. Man überzeugt sich nun leicht, dass alle diese Partialdeterminanten bis auf sechs verschwinden, indem in den übrigen je zwei identische Elementenreihen vorkommen. Diese sechs Determinanten entstehen, inden man aus den drei Verticalreihen der grossen Determinante je eine erste, eine zweite und eine dritte (nur noch einfache Producte ab enthaltende) Verticalreihe zu einer Determinante vereinigt. Eine solche ist z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_{,}'b_{,}' & a_{,}''b_{,,}'' & a_{,}'''b_{,,,}''' \\ a_{,,}'b_{,}' & a_{,,}''b_{,,}'' & a_{,,}'''b_{,,,}''' \\ a_{,,,}'b_{,}' & a_{,,,}''b_{,,}'' & a_{,,,}'''b_{,,,}''' \end{vmatrix} = b_{,}'b_{,,}''b_{,,,}''' \begin{vmatrix} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Ebenso wie in diesem Gliede erkennt man in den übrigen fünf sofort die eine ursprünglich gegebene Determinante der a als Factor; dass

das Aggregat der anderen Factoren dann nichts anderes, als die Determinante der b in entwickelter Gestalt ist, sieht man am einfachsten, wenn man insbesondere setzt:

$$\begin{matrix} a_{,}' = 1 & a_{,}'' = 0 & a_{,}''' = 0 \\ a_{,,}' = 0 & a_{,,}'' = 1 & a_{,,}''' = 0 \\ a_{,,,}' = 0 & a_{,,,}'' = 0 & a_{,,,}''' = 1 . \end{matrix}$$

Dadurch wird die Determinante der a gleich der Einheit und obige grosse Determinante geht direct in die der b über, womit unser Multiplicationssatz bewiesen ist. —

Setzen wir nun, um das Theorem zum Beweise der obigen Behauptung zu verwerthen, für die Elemente b die Unterdeterminanten A von R, so erhalten wir:

$$R \cdot S = \begin{vmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = R^3 ;$$

denn alle anderen Glieder der resultirenden Determinante verschwinden nach einem früheren Satze, und somit folgt in der That:

$$S = R^2 .$$

II. Die Curve erster Ordnung: die gerade Linie.

Wir kehren nunmehr zu dem Ausdrucke zurück, welchen wir für den Flächeninhalt eines durch 3 Ecken gegebenen Dreiecks gefunden hatten, und erkennen, dass er sich in der That in Form einer Determinante schreiben lässt. Es ist nämlich:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_0 y_1 + x_2 y_0 + x_1 y_2 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1) .$$

Die Bedingung nun, dass der Inhalt des Dreiecks verschwinde, ist offenbar identisch mit der anderen, dass die drei gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen. Lassen wir daher den Punkt x_0, y_0 unbestimmt, so wird uns *das Verschwinden der Determinante die Gleichung der durch die Punkte 1 und 2 bestimmten Geraden geben,* nämlich:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

sie ist wieder vom ersten Grade, wie die oben in anderer Weise gewonnene Form. Dass die Linie durch die gegebenen Punkte geht, erhellt sofort aus einem der obigen Determinantensätze, wenn man die Coordinaten derselben für x und y einsetzt.

Statt durch zwei beliebige Punkte können wir die Gerade auch durch die Strecken a, b bestimmen, welche sie auf den Coordinatenaxen vom Anfangspunkte aus abschneidet; wir haben zu dem Zwecke die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit diesen Axen $a, 0$ und $0, b$ in (1) einzusetzen, wodurch wir erhalten:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = ab - bx - ay,$$

oder:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{2}$$

eine Gleichung, welche für die Theorie der Geraden und insbesondere für unsere späteren allgemeineren Erörterungen von hoher Bedeutung ist. Indem wir nämlich die Gleichung einer jeden Geraden auf diese Form bringen können, sind uns bei jeder auch sofort ihre Abschnitte auf den Axen gegeben. Die Gleichung (1) z. B. in dieser Weise umgeformt, ergibt:

$$\frac{x}{\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}} + \frac{y}{\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}} - 1 = 0.$$

Eine durch die Punkte 1 und 2 gegebene Gerade schneidet also auf den Coordinatenaxen Stücke ab, bestimmt durch:

$$a = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}, \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

Besonders ausgezeichnet sind durch diese Darstellung die Fälle, wo die Linie durch den Anfangspunkt geht oder parallel zu einer der Coordinatenaxen verläuft. Im letzteren Falle haben wir a, respective b unendlich gross anzunehmen, je nachdem die Gerade der X- oder der Y-Axe parallel ist, und erhalten dann für sie, wie schon oben bemerkt, bezüglich die Gleichungen:

$$y = b,$$
$$x = a.$$

Geht endlich die Gerade durch den Anfangspunkt, so können wir sie nur durch ihre Richtung, d. h. durch eine ihr parallele Linie bestimmen. Eine solche, zu einer Geraden, welche in der Form (2) gegeben ist, gezogen, schneidet auf den Axen wegen der Aehnlichkeit der auftretenden Dreiecke Stücke von der Grösse ma, mb ab, und wir erhalten also alle Parallellinien zu (2), wenn wir in der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - m = 0$$

die Grösse m als Parameter auffassen, d. h. ihr successive alle möglichen Werthe beilegen: eine Darstellung eines Systems von Geraden, wie wir sie in der Folge öfter anwenden werden. Ist $m = 0$, so erhalten wir hieraus die durch den Anfangspunkt gehende Gerade, welche nunmehr durch die Richtung des Parallelensystems völlig bestimmt ist.

Zur Feststellung dieser Richtung können wir uns natürlich auch, wie früher schon einmal, statt der Abschnitte a, b des von der Linie mit der X-Axe gebildeten Winkels bedienen, den wir mit α bezeichnen wollen. Es kommt dies darauf hieraus, dass wir die Coordinaten eines zweiten, der Geraden angehörigen Punktes angeben, nämlich des unendlich fernen Punktes, in welchem sich alle Parallellinien der betr. Richtung schneiden. Diese Coordinaten sind aber $r \cos \alpha$ und $r \sin \alpha$ für $r = \infty$, wenn r den Abstand des Punktes vom Anfangspunkte bedeutet; also nur ihr Verhältniss hat einen endlichen Werth. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1) für x_2, y_2 ein, dividiren durch r und nehmen dann r unendlich gross, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

oder entwickelt:

$$(x - x_1) \sin \alpha - (y - y_1) \cos \alpha = 0: \tag{4}$$

unsere erste Form für die Gleichung einer Geraden, die wir in die beiden anderen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r \cos \alpha \\ y &= y_1 + r \sin \alpha \end{aligned} \tag{5}$$

zerlegt hatten, wo r ein Parameter ist (p. 5).

Die Gleichungen (1) bis (5) geben uns die verschiedenen Formen, in denen die Gleichung einer Geraden je nach der Wahl ihrer Bestimmungsstücke aufzutreten pflegt. Ihnen allen gemeinsam ist die Dimension, in welcher die Variabeln vorkommen; alle sind von der ersten Ordnung, und es drängt sich daher die Frage auf, ob auch jede Gleichung erster Ordnung uns eine Gerade darstellt. Wir werden sehen, dass dies in der That der Fall ist. Hat man nämlich die allgemeinste Form einer linearen Gleichung:

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

so kann man dieselbe auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} - 1 = 0,$$

und dies ist nach (2) die Gleichung einer Geraden, welche auf den Coordinatenaxen bezüglich die Stücke $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ abschneidet; also:

Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y stellt eine gerade Linie dar.

Soll die durch unsere *allgemeine Form* (6) dargestellte Gerade insbesondere durch den Anfangspunkt gehen, so haben wir

$$C = 0$$

zu setzen; soll sie zur X- oder Y-Achse parallel sein, so müssen wir A, respective B verschwinden lassen. —

Während wir bisher zwei Punkte zur Bestimmung einer Geraden benutzten, sei es, dass dieselben beliebig waren, oder besondere Lagen hatten (z. B. auf den Axen, oder im Unendlichen), können wir eine gerade Linie auch durch zwei andere Stücke charakterisiren. Auf eine besonders wichtige Gleichungsform werden wir noch geführt, wenn wir dazu *den Abstand p der Geraden vom Anfangspunkte und die Richtung ihrer Normalen*, d. h. deren Winkel α gegen die X-Axe wählen. Die Abschnitte auf den Axen sind dann, wie man leicht aus einer Figur ersieht:

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{p}{\sin\alpha},$$

und somit ist nach (2) die Gleichung der Geraden:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{7}$$

die sogenannte Hesse'*sche Normalform**), deren weitere Bedeutung wir sogleich an einem Beispiele erkennen werden.

Die Vergleichung dieser Form mit der allgemeinen Form (6) legt die Frage nach Zurückführung der einen auf die andere nahe. Die Gleichung (7) ist aber besonders dadurch charakterisirt, dass die Quadratsumme der beiden ersten Coëfficienten gleich der Einheit ist; wir werden daher (6) mit einem solchen Factor multipliciren, dass dies auch hier der Fall ist, d. h. mit $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, wo das Vorzeichen der Wurzel so zu wählen ist, dass das letzte Glied (wie in (7)) negativ wird. Hieraus ergeben sich für die verlangte Umformung die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{8}$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{9}$$

*) Vgl. hier, wie für diesen ganzen Abschnitt: Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Leipzig 1865.

Je nach der Natur eines gestellten Problems werden wir nun eine der jetzt entwickelten Gleichungsformen der geraden Linie benutzen, um die Lösung möglichst einfach zu erhalten; einige *Aufgaben* werden uns dies erkennen lassen:

1. *Es soll der Abstand eines Punktes* (x_0, y_0) *von einer Geraden gefunden werden*; die letztere sei in der Normalform (7) gegeben. Ist dann P die gesuchte Entfernung, so ist ist die Gleichung einer durch den gegebenen Punkt gehenden Parallelen zu der Geraden:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p - P = 0 ,$$

wenn wir voraussetzen, dass der Punkt auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Linie liegt. Da die Gerade aber durch ihn gehen soll, so folgt:

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p - P = 0 ,$$

also:

$$P = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p .$$

Das Resultat können wir folgendermassen aussprechen:

Wenn man in die Normalform der Gleichung einer Geraden die Coordinaten eines beliebigen Punktes einsetzt, so gibt die linke Seite den Abstand des Punktes von der Geraden an, und zwar unmittelbar, wenn der Punkt auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Geraden liegt; sonst ist das Vorzeichen zu ändern. Letzteres wird nur unbestimmt, wenn die Linie durch den Anfangspunkt geht, (d. h. $p = 0$), weil dann die Richtung der Normale zweideutig wird.

Ist die Gleichung der Geraden in der allgemeinen Form gegeben, so hat man, um den Abstand zu finden, wieder durch die Wurzel aus der Quadratsumme der ersten Coëfficienten zu dividiren und die Coordinaten des Punktes einzusetzen; man erhält also:

$$P = \frac{A x_0 + B y_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} .$$

2. *Es sollen die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden bestimmt werden.* Die Gleichungen derselben seien:

$$A x + B y + C = 0$$
$$A' x + B' y + C = 0 ,$$

aus ihnen haben wir x und y zu berechnen. Um dem Resultate eine symmetrische Form zu geben, werden wir die Gleichungen homogen schreiben; wir fügen daher dem dritten Coëfficienten noch einen Factor, den wir gleich der Einheit setzen, hinzu:

$$A x + B y + C \cdot 1 = 0$$
$$A' x + B' y + C' \cdot 1 = 0 ,$$

und berechnen nunmehr hieraus die Verhältnisse von $x, y, 1$. Es wird dann:

$$x : y : 1 = BC' - CB' : CA' - AC' : AB' - BA',$$

also:

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Verschwindet der Nenner, so können nicht beide Zähler verschwinden, denn sonst wären die gegebenen Gleichungen identisch; daher liegt dann der Schnittpunkt im Unendlichen: die Linien sind parallel. *Die Bedingung des Parallelismus* ist also:

$$AB' - BA' = 0.$$

3. *Es soll die Gleichung einer durch zwei gegebene Punkte gehenden Geraden gefunden werden.* Wir können dieselbe nach der ersten Form (1) unserer Gleichungen sofort hinschreiben; sie mag aber noch einmal in anderer Weise abgeleitet werden, um ein Beispiel zu geben, wie das Homogenmachen der Gleichungen durch Hinzufügen eines gleich der Einheit gesetzten Factors den Eliminationsprocess erleichtert. Die Gleichung der Geraden ist die Bedingung, dass ein beweglicher Punkt (x, y) mit den beiden festen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf derselben Geraden liege. Es müssen also zugleich die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} Ax + By + C \cdot 1 &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + C \cdot 1 &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

daher erhalten wir durch Elimination von A, B, C wieder:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir können diese Gleichung nun umgekehrt benutzen, um den Inhalt des von drei Punkten gebildeten Dreiecks zu finden, wovon wir ursprünglich ausgingen: wir fällen von dem einem Eckpunkte (x_0, y_0) auf die Verbindungslinie der beiden andern, deren Länge r sei, ein Loth h, so ist der gesuchte Inhalt:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} r h,$$

wo

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Das Loth h aber bestimmt sich nach Früherem, indem wir unsere Gleichung der Geraden auf die Normalform bringen und die Coordinaten x_0, y_0 einsetzen; es ist also:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}},$$

und daher, wie oben:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. *Es soll der von zwei geraden Linien eingeschlossene Winkel v bestimmt werden.* Sind beide Gerade in der Normalform gegeben:

$$\begin{aligned} x\cos\beta + y\sin\beta - p &= 0 \\ x\cos\beta' + y\sin\beta' - p' &= 0 \end{aligned}$$

so sind β, β' die Winkel ihrer Normalen mit der X-Axe; diese schliessen aber denselben Winkel ein, wie die gegebenen Linien, und es ist daher:

$$v = \beta' - \beta.$$

Wie sich dieser Winkel aus den Coëfficienten der allgemeinen Form berechnet, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (8); es wird nämlich:

$$\sin v = \sin(\beta' - \beta) = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\cos v = \cos(\beta' - \beta) = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Für den *Parallelismus* beider Linien ($\sin v = 0$) folgt also wieder

$$AB' - BA' = 0,$$

während sie *zu einander senkrecht* sind ($\cos v = 0$), wenn:

$$AA' + BB' = 0.$$

5. Diese Bemerkungen erlauben uns, *die Gleichung einer Geraden anzugeben, welche durch einen Punkt* (x_0, y_0) *parallel oder senkrecht zu einer gegebenen gezogen werden kann.* Diese letztere sei:

$$Ax + By + C = 0,$$

dann müssen im ersten Falle die Gleichungen zusammen bestehen:

$$\begin{aligned} A'x + B'y + C' &= 0 \\ A'x_0 + B'y_0 + C' &= 0 \\ A'B - B'A &= 0, \end{aligned}$$

also durch Elimination von A', B', C' wird die Gleichung der gesuchten Parallelen:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ B & -A & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Um die Normale zu finden, haben wir in der dritten Bedingungsgleichung nur B mit A und A mit $-B$ zu vertauschen, wodurch wir erhalten:

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

III. Liniencoordinaten. Punktreihen und Strahlbüschel.

Bei unsern bisherigen Betrachtungen war ein Punkt stets durch zwei von einander unabhängige Stücke (seine Coordinaten) bestimmt; ebenso aber auch die Gerade, sei es, dass wir sie durch ihre Abschnitte auf den Coordinatenaxen oder durch ihre Entfernung vom Anfangspunkte und die Richtung ihrer Normalen gegeben annahmen.

Ist für den Punkt nur eine Bedingung gegeben, so kann derselbe noch unendlich viele Lagen annehmen: er beschreibt bei seiner Bewegung eine Curve, und auf diesen Ortsbegriff gründeten sich unsere obigen Untersuchungen. Ebenso bei der Geraden: wenn zwischen ihren Bestimmungsstücken eine Gleichung gegeben ist, so gibt es noch unendlich viele Geraden, die derselben genügen; als geometrischen Ort derselben fassen wir die Curve auf, welche von der Geraden in allen ihren Lagen berührt wird. Wir können somit jede Curve in verschiedener Weise entstanden denken, einerseits als *beschrieben* durch unendlich viele Lagen eines Punktes, anderseits als *umhüllt* (vgl. z. B. unten Fig. 13, $_b$) durch unendlich viele Lagen einer Geraden. Je zwei unendlich benachbarte Geraden dieses Systems *(Tangenten der Curve)* schneiden sich dann auf der Curve, so dass bei letzterer Anschauung die Curve als Punktgebilde entsteht durch die Aufeinanderfolge der Schnittpunkte benachbarter Tangenten. Umgekehrt ist die Tangente einer Curve in Punktcoordinaten definirt als die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Curve. Um dieser doppelten Erzeugungsweise ebener geometrischer Gebilde auch einen analytischen Ausdruck zu geben, *um eine Curve als Enveloppe ihrer Tangenten durch eine Gleichung darzustellen*, müssen wir die beiden Bestimmungsstücke einer Geraden ebenso als veränderlich betrachten, wie bisher die Coordinaten eines Punktes; wir sprechen daher ebensowohl von den Coordinaten einer geraden Linie, als von denen eines Punktes: eine Gleichung zwischen den letzteren stellt eine Curve als Ort ihrer Punkte, eine solche zwischen den ersteren als Enveloppe ihrer Tangenten dar. Welche Bestimmungsstücke der Geraden man dabei benutzen will, ist zunächst gleichgültig, aber unsere weiteren Betrachtungen werden die folgende Wahl als die zweckmässigste erscheinen lassen:

Wir verstehen unter den Coordinaten u, v einer Geraden die nega-

tiven reciproken Werthe ihrer Abschnitte auf den Coordinatenaxen; es ist also nach unserer obigen Bezeichnung:

$$u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}.$$

Die Einführung gerade dieser Bestimmungsstücke der Geraden hängt mit einem der wichtigsten Principien der analytischen Geometrie zusammen, *dem Principe der Dualität**), zu welchem jene doppelte Auffassung der Curven hinführt. Zuvörderst: es gibt doppelt unendlich viele**) Punkte und doppelt unendlich viele Gerade in der Ebene; sieht man dann einmal die Punkte, einmal die Geraden derselben als die Grundelemente an, aus denen man die zu betrachtenden Gebilde erzeugt, so zeigt sich auch im Einzelnen eine gewisse Gleichartigkeit beider Anschauungen. Zwischen beiden Entwicklungen der Geometrie, der nach der Geraden und der nach dem Punkte, besteht aber neben der Analogie auch bis ins Einzelne eine vollständige Wechselbeziehung. Dieselbe findet ihren Ausdruck in Folgendem: gehen wir vom Punkte aus, so entsteht die Gerade durch Verbindung zweier Punkte; gehen wir von der Geraden aus, so entsteht der Punkt durch den Schnitt zweier Geraden. Der einfachste geometrische Ort für den Punkt ist die Gerade, beschrieben von dem sie durchlaufenden Punkte, für die Gerade der Punkt, den sie bei einer Drehung um ihn umhüllt. Durch Bewegung eines Punktes jedoch können wir keinen Punkt, durch Bewegung einer Geraden keine Gerade erzeugen. *Alle diese Relationen fassen wir in dem Principe der Dualität zusammen; dasselbe sagt uns, dass gewisse Sätze, welche für Punktgebilde gelten, sich auf Liniengebilde übertragen lassen; diese Uebertragung gibt die Verbindung zweier Punkte und den Schnitt zweier Geraden, sowie für alle Constructionen, die sich aus solchen Operationen zusammensetzen lassen,* sie gilt nicht mehr, wenn andere Hülfsmittel verwandt werden, also z. B. nicht, sobald eine Massbestimmung in die Aufgabe eintritt. Aber deshalb ist das Princip keineswegs als ein beschränktes aufzufassen;

*) Auf dieses Princip wurden zuerst Poncelet (Traité des propriétés projectives des figures; 1822) und Gergonne (Sur la théorie des surfaces réciproques; Annales de mathématiques, VIII, 1817—18, Crelle's Journal Bd. IV.), ausgehend von der unten zu besprechenden Polarentheorie bei Kegelschnitten, geführt. Unabhängig von der Kegelschnitttheorie wurde dasselbe aufgestellt von Gergonne und Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827); die *Coordinaten* der Geraden benutzte zuerst Plücker (Crelle's Journal Bd. 5, 1829 und Analytisch-geometrische Entwicklungen 2. Bd., 1831). In Frankreich wurde dasselbe beinahe gleichzeitig von Chasles entwickelt: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837.

**) Mit einer solchen Ausdrucksweise ist gemeint, dass der Punkt und die Gerade von je zwei Bestimmungsstücken abhängen, deren jedes unabhängig vom andern alle möglichen Werthe durchlaufen kann.

wir werden vielmehr Mittel kennen lernen, auch solche metrische Relationen auf jene einfachsten zurückzuführen. —

Führen wir nunmehr die Coordinaten der Geraden in ihre Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{1}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung können wir jetzt besser so ausdrücken, dass sie die *vereinigte Lage des Punktes x, y mit der Geraden u, v* anzeigt, d. h. die Lage, bei welcher der Punkt auf der Geraden liegt, die Gerade durch den Punkt geht, wobei wir dann nach Belieben die Coordinaten des Punktes oder die der Geraden als veränderlich denken. Im ersteren Falle haben wir in (1) die *Gleichung einer Geraden*, im andern die *Gleichung eines Punktes* vor uns, d. h. die Bedingung, welcher die Coordinaten einer Geraden genügen müssen, damit dieselbe durch einen gegebenen Punkt (x, y) geht. Die Gleichung ändert ihre Form nicht, wenn man u, v mit x, y vertauscht; durch passende Wahl der Coordinaten einer Geraden hat man also erreicht, *dass in der Gleichung, welche die vereinigte Lage des Grundelementes der einen und des Grundelementes der andern Anschauung angibt, diese Grundelemente symmetrisch auftreten.**) Der Punkt nimmt somit in der Geometrie der Geraden dieselbe Stelle ein, wie die Gerade in der Geometrie des Punktes:

Eine lineare Gleichung in Punktcoordinaten x, y stellt eine gerade Linie dar.	*Eine lineare Gleichung in Liniencoordinaten u, v stellt einen Punkt dar.*

In der Gleichung (1) waren jedesmal die constanten Coëfficienten zugleich die Coordinaten des durch sie dargestellten Gebildes; legen wir dagegen eine allgemeine lineare Gleichung zu Grunde:

Gleichung der Geraden	Gleichung des Punktes
$Ax + By + C = 0$,	$Au + Bv + C = 0$,

so sind die

	Coordinaten der Geraden:	Coordinaten des Punktes:
(2)	$u = \frac{A}{C}$, $v = \frac{B}{C}$,	$x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$,

eine Reciprocität, welche nicht stattfinden würde, wenn wir direct die Abschnitte auf den Axen als Coordinaten der Geraden genommen hätten.

Versuchen wir nunmehr die in der Theorie der geraden Linie

---

*) Dadurch ist es noch nicht begründet, dass wir die *negativen* reciproken Abschnitte als Coordinaten wählten; dies wird erst im folgenden Abschnitte seine Erklärung finden.

gefundenen Sätze dualistisch auf die des Punktes zu übertragen, so gelingt dies nur mit einer der dort gelösten Aufgaben.

Es seien nämlich gegeben:

zwei Punkte	zwei Gerade
(x_0, y_0), (x_1, y_1),	(u_0, v_0), (u_1, v_1),

dann ist *die Gleichung*

ihrer Verbindungslinie:	*ihres Schnittpunktes:*
$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

(3)

Das analytische Resultat und die dazu führenden Operationen sind also in beiden Fällen dieselben, nur die Bedeutung der Variabeln ist eine andere. Die übrigen Formen der Gleichung der Geraden können wir hier nicht unmittelbar umformen, da dieselben von Winkel- und Streckengrössen abhängen. Wir wollen indess die sich daran schliessenden Aufgaben mit Hülfe der Gleichungen (2) in ihrer Abhängigkeit von den Coordinaten der betreffenden Linien darstellen, um so Beispiele für den Gebrauch von Liniencoordinaten zu haben. Es wird nämlich *der Abstand eines Punktes von einer Geraden:*

$$r = \frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{4}$$

der *von zwei Geraden eingeschlossene Winkel:*

$$= \text{arc cos} \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

die *Bedingung des Parallelismus:*

$$u_1 v_0 - v_1 u_0 = 0$$

und die *Bedingung des Senkrechtstehens:*

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Der Ausdruck für r gibt uns ein einfaches Beispiel zur Darstellung einer Curve als Enveloppe ihrer Tangenten, wenn wir u und v als variabel betrachten, x, y und r dagegen als constant; dann stellt nämlich (4) die Bedingung dar, dass eine Linie (u, v) von einem festen Punkte (x, y) die constante Entfernung r habe. Die Gesammtheit dieser Geraden umhüllt aber bekanntlich einen Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkte (x, y); legen wir letzterem, wie schon früher, die Coordinaten a, b bei, so wird also *die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten, d. h. die Bedingung, welcher alle seine Tangenten genügen müssen:*

$$(ua + vb + 1)^2 = r^2 (u^2 + v^2),$$

während die Gleichung desselben Kreises in Punktcoordinaten ist:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Beide sind vom zweiten Grade, die letztere trägt aber einen wesentlich anderen Charakter, als die Gleichung in Liniencoordinaten, was wieder in den metrischen Eigenschaften des Kreises seinen Grund hat. In ähnlicher Weise gibt es für jede Curve zwei Darstellungsweisen: *ihre Gleichung in Punktcoordinaten:*

$$f(x, y) = 0,$$

und *ihre Gleichung in Liniencoordinaten:*

$$\varphi(u, v) = 0;$$

und zwar sind beide Gleichungen im Allgemeinen verschieden, sowohl, wie beim Kreise, hinsichtlich ihrer Form, als auch hinsichtlich des Grades in Bezug auf die Variabeln. Daraus ergibt sich eine zwiefache Eintheilung der algebraischen Curven, einmal nach dem Grade ihrer Gleichung in Punktcoordinaten, das andere Mal nach dem ihrer Gleichung in Liniencoordinaten, und zwar

nennt man die höchste Dimension, in welcher die Variabeln x, y in der Gleichung in Punktcoordinaten vorkommen, die Ordnung der Curve.

Die Curven erster Ordnung sind also Gerade; eine Curve erster Ordnung ist daher nie als Klassencurve darstellbar; die Gerade stellt sich in Punktcoordinaten durch eine, in Liniencoordinaten durch zwei Gleichungen dar.

nennt man die höchste Dimension, in welcher die Variabeln u, v in der Gleichung in Liniencoordinaten vorkommen, die Klasse der Curve.

Die Curven erster Klasse sind also Punkte; eine Curve erster Klasse ist daher nie als Ordnungscurve darstellbar; der Punkt stellt sich in Liniencoordinaten durch eine, in Punktcoordinaten durch zwei Gleichungen dar.

— Die fundamentale Bedeutung des hier entwickelten Princips wird sogleich in den folgenden Betrachtungen hervortreten, welche von um so grösserer Wichtigkeit werden, als sie den Zusammenhang der neueren synthetischen und analytischen Geometrie zu vermitteln bestimmt sind. Wir untersuchen nämlich zunächst Beziehungen zwischen verschiedenen Punkten auf einer Geraden und entsprechend zwischen verschiedenen Strahlen durch einen Punkt: wir beschränken uns so zu sagen auf die Geometrie *auf* einer Geraden und die *in* einem Punkte. Wir lösen dabei die Gerade in die Reihe von Punkten auf, welche auf ihr liegen, den Punkt in die Schaar von Geraden, welche sich in ihm schneiden, und bezeichnen in dieser Auffassung die Gesammtheit der Punkte auf einer Geraden als *Punktreihe*, die der Geraden durch einen Punkt als *Strahlbüschel*. Es ist dann unsere

Aufgabe, jeden Punkt einer Reihe, d. h., welcher mit zwei gegebenen auf einer Geraden liegt, individuell darzustellen, ebenso jeden Strahl eines Büschels, d. h. welcher mit zwei gegebenen Strahlen durch einen Punkt geht. Die erstere dieser Aufgaben wurde schon oben gelöst, indem wir die Punkte einer Reihe darstellten durch die Gleichungen (vgl. p. 5):

$$x = x_0 + r \cos \alpha$$
$$y = y_0 + r \sin \alpha\,;$$

in ihnen ist die Punktreihe, wenn r einen Parameter bedeutet, durch einen Punkt (x_0, y_0) und ihre Richtung (d. h. einen unendlich fernen Punkt) bestimmt. Analog wollen wir nun allgemein jeden Punkt der Reihe durch zwei feste Punkte derselben mit Hülfe eines Parameters ausdrücken. Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte 0, 1 war:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dieselbe wird nach einem bekannten Determinantensatze identisch erfüllt, wenn wir setzen (vergl. p. 16):

$$\begin{aligned} x &= px_0 + qx_1 \\ y &= py_0 + qy_1 \\ 1 &= p \;\;\, + q \;; \end{aligned} \tag{5}$$

jene Determinante ist dann das Resultat der Elimination von p, q, 1 aus diesen Gleichungen. Dividiren wir mit der letzten Gleichung in die beiden ersten und führen einen Parameter $\lambda = \frac{q}{p}$ ein, so erhalten wir, indem wir einmal die Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten ersetzt denken, die Resultate:

$$(6)\qquad x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \qquad\qquad u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda},$$

zwei Gleichungen, welche die Coordinaten eines Punktes der Reihe darstellen, ausgedrückt durch die Coordinaten zweier Punkte derselben und den Parameter λ. *Es ist dies die allgemeinste Darstellung der Geraden als Träger der Punktreihe.*

zwei Gleichungen, welche die Coordinaten eines Strahles des Büschels darstellen, ausgedrückt durch die Coordinaten zweier Strahlen desselben und den Parameter λ. *Es ist dies die allgemeinste Darstellung des Punktes als Mittelpunkt des Strahlbüschels.*

In den Gleichungen (6) ist der Begriff der Punktreihe, bez. des Strahlbüschels deutlich ausgesprochen: legen wir λ nach einander alle

Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so erhalten wir successive alle Punkte der Reihe, bez. alle Strahlen des Büschels.

Die Zahl λ hat aber auch eine einfache *geometrische* Bedeutung. Aus den Gleichungen (5) folgt nämlich:

$$q = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad p = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1},$$

oder wenn wir durch r, s die Entfernungen der Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) von (x, y) bezeichnen und beide positiv nehmen, so lange (x, y) zwischen den festen Punkten 0, 1 liegt:

$$q = \frac{r}{r+s}, \quad p = \frac{s}{r+s},$$

$$\lambda = \frac{r}{s}.$$

Es ist also λ der Quotient der Abstände des beweglichen Punktes von zwei festen Punkten der Reihe, eine Deutung, welche wir nicht unmittelbar auf Strahlbüschel übertragen können, da sie wesentlich auf metrischen Begriffen beruht. Man sieht hieraus auch leicht, dass jedem Punkte der Geraden nur ein Werth von λ zukommt, und wie sich diese Werthe auf die ganze Gerade vertheilen. Zwischen den festen Punkten sind r und s, also auch λ positiv; bewegt sich der Punkt von 0 nach 1, so geht λ von 0 bis ∞, und hat für den Mittelpunkt dieser Strecke $(r = s)$ den Werth 1. Ausserhalb der festen Punkte dagegen wird links r, rechts s negativ, folglich in beiden Fällen auch λ (vgl. Fig. 10). Während der Punkt von 0 bis in's Unendliche fortschreitet, geht λ von 0 bis -1, im Unendlichen ist $\lambda = -1$, und während der Punkt sich vom Unendlichen nach 1 bewegt, geht λ von -1 bis $-\infty$, wodurch dann der Kreis von Werthen geschlossen ist. Besonders bemerkenswerth ist es, dass λ im Unendlichen nur den *einen* Werth -1 hat; man spricht deshalb von *einem unendlich fernen Punkte der Geraden;* d. h. jede gerade Linie verhält sich analytisch so, als wenn sie nur *einen* unendlich fernen Punkt habe.

Fig. 10.

Die Gleichungen (6) dienten uns dazu, die Coordinaten eines beliebigen Elementes einer Punktreihe oder eines Strahlbüschels durch die von zwei festen Elementen darzustellen. Um die Gleichung eines solchen Elementes zu erhalten, müssen wir diese Coordinaten in die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0$$

einsetzen, wodurch wir finden:

Punkt der Reihe:	*Strahl des Büschels:*
$(ux_0 + vy_0 + 1) + \lambda(ux_1 + vy_1 + 1) = 0$	$(u_0 x + v_0 y + 1) + \lambda(u_1 x + v_1 y + 1) = 0.$

Wir erhalten also die Gleichung des beweglichen Elementes, indem wir die des einen festen Elementes mit einem Parameter λ multiplicirt zu der des andern addiren. Dabei haben wir jedoch die Gleichung der festen Gebilde in der besonderen Form vorausgesetzt, wo das constante Glied gleich der Einheit ist; dies ist im Allgemeinen nicht nöthig. Sind uns nämlich die *Grundelemente* (d. h. die Punkte 0, 1) gegeben durch

zwei Punkte:	zwei Strahlen:
$Au + Bv + C = 0$	$Ax + By + C = 0$
$A_1 u + B_1 v + C_1 = 0$	$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

so stellen die Gleichungen:

$$Au + Bv + C + \mu (A_1 u + B_1 v + C_1) = 0,$$
$$Ax + By + C + \mu (A_1 x + B_1 y + C_1) = 0$$

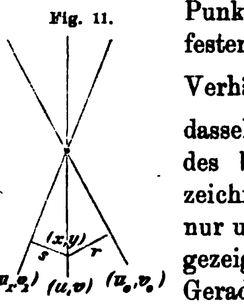
wieder ein beliebiges Element der Reihe, bez. des Büschels dar, nur die Bedeutung des Parameters μ ist eine andere geworden; denn setzen wir

$$\mu = \lambda \frac{C}{C_1},$$

so erhalten wir wieder die frühere Form. Der Parameter μ ist also nicht obiges Abstandsverhältniss selbst, sondern das Product desselben in eine von der Lage des beweglichen Punktes unabhängige Constante, wodurch im Wesen der Sache nichts geändert wird.

Die letztere Bedeutung von μ lässt sich auch dualistisch für den Strahl eines Büschels übertragen. Fällen wir nämlich von einem Punkte des beweglichen Strahls Lothe auf die beiden festen von der Länge r und s (vergl. Fig. 11), so ist das Verhältniss $\frac{r}{s}$ für alle Punkte des beweglichen Strahls dasselbe, und wir wollen es als das *Abstandsverhältniss* des beweglichen Strahls von den beiden festen bezeichnen; von ihm ist dann wieder der Parameter λ nur um einen constanten Factor verschieden, wie jetzt gezeigt werden soll. Sei x, y irgend ein Punkt der Geraden u, v, welche dem Büschel angehört, das durch die beiden Geraden u_0, v_0 und u_1, v_1 bestimmt wird; dann ist nach einer oben gegebenen Regel (vgl. p. 30):

Fig. 11.



$$r = \frac{u_0 x + v_0 y + 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$
$$s = \frac{u_1 x + v_1 y + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

und die Gleichung des Strahles selbst:

$$ux + vy + 1 = 0$$

geht über in:

$$r\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + \lambda s\,(\sqrt{u_1^2 + v_1^2}) = 0\,,$$

also wird

$$\lambda = -\frac{r}{s} \cdot \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

Der Werth von λ variirt ganz analog, wie bei der Punktreihe, und es entspricht wieder jedem Strahle nur ein Werth von λ. Nehmen wir die Strecken r und s für einen Strahl in einem Winkel der Grundstrahlen positiv, so werden sie im Scheitelwinkel beide negativ, während sie in den beiden Nebenwinkeln verschiedene Zeichen annehmen. Für die festen Elemente ist λ wieder einmal Null, einmal unendlich, und für die zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Strahlen hat λ einen zwischen Null und $+\infty$ oder $-\infty$ liegenden Werth. Ein Unterschied gegenüber der Vertheilung der Werthe des Parameters auf der Punktreihe zeigt sich jedoch darin, dass wir im Büschel von einem uneigentlichen, unendlich fernen Elemente nicht reden können. — Als wesentliches Resultat dieser Betrachtung erkennen wir also, dass im Strahlbüschel der Parameter schon, wenn die beiden Grundelemente in der Form

$$u_0 x + v_0 y + 1 = 0$$
$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

gegeben sind, sich um einen constanten Factor von dem Abstandsverhältnisse unterscheidet, so dass bei der allgemeinen Form noch ein zweiter constanter Factor $\frac{C}{C_1}$ hinzutritt.

Die Darstellung dieser Verhältnisse können wir sehr vereinfachen, wenn wir eine *abgekürzte Bezeichnung* beim Schreiben der Gleichungen einführen. Wir werden nämlich die linke Seite einer linearen Gleichung durch einen einzigen Buchstaben ersetzen, ein Verfahren, von dessen Fruchtbarkeit wir uns noch wiederholt werden überzeugen können.*) Wir wollen demnach in der Folge durch $G, H, \ldots$ lineare Ausdrücke in x, y, durch $P, Q, \ldots$ solche in u, v bezeichnen, d. h. wir setzen z. B.:

$$G = Ax + By + C \qquad\qquad P = Au + Bv + C$$
$$H = A_1 x + B_1 y + C_1. \qquad\qquad Q = A_1 u + B_1 v + C_1.$$

Es sind dann

*) Diese Methode wurde von Plücker zuerst principiell angewandt und ausgebildet, vgl. dessen Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1. Th. 1828; gleichzeitig auch von Bobillier aufgestellt: Gergonne, Annales, t. 18, 1827—28.

die Gleichungen zweier Geraden:

$$G = 0, \quad H = 0,$$

und die eines Strahles durch ihren Schnittpunkt:

$$G + \mu H = 0.$$

die Gleichungen zweier Punkte:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

und die eines Punktes auf ihrer Verbindungslinie:

$$P + \mu Q = 0.$$

Es ist natürlich wieder μ in beiden Fällen bis auf einen constanten Factor, welcher von der zufälligen Form der Gleichungen der Grundelemente abhängt, gleich dem erwähnten Abstandsverhältnisse.

VI. Die Grundlagen der synthetischen Geometrie.*)

Auf das Studium der Punktreihen und Strahlbüschel stützt sich die sogenannte neuere synthetische Geometrie; diese einfachsten Gebilde geben für sie insbesondere die Grundlage für eine rein geometrische Erzeugung der algebraischen Curven, sei es dass man sie von ihren Punkten beschrieben oder von ihren Tangenten umhüllt denkt. Wir werden diese Verhältnisse auch in unserer analytischen Darstellung erkennen, wenn wir eine Function des eben benutzten Parameters μ herstellen, welche von dem in ihm enthaltenen constanten Factor unabhängig ist und demnach eine rein geometrische Bedeutung hat. Eine solche Function ergibt sich aber sofort, wenn wir ausser den beiden Grundelementen der Punktreihe, bez. des Strahlbüschels gleichzeitig noch *zwei* andere Elemente betrachten; in der That wird der Quotient der beiden ihnen entsprechenden Werthe des Parameters μ von jener Constanten unabhängig.

Sind uns zwei Punkte

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gegeben, und nehmen wir auf ihrer Verbindungslinie zwei beliebige andere Punkte:

$$P + \mu Q = 0 \qquad P + \mu' Q = 0,$$

so sind nach dem Früheren ihre Abstandsverhältnisse von den Grundpunkten:

$$\frac{r}{s} = \mu \cdot C, \quad \frac{r'}{s'} = \mu' \cdot C,$$

wo C eine Constante bedeutet; also wird

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\frac{r}{s}}{\frac{r'}{s'}}$$

unabhängig von C, eine rein geometrische Grösse, die wir als *das*

*) Vgl. für die Darstellung im Folgenden: Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig. 1872 p. 58 ff.

*Doppelverhältniss der gewählten vier Punkte**) bezeichnen. Aus letzteren lassen sich auch noch andere Doppelverhältnisse ableiten, denn bei unserer Darstellung sind nicht alle 4 Punkte gleichmässig benutzt; sondern zwei sind dadurch ausgezeichnet, dass wir sie als Grundelemente der Reihe annahmen, und dieselben treten wieder verschieden in die Rechnung ein, da wir die beiden andern Punkte ebensowohl in der Form

$$Q + \mu_1 P = 0 \qquad Q + \mu_1' P = 0$$

hätten voraussetzen und dann $\frac{\mu_1'}{\mu_1}$, als Doppelverhältniss bezeichnen dürfen. Wir können aber das Doppelverhältniss auch für irgend vier Punkte der Reihe ohne Rücksicht auf die Grundpunkte bilden. Es seien dieselben bestimmt durch:

$$P + \mu_1 Q = 0 \qquad P + \mu_2 Q = 0$$
$$P + \mu_3 Q = 0 \qquad P + \mu_4 Q = 0,$$

man kann dann die Aufgabe auf den vorigen Fall reduciren, indem man gewissermassen zwei der Punkte als neue Fundamentalpunkte einführt, d. h. indem man für den Augenblick setzt:

$$R = P + \mu_1 Q, \quad S = P + \mu_2 Q.$$

Wir finden hieraus:

$$(\mu_1 - \mu_2) Q = R - S, \quad (\mu_2 - \mu_1) P = \mu_2 R - \mu_1 S,$$

also sind die vier Punkte dargestellt durch:

$$R = 0 \qquad\qquad S = 0$$

$$R + \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} S = 0 \qquad S + \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2} S = 0,$$

und dies ist wieder die frühere Form, wenn wir die mit S multiplicirten Grössen als Werthe eines neuen Parameters betrachten. Es wird demnach *das Doppelverhältniss der vier Punkte:*

$$\alpha = \frac{\dfrac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2}}{\dfrac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}},$$

also eine Function der vier Parameter, ganz unabhängig von den Fundamentalpunkten.

Genau auf denselben Ausdruck wären wir gekommen, wenn wir vier Strahlen eines Büschels:

---

*) Doppelverhältnisse finden sich in ihrer Bedeutung für projectivische Beziehungen schon gelegentlich in Poncelet's Traité des propriétés projectives des figures (z. B. p. 11). Principiell eingeführt wurde das Doppelverhältniss von Möbius (1827, in dessen barycentrischem Calcul), und in Frankreich (als anharmonisches Verhältniss) von Chasles (1837, in dessen Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie).

$$G + \mu_1 H = 0 \qquad G + \mu_2 H = 0$$
$$G + \mu_3 H = 0 \qquad G + \mu_4 H = 0$$

zu Grunde gelegt hätten; auch hier wird *das Doppelverhältniss der vier Strahlen* unabhängig von der Lage der Fundamentalstrahlen und, unabhängig von den in dem Parameter enthaltenen Constanten, *es ist ebenfalls eine rein geometrische Grösse.*

In dem Werthe von α sind aber die Parameter der vier Elemente (seien es Punkte oder Strahlen) verschieden benutzt; ändern wir ihre Reihenfolge, so kann auch α sich ändern; und wir erhalten alle möglichen Werthe von α, wenn wir die 4 Indices auf alle möglichen Weisen permutiren. Die dadurch entstehenden 24 Permutationen würden somit auf 24 verschiedene Werthe des aus denselben 4 Elementen zu bildenden Doppelverhältnisses führen, während sich dieselben thatsächlich, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, *auf nur 6 verschiedene Werthe reduciren.*

Setzen wir nämlich fest, dass zur Aufstellung des obigen Werthes:

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu_4}$$

die Indices in der Ordnung 1, 2, 3, 4 benutzt worden seien, so sieht man, dass α dasselbe bleibt für die Anordnungen

1234, 2143, 3412, 4321;

d. h. das Doppelverhältniss ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig die Indices des ersten und des zweiten Paares je unter sich vertauscht, und wenn man die beiden Paare vertauscht. Dies gilt, von welchem Werthe man auch ausgehen mag; immer vier Permutationen geben also dasselbe Doppelverhältniss, es bleiben folglich nur noch 6 verschiedene Werthe desselben übrig, *und diese lassen sich alle einfach durch eines derselben ausdrücken.* Wir erhalten sie alle, wenn wir einen Index, etwa 4, ungeändert lassen und die übrigen drei unter einander permutiren, und zwar findet man durch leichte Rechnung:

für die Anordnung 1 2 3 4 : $\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu_4}$

„ „ „ 2 1 3 4 : $\alpha' = \frac{\mu_2 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1 \cdot \mu_2 - \mu_4} = \frac{1}{\alpha}$

„ „ „ 1 3 2 4 : $\alpha'' = \frac{\mu_1 - \mu_2 \cdot \mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3 \cdot \mu_1 - \mu_4} = 1 - \alpha$

„ „ „ 2 3 1 4 : $\alpha''' = 1 - \alpha' = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$

„ „ „ 3 1 2 4 : $\alpha^{(4)} = \frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{1 - \alpha}$

„ „ „ 3 2 1 4 : $\alpha^{(5)} = \frac{1}{\alpha'''} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

Es ist hier α' aus α durch Vertauschung von μ_1 mit μ_2, α'' aus α durch Versauschung von μ_2 mit μ_3 gebildet. Vertauscht man ferner in α' μ_1 und μ_3, in α'' μ_1 und μ_3, in α''' μ_2 und μ_3, so entstehen bez. die Werthe α''', $\alpha^{(4)}$ und $\alpha^{(5)}$.

Die sechs zusammengehörigen Werthe eines Doppelverhältnisses sind also, wenn einer derselben α genannt wird:

$$\alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Während dieselben im Allgemeinen sämmtlich von einander verschieden sind, kann es in Folge besonderer Lagen der vier Elemente gegen einander eintreten, dass einige unter ihnen identisch werden. Dadurch sind, jenen Lagen entsprechend, ausgezeichnete Werthe des Doppelverhältnisses bedingt. Es können hier folgende Fälle vorkommen:

1. $\alpha = \alpha' = \frac{1}{\alpha}$, oder $\alpha = \pm 1$

2. $\alpha = \alpha'' = 1 - \alpha$, oder $\alpha = \frac{1}{2}$

3. $\alpha = \alpha''' = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, oder $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

4. $\alpha = \alpha^{(4)} = \frac{1}{1-\alpha}$, oder $\alpha^2 - \alpha + 1 = 1$

5. $\alpha = \alpha^{(5)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$, oder $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$.

Aber diese Fälle sind nur zum Theil verschieden. Zunächst bemerken wir, dass die Fälle 3. und 4. identisch sind: die eine Bedingung ist eine Folge der andern. Die übrigen Fälle geben noch zu *zwei* ausgezeichneten Lagenbeziehungen der vier Elemente Veranlassung. Setzen wir nämlich $\alpha = 1$, so sind die 6 Werthe des Doppelverhältnisses:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad 0, \quad \infty;$$

hier ist also $\alpha'' = \alpha^{(4)}$, gleich dem einen Werthe von α im 5. Falle, und in der That erhalten wir von dem letzteren ausgehend, dieselben sechs Werthe für das Doppelverhältniss, nur in anderer Reihenfolge, nämlich:

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad 1, \quad \infty, \quad 0;$$

beide Fälle geben daher geometrisch dasselbe Resultat.

Setzen wir ferner $\alpha = -1$, so erhalten wir für die 6 Werthe des Doppelverhältnisses:

$$-1, \quad -1, \quad 2, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 2, \quad \tfrac{1}{2};$$

dieselbe Reihe, nur anders geordnet erhält man aber auch, wenn man vom Falle 2. oder dem zweiten Werthe von α im Falle 5. ausgeht, auch diese geben daher wesentlich dasselbe Resultat. *Wir haben somit*

nur drei ausgezeichnete Lagen der vier Punkte oder Strahlen zu unterscheiden; die geometrische Bedeutung derselben ergibt sich in folgender Weise:

1) $\alpha = 1$. Hier müssen zwei Elemente den andern beiden gegenüber dasselbe Abstandsverhältniss haben, d. h. *sie fallen in eins zusammen.*

2) $\alpha = -1$. Die Abstandsverhältnisse zweier Elemente gegen die beiden andern sind entgegengesetzt gleich: *die harmonische Lage der vier Elemente*; es ist dies der wichtigste Fall, wir werden auf diese Lagenbeziehung im Folgenden bei den verschiedensten Untersuchungen geführt werden, so dass noch einige Erläuterungen hier ihre Stelle finden mögen. Unter den möglichen Theilungen der vier Elemente in Paare ist diejenige ausgezeichnet, welche bei der Bildung des Doppelverhältnisses den Werth -1 liefert; die Glieder der beiden Paare heissen dann *zugeordnete Elemente* und das negative Vorzeichen von α zeigt, dass, wenn ein Element eines Paares zwischen den zwei Elementen des andern Paares liegt, das andere Element ausserhalb dieser beiden liegen muss; die zugeordneten Elemente der beiden Paare trennen sich also gegenseitig von einander. Diese Anordnung der Elemente ist auch noch dadurch charakterisirt, dass die Vertauschung der Elemente eines Paares den Werth von α ungeändert lässt.

Liegt insbesondere auf einer Punktreihe der dritte Punkt in der Mitte zwischen den beiden andern, so liegt der vierte im Unendlichen, und *wir können somit die Halbirung einer Strecke als eine blosse Doppelverhältnissrelation auffassen.* Rückt der dritte an einen der beiden ersten unendlich nahe heran, so rückt auch der vierte an denselben. Dasselbe gilt auch für Strahlbüschel, nur der metrische Satz über den Mittelpunkt der durch ein Paar bestimmten Strecke wird geändert; man weist nämlich leicht nach, dass, wenn der dritte Strahl den Winkel zwischen den beiden ersten halbirt, der vierte den Nebenwinkel in zwei gleiche Theile theilt; beide Strahlen stehen dann zu einander senkrecht.

3) $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, oder $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, folglich $\alpha^3 = -1$. In diesem Falle ist α eine imaginäre dritte Wurzel aus -1, und die drei anderen Werthe des Doppelverhältnisses sind gleich der conjugirt imaginären dritten Wurzel aus -1. Es werden hier also zweimal drei Werthe des Doppelverhältnisses einander gleich, während in den vorigen Fällen dreimal zwei Werthe dieselben waren. Die durch diesen Fall charakterisirte Lage der vier Punkte pflegt man, nach dem Vorgange von Cremona*), als *die äquianharmonische* zu bezeichnen.

*) Vergl. dessen „Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven", deutsch von Curtze, Greifswald 1865.

Wegen der vorkommenden imaginären Grössen ist die geometrische Bedeutung derselben jedoch nicht so evident; man kann nämlich keine vier Elemente mit reellen Coordinaten angeben, welche der gestellten Forderung genügen, und folglich lassen sich vier solche Punkte auch nicht constructiv auf einer Geraden bestimmen. Wir werden so zuerst darauf geführt auch imaginäre Werthe der Veränderlichen und Coëfficienten in geometrischen Untersuchungen zu berücksichtigen, und in der That hat man sich in neuerer Zeit genöthigt gesehen, diese grundsätzlich, ebenso wie die reellen in das Gebiet der geometrischen Betrachtung hineinzuziehen. Wenn sie selbst sich auch der unmittelbaren Anschauung entziehen, so kann man doch analytisch alle Operationen so durchführen, als wenn man mit wirklichen Punkten oder Geraden zu thun hätte, ja durch Vereinigung verschiedener imaginärer Elemente können reelle erzeugt werden, deren Bedeutung ohne Betrachtung jener uns verschlossen bliebe. Von den vier Punkten eines äquianharmonischen Systems können höchstens 3 reell sein, so dass nur der vierte imaginär wird. Denn sind durch die Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

zwei reelle Punkte vorgestellt, so bilden sie mit den Punkten:

$$P + \mu Q = 0, \quad P + \mu' Q = 0$$

ein äquianharmonisches Quadrupel, wenn

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

und daraus ergibt sich für μ' immer ein imaginärer Werth, wenn μ reell ist. Gleichzeitig folgt aus dem doppelten Vorzeichen: *Es gibt zwei Punkte, welche zu drei gegebenen äquianharmonisch liegen**). Sind dagegen zwei der drei Punkte conjungirt imaginär, so können die beiden andern reell sein. Sind nämlich dann

$$\begin{aligned} P + c\sqrt{-1}\,Q &= 0, \quad & P - c\sqrt{-1}\,Q &= 0, \\ P + \mu Q &= 0, \quad & P + \mu' Q &= 0, \end{aligned}$$

so bestimmt sich für ein reelles μ der Werth von μ' aus der Gleichung:

$$\frac{(c\sqrt{-1} - \mu)(\mu' + c\sqrt{-1})}{(\mu + c\sqrt{-1})(c\sqrt{-1} - \mu')} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Also wird:

$$\mu' = \frac{2 + \mu(\sqrt{-3} \mp c)\sqrt{3}}{(\sqrt{-3} \mp c)\sqrt{3} - 2\mu},$$

und dies ist eine reelle Grösse für $c = c' \pm \sqrt{-3}$, wenn μ reell ist.

*) Vergl. die Theorie der binären cubischen Formen in der dritten Abtheilung dieser Vorlesungen.

Liegen dagegen vier Elemente harmonisch, so können nur entweder zwei imaginär oder alle vier gleichzeitig imaginär sein; und zwar wird im ersten Falle das eine der beiden zugeordneten Paare von den reellen, das andere von den imaginären Elementen gebildet. Man kann vier solche Punkte alsdann darstellen durch die Gleichungen:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$
$$P + \mu \sqrt{-1}\, Q = 0, \quad P - \mu \sqrt{-1}\, Q = 0. —$$

Die Theorie des Doppelverhältnisses, wie wir sie hier durchgeführt haben, führt von selbst auf die Untersuchung gewisser Gebilde, welche für die Geometrie von fundamentaler Wichtigkeit sind. Betrachten wir nämlich gleichzeitig zwei Reihen von Elementen, gegeben durch die Gleichungen:

$$P + \mu Q = 0, \quad P' + \mu Q' = 0$$

oder:

$$G + \mu H = 0, \quad G' + \mu H' = 0,$$

jenachdem wir von Punktreihen oder Strahlbüscheln ausgehen, so wird durch denselben Werth von μ in beiden Gebilden je ein Element bestimmt. Bezeichnen wir zwei solche Elemente als *einander entsprechend*, so sind beide Gebilde eindeutig auf einander bezogen: *jedem* Punkte oder Strahle des einen ist *ein* Punkt oder Strahl des andern zugeordnet, und umgekehrt. Beide Gebilde heissen dann *projectivisch auf einander bezogen, die eine Punktreihe ist der anderen, der eine Strahlbüschel dem andern projectivisch.* Da nun das Doppelverhältniss von vier Elementen eines Gebildes allein von dem Parameter μ abhängt, so folgt aus dieser Definition der Projectivität unmittelbar der für diese Beziehung geltende Hauptsatz:

Bei projectivischen Gebilden haben vier Elemente des einen und die vier entspsechenden des andern dasselbe Doppelverhältniss (vorausgesetzt, dass bei Bildung desselben entsprechende Elemente gleichmässig benutzt werden; sonst können zwei verschiedene, aber demselben Systeme von 6 Werthen angehörige Doppelverhältnisse auftreten).

Dass man auch mehr als zwei Punktreihen oder Strahlbüschel auf einander projectivisch beziehen kann, dass zwei Gebilde projectivisch sind, wenn sie in dieser Beziehung zu demselben dritten stehen, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Man nennt aber auch eine Punktreihe

$$P + \mu Q = 0$$

zu einem Strahlbüschel

$$G + \mu H = 0$$

projectivisch, indem man wieder einem Punkte der Reihe einen Strahl des Büschels entsprechen lässt, wenn beiden derselbe Werth des Para-

meters μ zukommt; auch für zwei solche Gebilde gilt dann natürlich der Satz von der Gleichheit des Doppelverhältnisses.

Gerade diese letztere Beziehung einander dualistisch gegenüberstehender linearer Erzeugnisse soll uns zur geometrischen Construction von projectivischen Gebilden überhaupt dienen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die folgenden Sätze zu beweisen.

1. *Man kann drei Elemente eines Gebildes (Punktreihe oder Strahlbüschel) dreien beliebigen Elementen des anderen entsprechend setzen; dann ist jedem vierten des ersten ein viertes Element des zweiten zugeordnet, d. h. dann ist die Projectivität festgelegt.* Nehmen wir nämlich in einem Gebilde zwei Elemente

$$M = 0, \quad N = 0$$

und lassen ihnen in einem anderen zwei Elemente

$$M' = 0, \quad N' = 0$$

entsprechen, so muss in der Gleichung des Elementes, welches einem beweglichen

$$M + \mu N = 0$$

des ersten Gebildes zugehört, μ ebenfalls linear vorkommen, sie muss also die Form haben:

$$(\alpha + \beta\mu) M' + (\gamma + \delta\mu) N' = 0,$$

wo α, β, γ, δ Constante sind. Da aber für $\mu = 0$ das Element im ersten Gebilde $M = 0$ wird und diesem im zweiten für denselben Werth von μ $M' = 0$ entsprechen muss, so ist $\gamma = 0$ zu nehmen; und ebenso muss, da $N = 0$, $N' = 0$ sich entsprechen ($\mu = \infty$), auch $\beta = 0$ sein. Es bleibt also für die Elemente des zweiten Gebildes die Form:

$$\alpha M' + \delta\mu N' = 0.$$

Nun setzen wir fest, dass irgend einem dritten Elemente

$$M + l N = 0$$

ein bestimmtes, beliebig gewähltes Element

$$M' + m N' = 0$$

entspreche; dann muss für $\mu = l$:

$$\frac{\delta\mu}{\alpha} = m$$

sein, also $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{m}{l}$. Es erscheint demnach N' im zweiten Gebilde noch in die Constante $\frac{m}{l}$ multiplicirt, wodurch die Bedeutung der Gleichung

$$N' = 0$$

nicht afficirt wird; wir können daher statt $\frac{m}{l}N'$ wieder N' schreiben (wodurch nur die Bezeichnung geändert ist), und dann sind die Gebilde in ihrer projectivischen Beziehung zu einander analytisch vollständig gegeben. Wir dürfen also einem dritten Elemente des einen noch ein beliebiges drittes Element des andern zuordnen; aber dies geht nicht mehr mit einem vierten, denn vier Elemente geben ein bestimmtes Doppelverhältniss, welches dem aus den vier entsprechenden gebildeten gleich sein muss; und dies ist nur noch für *einen* Punkt im zweiten Gebilde möglich, wenn ein vierter des ersten gegeben ist. — Den hier bewiesenen Satz können wir noch in einer anderen Form aussprechen, in welcher er in unseren weiteren Untersuchungen besonders zur Anwendung kommt, nämlich:

Vereinigt gelegene projectivische Gebilde (d. h. zwei Punktreihen auf derselben Geraden oder zwei Strahlbüschel durch denselben Punkt) sind congruent, sobald drei entsprechende Elementenpaare sich decken.

2. *Verbindet man die Punkte einer Reihe:*

$$P + \mu Q = 0$$

mit einem nicht auf ihr liegenden Punkte (x_0, y_0), *so bilden die Verbindungslinien einen der Reihe projectivischen Büschel*, wenn man jedem Punkte den durch ihn gehenden Strahl entsprechen lässt.

Schneidet man die Strahlen eines Büschels:

$$G + \mu H = 0$$

mit einer nicht zu ihm gehörigen Geraden (u_0, v_0), *so bilden die Schnittpunkte eine dem Büschel projectivische Reihe*, wenn man jedem Strahle den auf ihm liegenden Punkt entsprechen lässt.

Zum Beweise genügt es, die Gleichung des so erzeugten Büschels, bez. der Punktreihe aufstellen. Setzen wir:

$$P = au + bv + c \qquad Q = \alpha u + \beta v + \gamma$$

$$G = ax + by + c \qquad H = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

so ist die Gleichung

der Verbindungslinie mit x_0, y_0:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a + \mu\alpha \\ y & y_0 & b + \mu\beta \\ 1 & 1 & c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0$$

des Schnittpunktes mit u_0, v_0:

$$\begin{vmatrix} u & u_0 & a + \mu\alpha \\ v & v_0 & b + \mu\beta \\ 1 & 1 & c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0$$

oder durch Zerlegung:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha \\ y & y_0 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} u & u_0 & a \\ v & v_0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} u & u_0 & \alpha \\ v & v_0 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

In der That kommt dem so erzeugten Elemente also derselbe Werth

von μ zu, wie in dem gegebenen Gebide, und darin beruht jedesmal die Projectivität von Reihe und Büschel. In diesem Falle, wo jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht, sagt man: *die projectivischen Gebilde sind in perspectivischer Lage.*

3. *Punktreihen und Strahlbüschel, welche projectivisch sind, lassen sich immer in perspectivische Lage bringen.*

Sind nämlich a, b, c drei Punkte einer Reihe, α, β, γ die ihnen entsprechenden Strahlen eines Büschels, so kann man den letzteren sich selbst congruent so verlegen, dass α durch a, β durch b, γ durch c geht; man braucht, um dies zu erreichen, nur über $\overline{ab}$ einen Kreisbogen, der den Winkel $\overline{\alpha\beta}$, über $\overline{bc}$ einen solchen, der den Winkel $\overline{\beta\gamma}$ fasst, zu construiren und den Schnittpunkt beider zum Büschelscheitel zu nehmen. Durch diesen Büschel wird dann auf der Geraden eine zweite Punktreihe ausgeschnitten, diese und die gegebene sind beide zu dem Strahlbüschel, also auch zu einander projectivisch. Sie haben aber zufolge der Construction drei Elementenpaare entsprechend gemein; sie fallen daher nach einem soeben bewiesenen Satze ganz zusammen; und die gegebene Punktreihe liegt in der That zu dem Strahlbüschel perspectivisch.

Projectivische Gebilde verschiedener Art kann man also geometrisch als aus der perspectivischen Lage hervorgegangen definiren; gleiches gilt aber auch bei projectivischen Gebilden derselben Art.

Projectivische Punktreihen nämlich heissen perspectivisch, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt, *das Centrum der Perspectivität*, gehen. Man kann diese Lage immer hervorrufen, indem man die eine Reihe, sich selbst congruent, so verschiebt, dass ein Punkt derselben mit dem ihm entsprechenden der andern Reihe zusammenfällt. Denn verbindet man dann zwei Punkte der einen Reihe bez. mit den beiden entsprechenden der andern und den Schnittpunkt dieser Linien mit dem gemeinsamen Punkte der beiden Reihen, so bestimmt jeder vierte Strahl dieses Büschels mit den drei Strahlen ein Doppel-

Projectivische Strahlbüschel nämlich heissen perspectivisch, wenn die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden, *dem perspectivischen Durchschnitte*, liegen. Man kann diese Lage immer hervorrufen, indem man das eine Büschel, sich selbst congruent, so verschiebt, dass ein Strahl desselben mit dem ihm entsprechenden des andern Büschels zusammenfällt. Denn nimmt man dann die Schnittpunkte von zwei Strahlen des einen Büschels bez. mit den zwei entsprechenden des andern und schneidet ihre Verbindungslinie mit der Verbindungslinie der Büschelcentra, so bestimmt jeder vierte Punkt jener Geraden mit diesen drei Punkten

verhältniss, gleich dem der vier Punkte, in denen die vier Strahlen eine der beiden Punktreihen schneiden. Also schneidet in der That jeder Strahl des Büschels auf den beiden Pnnktreihen zwei zugeordnete Punkte aus.

ein Doppelverhältniss, gleich dem der vier Strahlen, welche die vier Punkte mit einem der beiden Büschelcentren verbinden, also gehen in der That durch jeden Punkt der Geraden zwei zugeordnete Strahlen der beiden Büschel.

Diese Betrachtungen haben uns vom Begriffe des Doppelverhältnisses aus auf die Grundlagen der neueren synthetischen Geometrie geführt, denn diese gründet sich, hauptsächlich seit Steiner*), wesentlich auf die Auffassung der Geraden als Punktreihe, des Punktes als Strahlbüschel und auf die projectivische Beziehung verschiedener solcher Grundgebilde zu einander, welche dann zunächst durch die perspectivische Lage vermittelt wird. Durch Einführung der Liniencoordinaten und des Princips der Dualität ist aber auch in unseren analytischen Untersuchungen dieser Gedanke mit völliger Klarheit eingeführt, und es ist daher der Unterschied zwischen neuerer analytischer und synthetischer Geometrie nicht mehr als ein wesentlicher zu betrachten; beide Disciplinen operiren genau mit denselben Begriffen, und die erstere gibt eine präcise Ausdrucksform der letzteren. Wir wollen noch kurz die Grundzüge einer synthetischen Behandlung der Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse verfolgen, um auch hier die Uebereinstimmung mit den analytischen Operationen zu erkennen.

V. Erzeugnisse projectivischer Punktreihen und Strahlbüschel.

An die Theorie projectivischer Gebilde knüpft sich eine rein geometrische Erzeugungsweise der Curven zweiter Ordnung und der Curven zweiter Klasse, auf welche dann die weitere Untersuchung dieser Curven gegründet wird. Es gelten nämlich die folgenden beiden fundamentalen Sätze, die sich dualistisch gegenüberstehen:

Zwei projectivische Büschel, die nicht in perspectivischer Lage sind, bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Ortscurve von der zweiten Ordnung.

Zwei projectivische Reihen, die nicht in perspectivischer Lage sind, bestimmen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Umhüllungscurve von der zweiten Klasse.

*) Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. Noch in sich consequenter ist die Darstellung von v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847. Ebenso bildet das Doppelverhältniss die Grundlage für die beiden Werke von Chasles: Traité de géométrie supérieure, 1852, und: Traité des sections coniques, première partie. 1865.

Der einfachste Fall für die Erzeugung einer Ortscurve ist hier der, wo die beiden projectivischen Büschel (mit den Centren 0 und 0′; vergl. Fig. 12) congruent sind; die Curve ist dann ein *Kreis*, wie aus der Gleichheit der Peripheriewinkel 102 und 10′2, etc. folgt. Allgemein beweisen wir die angeführten Sätze analytisch folgendermassen:

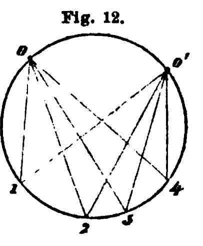


Fig. 12.

Die beiden Strahlbüschel seien:

$$(1) \qquad \begin{aligned} G + \mu H &= 0 \\ G' + \mu H' &= 0\,. \end{aligned}$$

Für den Schnitt je zweier Strahlen, denen derselbe Werth von μ entspricht, müssen beide Gleichungen zusammenbestehen. Eliminiren wir μ, so erhalten wir eine von μ unabhängige Gleichung, welche also für alle Schnittpunkte entsprechender Strahlen gilt, nämlich:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} G & H \\ G' & H' \end{vmatrix} = GH' - HG' = 0\,.$$

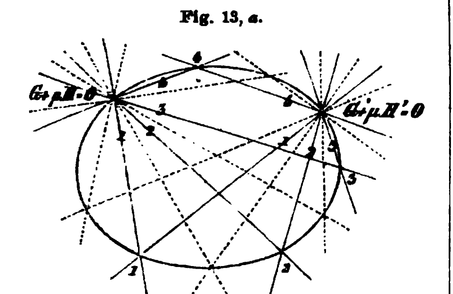


Fig. 13, *a*.

Hier sind G, H, G', H' lineare Functionen von x, y; die Gleichung stellt also in der That eine Curve zweiter Ordnung dar; und zwar geht dieselbe durch die Scheitel der beiden Büschel, denn (2) ist erfüllt, wenn gleichzeitig

$$G = 0 \text{ und } H = 0$$

oder

$$G' = 0 \text{ und } H' = 0\,.$$

Die beiden Punktreihen seien:

$$\begin{aligned} P + \mu Q &= 0 \\ P' + \mu Q' &= 0\,. \end{aligned}$$

Für die Verbindungslinie je zweier Punkte, denen derselbe Werth von μ entspricht, müssen beide Gleichungen zusammenbestehen. Eliminiren wir μ, so erhalten wir eine von μ unabhängige Gleichung, welche also für alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gilt, nämlich:

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix} = PQ' - QP' = 0\,.$$

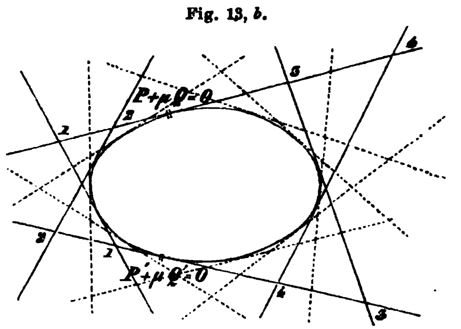


Fig. 13, *b*.

Hier sind P, Q, P', Q' lineare Functionen von u, v; die Gleichung stellt also in der That eine Curve zweiter Klasse dar; und zwar berührt diese die Träger der beiden Punktreihen, denn (2) ist erfüllt, wenn gleichzeitig

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

oder

$$P' = 0 \text{ und } Q' = 0\,.$$

Wenn wir die so gewonnene Erzeugungsweise als eine fundamentale auffassen wollen, haben wir noch zu zeigen, dass *jede* Curve zweiter Ordnung, bez. zweiter Klasse in der Weise erzeugt werden kann. Wir führen dies nur für Punktcoordinaten durch und stellen den gefundenen Resultaten die entsprechenden für Liniencoordinaten sofort gegenüber; denn darin beruht der grosse Nutzen des Princips der Dualität, dass man jede analytische Operation geometrisch auf zwei Weisen deuten kann, und so durch *eine* Entwicklung *zwei* Sätze erhält*). Wir gehen dabei von der folgenden Bemerkung aus:

Es ist immer möglich, durch 5 Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen, eine Curve zweiter Ordnung zu legen.

Es ist immer möglich, an 5 Gerade, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, eine Curve zweiter Klasse zu legen.

Zwei der fünf Punkte nämlich kann man als Scheitel von Strahlbüscheln betrachten und diese projectivisch auf einander beziehen, indem man je zwei Strahlen sich entsprechen lässt, welche durch einen der drei anderen gegebenen Punkte geht. Dadurch ist dann die Projectivität völlig festgelegt, und die beiden Büschel bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen fünf Punkte geht.

Nachdem wir so die Möglichkeit der Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte eine Curve zweiter Ordnung zu legen, erkannt haben, können wir die Frage nach der Gleichung dieser Curve stellen. Diese muss vom zweiten Grade in x, y sein, also die Form haben:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

sie muss ferner erfüllt sein, wenn man für x, y die Coordinaten eines gegebenen Punktes einsetzt; unterscheiden wir letztere durch beigefügte Indices, so müssen also noch die fünf Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + cy_1 + f &= 0\\
ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + cy_2 + f &= 0\\
ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + cy_3 + f &= 0\\
ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + cy_4 + f &= 0\\
ax_5^2 + bx_5y_5 + cy_5^2 + dx_5 + cy_5 + f &= 0.
\end{aligned}$$

Dies sind aber fünf lineare Gleichungen für die 6 homogenen Unbekannten a, b, c, d, e, f, wir können daher letztere aus ihnen eindeutig berechnen, und unsere Aufgabe ergibt nur eine einzige Lösung, also:

---

*) Wenn wir bisher die Beweise in doppelter Form gaben, so geschah dies, um die ungewohntere Auffassung einer Curve als Erzeugniss es ihrer Tangenten geläufiger zu machen; auch im Folgenden werden wir deshalb noch öfter beide Betrachtungen durchführen.

Eine Curve zweiter Ordnung ist vollkommen bestimmt, wenn fünf ihrer Punkte gegeben sind.

Eine Curve zweiter Klasse ist vollkommen bestimmt, wenn fünf ihrer Tangenten gegeben sind,

Ist nun eine Curve zweiter Ordnung gegeben, so kann man fünf Punkte derselben beliebig wählen, uud indem man zwei von ihnen als Büschelscheitel annimmt, die drei anderen aber zur Festlegung der projectivischen Beziehung zwischen beiden Büscheln benutzt, eine durch die 5 Punkte gehende Curve zweiter Ordnung als Ort der Schnittpunkte entsprechenden Strahlen construiren. Diese Curve muss dann mit der gegebenen zusammenfallen, da durch fünf Punkte nur eine solche Curve geht; es folgt also:

Eine jede Curve zweiter Ordnung kann durch zwei projectivische Strahlbüschel in obiger Weise entstanden gedacht werden.

Eine jede Curve zweiter Klasse kann durch zwei projectivische Punktreihen in obiger Weise entstanden gedacht werden.

Da man hiernach fünf ganz beliebige Punkte einer Curve zweiter Ordnung wählen kann, um auf sie eine Erzeugungsweise unserer Art zu begründen, so folgt, dass die Scheitel der benutzten Büschel (bez. die Träger der Punktreihen) in keiner Weise ausgezeichnet sind; und hieraus ergeben sich weiter die folgenden Sätze, welche eigentlich nur verschiedene Ausdrucksweisen dieser Bemerkung sind:

Die Verbindungslinien von irgend zwei Punkten einer Curve zweiter Ordnung mit den übrigen Punkten derselben ergeben zwei projectivische Strahlbüschel.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Curve zweiter Ordnung, so bleibt der Büschel der Strahlen, welche ihn mit den andern festen Punkten der Curve verbinden, stets sich selbst projectivisch.

Wie man auch vier feste Punkte einer Curve zweiter Ordnung mit einem fünften Punkte derselben verbindet, das Doppelverhältniss der vier Strahlen ist immer dasselbe.

Auf irgend zwei Tangenten einer Curve zweiter Klasse bestimmen die übrigen Tangenten der Curve durch ihre Schnittpunkte zwei projectivische Punktreihen.

Bewegt sich eine Tangente einer Curve zweiter Klasse um diese, so bleibt die auf ihr durch die übrigen Tangenten ausgeschnittene Punktreihe stets sich selbst projectivisch.

Wie man auch vier feste Tangenten einer Curve zweiter Klasse durch eine fünfte Tangente derselben schneidet, das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte ist immer dasselbe.

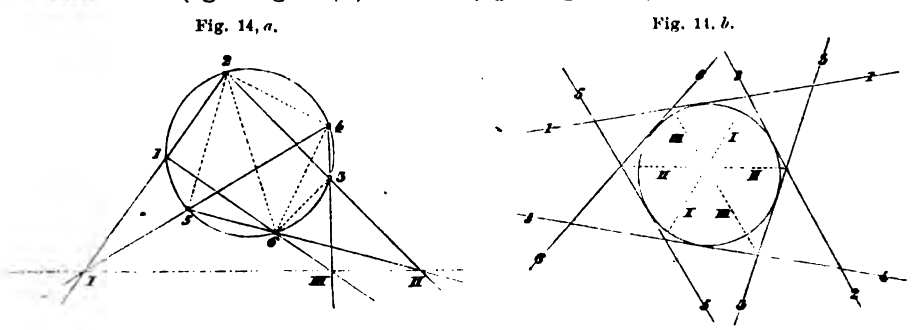
Diese Sätze geben gewissermassen die Grundlage für eine Geometrie auf der Curve zweiter Ordnung, wie wir sie oben auf einer Punktreihe und in einem Strahlbüschel studirt haben; sie können aber auch zur Ableitung der meisten über Curven unserer Art geltenden

Relationen dienen. Ein Beispiel für ihre Fruchtbarkeit mögen die folgenden wichtigen Sätze geben, welche als der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz*) bekannt sind:

Die gegenüberliegenden Seiten eines einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecks (d. h. dessen Ecken auf ihr liegen) schneiden sich in drei Punkten einer geraden Linie (vgl. Fig. 14, *a*).

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken eines einer Curve zweiter Klasse umgeschriebenen Sechsseits (d. h. dessen Seiten sie berühren) gehen durch einen Punkt (vgl. Fig. 14, *b*).

Fig. 14, *a*. Fig. 14, *b*.



Bezeichnen wir nämlich die Ecken des Sechsecks durch Zahlen und betrachten diejenigen Seiten als gegenüberliegende (die Anordnung ist übrigens gleichgültig), welche in dem Schema:

12	45	I
23	56	II
34	61	III

neben einander stehen, wo 12 die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 bedeutet, etc. und sind I, II, III bez. die fraglichen drei Schnittpunkte, so werden z. B. auf den Linien 34 und 45 beziehungsweise von den zu einander projectivischen Büscheln mit den Scheiteln 6 und 2 zwei projectivische Punktreihen ausgeschnitten, welche perspectivisch liegen, da sie den Punkt 4 entsprechend gemein haben: die Verbindungslinien entsprechender Punkte also, d. h. die Linien I III, 23, 56 schneiden sich in einem Punkte II, q. e. d.

Mit Hülfe des Pascal'schen Satzes ist es leicht, beliebig viele Punkte einer Curve zweiter Ordnung, von der fünf Punkte (1, 3, 2, 4, 5) gegeben sind, zu construiren: Man lege durch einen der gegebenen Punkte (etwa 5) eine beliebige Gerade (etwa $\overline{5\,\mathrm{II}}$); alsdann ist die Construction ihres zweiten Schnittpunktes (6) mit der Curve unmittel-

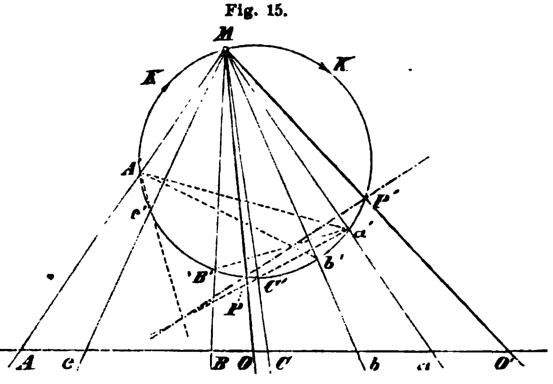
*) Pascal: Essai pour les coniques, 1630; in der Gesammtausgabe seiner Werke. — Brianchon: Journal de l'école polytechnique, cahier 13, 1806.

bar aus Fig. 14_a ersichtlich. Ebenso gibt der Brianchon'sche Satz ein Mittel, beliebig viele Tangenten einer durch fünf ihrer Tangenten gegebenen Curve zweiter Klasse zu finden.

Unsere geometrische Erzeugungsweise der Curven zweiter Ordnung und Klasse gibt ferner die Lösung der Aufgabe: *Es sollen die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch fünf ihrer Punkte gegebenen Curve zweiter Ordnung construirt werden.* Bezeichnen wir nämlich die fünf gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, 4, 5, und legen durch zwei von ihnen, etwa 1 und 2, Strahlen nach den drei andern: 3, 4, 5, so sind dadurch zwei projectivische Strahlbüschel mit den Scheiteln 1 und 2 bestimmt, welche den Kegelschnitt in bekannter Weise erzeugen. Die beiden Büschel schneiden auf der gegebenen Geraden zwei projectivische Punktreihen aus. Ein Punkt der Geraden wird nun gleichzeitig auf der Curve zweiter Ordnung liegen, wenn in ihm zwei entsprechende Strahlen der Büschel sich schneiden, d. h. zwei entsprechende Punkte der Reihen zusammenfallen. Da es immer zwei reelle oder imaginäre Schnittpunkte geben muss (die für eine Tangente nur zusammenfallen), so folgt beiläufig der Satz: *In zwei vereinigt gelegenen, projectivischen Punktreihen gibt es immer zwei Punkte, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen: die sogenannten Doppelpunkte der beiden Reihen*).* Unsere Aufgabe ist somit auf die andere zurückgeführt, *die Doppelpunkte zweier vereinigt gelegenen projectivischen Punktreihen zu construiren.*

Es seien nun die beiden Reihen durch drei ihrer Punkte: A, B, C und a, b, c gegeben, welche bez. einander entsprechen sollen (vgl. Fig. 15). Wir nehmen dann eine beliebige Curve zweiter Ordnung, am einfachsten einen Kreis K, als gezeichnet gegeben an. Von einem Punkte M des Kreises ziehen wir Strahlen nach den Punkten A, B, C, a, b, c, welche den Kreis noch bez. in den Punkten A', B', C', a', b', c' treffen mögen. Betrachten wir dann einmal den Punkt M, einmal einen der drei zuletzt erwähnten Punkte, z. B. A' als Scheitel eines Strahlbüschels, so ist

Fig. 15.



*) Es lässt sich dies übrigens auch leicht direct nachweisen. Vgl. darüber die dritte Abtheilung dieser Vorlesungen.

das Büschel $M(A'B'C')$ projectivisch zu $a'(A'B'C')$
und ebenso
das Büschel $M(a', b', c')$ „ „ $A'(a', b', c')$.

Da nun der Annahme nach $M(A'B'C')$ und $M(a', b', c')$ einander projectivisch sind, so ist auch

$$a'(A'B'C') \text{ projectivisch zu } A'(a', b', c').$$

Die beiden Büschel sind aber in perspectivischer Lage, weil sie den Strahl $A'a'$ entsprechend gemein haben; sie erzeugen also als perspectivischen Durchschnitt eine Gerade, welche den Kreis in den beiden Punkten P, P' treffen möge. Die Strahlen MP, MP' sind dann die Doppelstrahlen der beiden projectivischen Büschel

$$M(A'B'C') \text{ und } M(a', b', c'),$$

oder, was dasselbe ist, der Büschel:

$$M(ABC) \text{ und } M(a, b, c).$$

Ihre Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden (O und O') bestimmen daher die beiden gesuchten Doppelpunkte der auf ihr gegebenen projectivischen Punktreihen; und damit ist unsere Aufgabe gelöst.*)

— Die ausdrückliche Voraussetzung für die Gültigkeit unserer letzten Betrachtungen war, dass die zur Erzeugung benutzten projectivischen Gebilde nicht perspectivisch liegen dürfen. Ist dies dagegen der Fall, so sind die erzeugten Gebilde keine eigentlichen Curven unserer Art mehr. Sind nämlich die beiden Strahlbüschel in perspectivischer Lage, so besteht die durch sie erzeugte Curve zweiter Ordnung aus zwei Geraden: dem perspectivischen Durchschnitte beider Büschel und der Verbindungslinie ihrer Scheitelpunkte. Ebenso besteht die Curve zweiter Klasse aus zwei einzelnen Punkten, wenn die beiden zu ihrer Erzeugung benutzten Punktreihen perspectivisch liegen: dem Schnittpunkte beider und dem Centrum der Perspectivität. Dies erhellt auch analytisch sofort; denn die projectivischen Gebilde haben bei perspectivischer Lage ein Element entsprechend gemein, und wir können die Gleichungen daher in der Form annehmen;

zwei Strahlbüschel:	zwei Punktreihen:
$G + \mu H = 0$	$P + \mu Q = 0$
$G + \mu H' = 0$,	$P + \mu Q' = 0$,

wo dann die Elimination von μ ergibt:

$G(H' - H) = 0$,	$P(Q' - Q) = 0$,

d. h. die Curve zerfällt, wie es sein muss,

*) Ebenso kann man alle Gleichungen zweiten Grades constructiv lösen, wenn man einen gezeichnet gegebenen Kreis zu Hülfe nimmt. Vergl. Steiner: Die geometrischen Constructionen; Berlin 1833.

in die beiden Geraden:	in die beiden Punkte:
$G = 0$	$P = 0$
und: $H' - H = 0$.	und: $Q' - Q = 0$.

Analog kann eine jede Curve n^{ter} Ordnung in n Gerade, eine Curve n^{ter} Klasse in n Punkte zerfallen; und umgekehrt können wir stets die Gesammtheit von n Geraden als eine Curve n^{ter} Ordnung, die von n Punkten als eine Curve n^{ter} Klasse auffassen. Wir werden später die allgemeine Bedingung dafür kennen lernen, dass eine Curve zweiter Ordnung, bez. Klasse in dieser Weise ausartet.

Wir haben oben gesehen, dass man eine Gerade nie als Enveloppe von Geraden, einen Punkt nie als Ort von Punkten darstellen kann, während im Allgemeinen jede Curve in doppelter Weise aufzufassen ist. Beim Zerfallen der Curven tragen also die entstehenden Gebilde einen wesentlichen verschiedenen Charakter, je nachdem man die Curve ursprünglich als Punkt- oder Tangentengebilde ansah; es ist dies hier um so bemerkenswerther, als sonst *die Curven zweiter Ordnung mit denen zweiter Klasse identisch sind*, wie wir sogleich zeigen wollen. Der Beweis knüpft sich an eine Definition von Ordnung und Klasse der Curven, wie man sie in der synthetischen Geometrie anzunehmen pflegt, nämlich:

Eine Curve n^{ter} Ordnung wird von einer Geraden in n (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten.	*An eine Curve n^{ter} Klasse gehen von einem Punkte aus n (reelle oder imaginäre) Tangenten.*

Dies stimmt mit der früheren Definition; denn sei die Curve:

$f(x, y) = 0$	$f(u, v) = 0$
und die Gerade:	und der Punkt:
$ax + by + c = 0,$	$au + bv + c = 0,$

so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades

für y,	für v,
wenn man in $f(x, y)$ setzt:	wenn man in $f(u, v)$ setzt:
$x = -\frac{by + c}{a}.$	$u = -\frac{bv + c}{a}.$

Hieran anknüpfend stellen wir zum Beweise unserer Behauptung die Gleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve 2. Ordnung wirklich in Liniencoordinaten auf, wobei sich dann in der That eine Gleichung zweiten Grades in u, v ergibt.

Die Curve zweiter Ordnung sei gegeben durch die beiden Büschel:

$$G + \mu H = 0, \quad G' + \mu H' = 0,$$

also ihre Gleichung

$$GH' - G'H = 0;$$

die Gleichung der geraden Linie sei:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Wir wollen den Werth von μ bestimmen, welcher den nach den Schnittpunkten der Geraden mit der Curve gehenden Strahlen jener Büschel zukommt. Die Gleichungen der letzteren können wir aufgelöst in der Form schreiben:

$$(g_1 + \mu h_1)x + (g_2 + \mu h_2)y + (g_3 + \mu h_3) = 0$$
$$(g_1' + \mu h_1')x + (g_2' + \mu h_2')y + (g_3' + \mu h_3') = 0.$$

Diese Gleichungen müssen für die gesuchten Schnittpunkte mit der der gegebenen Geraden zusammenbestehen, d. h. es ist für sie:

$$\begin{vmatrix} g_1 + \mu h_1 & g_2 + \mu h_2 & g_3 + \mu h_3 \\ g_1' + \mu h_1' & g_2' + \mu h_2' & g_3' + \mu h_3' \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

eine in μ quadratische, in u, v lineare Gleichung. Ordnen wir nach μ, so wird sie also von der Form:

$$P + \mu Q + \mu^2 R = 0,$$

wo P, Q, R lineare Functionen von u und v sind, und darauf kommt es uns hier allein an. Betrachten wir u, v als Constante, so gibt die Auflösung dieser Gleichung die beiden gesuchten Werthe von μ; nehmen wir jedoch μ constant und u, v variabel an, so ist dies die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Strahlen, welche dem gewählten Werthe von μ in den Büscheln entsprechen, d. h. die Gleichung eines Punktes der Curve zweiter Ordnung. Lassen wir μ nach einander alle möglichen Werthe durchlaufen, so erhalten wir alle Punkte der Curve; diese also erscheint durch unsere Darstellung mit Hülfe eines Parameters μ in die Gesammtheit aller ihrer Punkte aufgelöst: sie ist so, da μ quadratisch vorkommt, gewissermassen als *Punktreihe zweiter Ordnung* aufgefasst, ebenso wie die Gerade in der Gleichung

$$P + \mu Q = 0$$

als lineare Punktreihe vorgestellt wird.

Fügen wir noch die Bedingung hinzu, dass die Linie u, v eine Tangente der Curve ist, so erhalten wir die gesuchte Gleichung derselben in Liniencoordinaten. In diesem Falle muss sie von der Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten werden, d. h. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung in μ müssen einander gleich werden. Diese sind aber:

$$\mu = -\frac{Q}{2R} \pm \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2R},$$

und die Bedingung für ihre Gleichheit ist:

$$Q^2 - 4PR = 0:$$

die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Hier sind P, Q, R linear in u, v, die Gleichung daher in ihnen quadratisch, also*):

Jede eigentliche Curve zweiter Ordnung ist auch von der zweiten Klasse.

Durch eine ganz analoge Betrachtung wird auch der umgekehrte Satz bewiesen. Eine Curve zweiter Klasse sei durch die beiden projectivischen Punktreihen:

$$P + \mu Q = 0$$
$$P' + \mu Q' = 0$$

gegeben. Die von einem durch die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0$$

gegebenen Punkte an dieselbe gehenden Tangenten werden durch die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_1 + \mu q_1 & p_2 + \mu q_2 & p_3 + \mu q_3 \\ p_1' + \mu q_1' & p_2' + \mu q_2' & p_3' + \mu q_3' \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt, worin P, Q, P', Q' durch ihre linearen Ausdrücke in x, y ersetzt sind. Nach μ geordnet wird diese Gleichung von der Form:

$$G + \mu H + \mu^2 K = 0,$$

wo G, H, K in x, y lineare Ausdrücke bedeuten. Es ist dadurch die Curve, wenn wir x, y als variabel, μ als Parameter auffassen, dargestellt in ihrer Entstehung durch die Schaar ihrer Tangenten: *als Strahlbüschel zweiter Klasse.* Fallen die beiden diesem angehörigen Linien, welche durch einen Punkt gehen, zusammen, d. h. die beiden Tangenten an die Curve, so muss der Punkt auf der Curve liegen; die Bedingung dafür:

$$H^2 - 4GK = 0$$

gibt daher *die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten*, und diese ist vom zweiten Grade in x, y; also:

Jede eigentliche Curve zweiter Klasse ist auch von der zweiten Ordnung.

Die Identität beider Arten von Curven berechtigt uns im Folgenden, sie zunächst nur als Punktgebilde zu betrachten; auf die dualistische Behandlungsweise werden wir dann von selbst geführt. Auch werden wir sie, unabhängig davon, wie wir sie gerade auffassen, kurz als *Kegelschnitte* bezeichnen. Sie können nämlich durch den Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel erzeugt werden, und wurden unter diesem Gesichtspunkte schon im Alterthume behandelt.

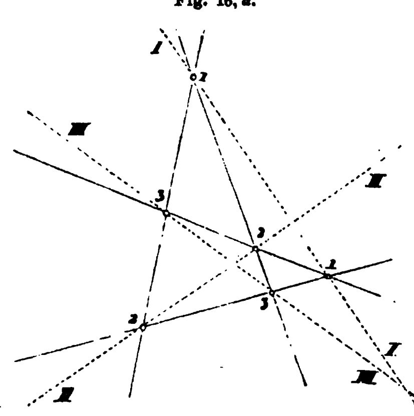
---

*) Auf das Verhalten zerfallender Curven kommen wir später zurück.

VI. Harmonische Theilung.

Unter den ausgezeichneten Werthen, welche ein Doppelverhältniss annehmen kann, ist der für die harmonische Lage bereits oben besonders hervorgehoben. Schon die Betrachtung der einfachsten Verhältnisse zwischen vier beliebigen Punkten oder Geraden führt auf diese Lagenbeziehung; und im Anschlusse hieran ergibt sich eine einfache Construction des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen. Die Combination von vier beliebigen Geraden bezeichnen wir als *vollständiges Vierseit;* ein solches hat *6 Ecken*, welche einander paarweise gegenüberstehen (die Schnittpunkte von je 2 Seiten; die Punkte eines Paares sind in Fig. 16, *a* mit gleichen Zahlen bezeichnet) und *3 Nebenseiten* (in Fig. 16, *a* mit I, II, III bezeichnet), die Verbindungslinien der Punkte eines jener Paare. Für die letzteren gilt dann der Satz:

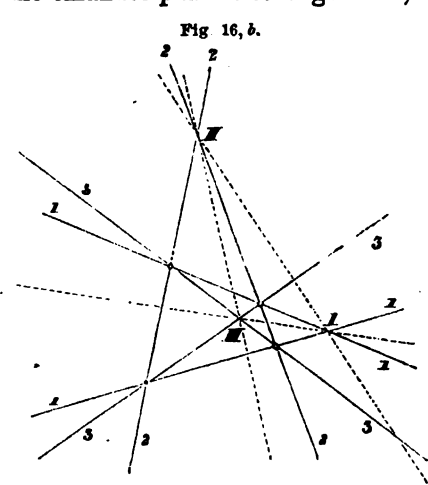
Fig. 16, *a*.



Jede Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird von den beiden andern Nebenseiten und den auf ihr liegenden Ecken harmonisch getheilt.

Analoges gilt für das *vollständige Viereck;* dasselbe hat *6 Seiten*, die einander paarweise zugehören, und *3 Nebenecken* (in Fig. 16, *b* mit den Zahlen I, II, III bezeichnet): *Die Verbindungslinien einer Nebenecke mit den beiden andern Nebenecken liegen harmonisch zu den beiden durch dieselben gehenden Seiten.* Dieser Satz steht dem vorhergehenden nicht nur dualistisch gegenüber, sondern ist eine unmittelbare Folge desselben, und umgekehrt, wie denn überhaupt die Figur des Vierecks mit der des Vierseits im Ganzen identisch ist: beide sind nur verschieden aufgefasst, indem man einmal von vier der 6 Ecken, einmal von vier der 6 Seiten ausgeht.

Fig. 16, *b*.



Der Beweis des angeführten Satzes ergibt sich wieder einfach durch Anwendung der abgekürzten Bezeichnungsweise. Es seien

$$G = 0, \quad H = 0, \quad K = 0, \quad L = 0$$

die Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierecks, wo:

$$\begin{aligned} G &= g_1 x + g_2 y + g \\ H &= h_1 x + h_2 y + h \\ K &= k_1 x + k_2 y + k \\ L &= l_1 x + l_2 y + l. \end{aligned}$$

Man kann dann immer vier Grössen α, β, γ, δ so bestimmen, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma k_1 + \delta l_1 &= 0 \\ \alpha g_2 + \beta h_2 + \gamma k_2 + \delta l_2 &= 0 \\ \alpha g + \beta h + \gamma k + \delta l &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden, denn durch diese drei Gleichungen sind die Verhältnisse von α, β, γ, δ völlig bestimmt; multipliciren wir sie bez. mit x, y, 1 und addiren, so ergibt sich identisch:

$$\alpha G + \beta H + \gamma K + \delta L \equiv 0,$$

oder wenn wir G statt αG, H statt βH, K statt γK, L statt δL schreiben, wodurch die geometrische Bedeutung nicht geändert wird:

$$G + H + K + L \equiv 0$$

Gleiches ergibt sich für vier lineare Functionen in u, v:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0.$$

Also *zwischen vier Geraden, bez. vier Punkten besteht immer eine Identität*, d. h. eine Gleichung, die von den Coordinaten *aller* Punkte, bez. Geraden erfüllt wird; wir können ihr, wenn die vier Geraden nicht demselben Büschel, die vier Punkte nicht derselben Reihe angehören, die Form geben:

$$G + H + K + L \equiv 0$$

(vollständiges Vierseit).

Die drei Nebenseiten sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} G + H &\equiv -(K + L) = 0 \\ G + K &\equiv -(H + L) = 0 \\ G + L &\equiv -(H + K) = 0, \end{aligned}$$

denn die erste von ihnen z. B. geht wegen ihrer beiden Gleichungsformen gleichzeitig durch den Schnitt von $G = 0$, $H = 0$ und durch den von $K = 0$, $L = 0$.

$$P + Q + R + S \equiv 0$$

(vollständiges Viereck).

Die drei Nebenecken sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} P + Q &\equiv -(R + S) = 0 \\ P + R &\equiv -(Q + S) = 0 \\ P + S &\equiv -(Q + R) = 0, \end{aligned}$$

denn die erste von ihnen z. B. liegt wegen ihrer beiden Gleichungsformen gleichzeitig auf der Verbindungslinie von $P = 0$, $Q = 0$ und auf der von $R = 0$, $S = 0$.

Der vierte harmonische Strahl zu $G = 0$, $H = 0$ und $G + H = 0$ ist daher:

$$G - H \equiv (G + K) - (H + K) = 0,$$

d. h. Zu zwei Seiten und der durch ihren Schnittpunkt gehenden Nebenseite geht der vierte harmonische Strahl durch den Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten, oder:

In einem vollständigen Vierseit liegen je zwei Schnittpunkte der Nebenseiten harmonisch zu je zwei Ecken des Vierseits; q. e. d.

Der vierte harmonische Punkt zu $P = 0$, $Q = 0$ und $P + Q = 0$ ist daher:

$$P - Q \equiv (P + R) - (Q + R) = 0,$$

d. h. Zu zwei Ecken und der auf ihrer Verbindungslinie liegenden Nebenecke liegt der vierte harmonische Punkt auf der Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken, oder:

In einem vollständigen Viereck werden die Verbindungslinien je zweier Nebenecken von je zwei Seiten harmonisch getheilt; q. e. d.

Es ergibt sich hieraus die Construction des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen von selbst. Seien nämlich auf einer Geraden drei Punkte: 1, 2, 3 gegeben, und soll ein Punkt 4, der zu ihnen harmonisch liegt und mit 2 das dem Paare 1, 3 zugeordnete Paar bildet, construirt werden, so ziehe man durch 1 und 3 zwei beliebige Gerade, verbinde deren Schnittpunkt mit 2 und ziehe durch 1 und 3 zwei andere Gerade, welche sich auf dieser Verbindungslinie schneiden. Letztere treffen die zuerst gezogenen Linien in zwei Punkten, und die Verbindungslinie dieser schneidet auf der gegebenen Geraden den gesuchten Punkt 4 aus. Die Richtigkeit der Construction erhellt sofort aus der Fundamentaleigenschaft des vollständigen Vierseits, welches hier von den vier durch 1 und 3 gezogenen Strahlen gebildet wird. Ebenso findet man zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen; man braucht dieselben nur durch eine vierte Gerade zu schneiden und zu den drei auf diesen so bestimmten Schnittpunkten in angegebener Weise den vierten harmonischen Punkt zu suchen, wobei man die drei Strahlen selbst sofort benutzen kann.

Das principielle Interesse, welches diese Constructionen bieten, liegt darin, dass wir allein durch Ziehen von geraden Linien, ohne Anwendung des Cirkels, zum Ziele gelangen. Eine jede Aufgabe, welche nur *eine* Lösung zulässt, muss sich in dieser Weise lösen lassen; erst wenn dies gelungen ist, dürfen wir sie als vollständig gelöst betrachten. Dabei ist jede Anwendung anderer Hülfsmittel, als der durch das Verbinden von Punkten oder durch das Schneiden von Geraden gegebenen, zu vermeiden, zumal jede Benutzung von Strecken und Winkelgrössen, wo es sich nur um Lagenbeziehungen handelt. Eine solche bringt in die Lösung Elemente hinein, welche der Natur der Aufgabe nicht entsprechen.

VII. Natur des Coordinatensystems.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein willkürlich gewähltes Werkzeug zur Behandlung von Aufgaben; die Wahl derselben, d. h. die Lage der Coordinatenaxen in der Ebene, ist an und für sich gleichgültig, die geometrischen Eigenschaften der behandelten Figuren müssen unabhängig von ihr bestehen. In der That fanden wir bisher in der abgekürzten Bezeichnungsweise ein Mittel, um unsere Untersuchungen ohne Rücksicht auf die Lage des Coordinatensystems durchzuführen. Gleichwohl wird im Folgenden die Betrachtung oft durch geschickte Wahl desselben wesentlich erleichtert, und es bietet sich dadurch die Aufgabe, zu untersuchen, wie man aus einer Lage des Coordinatensystems zu einer anderen übergehen kann, wie sich die vorliegenden Gleichungen durch Einführung neuer Coordinatenaxen ändern; wir werden dadurch zur Lehre von der sogenannten *Coordinatentransformation* geführt. Gleichzeitig werden wir eine wesentliche *Verallgemeinerung* unseres Coordinatensystems kennen lernen, wie dieselbe später von uns fast ausschliesslich gebraucht werden soll.

Verrücken wir die Axen des Coordinatensystems nur parallel zu sich selbst und bezeichnen die Coordinaten eines Punktes x, y in Bezug auf die neuen Axen durch x', y', so ergeben sich für Einführung dieser neuen Veränderlichen unmittelbar die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b, \end{aligned}$$

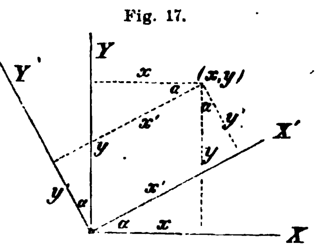
oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}$$

wo a, b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das alte System sind.

Drehen wir dagegen die Axen nur um den Anfangspunkt und bezeichnet α den Winkel der neuen X-Axe gegen die alte, so ist (vgl. Fig. 17)

Fig. 17.



$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \sin\alpha \\ y' &= - x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{aligned}$$

Führen wir endlich beide Bewegungen zusammen aus, so ergibt die Combination der Gleichungen (1) und (2):

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}$$

oder umgekehrt:

$$\begin{aligned} x' &= \quad (x - a) \cos\alpha + (y - b) \sin\alpha \\ y' &= -(x - a) \sin\alpha + (y - b) \cos\alpha \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen gemeinsam ist ihr linearer Charakter, und das ist für uns wesentlich; die alten Coordinaten drücken sich *linear* und ohne Nenner durch die neuen aus, und ebenso diese durch jene. Einen gleichen Charakter würde das Princip der Dualität für die Transformationsgleichungen der Liniencoordinaten fordern; thatsächlich erscheinen diese jedoch zunächst in anderer Form, und dieser Umstand wird uns das Cartesische Coordinatensystem als für unsere Forderungen ungenügend erscheinen lassen, wir werden es deshalb durch ein allgemeineres ersetzen.

Als Liniencoordinaten werden die Coëfficienten von x, y in dem Ausdrucke

$$ux + vy + 1$$

bezeichnet; geht dieser also durch eine Transformation mittelst der Gleichungen (1), (2) oder (3) in die Form:

$$px' + qy' + r$$

über, so sind

$$\frac{p}{r} = u', \quad \frac{q}{r} = v'$$

die neuen Liniencoordinaten. Wenden wir zunächst die Gleichungen (1) an, so wird

$$ux + vy + 1 = ux' + vy' + (au + bv + 1),$$

also sind die Transformationsgleichungen für eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u' &= \frac{u}{au + bv + 1} \\ v' &= \frac{v}{au + bv + 1}. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Substitution ergibt:

$$u'x' + v'y' + 1 = u'x + v'y + (-au - bv + 1),$$

also:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{-au - bv + 1} \\ v &= \frac{v'}{-au - bv + 1}. \end{aligned}$$

Für eine Drehung der Coordinatenaxen (Gleichung (2)) erhalten wir:

$$ux + vy + 1 = (u \cos\alpha + v \sin\alpha)\, x' + (-u \sin\alpha + v \cos\alpha)\, y' + 1,$$

also:

$$(5) \qquad \begin{aligned} u' &= \quad u \cos\alpha + v \sin\alpha \\ v' &= -u \sin\alpha + v \cos\alpha \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} u &= u' \cos\alpha - v' \sin\alpha \\ v &= u' \sin\alpha + v' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Die Zusammensetzung beider Transformationen endlich ergibt:

$$ux + vy + 1 = (u \cos\alpha + v \sin\alpha)\, x' + (-u \sin\alpha + v \cos\alpha)\, y' + (au + bv + 1),$$

also:

$$(6) \qquad \begin{aligned} u' &= \frac{u \cos\alpha + v \sin\alpha}{au + bv + 1}, \\ v' &= \frac{-u \sin\alpha + v \cos\alpha}{au + bv + 1}, \end{aligned}$$

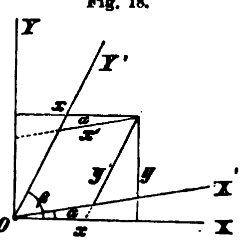
oder aufgelöst:

$$u = \frac{u' \cos\alpha - v' \sin\alpha}{-(a \cos\alpha + b \sin\alpha)\, u' + (a \sin\alpha + b \cos\alpha)\, v'}$$

$$v = -\frac{u' \sin\alpha + v' \cos\alpha}{-(a \cos\alpha + b \sin\alpha)\, u' + (a \sin\alpha + b \cos\alpha)\, v'}.$$

Die so für die Transformation der Liniencoordinaten aufgestellten Formeln tragen zunächst einen anderen Charakter, als die für Punktcoordinaten gefundenen, denn in ersteren tritt rechts ein Nenner auf, welcher gleich Null gesetzt, die Gleichung des neuen Anfangspunktes gibt, während in letzteren ein solcher Nenner nicht vorkommt. Diese Formeln sind daher dem Principe der Dualität, welches gleichmässige Umformung der Punkt- und Liniencoordinaten fordert, nicht entsprechend, und es liegt dies daran, dass das *Cartesische* Coordinatensystem ein undualistisch particularisirter Fall eines allgemeineren ist. Der erste Versuch, dasselbe zu erweitern, bestand in der Einführung *schiefwinkliger Coordinaten*, welche parallel zu zwei beliebigen, sich unter irgend welchem Winkel schneidenden Axen gemessen werden. Man gelangt zu ihnen (vgl. Fig. 18), von rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgehend, unmittelbar durch die Gleichungen:

Fig. 18.



$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta, \end{aligned}$$

wo $(\beta - \alpha)$ der von den neuen Axen eingeschlossene Winkel ist. Alle Formeln behalten jedoch durch Einführung dieser Coordinaten ganz den Typus der rechtwinkligen, und es wird deshalb durch dieselben für unsere Anschauungsweise nichts Neues gewonnen. Die Verallgemeinerung, welche uns zum Ziele führen wird, besteht vielmehr in Folgendem.

Wir legen drei beliebige Gerade, welche nicht durch einen Punkt gehen, zu Grunde und denken uns einen Punkt durch seine Abstände p_1, p_2, p_3 von den gewählten drei Linien definirt. Diese drei Bestimmungsstücke sind nicht von einander unabhängig, schon zwei derselben genügen zur Festlegung eines Punktes. Jene drei Grössen sind aber nur zweien äquivalent, wenn wir nicht die Abstände selbst, sondern nur ihre Verhältnisse benutzen; in der That werden die drei Fundamentalgeraden dann gleichmässig angewandt, und wir können auch, wenn wir wollen, die Abstände selbst eindeutig bestimmen. Das letztere ist jedoch bei Anwendung dieser Coordinaten niemals erforderlich; wir brauchen sogar nicht die senkrechten Abstände zu wählen, sondern können diese in beliebiger Richtung von dem betreffenden Punkte aus messen, d. h. die senkrechten Abstände noch mit beliebigen Constanten multipliciren. Wir geben daher die folgende Definition für *diese Dreieckscoordinaten:*

Die Coordinaten eines Punktes sind drei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände des Punktes von den Seiten eines Dreiecks, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten.

Bezeichnen wir die drei Coordinaten des Punktes durch x_1, x_2, x_3, so haben wir also nach dieser Definition:

$$\varrho x_1 = p_1 \cdot \varkappa_1$$
$$\varrho x_2 = p_2 \cdot \varkappa_2$$
$$\varrho x_3 = p_3 \cdot \varkappa_3$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die zunächst willkürlichen Constanten sind, der Proportionalitätsfactor ϱ dagegen völlig unbestimmt bleibt, und nur andeutet, dass die absoluten Werthe der 3 Coordinaten völlig gleichgültig sind; wir können die Gleichungen deshalb auch in der Form schreiben:

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 \varkappa_1 : p_2 \varkappa_2 : p_3 \varkappa_3 .$$

Insbesondere sind die drei Coordinaten der drei Ecken des Fundamentaldreiecks bez. gegeben durch:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad x_1 = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

während in diesen drei Fällen bez. x_1, x_2, x_3 völlig unbestimmte Werthe haben, die nur nicht verschwinden dürfen. Die auf einer der drei Seiten liegenden Punkte genügen bez. den Bedingungen

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0,$$

d. h. dies sind die Gleichungen der drei Seiten in Dreieckscoordinaten.

Ganz analog führen wir *homogene Liniencoordinaten* durch folgende Definition ein:

Die Coordinaten einer Geraden sind drei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände der Geraden von den Ecken des Coordinatendreiecks, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten.

Die Gleichungen zur Definition der Liniencoordinaten sind also, wenn q_1, q_2, q_3 jene Abstände, λ_1, λ_2, λ_3 die beliebigen Constanten bedeuten:

$$\sigma u_1 = q_1 \lambda_1$$
$$\sigma u_2 = q_2 \lambda_2$$
$$\sigma u_3 = q_3 \lambda_3$$

wo σ der willkürliche Proportionalitätsfactor ist. Die Grössen λ werden wir so wählen, dass sie von den x in gewisser Abhängigkeit sind, nämlich so, dass die vereinigte Lage von Punkt und Gerade durch die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

angegeben wird; die Art dieser Abhängigkeit werden wir sogleich erkennen, wenn wir den Zusammenhang der Dreieckscoordinaten mit den rechtwinkligen untersuchen, wo dann die erwähnte Bedingung in der Form

$$ux + vy + 1 = 0$$

auftreten muss. Es seien die Gleichungen der drei Seiten, bez. der drei Ecken des Fundamentaldreiecks in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(1) \quad \begin{array}{l|l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 & A_1 u + B_1 v + C_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 & A_2 u + B_2 v + C_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0, & A_3 u + B_3 v + C_3 = 0, \end{array}$$

wo die A, B, C die Unterdeterminanten der Determinante

$$r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

sind, z. B.:

$$A_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3, \quad B_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3, \quad C_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3;$$

die a, b, c hingegen sind ganz willkürlich; nur darf der Fall $r = 0$ nicht eintreten, da dann die der Geraden durch einen Punkt gehen würden, was wir ausgeschlossen haben. Nach früheren Erörterungen ergeben die Gleichungen (1) für die Abstände eines Punktes x, y von den drei Seiten, oder einer Geraden u, v von den drei Ecken die Ausdrücke (vergl. p. 24):

$$p_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \qquad q_1 = \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{C_1 \sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$p_2 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\,. \qquad q_2 = \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{C_2 \sqrt{u^2 + v^2}}\,.$$

$$p_3 = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \qquad q_3 = \frac{A_3 u + B_3 v + C_3}{C_3 \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Die p müssen wir nun mit beliebigen Constanten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ multipliciren, um die Dreieckscoordinaten des betreffenden Punktes zu erhalten. Wir können aber, ohne eine specielle Annahme zu machen, setzen:

$$\varkappa_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \varkappa_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

denn eine weitere Aenderung der Constanten a_1, b_1, c_1 etc. um einen gemeinsamen Factor würde auf die Bedeutung der Gleichungen (1) doch ohne Einfluss bleiben. Um auch die Coordinaten einer Geraden in einfacher Gestalt zu erhalten, setzen wir:

$$\lambda_1 = C_1\,, \quad \lambda_2 = C_2\,, \quad \lambda_3 = C_3\,,$$

wodurch auch die oben gestellte Forderung für die Abhängigkeit der λ von den $\varkappa$ erfüllt ist, und lassen den gemeinsamen Nenner $\sqrt{u^2 + v^2}$ in den Proportionalitätsfactor σ eingehen. Dadurch ergibt sich:

$$(2) \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1 \\ \sigma u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2 \\ \sigma u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3\,. \end{aligned}$$

Sowohl für Punkt als Gerade kann man also *von rechtwinkligen zu Dreieckscoordinaten übergehen, indem man diese proportional setzt zu linearen Ausdrücken in jenen mit ganz beliebigen Coëfficienten, deren Determinante nur nicht verschwindet.* Um umgekehrt von Dreieckscoordinaten zu rechtwinkligen zu gelangen, haben wir die Gleichungen (2) für u, v, 1 aufzulösen, wodurch man findet:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} \\ y &= \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3}{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3} \\ v &= \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3}{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3}\,. \end{aligned}$$

In diesen Formeln findet sich keine Spur einer Verletzung des Dualitätsprincips; *für Punkt und Gerade sind die rechtwinkligen Coordinaten gleich linearen Ausdrücken in den Dreieckscoordinaten mit gemeinsamen Nenner.* Aus den Gleichungen (2) ergibt sich nun:

$$\varrho \,.\, \sigma\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = \Sigma\,(a_i x + b_i y + c_i)\,(A_i u + B_i v + C_i)\,,$$

wo die Summe über den Index i von $i = 1$ bis $i = 3$ zu nehmen ist, oder wegen der drei Gleichungen:

$$a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i = r\,, \qquad (i = 1,\, 2,\, 3):$$
$$\varrho \cdot \sigma\, (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = r\, (ux + vy + 1).$$

Die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade wird also in der That durch

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{4}$$

ausgedrückt, und dies ist Folge der Bestimmung, welche wir für die Constanten λ_1, λ_2, λ_3 oben getroffen haben. Hätten wir dieselben anders gewählt, so wären in diese Gleichung noch Coëfficienten eingetreten. Während also durch Aenderung der absoluten Werthe der a, b, c die Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ ganz willkührlich bestimmt werden können, sind die λ damit zugleich völlig festgesetzt, denn es war

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 = C_1 \\ \lambda_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 = C_2 \\ \lambda_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 = C_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Um das rechtwinklige Coordinatensystem als besonderen Fall des hier eingeführten allgemeineren aufzufassen, nehmen wir, was stets erlaubt und durch eine einfache Transformation zu erreichen ist, zwei der drei Coordinatenseiten zu einander rechtwinklig an. Sind dann x, y bez. die Abstände eines Punktes von diesen beiden Seiten ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), und p sein Abstand von der dritten Seite (vgl. Fig. 19), so haben wir:

Fig. 19.

$$\varrho x_1 = \varkappa_1 x\,, \quad \varrho x_2 = \varkappa_2 y\,, \quad \varrho x_3 = \varkappa_3 p\,,$$

oder wenn wir

$$\varkappa_1 = 1\,, \quad \varkappa_2 = 1\,, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{q}$$

setzen, wo q die Entfernung der Seite $x_3 = 0$ vom Anfangspunkte bedeutet:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= x \\ \varrho x_2 &= y \\ \varrho x_3 &= \frac{p}{q}\,. \end{aligned}$$

Lassen wir nun die dritte Seite, parallel zu sich, in's Unendliche, fortrücken, so convergirt $\frac{p}{q}$ gegen Eins, denn p unterscheidet sich von dem unbegrenzt wachsenden q immer nur um eine endliche Grösse so lange der betrachtete Punkt nicht selbst unendlich fern liegt. Es ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1\,,$$

d. h. wir leiten aus Gleichungen in Dreieckscoordinaten solche in rechtwinkligen ab, indem wir eine der Coordinaten = 1 annehmen und die beiden anderen durch x, y ersetzen, wie auch aus den Gleichungen (2) hervorgeht, wenn man $a_1 = b_2 = c_3$ nimmt und die übrigen Coëfficienten verschwinden lässt. Der Ausdruck

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

geht dabei bis auf einen Factor in

$$u_1 x + u_2 y + u_3$$

über, d. h. wenn wir auch $u_3 = 1$ setzen (und das ist bei blossen Verhältnisszahlen im Allgemeinen erlaubt), so werden u_1, u_2 die rechtwinkligen Liniencoordinaten. Letzteres lässt sich auch geometrisch in folgender Weise einsehen: verfügen wir über die Coëfficienten der Gleichungen (2) in angegebener Weise, so wird wegen (5):

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = -1 : -1 : \infty$$

also:

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{q_1}{q_2} : -\frac{q_2}{q_3} : \infty \cdot$$

Bezeichnen wir ferner mit p_1, p_2 die Abstände der Schnittpunkte der betreffenden Geraden mit den zu einander senkrechten Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ von den Ecken $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ des Coordinatendreiecks, mit a, b die Abstände dieser Punkte von der Ecke $u_3 = 0$, so ist:

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{p_1}{a}, \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{p_2}{b}.$$

Rückt nun die dritte Seite $x_3 = 0$ wieder in's Unendliche, so wird in der Grenze

$$p_1 = p_2 = \infty,$$

und dann ergibt sich, wie bei rechtwinkligen Coordinaten:

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : 1.$$

Durch specielle Wahl der willkürlichen Constanten können wir also in einfacher Weise von Dreieckscoordinaten zu rechtwinkligen übergehen. *) Die Art dieser Bestimmung lässt uns nunmehr auch erkennen, weshalb wir oben die *negativen* reciproken Abstände als Coordinaten einer Geraden einführten, denn nur dadurch geht die Gleichung (4), wenn man

*) Ebenso einfach kann man von Dreieckscoordinaten zu den oben berührten schiefwinkligen übergehen; man hat dann zu setzen:

$$k_1 = k_2 = \sin w, \quad k_3 = \frac{1}{q},$$

wo w der von den Coordinatenaxen eingeschlossene Winkel ist.

$$x_1 = x \qquad u_1 = u$$
$$x_2 = y \qquad u_2 = v$$
$$x_3 = 1 \qquad u_3 = 1$$

setzt, unmittelbar in

$$ux + vy + 1 = 0$$

über.

Der umgekehrte Uebergang wurde durch die Gleichungen (3) vermittelt. Da hier die x, y und die u, v lineare, homogene Functionen mit gemeinsamen Nenner werden, so wird *der Grad einer Gleichung* in den Veränderlichen *durch Einführung der neuen Coordinaten niemals erhöht und niemals erniedrigt*, der Charakter einer solchen aber insofern wesentlich geändert, als sie durch Multiplication mit einer betreffenden Potenz des gemeinsamen Nenners in eine *homogene Gleichung zwischen 3 Variabeln übergeht.**) Nur *homogene* Gleichungen derselben haben in der That eine geometrische Bedeutung, da nur die Verhältnisse der x bestimmt sein dürfen. Insbesondere also ist die *lineare* homogene Gleichung:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden mit den Coordinaten m_1, m_2, m_3, und

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 = 0$$

die eines Punktes mit den Coordinaten m_1, m_2, m_3; und von dieser Form ist die Gleichung jeder Geraden, bez. jedes Punktes.

Unter den Gleichungen ersten Grades ist eine besonders ausgezeichnet, nämlich die, deren linke Seite beim Uebergange zu *Cartesischen* Coordinaten (Gl.(3)) den Nenner gibt:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0.$$

Für alle Punkte dieser Geraden und nur für diese wird $x = \infty$, $y = \infty$; sie enthält also alle unendlich fernen Punkte der Ebene. Da somit die Gesammtheit dieser Punkte durch eine lineare Gleichung dargestellt wird, werden wir im Folgenden stets von einer *unendlich fernen Geraden* sprechen;**) es soll dadurch jedoch nur diese analytische Thatsache, aber keinerlei metaphysische Auffassung ausgedrückt werden. Die Einführung dieser Bezeichnung erlaubt uns dann, manche Sätze einfacher zu beweisen und auszusprechen, indem wir mit der unendlich fernen Geraden wie mit einer wirklich vorhandenen operiren. Es folgt

*) Homogene Coordinaten finden sich zuerst bei Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827); aber sie wurden für die Geometrie erst von wesentlicher Bedeutung durch Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5, 1829), indem derselbe Anwendungen im Sinne der Theorie der homogenen Functionen gab.

**) Diese so fruchtbare Ausdrucksweise wurde von Poncelet eingeführt: Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822; p. 49 und 53.

hieraus z. B. wieder der schon früher hervorgehobene Satz, dass *eine gerade Linie nur einen unendlich fernen Punkt* hat (vgl. p. 33), denn jede Gerade wird von einer anderen Geraden nur in einem Punkte geschnitten. Ebenso werden wir von zwei unendlich fernen Punkten einer Curve zweiter Ordnung, oder allgemein von n unendlich fernen Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung sprechen.

Die oben erhaltenen Transformationsformeln waren sämmtlich linear in den neuen und in den alten Variabeln, und dies war für dieselben charakteristisch. Da nun bereits der Uebergang vom rechtwinkligen Coordinatensystem zum Dreieckssystem auf beliebige lineare Functionen führt, so können wir nichts Allgemeineres erhalten, wenn wir in den Ausdrücken (2) die rechtwinkligen Coordinaten mittelst Gleichungen von der Form (3) auf ein zweites Dreieckssystem beziehen und so den Uebergang von einem Dreieckssystem zu einem anderen vermitteln. Sind also x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3 die Punkt- bez. Liniencoordinaten in dem einen System; y_1, y_2, y_3; v_1, v_2, v_3 die in dem andern, so werden die ersteren proportional zu linearen homogenen Functionen der letzteren, deren Determinante, nach Analogie mit Früherem, nur nicht verschwinden darf. Ferner muss

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

bis auf einen Factor in

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$$

übergehen. Daher sind zusammengehörige Transformationsgleichungen

für Punktcoordinaten:	für Liniencoordinaten:
$\varrho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$	$\sigma u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3,$
(6) $\varrho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$	$\sigma u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3,$
$\varrho y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$	$\sigma u_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3,$

(wo die Determinante der a_{ik} nicht verschwinden darf). Es enthalten hier die Gleichungen, welche die neuen Punktcoordinaten (y) durch die alten (x) ausdrücken, dieselben Coëfficienten, wie die Gleichungen, welche die alten Liniencoordinaten (u) durch die neuen (v) darstellen, nur *transponirt;* d. h. aus der Determinante der links stehenden Gleichungen erhält man die der rechts stehenden, wenn man die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht; beide Determinanten sind demnach identisch. Die Auflösung des Systems (6) ergibt

für Punktcoordinaten:	für Liniencoordinaten:
$\mu x_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3$	$\nu v_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3$
(7) $\mu x_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3$	$\nu v_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3$
$\mu x_3 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3.$	$\nu v_3 = A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3.$

Es bedeuten hier die A_{ik} die zweigliedrigen Unterdeterminanten von der Determinante der Substitution:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen erkennt man sofort die geometrische Bedeutung der Substitutionscoëfficienten. Da nämlich

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0,$$
$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

bez. die Gleichungen der Seiten und Ecken des neuen Coordinatendreiecks darstellen, so sind bez. *die Coordinaten der neuen*

Dreiecksseiten:	*Dreiecksecken:*
$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$	$A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}$
$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$	$A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23}$
$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$,	$A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33}$,

und ebenso *in Bezug auf das neue Dreieck die Coordinaten der alten*

Dreiecksseiten:	*Dreiecksecken:*
$A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}$	$a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31}$
$A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}$	$a_{12} \quad a_{22} \quad a_{32}$
$A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}$.	$a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33}$.

Das neue Coordinatensystem, welches wir soeben untersucht haben, zeigt sich besonders geeignet zur Behandlung solcher Probleme, in denen von Massverhältnissen nicht die Rede ist, welche sich also nur auf Lagenbeziehungen ausdehnen. Wenn wir daher, wie es im Folgenden geschehen soll, unsere früheren Betrachtungen über Punkte und Strahlen kurz in Dreieckscoordinaten wiederholen sollen, so müssen wir uns dabei auf diejenigen beschränken, welche eine vollkommen dualistische Uebertragung gestatten.

Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade war:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Es ist dies nunmehr auch die allgemeinste Form für die Gleichung eines Punktes oder einer Geraden, je nachdem man die x oder die u als constant ansieht; in rechtwinkligen Coordinaten dagegen mussten wir neben der Bedingung für die vereinigte Lage:

$$ux + vy + 1 = 0$$

noch bez. die Gleichungen

$$Ax + By + C = 0, \qquad Au + Bv + C = 0$$

als die allgemeinsten für einen Punkt bez. eine Linie untersuchen. — Wir behandeln im Ausschlusse hieran die folgende Aufgabe:

Es soll die Gleichung der Verbindungslinie u von zwei gegebenen Punkten y und z aufgestellt werden.

Ist x ein Punkt auf dieser Linie, so haben wir:

$$
(8)\quad \begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0 \\ u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 &= 0 . \end{aligned}
$$

Es soll die Gleichung des Schnittpunktes x von zwei gegebenen Geraden v und w aufgestellt werden.

Ist u ein Strahl durch diesen Punkt, so haben wir:

$$
\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 &= 0 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 &= 0 . \end{aligned}
$$

Die Elimination von u bez. von x hieraus ergibt

als Gleichung der Geraden:

$$
(9)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .
$$

als Gleichung des Punktes:

$$
\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 .
$$

Es sind also die Coordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte y, z:

$$
(10)\quad \begin{aligned} \mu u_1 &= y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ \mu u_2 &= y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ \mu u_3 &= y_1 z_2 - z_1 y_2 . \end{aligned}
$$

Es sind also die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden v, w:

$$
\begin{aligned} \mu x_1 &= v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ \mu x_2 &= v_3 w_1 - w_3 v_1 \\ \mu x_3 &= v_1 w_2 - w_1 v_2 . \end{aligned}
$$

Die Gleichungen (9) kann man in die folgenden auflösen, welche uns die Coordinaten eines beweglichen Punktes der Geraden bez. eines beweglichen Strahles durch den Punkt darstellen:

Punktreihe

$$
(11)\quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 + \lambda z_1 \\ \varrho x_2 &= y_2 + \lambda z_2 \\ \varrho x_3 &= y_3 + \lambda z_3 . \end{aligned}
$$

Strahlbüschel

$$
\begin{aligned} \varrho u_1 &= v_1 + \lambda w_1 \\ \varrho u_2 &= v_2 + \lambda w_2 \\ \varrho u_3 &= v_3 + \lambda w_3 . \end{aligned}
$$

Hier ist λ wieder ein Parameter. Multipliciren wir die Gleichungen links bez. mit u_1, u_2, u_3, die rechts bez. mit x_1, x_2, x_3 und addiren auf beiden Seiten, so erhalten wir

die Gleichung eines beweglichen Punktes der Reihe:

$$
P + \lambda Q = 0 ,
$$

die Gleichung eines beweglichen Strahles des Büschels:

$$
G + \lambda H = 0 ,
$$

wo Q linear in den u; G, H linear in den x sind, nämlich:

$$
\begin{aligned} P &= u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \\ Q &= u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 . \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned} G &= v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ H &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 . \end{aligned}
$$

In dieser Darstellung hat der Parameter λ dieselbe Bedeutung, wir früher λ und μ beim Gebrauche von rechtwinkligen Coordinaten;

er gibt nämlich wieder bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des betreffenden Elementes von den beiden festen Grundelementen. Man überzeugt sich hiervon leicht, indem man die Gleichungen (11) und (3) combinirt. Dadurch erhält man*):

$$x = \frac{\Sigma A_i y_i + \lambda \Sigma A_i z_i}{\Sigma C_i y_i + \lambda \Sigma C_i z_i} \qquad u = \frac{\Sigma a_i v_i + \lambda \Sigma a_i w_i}{\Sigma c_i v_i + \lambda \Sigma c_i w_i}$$

$$y = \frac{\Sigma B_i y_i + \lambda \Sigma B_i z_i}{\Sigma C_i y_i + \lambda \Sigma C_i z_i}, \qquad v = \frac{\Sigma b_i v_i + \lambda \Sigma b_i w_i}{\Sigma c_i v_i + \lambda \Sigma c_i w_i},$$

wo die Summen (die von $i = 1$ bis $i = 3$ zu nehmen sind) nur gegebene constante Grössen enthalten; daher wird die Gleichung des Punktes x, y bez. des Strahles u, v in rechtwinkligen Coordinaten von der Form:

$$P + \lambda Q = 0, \qquad G + \lambda H = 0,$$

d. h. wie früher, linear in λ, und dadurch ist unsere Behauptung bewiesen. Auch erhalten wir wieder für $\lambda = 0$ den Punkt y, resp. den Strahl v und für $\lambda = \infty$ den Punkt z, resp. den Strahl w. Alle an die geometrische Bedeutung des Parameters angeknüpften Betrachtungen bleiben somit auch unabhängig vom Coordinatensysteme bestehen, d. h. *alle Sätze über Doppelverhältnisse und über projectivische Beziehungen behalten denselben analytischen Ausdruck.* Insbesondere also die Relationen zwischen projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln und die Erzeugung der Kegelschnitte aus denselben. Wir wenden uns nunmehr zum genaueren Studium der letzteren Curven.

---

*) Es wird kein Missverständniss möglich sein, wenn in diesen Gleichungen die Buchstaben y, v einmal als rechtwinklige Coordinaten, einmal (mit Indices versehen) als Dreieckscoordinaten auftreten.

Zweite Abtheilung.

Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

I. Schnittpunkte mit einer Geraden. — Polarentheorie.

Die Curven zweiter Ordnung und Klasse, deren geometrische Erzeugungsweise uns schon früher beschäftigt hat, wollen wir nun untersuchen, indem wir nicht von dieser Entstehungsweise, sondern von der allgemeinsten homogenen Gleichung zweiten Grades in x_1, x_2, x_3 ausgehen. Wir werden dabei finden, dass es keine eigentliche Curven zweiter Ordnung gibt ausser den schon in unseren einleitenden Aufgaben erwähnten, nämlich: Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es können aber, wie bereits bei Gelegenheit hervorgehoben, uneigentliche Curven auftreten, welche durch Zerfallen der Gleichung 2. Grades in zwei lineare Factoren entstehen; dies führt dann wieder zum Geraden- oder zum Punktepaar.

Die allgemeinste Gleichung zweiten Grades werden wir erhalten, wenn wir die Quadrate und zweigliedrigen Producte der Veränderlichen:

$$x_1^2, \quad x_2^2, \quad x_3^2, \quad x_1 x_2, \quad x_1 x_3, \quad x_2 x_3$$

mit beliebigen von einander unabhängigen Coëfficienten multiplicirt addiren. Diese Coëfficienten setzen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, als reelle Grössen voraus. Wir wählen für sie denselben Buchstaben und unterscheiden die Coëfficienten der verschiedenen Glieder durch zugefügte Indices, welche den in sie multiplicirten Variabeln entsprechen; wir fügen ihnen ferner noch den Factor 2 hinzu, wenn in dem betreffenden Gliede zwei verschiedene Veränderliche mit einander multiplicirt sind. Wir schreiben also die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in der Form:

$$(1) \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0.$$

Die Vortheile dieser Schreibweise werden im Laufe unserer Darstellung von selbst klar werden. Das Hinzufügen der Zahlenfactoren empfiehlt sich besonders, da wir den Ausdruck (1) auch kürzer in der symbolischen Form:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0$$

schreiben können; wir müssen uns dann nur vorstellen, dass wir statt eines Productes $a_i a_k$ den Coëfficienten a_{ik} $(= a_{ki})$ zu setzen haben, also a_{11} statt $a_1 a_1$, a_{23} statt $a_2 a_3$, u. s. f.

An die Spitze der Theorie stellen wir die Aufgabe, *die Schnittpunkte der Verbindungslinie zweier Punkte y und z mit dem Kegelschnitte* (1) *zu bestimmen.* Die Coordinaten eines Punktes dieser Linie sind nach dem Früheren:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda z_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda z_2 \\ x_3 &= y_3 + \lambda z_3 ; \end{aligned}$$

und wir haben den Werth des Parameters λ zu suchen, für welchen die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Gleichung (1) genügen, d. h. wir müssen setzen:

$$\{(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \lambda (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)\}^2 = 0 ,$$

oder entwickelt:

$$\lambda^2 R + 2 \lambda Q + P = 0 , \tag{2}$$

wo nun P, Q, R bestimmt sind durch:

$$\begin{aligned} P &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 \\ R &= (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 \\ Q &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3) \\ &= \quad z_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) \\ &\quad + z_2 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) \\ &\quad + z_3 (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3) , \end{aligned} \tag{3}$$

oder wenn wir uns der Bezeichnungsweise der Differentialrechnung bedienen wollen:

$$\begin{aligned} Q &= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial P}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial P}{\partial y_3} z_3 \right\} \\ &= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial R}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial R}{\partial z_2} y_2 + \frac{\partial R}{\partial z_3} y_3 \right\} . \end{aligned}$$

P und R entstehen also, wenn man in die linke Seite der Gleichung des Kegelschnitts (1) die Coordinaten y bez. z statt x einsetzt; Q dagegen ist aus den y und z symmetrisch zusammengesetzt und in beiden linear. Die Auflösung der quadratischen Gleichung (2) nach λ ergibt:

$$\lambda = - \frac{Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}}{R} ,$$

und daher sind *die Coordinaten der beiden Schnittpunkte,* wenn wir den gemeinsamen Nenner R in den Proportionalitätsfactor ϱ eingehen lassen:

$$\varrho x_1 = R y_1 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_1$$
$$\varrho x_2 = R y_2 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_2$$
$$\varrho x_3 = R y_3 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_3 .$$

Wir haben somit auf der Geraden yz vier Punkte: die gegebenen mit den Coordinaten y_i und z_i und die soeben gefundenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, deren Coordinaten $y_i + \lambda z_i$ und $y_i + \mu z_i$ sein mögen, wo λ und μ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (2) sind. Diese Punkte werden ein bestimmtes Doppelverhältniss besitzen. Theilen wir zur Bildung desselben die Punkte, entsprechend der Natur unserer Aufgabe, in zwei Paare, so erhalten wir für dies Doppelverhältniss nur zwei verschiedene Werthe, nämlich entweder:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

oder

$$\alpha' = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Nun ist, da λ, μ die Wurzeln von (2) sind:

$$\lambda + \mu = -\frac{2Q}{R}, \quad \lambda\mu = \frac{P}{R},$$

daher auch:

$$\alpha + \alpha' = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu} = \frac{4\,Q^2 - 2\,PR}{PR}.$$

Also sind (wegen $\alpha\alpha' = 1$) α, α' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\alpha^2 - \frac{4\,Q^2 - 2\,PR}{PR}\,\alpha + 1 = 0,$$

oder:

$$(\alpha + 1)^2\, PR - 4\,Q^2\alpha = 0, \tag{4}$$

und die Auflösung dieser Gleichung gibt unmittelbar das Doppelverhältniss der vier Punkte. Wie müssen letztere nun liegen, damit die Gleichung besondere Eigenschaften hat, damit also besondere Werthe des Doppelverhältnisses entstehen? Einen der gegebenen Punkte, z. B. y, können wir beliebig wählen; durch ihn ziehen wir alle möglichen Strahlen und fragen nach den Punkten z, welche mit y und den beiden Schnittpunkten des betreffenden Strahles ein gegebenes Doppelverhältniss α bilden. Ist y constant, so ist die Gleichung (4) homogen vom zweiten Grade in z; *dieser Punkt liegt also wieder auf einer Curve zweiter Ordnung.* Lassen wir α variiren, so ist demnach jedem Punkte durch den gegebenen Kegelschnitt ein System von Curven zweiter Ordnung zugeordnet. Unter diesen ist aber *eine, welche in eine doppelt zählende Gerade zerfällt;* und diese wird für uns von be-

sonderer Wichtigkeit. Mit ihr werden wir uns zunächst ausschliesslich beschäftigen, die Beziehung der anderen hier gefundenen Kegelschnitte zur Grundcurve dagegen erst später kennen lernen.

Setzen wir:

$$\alpha = -1;$$

so reducirt sich (4) in der That auf $\Omega^2 = 0$, d. h. auf die Linie

$$\Omega = 0.$$

Soll also die Gerade yz die Curve harmonisch schneiden, so muss z auf der geraden Linie $\Omega = 0$ liegen, der „*Polaren des Punktes* y in Bezug auf den Kegelschnitt“; y dagegen wird der *Pol der Geraden* $\Omega = 0$ genannt. Wir sprechen diese wichtige Beziehung als Satz in der Form aus:

Wenn man durch einen Punkt alle möglichen Strahlen legt und auf jedem den vierten harmonischen Punkt zu y *und seinen Schnittpunkten mit einem Kegelschnitte sucht, so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden, „der Polare des Poles* y.“

Unter diesen Strahlen sind solche, welche die Curve gar nicht, oder vielmehr in zwei imaginären Punkten schneiden; dies tritt ein, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (2) imaginär werden. Dem ungeachtet bleibt der vierte harmonische Punkt reell, denn die genannten Wurzeln sind dann immer conjugirt imaginär, und die Gleichungen der vier Punkte haben daher die schon früher erwähnte Form (vgl. p. 42):

$$U = 0 \qquad U + \sqrt{-1}\,V = 0$$
$$V = 0 \qquad U - \sqrt{-1}\,V = 0.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die symmetrische Form der Gleichung (3):

$$\Omega = 0.$$

Da sich dieselbe nicht ändert, wenn man y und z vertauscht, so folgt unmittelbar:

Liegt y *auf der Polare von* z, *so geht die Polare von* y *durch* z; also:

Bewegt sich z *auf der Polare von* y, *so dreht sich die Polare von* z *um* y; und umgekehrt:

Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare dieses Punktes.

Die Polare schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten. Verbindet man einen derselben mit dem Pole, so muss auf dieser Geraden eine Gruppe von vier harmonischen Punkten 1, 2, 3, 4 liegen (wo 1, 2 und 3, 4 die zugeordneten Paare seien), von denen zwei Punkte (2 und 3) zusammenfallen. Dann fällt aber (vgl. p. 40) auch 4 in

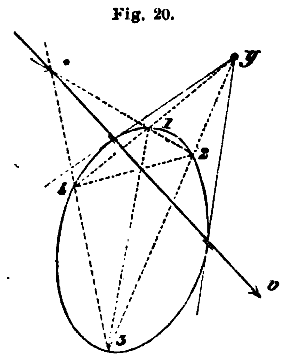
diesen Punkt, d. h. die Schnittpunkte (3, 4) der Geraden mit der Curve fallen zusammen, und somit folgt:

Die Polare eines Punktes geht durch die Berührungspunkte der beiden von ihm an die Curve gezogenen Tangenten. (Dass es zwei solche Tangenten gibt, haben wir oben gesehen, da jede allgemeine Curve 2. Ordnung auch 2. Klasse ist.)

Bewegt sich also ein Punkt auf einer Tangente, so geht seine Polare immer durch den Berührungspunkt derselben. Daher ist der Berührungspunkt der Pol der Tangente, d. h. *die Polare eines Punktes der Curve ist die in ihm an die Curve gelegte Tangente.*

Die hier ausgesprochenen Sätze führen auch unmittelbar zur *Construction der Polare,* wenn der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt und ausser ihm ein Punkt als Pol gegeben ist. Man braucht nur durch den letzteren zwei beliebige Gerade zu ziehen, und auf ihnen den vierten harmonischen Punkt zu dem gegebenen Punkte und ihren Schnittpunkten mit der Curve zu construiren, was ja mit Hülfe der Sätze über das vollständige Viereck geschieht: Betrachtet man die vier Schnittpunkte der beiden Hülfsgeraden mit der Curve (1, 2, 3, 4 in Fig. 20) als Ecken des Vierecks, so ist die eine Nebenecke der gegebene Pol y, und die Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken seine Polare v. Diese Construction liefert aber nach dem Obigen auch zugleich die Berührungspunkte der beiden durch den gegebenen Punkt gehenden Tangenten, also auch diese Tangenten selbst. Insbesondere können wir in dieser Weise *die von einem Punkte an einen Kreis zu legenden Tangenten* finden, und diese Construction verdient von unserem Standpunkte aus den Vorzug vor der bekannten, welche mit Hülfe eines anderen Kreises ausgeführt wird. Denn wir brauchen nur sechs Hülfslinien zu ziehen, um die Aufgabe in allgemeinster Weise zu lösen; diese Construction ist also auch praktisch ebenso einfach als jene andere. Beim Kreise steht die Polare eines Punktes überdies, als Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Tangenten, senkrecht gegen die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Pole. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so werden die beiden Tangenten imaginär, die Polare verläuft also ganz ausserhalb desselben, d. h. ohne ihn in reellen Punkten zu treffen. Ebenso wird durch jede reelle Curve zweiter Ordnung die Ebene in zwei Theile getrennt: in dem einen liegen die Punkte, von denen reelle, in dem andern diejenigen, von denen imaginäre Tangenten an die Curve gehen. Die Punkte der letzteren selbst dagegen vermitteln den Ueber-

Fig. 20.



gang zwischen beiden Theilen der Ebene, indem für sie die beiden Tangenten in eine zusammenfallen.

Ist der Kegelschnitt nicht ganz gezeichnet gegeben, sondern nur durch fünf seiner Punkte bestimmt, so kann man gleichwohl die Polare eines beliebigen Punktes constructiv angeben. Diese Aufgabe kommt nämlich offenbar auf die andere zurück: Man soll den zweiten Schnittpunkt einer durch einen jener fünf Punkte gehenden Geraden mit dem Kegelschnitte finden; und die Lösung der letzteren haben wir schon früher mit Hülfe des Pascal'schen Satzes bewerkstelligt. Wir haben die betreffende Construction nur für zwei Linien auszuführen, die durch den gegebenen Pol und je einen der fünf Punkte gehen; und können dann die Polare wieder mit Hülfe der Sätze über das vollständige Viereck finden. —

Bei diesen Constructionen ist vorausgesetzt, dass *jede* Gerade der Ebene Polare eines Punktes ist. Zum Beweise hierfür schreiben wir die Gleichung der Polare eines Punktes y ($\varrho = 0$) in der Form:

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 = 0,$$

so sind v_i die Coordinaten dieser Polare; sie werden wegen (3) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma v_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ \sigma v_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \\ \sigma v_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach y_1, y_2, y_3 wird man daher in der That auch zu jeder Geraden v einen Pol y bestimmen können, sobald die Determinante der Gleichungen (5) nicht verschwindet. Diesen letzteren Fall schliessen wir vorläufig von der Betrachtung aus und werden ihn später eingehend behandeln: wir setzen zunächst stets voraus, dass

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Diese *Determinante des Kegelschnitts* ist von ausserordentlicher Wichtigkeit; sie ist symmetrisch, d. h. die symmetrisch gegen die Diagonalreihe stehenden Elemente sind einander gleich, und ihre Unterdeterminanten sind:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22} a_{33} - a_{23}^2, & A_{23} &= A_{32} = a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}, \\ A_{22} &= a_{33} a_{11} - a_{31}^2, & A_{31} &= A_{13} = a_{21} a_{23} - a_{22} a_{13}, \\ A_{33} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2, & A_{12} &= A_{31} = a_{31} a_{32} - a_{33} a_{12}. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen (5) ergibt nun, wenn wir ϱ für $\frac{A}{\sigma}$ setzen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= A_{11}v_1 + A_{21}v_2 + A_{31}v_3 \\ \varrho y_2 &= A_{12}v_1 + A_{22}v_2 + A_{32}v_3 \\ \varrho y_3 &= A_{13}v_1 + A_{23}v_2 + A_{33}v_3 , \end{aligned} \tag{6}$$

wodurch der Pol y einer Geraden v bestimmt ist. Um diesen Punkt auch zu construiren, haben wir in obiger Weise nur die Polaren von zwei Punkten der gegebenen Geraden zu suchen; der Pol der letzteren ist dann als Schnittpunkt jener beiden Polaren nach den oben ausgesprochenen Sätzen bestimmt. Die Gleichungen (6) können uns dazu dienen, den gegebenen Kegelschnitt als Curve zweiter Klasse, d. h. in Liniencoordinaten darzustellen. Wir haben oben gesehen, dass ein Punkt der Curve selbst auf seiner Polare liegt, und dass diese dann Tangente wird; die Gleichungen (5) zeigen uns nunmehr, dass dies auch *nur* für Punkte der Curve eintreten kann, denn die Bedingung:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0 , \tag{7}$$

welche man erhält, wenn man die Gleichungen (5) bez. mit y_1, y_2, y_3 multiplicirt und addirt, gibt wieder:

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2\,a_{12}y_1y_2 + 2\,a_{13}y_1y_3 + 2\,a_{23}y_2y_3 = 0 ,$$

d. h. der Punkt y liegt in der That auf dem Kegelschnitte. Bilden wir ebenso aus (6) die Bedingung für die vereinigte Lage von Pol und Polare, so erhalten wir eine Gleichung für die Coordinaten der letzteren; und dies ist, da die Polare, wenn die Bedingung erfüllt ist, zur Tangente wird, die Gleichung der Curve zweiter Ordnung in Liniencoordinaten; sie wird:

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 = 0.$$

Man erhält also die Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten, wenn man in seiner Gleichung in Punktcoordinaten die x_i bez. mit den u_i und die Coëfficienten mit den Unterdeterminanten der Determinante des Kegelschnitts vertauscht.

Wir können diese Gleichung übersichtlicher darstellen durch das Verschwinden *der „mit den u_i geränderten“ Determinante**) *A des Kegelschnittes:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

eine Gleichungsform, welche man direct erhalten kann, wenn man

*) Die geränderten Determinanten, welche für die symmetrische Durchführung mancher Rechnungen sehr wichtig sind, wurden von Hesse in die analytische Geometrie eingeführt.

die Gleichungen (5) zusammen mit (7) als ein System von vier in den Grössen ϱ, y_1, y_2, y_3 homogenen, linearen Gleichungen auffasst, und aus ihnen letztere Grössen eliminirt.

Die Anwendung des Satzes auf die uns bekannten einfachen Gleichungsformen für Ellipse und Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ergibt:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

also:

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$$

$$A_{11} = \mp \frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{2}{a^2}, \quad A_{33} = \pm \frac{1}{a^2 b^2}.$$

Es wird daher, nach Multiplication mit $a^2 b^2$, *die Gleichung der Ellipse in Liniencoordinaten:*

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

und *die der Hyperbel in Liniencoordinaten:*

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Dagegen für die Parabel

$$y^2 - 2px = 0$$

wird:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

also:

$$A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0,$$
$$A_{22} = -p^2, \quad A_{13} = p,$$

und es ist die *Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten:*

$$pv^2 - 2u = 0.$$

II. Beziehungen zur unendlich fernen Geraden. — Polardreiecke.

Sehen wir nunmehr, zu welchen Fragen die soeben durchgeführten Untersuchungen Veranlassung geben, wenn wir statt einer beliebigen Geraden der Ebene die unendlich ferne Gerade in ihren Beziehungen zu einem Kegelschnitte betrachten (vgl. p. 67). Indem wir dabei gleichzeitig das Gebiet unserer bisherigen Ueberlegungen erweitern, werden wir

Gelegenheit haben, allgemeinere, von dieser ausgezeichneten Geraden unabhängige Verhältnisse von fundamentaler Wichtigkeit zu berühren.

Es bietet sich zunächst von selbst eine Eintheilung der Curven zweiter Ordnung, für die $A \gtrless 0$ ist, je nachdem sie von der unendlich fernen Geraden in zwei rellen, in zwei imaginären oder in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten werden. Andere Fälle sind nicht möglich; und die angeführten werden uns dieselben Haupttypen dieser Curven wiedererkennen lassen, auf welche wir durch die einleitenden Aufgaben geführt wurden. Wir bezeichnen unter diesem Gesichtspunkte:

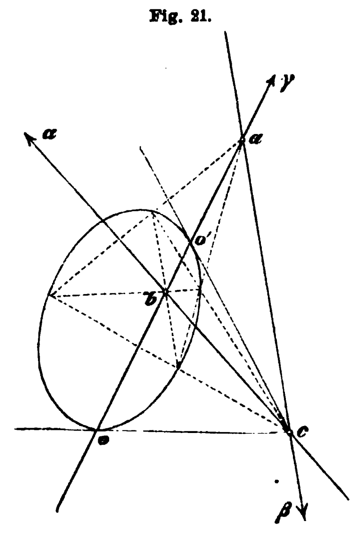
als *Ellipse* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden in zwei imaginären Punkten geschnitten wird,

als *Hyperbel* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten wird,

als *Parabel* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden berührt wird.

Zu einer weiteren Eintheilung gibt die Frage nach dem Pole der unendlich fernen Geraden Veranlassung. Zieht man durch ihn eine beliebige Gerade, so muss diese durch den Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade harmonisch getheilt werden; der erwähnte Pol liegt also in der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten der Geraden mit der Curve, d. h. *der Pol der unendlich fernen Geraden halbirt alle durch ihn gehenden Sehnen.* Man nennt ihn deshalb den *Mittelpunkt der Curve zweiter Ordnung*, die durch ihn gehenden Sehnen heissen *Durchmesser der Curve.* Ist die unendlich ferne Gerade Tangente des Kegelschnittes, so liegt der Pol auf ihr, also auch unendlich fern. Wir unterscheiden demgemäss:

Fig. 21.



Curven mit Mittelpunkt: Ellipse und Hyperbel.

Curven ohne Mittelpunkt: Parabel.

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf die Curven mit Mittelpunkt. Um hier weitere Relationen zwischen den Durchmessern zu erhalten, betrachten wir die unendlich ferne Gerade, als wenn sie im Endlichen läge, und übertragen dann nur die so erhaltenen Sätze. Es sei γ diese Gerade (vergl. Fig. 21) und c ihr Pol in Bezug auf die vorliegende Curve. Ist dann a ein Punkt auf γ, so liegt der Pol b der Linie ac ebenfalls auf γ und a ist der Pol der Linie bc. *Ein solches Dreieck, in welchem jede Ecke* (a, b, c)

der Pol der gegenüberliegenden Seite (α, β, γ) *ist, nennen wir ein Polardreieck.* Dasselbe enthält drei Willkürlichkeiten; nämlich die Wahl der ersten Ecke hängt von der Bestimmung *zweier* Constanten (der Coordinaten) ab; sind diese beliebig angenommen, so kann die zweite Ecke noch auf der Polare der ersten willkürlich gewählt werden, wird also durch *eine* weitere Constante bestimmt. Wir sprechen dies kürzer so aus: *Es gibt dreifach unendlich viele Polardreiecke zu einem gegebenen Kegelschnitte.* Um ein wirkliches Polardreieck zu erhalten, darf man nur niemals eine Ecke auf der Curve liegen oder eine Seite sie berühren lassen. Aus der Definition des Polardreiecks folgt nun unmittelbar:

Die von einer Ecke eines Polardreiecks ausgehenden Strahlen werden durch den Kegelschnitt und die gegenüberliegende Seite harmonisch getheilt; und dualistisch entsprechend: *Zieht man von einem Punkte der Seite eines Polardreiecks die beiden Tangenten an den Kegelschnitt, so sind diese harmonisch zu der Seite selbst und der Verbindungslinie des Punktes mit der gegenüberliegenden Ecke.* Unter diesen Strahlen sind auch jedesmal die durch die betreffende Ecke gehenden Seiten des Dreiecks selbst und die von ihr an die Curve gelegten Tangenten. Zwei Seiten des Dreiecks stehen zu einander also in ganz reciproker Beziehung: die eine (α) theilt die Strahlen durch b, die andere (β) die durch a harmonisch. *Man nennt daher zwei solche Geraden, bei denen der Pol der einen auf der andern liegt, conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt.*

Nehmen wir nun als eine Seite γ eines Polardreiecks die unendlich ferne Gerade, so gehen die andern beiden durch den Mittelpunkt c der Curve; sie sind dann *conjugirte Durchmesser* derselben. Man versteht darunter überhaupt *zwei Gerade, bei denen der unendlich ferne Punkt der einen der Pol der andern ist.* An Stelle der harmonischen Theilung tritt dann die Halbirung der betreffenden Sehnen, an Stelle der Strahlen durch a die Gesammtheit der zu β parallelen Geraden. Obigen Satz können wir daher folgendermassen aussprechen: Von zwei einander conjugirten Durchmessern *halbirt jeder die zu dem andern parallelen Sehnen, und die Tangenten in den Endpunkten eines jeden sind parallel zu den Sehnen, welche er halbirt.*

Zwei conjugirte Polaren sind immer harmonisch zu den beiden von ihrem Schnittpunkte an die Curve gelegten Tangenten, denn die Berührungspunkte der letzteren liegen harmonisch zu den Polen der beiden Polaren. In jedem Strahlbüschel kann man unter Benutzung dieser Bemerkung zu einer beliebigen Geraden die conjugirte Polare construiren. Ist der Punkt insbesondere der Mittelpunkt der Curve, so folgt:

Alle Paare conjugirter Durchmesser liegen harmonisch zu den beiden „Asymptoten" der Curve, d. h. zu den beiden Tangenten derselben in ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden.

Jedem Kegelschnitte, der einen Mittelpunkt hat, kommen zwei solche Asymptoten zu, die Verbindungslinien des Mittelpunktes c (vergl. Fig. 21 auf p. 80) mit den beiden unendlich fernen Punkten o und o'. Je nachdem die letzteren reell oder imaginär sind, sind es auch die Asymptoten; also nur bei der Hyperbel sind diese Linien wirklich zu zeichnen (vergl. p. 9). Für die Ellipse ist dies nicht der Fall; die angeführten Sätze gelten hier jedoch ebenso, da die analytischen Operationen dieselben sind. Lassen wir insbesondere den einen Durchmesser eines Paares in eine Asymptote hineinfallen, so fällt nach den Gesetzen der harmonischen Theilung auch der conjugirte Durchmesser in dieselbe Gerade; also: *Jede Asymptote ist ein sich selbst conjugirter Durchmesser.* Halbirt dagegen der eine Durchmesser den Winkel zwischen den beiden Asymptoten, so halbirt der andere als vierter harmonischer Strahl den Nebenwinkel, d. h. *Jede Curve zweiter Ordnung hat zwei zu einander rechtwinklige conjugirte Durchmesser, „die Hauptaxen der Curve."*

Die soeben angestellten Ueberlegungen zeigen deutlich, wie vortheilhaft die Einführung der unendlich fernen Geraden für die geometrische Betrachtung ist, indem wir gewisse metrische Beziehungen als besondere Fälle allgemeinerer Relationen erkannten. Auch in der analytischen Behandlung dieser Dinge werden uns im Folgenden die Vortheile der erwähnten Anschauungsweise entgegentreten. Um die gefundenen Beziehungen auch hier zu verwerthen, kehren wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurück, bei denen ja die unendlich ferne Gerade eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Wir setzen also

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$
$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = 1.$$

Alsdann werden die Gleichungen zwischen Pol und Polare:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varrho u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \qquad & \sigma x &= A_{11}u + A_{12}v + A_{13} \\ \varrho v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \qquad & \sigma y &= A_{21}u + A_{22}v + A_{23} \\ \varrho 1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \qquad & \sigma 1 &= A_{31}u + A_{32}v + A_{33}, \end{aligned}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$, $A_{ik} = A_{ki}$, und wo vorausgesetzt wird, dass die Determinante der a_{ik} nicht verschwindet.

Die Abschnitte der unendlich fernen Geraden auf den Coordinatenaxen sind unendlich gross; daher verschwinden die negativen reciproken Werthe derselben, d. h. für die unendlich ferne Gerade ist:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Wegen (1) werden demnach *die Coordinaten ihres Poles, des Mittelpunktes* der Curve:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{32} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ \eta &= \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{aligned}$$

Sollten A_{12}, A_{23}, A_{33} sämmtlich verschwinden, so würde auch $A = 0$ sein, was wir ausgeschlossen haben. Der Mittelpunkt ist also immer bestimmt; nur rückt er, wenn

$$(3)\qquad A_{33} = 0$$

ist, in's Unendliche; dies ist also *die Bedingung für die Parabel.*

Dieselbe Bedingung erhält man direct, indem man das Verhalten der unendlich fernen Geraden zur Curve untersucht; es ergeben sich so die *analytischen Criterien zur Unterscheidung von Ellipse, Hyperbel und Parabel.* Wir legen durch den Anfangspunkt eine beliebige Gerade, welche den Winkel α gegen die X-Axe bilden möge. Sie schneide die Curve in der Entfernung r vom Anfangspunkte; dann ist für diesen Schnittpunkt:

$$x = r \cos\alpha, \quad y = r \sin\alpha.$$

Die zugehörigen beiden Werthe von r ergeben sich, wenn wir mittelst dieser Gleichungen die Gleichung des Kegelschnittes:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0$$

umformen. Es wird dadurch:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &r^2 (a_{11} \cos^2\alpha + a_{22} \sin^2\alpha + 2a_{12} \sin\alpha \cos\alpha) \\ &\quad + 2r (a_{13} \cos\alpha + a_{23} \sin\alpha) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Legen wir umgekehrt r einen bestimmten Werth bei, so ergibt sich hieraus der zugehörige Winkel α, welcher übrigens reell oder imaginär ausfallen kann. Jedenfalls hat die Curve aber zwei unendlich ferne Punkte, und wir erhalten daher die nach ihnen gehenden Strahlen, d. h. die Asymptoten der Curve, wenn wir $r = \infty$ setzen. Dadurch wird die Gleichung (4):

$$a_{11} \cos^2\alpha + 2a_{12} \sin\alpha \cos\alpha + a_{22} \sin^2\alpha = 0,$$

also

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}}.$$

Die beiden Asymptoten sind demnach reell, imaginär oder zusammenfallend, je nachem A_{33} negativ, positiv oder Null ist. Wir haben also die folgenden Kennzeichen für die uns bekannten Kegelschnitte:

$$A_{33} > 0 \; : \; \textit{Ellipse},$$
$$A_{33} = 0 \; : \; \textit{Parabel},$$
$$A_{33} < 0 \; : \; \textit{Hyperbel}.$$

Die Bedingung für die Parabel ist somit in der That mit der oben gefundenen identisch; man erhält dieselbe endlich auch, wenn man von der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ausgeht. Diese ist:

$$A_{11}u^2 + A_{22}u^2 + 2A_{12}\,uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$$

Soll die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt werden, so muss diese Gleichung für $u = 0$ und $v = 0$ erfüllt sein, und wir erhalten wieder die Bedingung:

$$A_{33} = 0.$$

Durch (5) sind uns zunächst nur die Richtungen der Asymptoten gegeben; da dieselben aber durch den Mittelpunkt gehen müssen, so sind sie dadurch völlig bestimmt. Wir können also auch ihre Gleichungen unmittelbar aufstellen. Um die beiden ihnen parallelen Geraden durch den Anfangspunkt zu finden, brauchen wir nur die höchsten Terme der Gleichung in Punktcoordinaten gleich Null zu setzen:

$$(6) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

denn es folgt daraus wieder:

$$(7) \qquad \frac{y}{x} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}} = \operatorname{tang} \alpha,$$

und dies sind dann die Gleichungen der beiden Linien. Diese Bestimmung kommt darauf hinaus, dass man die Verhältnisse der Coordinaten ihrer unendlich fernen Punkte aufsucht. Machen wir nämlich die Gleichung der Curve für den Augenblick wieder homogen, indem wir $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ statt x, y setzen, so erhalten wir die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden, wenn wir $x_3 = 0$ nehmen; dies gibt aber gerade die Gleichung (6). Die Asymptoten selbst ergeben sich, wenn man die Gleichung der zu den Geraden (6) parallelen Linien sucht, die durch den Mittelpunkt ξ, η gehen, eine Aufgabe, welche wir früher gelöst haben (vergl. p. 26). Unmittelbar werden sie durch (7) dargestellt, wenn der Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Letzteres ist der Fall bei den Gleichungsformen der Kegelschnitte, auf die wir bei Behandlung der einleitenden Aufgaben geführt wurden, und die wir dort als Ellipse und Hyperbel bezeichnet haben, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Es ist hier für die Ellipse:

$$A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2}, \text{ also } > 0$$

für die Hyperbel:

$$A_{33} = -\frac{1}{a^2 b^2}, \text{ also } < 0.$$

*Unter den nach ihren Beziehungen zur unendlich fernen Geraden als Ellipse und Hyperbel bezeichneten Curven sind also jedenfalls die früher so genannten enthalten.**) Die Gleichung (6), welche das Product der Asymptoten darstellte, zerfällt hier unmittelbar in zwei lineare Factoren; wir erhalten für die Asymptoten der Ellipse:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

für die der Hyperbel:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Für die früher als Parabel bezeichnete Curve

$$y^2 = 2px = 0$$

haben wir:

$$A_{33} = 0,$$

wie es auch nach unserer neuen Definition sein muss. Dieselbe hat keinen Mittelpunkt und in Folge dessen auch keine eigentlichen Asymptoten. Die Gleichung (6) gibt uns vielmehr nur die doppelt zählende Richtung nach dem einen unendlich fernen Punkte, indem sie übergeht in

$$y^2 = 0.$$

Wir wollen nun im allgemeinen Falle ebenfalls den Mittelpunkt als Anfangspunkt einführen und dann insbesondere zwei conjugirte Durchmesser zu Coordinatenaxen wählen. Ueber die Form der so entstehenden Kegelschnittgleichung können wir uns im Voraus eine Vorstellung machen, wenn wir von einem beliebig gelegenen Polardreiecke ausgehen. Ein solches haben wir dadurch charakterisirt, dass jede Seite Polare der gegenüberliegenden Ecke sein soll.

Setzen wir nun in der allgemeinen Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

etwa $x_3 = 0$, so gibt der übrig bleibende Theil derselben:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0$$

das Product der beiden Geraden, welche die Schnittpunkte der Curve

*) Dass beide Definitionen auch völlig identisch sind, wird sich im Folgenden ergeben.

und der Seite $x_3 = 0$ mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden. Diese Gleichung wird dann in zwei lineare Factoren von der Form

$$x_1 - l x_2 = 0$$

und

$$x_1 - m x_2 = 0$$

zerfallen. Soll nun das Coordinatendreieck ein Polardreieck sein, so müssen diese Linien, welche den Pol mit den Schnittpunkten von Curve und Polare verbinden, Tangenten des Kegelschnittes sein, also harmonisch gegen die durch ihren Schnittpunkt gehenden Seiten des Coordinatendreiecks liegen. Es folgt daraus:

$$m = -l,$$

so dass die Gleichung des Productes der beiden Strahlen von der Form wird:

$$x_1^2 - l^2 x_2^2 = 0.$$

Soll letztere nun mit der Gleichung:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_1^2$$

identisch sein, so darf also in der Kegelschnittgleichung bei dieser Coordinatenbestimmung ein Glied $2 a_{12} x_1 x_2$ nicht vorkommen. Genau dieselben Ueberlegungen lassen sich für die andern beiden Ecken des Dreiecks anstellen; auch die Glieder mit $x_1 x_3$ und $x_2 x_3$ müssen fortfallen: *die Gleichung des Kegelschnitts enthält nur noch die Quadrate.* Sie wird:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \tag{8}$$

und in diese Form ist sie auf dreifach unendlich viele Arten zu bringen, da die Wahl des Polardreicks von drei Willkürlichkeiten abhängt. Dieselbe Gestalt muss auch übrig bleiben, wenn $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade wird, und die beiden anderen Seiten demnach zu conjugirten Durchmessern werden. Wir haben dann nur zu setzen:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1.$$

Um den Uebergang von der allgemeinen Gleichungsform zu der eben erwähnten wirklich durchzuführen, verlegen wir zunächst den Anfangspunkt in den Mittelpunkt. Alsdann werden die X- und Y-Axe harmonisch von der Curve und der unendlich fernen Geraden geschnitten; es fallen also die Glieder mit $x_1 x_3$ und $x_2 x_3$ oder mit x und y schon heraus, und es bedarf nachher nur noch einer Drehung des Coordinatensystems.

Setzen wir zu dem Zwecke:

$$x_1 = x = x' + \xi$$
$$x_2 = y = y' + \eta$$
$$x_3 = 1,$$

wo

$$\xi = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad \eta = \frac{A_{23}}{A_{33}}$$

die Coordinaten des Mittelpunktes sind, so wird nach den Gesetzen der Determinantentheorie:

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13} &= 0 \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23} &= 0 \\ a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33} &= \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} \\ &= \frac{A}{A_{33}}. \end{aligned}$$

Daher hat man:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= a_{11}x' + a_{12}y' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= a_{21}x' + a_{22}y' \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= a_{31}x' + a_{32}y' + \frac{A}{A_{33}}. \end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nun links bez. mit $x, y, 1$, rechts mit $x' + \xi$, $y' + \eta$, 1 und addiren, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen (9) zwei verschiedene Ausdrücke für die linke Seite der Curvengleichung, und diese selbst wird ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$):

$$(10)\qquad 0 = \Sigma\, a_{ik}x_i x_k = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2\,a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{33}}.$$

Es sind die Terme mit x', y' fortgefallen, während die ersten Glieder sich nicht geändert haben. Natürlich müssen wir hier den Fall der Parabel ($A_{33} = 0$), wie es ja auch oben geschah, ausschliessen, da für sie das letzte Glied unendlich gross wird und (geometrisch) ihr Mittelpunkt unendlich weit liegt. Das Verschwinden der Determinante A dagegen würde uns nicht hindern, die analytischen Operationen in derselben Weise durchzuführen; nur die geometrische Bedeutung derselben wird eine andere; wir werden darauf später zurückkommen.

Zur Vereinfachung unserer Gleichung geben die conjugirten Durchmesser naturgemässe schiefwinklige Coordinatensysteme. Wir wollen daher zunächst die analytische Bedingung für ein solches Durchmesserpaar aufstellen. Nehmen wir die Gleichung der Curve in der reducirten Form:

$$(10)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

an, so wird die Bedingung, dass ein Punkt x, y auf der Polare eines Punktes x', y' liegt, ausgedrückt durch:

$$\varrho = a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{12}(xy' + yx') + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Sollen diese Punkte unendlich fern liegen und so die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser angeben, so müssen r, r' unendlich gross werden, wenn man setzt:

$$x = r\cos\alpha\,,\quad x' = r'\cos\alpha'$$
$$y = r\sin\alpha\,,\quad y' = r'\sin\alpha'.$$

Die Gleichung (10) geht dadurch für $r = r' = \infty$ über in:

$$0 = a_{11}\cos\alpha\cos\alpha' + a_{12}(\cos\alpha\sin\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha') + a_{22}\sin\alpha\sin\alpha'.$$

Zwischen den Richtungswinkeln α, α' von zwei conjugirten Durchmessern besteht also die Gleichung:

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{a_{11} + a_{12}\operatorname{tang}\alpha}{a_{12} + a_{22}\operatorname{tang}\alpha}.$$

Für $\alpha = \alpha'$ geht hieraus wieder die Bedingung (5) für den Winkel einer Asymptote gegen die X-Axe hervor; und in der That haben wir gesehen, dass eine Asymptote als sich selbst conjugirter Durchmesser aufgefasst werden kann.

Zunächst liegt die schon früher berührte Frage nahe, ob es unter den Paaren conjugirter Durchmesser ein solches giebt, in welchem der eine zum andern rechtwinklig ist. Die Möglichkeit dieses Falles haben wir schon oben erkannt; wir werden aber auch nachweisen, dass es immer nur ein reelles System der Art gibt.

Da dann $\alpha' = 90^0 + \alpha$ sein muss, wird die Gleichung (11):

$$(12)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Die Werthe von α, welche sich hieraus ergeben:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \qquad \alpha = \frac{\beta}{2} + 90^0$$
$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 180^0 \qquad \alpha = \frac{\beta}{2} + 270^0 \qquad \left(\beta = \operatorname{artg}\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right),$$

unterscheiden sich nur um rechte Winkel; sie geben also immer dasselbe System, nur in seinen verschiedenen Beziehungsweisen; d. h. *es gibt immer ein und nur ein System zu einander rechtwinkliger conjugirter Durchmesser.* Wir bezeichnen sie als *die Hauptaxen des Kegelschnitts.*

Der einzige, hier mögliche Ausnahmefall tritt ein, wenn gleichzeitig

$$a_{11} - a_{22} = 0$$

und

$$a_{12} = 0$$

ist. Die Gleichung (10) des Kegelschnittes hat dann die Form:

$$x^2 + y^2 = \text{Const.};$$

sie stellt also einen Kreis dar. Für ihn wird der Winkel α unbestimmt; es gibt also unendlich viele Paare conjugirter Durchmesser, welche zu einander rechtwinklig stehen, und in der That tritt dies beim Kreise *immer* ein.

Um die durch (12) bestimmten conjugirten Durchmesser nunmehr wirklich als Coordinatenaxen einzuführen, setzen wir (vgl. p. 61):

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha . \end{aligned}$$

Durch diese Substitution muss die Gleichung der Curve nach unseren obigen Bemerkungen von der Form (8) werden, wenn man darin $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ setzt. Es muss also in der reducirten Form

$$(10)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

auch das Glied mit xy herausfallen, und dies ist in der That der Fall. Führen wir nämlich die Substitution (13) aus, so wird der Coëfficient von xy in der neuen Gleichung:

$$\cos\alpha\,(a_{22}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha) - \sin\alpha\,(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha),$$

und dies verschwindet wegen (11), wo wir $\alpha = \alpha' + 90^0$ zu setzen haben. Wir können also setzen:

$$(14)\qquad \frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \lambda,$$

oder:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + \qquad a_{12}\sin\alpha &= 0 \\ a_{12}\cos\alpha + (a_{12} - \lambda)\sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Wenn wir aus diesen Gleichungen $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ eliminiren, so werden wir auf eine sehr wichtige quadratische Gleichung für λ geführt, deren Wurzeln unmittelbar die Coëfficienten von x'^2 und y'^2 in der transformirten Gleichung darstellen. Die erwähnte Elimination ergibt nämlich:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Sind λ, μ die Wurzeln dieser Gleichung, so entspricht einer jeden von ihnen nach (14) ein Werth von α; und beide Werthe können sich nur um 90^0 von einander unterscheiden, wenn das Glied mit xy fortfallen soll. Für μ haben wir daher die Relationen:

$$\begin{aligned} a_{11}\sin\alpha - a_{12}\cos\alpha &= \quad \mu\sin\alpha \\ a_{12}\sin\alpha - a_{22}\cos\alpha &= -\mu\cos\alpha . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern zusammen mit den Gleichungen (14):

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha &= \lambda\cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= \lambda\sin\alpha \end{aligned}$$

die zur Ausführung der Transformation nöthigen Hülfsmittel. Wir multipliciren die erste und zweite bez. mit x und y und addiren; dies gibt wegen (13):

$$(a_{11}\sin\alpha - a_{12}\cos\alpha)\,x + (a_{12}\sin\alpha - a_{22}\cos\alpha)\,y = -\mu y';$$

und wenn man ebenso mit der dritten und vierten Gleichung verfährt, erhält man:

$$(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\,x + (a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\,y = \lambda x'.$$

Multipliciren wir weiter die erste der beiden letzten Gleichungen mit

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

die zweite mit

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

so findet man durch Subtraction beider:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda x'^2 + \mu y'^2;$$

und also ist die Gleichung des Kegelschnitts in der transformirten Form:

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{16}$$

In der That geben uns demnach die Wurzeln der Gleichung (15) *die Coëfficienten der neuen Gleichung.* Diese Bestimmung derselben bleibt auch noch für den oben erwähnten Ausnahmefall gültig, wo $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$.

Die beiden Wurzeln λ, μ müssen aber auch immer reell sein; denn wir haben oben gesehen, dass es, so lange nicht $A = 0$, oder $A_{33} = 0$ ist, immer ein Paar reeller Hauptaxen gibt. Wir können dies auch einfach in folgender Weise nachweisen: Die Auflösung der Gleichung (15) gibt:

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}.$$

Hier steht unter dem Wurzelzeichen die Summe von zwei Quadraten, also stets ein positiver Ausdruck, so lange wir die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung als reelle Grössen voraussetzen.

Untersuchen wir nunmehr näher, welche Curven in der Gleichungsform (16) enthalten sind. Wir können dieselbe in der Form:

$$\frac{x'^2}{-\frac{A}{\lambda A_{33}}} + \frac{y'^2}{-\frac{A}{\mu A_{33}}} = 1$$

schreiben, und erhalten dann unmittelbar eine Eintheilung der betreffenden Curven, welche im Wesentlichen mit unserer früheren übereinstimmt (vergl. p. 85). Das Product der Nenner:

$$\frac{A^2}{\lambda \cdot \mu A_{33}^2}$$

hat nämlich immer dasselbe Vorzeichen, wie das Product $\lambda\mu$. Das letztere ist nun identisch mit A_{33}, denn λ, μ sind die Wurzeln der Gleichung (15); d. h. es ist

$$\lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}.$$

Theilen wir also die Curven nach dem Vorzeichen des Products der Coëfficienten von x^2 und y^2 ein, so ist dies dasselbe, als ob wir, wie oben, nach dem Vorzeichen von A_{33} eintheilten. Die hier möglichen Fälle sind im Folgenden zusammengestellt:

I) $A_{33} > 0$; λ, μ haben gleiche Zeichen.

1) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = b^2$: *Ellipse*,

2) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = -a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = -b^2$: *Imaginäre Ellipse.*

II) $A_{33} < 0$; λ, μ haben ungleiche Zeichen.

1) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = -b^2$: *Hyperbel,* welche von der X-Axe in reellen Punkten getroffen wird,

2) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = -a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = b^2$: *Hyperbel,* welche von der Y-Axe in reellen Punkten getroffen wird.

Die beiden letzteren Curven sind nur durch die Bezeichnung der Coordinatenaxen von einander verschieden. Wir haben also nur drei Fälle zu unterscheiden, von denen uns die der beiden reellen Curven schon bekannt waren, *und es gibt keine anderen Kegelschnitte mit Mittelpunkt.* Auf die imaginäre Ellipse werden wir im Folgenden nicht weiter eingehen; es mag hier nur darauf hingewiesen werden, dass ihr Mittelpunkt sowohl, wie ihre Hauptaxen reell sind, dass sie hingegen keinen reellen Punkt hat; die Polare, welche sie einem reellen Punkte zugeordnet, ist aber jedesmal reell.

Die Hauptaxen, auf welche sich in den letzten Untersuchungen unser Interesse vorwiegend richtete, sind nur ein besonders ausgezeichnetes Paar von conjugirten Durchmessern; es liegt daher nahe, das behandelte Problem zu dem folgenden zu erweitern: *Es sollen mit Hülfe solcher conjugirter Durchmesser derartig schiefwinklige (nicht homogene) Coordinaten eingeführt werden, dass die Curvengleichung eine möglichst einfache wird.* Als Ausgangspunkt dient uns dabei die nunmehr gewonnene einfache Gleichungsform:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

welche zunächst allerdings nur eine reelle Ellipse darstellt. Wir brauchen aber die folgenden Erörterungen nur für diese durchzuführen; die entsprechenden Resultate für die Hyperbel ergeben sich dann einfach, wenn wir b durch $b \cdot \sqrt{-1}$ ersetzen.

Da ein Paar conjugirter Durchmesser immer mit der unendlich fernen Geraden zusammen ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt bildet, so kann durch Einführung derselben als Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems die Form der Gleichung (1) nicht geändert werden. Wir führen die neuen Coordinaten nach früheren Ausführungen (vergl. p. 61) ein mittelst der Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta, \end{aligned}$$

wo

$$(3) \qquad \beta - \alpha = u$$

gleich dem Winkel ist, welchen die betreffenden conjugirten Durchmesser einschliessen. Die Gleichung (1) geht durch diese Substitution über in:

$$(4) \qquad \frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} - 1 = 0,$$

denn der Coëfficient von $x'y'$ muss nach einer oben gemachten Bemerkung verschwinden, d. h. es ist:

$$(5) \qquad \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0.$$

Die Grössen p und q in (4) dagegen sind definirt durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \\ \frac{1}{q^2} &= \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}. \end{aligned}$$

Ihre geometrische Bedeutung ist unmittelbar klar: *p und q sind die Längen der beiden conjugirten Durchmesser* (gemessen vom Anfangspunkte bis zum Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte). Setzen wir nämlich $x' = 0$, so wird

$$y'^2 = q^2$$

und ebenso für $y' = 0$:

$$x'^2 = p^2.$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen uns also diese Längen aus denen der Hauptaxen berechnen; (5) dagegen ist die Form, welche die zwischen zwei conjugirten Durchmessern bestehende Relation (Gleichung (11) auf p. 88) bei unserer Coordinatenwahl annimmt. Die Winkel α, β sind durch (3) an den von den conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel gebunden; um sie bei gegebenem u direct zu

berechnen, verfahren wir folgendermassen. Wir haben die Gleichungen:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos u$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0,$$

und daraus folgt:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\cos u$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\cos u,$$

also, wenn man subtrahirt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\cos u. \tag{7}$$

Diese Gleichung gibt zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe $\pm v$ für $\alpha + \beta$; und daraus folgt wegen (3):

$$\alpha = \frac{-u \pm v}{2}$$

$$\beta = \frac{u \pm v}{2}.$$

Wir erhalten demnach, wie es bei der Symmetrie der Curve gegen die Hauptaxen zu erwarten war, zwei Systeme von conjugirten Durchmessern, deren eines das Spiegelbild des andern in Bezug auf die Hauptaxen ist, denn der zweite Werth von β ist dem ersten von α, der zweite von α dem ersten von β gleich und entgegengesetzt.

Bei der Ellipse sind diese Lösungen jedoch nur reell, so lange:

$$\cos u \leqq \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Wir erhalten hier also eine Grenze für den Winkel u: der kleinste Winkel, welchen die conjugirten Durchmesser bilden können, ist bestimmt durch:

$$\cos u = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

woraus man findet:

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \frac{b}{a}.$$

Die beiden conjugirten Durchmesser sind dabei in diesem Falle die Diagonalen des der Ellipse parallel zu den Hauptaxen umgeschriebenen Rechtecks; ihr Winkel wird von den Hauptaxen halbirt. Es ist hier ferner:

$$\cos(\alpha + \beta) = 1,$$

also:

$$\alpha + \beta = 0,$$

d. h. die beiden so bestimmten Durchmesser sind zu sich selbst symmetrisch gegen die Hauptaxen.

Bei der Hyperbel findet sich ein derartiger Grenzfall nicht. Hier wird:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos u,$$

es tritt also keinerlei Beschränkung ein, denn es ist stets $b^2 < a^2$. Wir wissen, dass sogar der Werth 0 für u vorkommen kann, denn eine jede Asymptote ist ja ein sich selbst conjugirter Durchmesser.

Ein eleganter zweiter Weg zur Lösung der behandelten Aufgabe, analog dem bei den Hauptaxen eingeschlagenen, besteht in der directen Aufsuchung von p^2 und q^2, indem wir für sie eine quadratische Gleichung aufstellen. Für p, q, α, β hatten wir die Gleichungen (5) und (6):

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

$$0 = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}.$$

Multipliciren wir die erste und zweite Gleichung einmal bez. mit $\sin\beta$, $-\sin\alpha$, und ein zweites Mal bez. mit $-\cos\beta$, $\cos\alpha$ und addiren, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin\beta}{p^2} = \frac{\cos\alpha}{a^2}\sin u$$

$$-\frac{\cos\beta}{p^2} = \frac{\sin\alpha}{b^2}\sin u.$$

Ebenso ergibt sich aus der zweiten und dritten Gleichung, wenn man dieselben bez. mit $\sin\beta$, $-\sin\alpha$ und dann bez. mit $-\cos\beta$, $\cos\alpha$ multiplicirt und addirt:

$$-\frac{\sin\alpha}{q^2} = \frac{\cos\beta}{a^2}\sin u$$

$$\frac{\cos\alpha}{q^2} = \frac{\sin\beta}{b^2}\sin u.$$

Bildet man ferner aus den letzten vier Gleichungen das Product der ersten und vierten, sowie das der zweiten und dritten und subtrahirt diese Producte von einander, so findet man:

$$(8) \qquad p^2 q^2 \sin^2 u = a^2 b^2.$$

Wir können dieser Formel eine einfache geometrische Deutung geben. Es ist nämlich $4ab$ gleich dem Inhalte des Rechteckes, welches parallel zu den Hauptaxen, der Ellipse umgeschrieben werden kann; $4pq\sin u$ dagegen der Inhalt des der Curve, parallel zu den Durchmessern p, q umgeschriebenen Parallelogramms. Die Gleichung (8) sagt demnach aus:

Ein dem Kegelschnitte umgeschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten zu zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, hat constanten Inhalt.

Schreiben wir nun die aus (5) und (6) abgeleiteten Gleichungen in der Form:

$$a^2 \sin\beta = \quad p^2 \cos\alpha \sin u, \qquad b^2 \cos\beta = -p^2 \sin\alpha \sin u,$$
$$a^2 \sin\alpha = -q^2 \cos\beta \sin u, \qquad b^2 \cos\alpha = \quad q^2 \sin\beta \sin u,$$

und multipliciren wir die links stehenden bez. mit $\cos\alpha$, $-\cos\beta$ und die rechts stehenden bez. mit $-\sin\alpha$, $\sin\beta$, so ergibt sich durch Addition:

$$(9) \qquad \begin{aligned} a^2 &= p^2 \cos^2\alpha + q^2 \cos^2\beta \\ b^2 &= p^2 \sin^2\alpha + q^2 \sin^2\beta. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt unmittelbar:

$$(10) \qquad p^2 + q^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. *die Quadratsumme der Längen von zwei conjugirten Durchmessern ist constant.* Die Gleichungen (8) und (9) lassen uns p^2 und q^2 als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung erkennen, und zwar der folgenden:

$$(11) \qquad z^2 - (a^2 + b^2)\, z + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u} = 0.$$

Kennt man also die Hauptaxen der Curve, so gibt diese Gleichung für jeden Werth von u die Quadrate der zugehörigen conjugirten Durchmesser. Es wird nämlich:

$$p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u}}$$
$$q^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u}}.$$

Diese Ausdrücke sind in dieser Form ganz ähnlich denen, welche wir aus der Gleichung

$$(a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12}{}^2 = 0$$

für die Quadrate der reciproken Werthe der Hauptaxen erhielten. Sind auf diesem Wege p^2 und q^2 bestimmt, so ergeben sich die Winkel α und β aus (9); man findet:

$$\cos^2\alpha = \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{p^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad \sin^2\beta = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

Die Gleichung (11) lehrt, dass bei der Ellipse p^2 und q^2, so lange sie

überhaupt reell sind (d. h. so lange u die gegebene untere Grenze nicht überschreitet), stets positive Werthe haben. Bei der Hyperbel dagegen ($-b^2$ statt b^2) ist ein Werth immer negativ, der andere positiv; der eine Durchmesser schneidet also die Hyperbel in zwei imaginären, der conjugirte Durchmesser in zwei reellen Punkten. Ihre Richtungen hingegen, d. h. die Winkel α, β sind immer reell, da u hier keiner Beschränkung unterworfen ist. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein Paar conjugirter Durchmesser, hat also die Form:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 .$$

Mithin gilt allgemein der Satz: *Die Curvengleichung, bezogen auf conjugirte Durchmesser, ist immer von der Form der Hauptaxengleichung,* d. h. die Vorzeichen der Coëfficienten von x^2 und y^2 sind dieselben in beiden Gleichungsformen. —

Bei der Hyperbel gibt es noch ein anderes, nahe liegendes, reelles Coordinatensystem, durch dessen Einführung ihre Gleichung sehr einfach wird, *das der Asymptoten.* Für die Ellipse ist die Einführung dieses Systems nicht so wichtig, da bei ihr die Asymptoten imaginär sind, wir also den Variabeln complexe Werthe beilegen müssten, um reelle Punkte der Curve darzustellen.

Sind α, β, die Winkel der beiden Asymptoten gegen die X-Axe, wo also $\beta = 180^0 - \alpha$, und ist die Hyperbel durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, so sind die anzuwendenden Transformationsformeln:

$$x = x' \cos \beta + y' \cos \alpha$$
$$y = x' \sin \beta + y' \sin \alpha .$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{b}{a},$$

also:

$$\cos \alpha = -\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

wir müssen daher setzen:

$$x = \frac{a\,(y' - x')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$y = \frac{b\,(x' + y')}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Durch diese Substitution erhält die Curvengleichung die einfache Gestalt:

$$-\frac{4x'y'}{a^2 + b^2} = 1 ;$$

eine Gleichung, welche den folgenden Satz begründet:

Zieht man durch einen Punkt der Hyperbel Parallele zu den beiden Asymptoten, so hat das von diesen Parallelen und den Asymptoten eingeschlossene Parallelogramm constanten Inhalt. —

Es bleibt uns noch übrig, in ähnlicher Weise die Kegelschnitte, für welche $A_{33} = 0$ ist, d. h. diejenigen ohne Mittelpunkt, die *Parabeln*, zu behandeln. Ihre Gleichung nehmen wir in der allgemeinen Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

an, wo:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0.$$

Es müssen nun, wenn wir nur reelle Elemente in Betracht ziehen, a_{11} und a_{22} dieselben Vorzeichen haben, damit ihr Product gleich einem Quadrate werde, und wir können setzen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \quad m \sin^2 \alpha \\ a_{22} &= \quad m \cos^2 \alpha \\ a_{12} &= - m \sin \alpha . \cos \alpha , \end{aligned}$$

wodurch die Bedingung $A_{33} = 0$ identisch erfüllt wird. Es ist hier α bis auf eine Periode π bestimmt durch:

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

und m ergibt sich dann aus den Substitutionsgleichungen. Durch Anwendung der letzteren geht die Gleichung der Parabel über in:

$$(12) \qquad m(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

In ihr bilden also die Glieder höchster Dimension das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks; und dies ist charakteristisch für die Parabel.

Um die geometrische Bedeutung der Richtung α zu erkennen, drehen wir das Coordinatensystem so, dass diese Richtung parallel zu einer Axe wird. Dazu dienen die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha . \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve geht dann über in:

$$(13) \qquad my'^2 + 2px' + 2qy' + a_{33} = 0,$$

wo:

$$\begin{aligned} p &= \quad a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha \\ q &= - a_{13} \sin \alpha + a_{23} \cos \alpha . \end{aligned}$$

Die Gleichung (13) können wir auch in der Form schreiben:

$$m\left(y' + \frac{q}{m}\right)^2 + 2p\left(y' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2m}\right) = 0.$$

Setzt man also:

$$y' + \frac{q}{m} = y'', \quad y' + \frac{a_{33}}{2p} = \frac{q^2}{2m} - y'',$$

so erhält man die *Gleichung der Parabel in der bekannten Form:*

(14) $$my''^2 + 2px'' = 0,$$

welche wir schon in den einleitenden Aufgaben betrachtet haben. Der neue Anfangspunkt liegt auf der Curve, und diese selbst liegt symmetrisch gegen die Axe $y'' = 0$. Die Richtung α ist die dieser Axe, d. h. die Richtung nach dem einen unendlich fernen Punkte der Parabel. Wir sehen somit, *dass jeder Kegelschnitt, welcher die unendlich ferne Gerade berührt, eine Parabel in dem früheren Sinne ist.*

Zu dem soeben benutzten rechtwinkligen Coordinatensysteme steht ein anderes schiefwinkliges in ähnlicher Beziehung, wie das System eines Paares conjugirter Durchmesser zu den Hauptaxen bei den Kegelschnitten mit Mittelpunkt: Wir können den unendlich fernen Punkt der Parabel als ihren Mittelpunkt auffassen und wollen somit unter Durchmessern derselben alle durch diesen Punkt gehende Geraden verstehen, d. h. alle Parallelen zur Axe der Parabel. Fixiren wir nun einen anderen Punkt der unendlich fernen Geraden und ziehen alle durch ihn gehende Parallellinien, so müssen diese durch die Polare jenes Punktes und durch die Parabel harmonisch getheilt werden. Die Polare konnten wir allgemein als die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte der von ihrem Pole an die Curve gehenden Tangenten definiren. In unserem Falle ist nun die eine Tangente die unendlich ferne Gerade selbst, und die andere läuft parallel zu dem Sehnensysteme, welches wir durch den unendlich fernen Punkt gelegt hatten. Die Polare des letzteren ist somit diejenige Linie, welche durch den Berührungspunkt der letztgenannten Tangente parallel zur Axe der Curve (d. h. nach dem unendlich fernen Punkte der Parabel) gezogen werden kann; und der Satz von der harmonischen Theilung geht über in den folgenden:

Jedes System paralleler Sehnen wird halbirt von einer Geraden, welche durch den Berührungspunkt der diesen Sehnen parallelen Tangente parallel zur Axe der Parabel verläuft. Ausgenommen sind dabei natürlich diejenigen Sehnen, welche selbst zur Axe parallel verlaufen. Wählen wir insbesondere die Richtung des parallelen Sehnensystems senkrecht zur Curvenaxe, so ist diese Axe selbst die halbirende Gerade.

Führen wir nun ein neues Coordinatensystem ein, gebildet aus einer Tangente der Curve und einer durch ihren Berührungspunkt gezogenen Parallelen zur Axe (wobei die Linien den Winkel β einschliessen

mögen), so wird dadurch die Form der Parabelgleichung ebensowenig geändert, wie die der Curven mit Mittelpunkt durch Einführung eines Paares conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen. Gehen wir nämlich von der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

aus, und ist a, b ein Punkt der Parabel, so sind die Transformationsgleichungen, welche diesen Punkt zum Anfangspunkte des neuen Coordinatensystems machen:

$$x = x' + y' \cos\beta + a$$
$$y = \qquad y' \sin\beta + b.$$

Nach Ausführung dieser Substitution geht die Gleichung der Curve wegen

$$b^2 = 2pa$$

über in:

$$y'^2 \sin^2\beta + 2y'b \sin\beta - 2px' - 2py' \cos\beta = 0.$$

Diese Gleichung darf jedoch y' nur im Quadrate enthalten, denn jede zur Y-Axe gezogene Parallele muss durch die X'-Axe und die Curve halbirt werden, wir müssen also β so wählen, dass

$$b \sin\beta = p \cos\beta$$

oder

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{p}{b}.$$

Dann wird aber die Gleichung der Parabel:

$$y'^2 = \frac{2px'}{\sin^2\beta},$$

also in der That von derselben Form, wie unsere Normalgleichung für diese Curve.

III. Das Linienpaar.

Die Transformation, durch welche wir die Parabelgleichung (1) auf die Form (14) zurückführten, hat in *der* Gestalt nur eine Bedeutung, so lange,

$$p = a_{13} \cos\alpha + a_{23} \sin\alpha$$

von Null verschieden ist. Ist dagegen

$$p = 0,$$

so erhalten wir:

(1) $$my'^2 + 2qy' + a_{33} = 0,$$

d. h. die Curve besteht aus zwei geraden Linien

$$y' - r = 0$$

und

$$y' - s = 0,$$

wo r und s die Wurzeln von (1) sind, und diese Linien sind der X'-Axe parallel. Ist insbesondere $r = s$, so wird die Curve durch eine doppelt zählende Gerade dargestellt. Der Fall $p = 0$ entspricht nun der Bedingung, dass die Determinante A des Kegelschnitts verschwinde. Die Gleichung des letzteren ist nämlich hier:

$$m(x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

also wird:

$$A = \begin{vmatrix} m\sin^2\alpha & -m\sin\alpha\cos\alpha & a_{13} \\ -m\sin\alpha\cos\alpha & m\cos^2\alpha & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

und diese Determinante verschwindet in der That; denn multipliciren wir die erste Horizontalreihe mit $\cos\alpha$ und addiren dazu die zweite, multiplicirt mit $\sin\alpha$, so verschwinden alle Glieder der ersten Reihe. Wir wollen nun zeigen, *dass überhaupt ein Kegelschnitt, dessen Determinante verschwindet, in ein Linienpaar zerfällt.* Der Schnittpunkt der beiden Geraden des Paares wird jedoch im Allgemeinen im Endlichen liegen; wenn er in dem eben erwähnten Beispiele ein Punkt der unendlich fernen Geraden war, so lag dies daran, dass wir von der Parabel ausgingen, also $A_{33} = 0$ voraussetzten. Um dies einzusehen, gehen wir zunächst von der Mittelpunktsgleichung des allgemeinen Kegelschnittes aus. Diese war:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Setzen wir hierin

$$A = 0$$

und nehmen wir an, dass A_{33} nicht verschwindet, so zerfällt die Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

in zwei lineare Factoren. Denn setzen wir:

$$\frac{x}{y} = \lambda,$$

und sind λ', λ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(2) \qquad a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0,$$

so ist

$$-\frac{2a_{12}}{a_{11}} = \lambda' + \lambda''$$

$$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda' \cdot \lambda'';$$

und die Gleichung des Kegelschnittes wird

$$(x - \lambda' y)(x - \lambda'' y) = 0;$$

derselbe zerfällt also in zwei durch den Anfangspunkt gehende Gerade. Je nach dem Vorzeichen von A_{33} können wir die Linienpaare in zwei Gruppen theilen, ebenso wie die Curven mit Mittelpunkt in Ellipsen und Hyperbel:

1) $A_{33} < 0$: *Reelles Linienpaar*; dasselbe hat also auch zwei reelle, unendlich ferne Punkte, wie die Hyperbel.

2) $A_{33} > 0$: *Imaginäres Linienpaar;* dasselbe wird von der unendlich fernen Geraden in zwei imaginären Punkten getroffen, wie die Ellipse. Nur der Schnittpunkt beider Linien ist reell, wie dies immer bei zwei conjugirt imaginären Geraden der Fall ist. Endlich gibt der Fall:

3) $A_{33} = 0$: *Zwei parallele Linien;* sie werden von der unendlich fernen Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten getroffen, wie die Parabel. Nach dieser vorläufigen Orientirung wollen wir den Fall $A = 0$ noch in allgemeinerer Weise, ohne besondere Annahme über die Lage des Coordinatensystems, behandeln.

Die Gleichungen, welche einem Punkte x seine Polare u in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

zuordnen, waren:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho u_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho u_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 ; \end{aligned} \tag{3}$$

und diese Gleichungen gelten auch noch, wenn A verschwindet. In diesem Falle sind sie jedoch nicht mehr auflösbar, d. h. *einem jeden Punkte entspricht noch eine bestimmte Polare, aber dieser Polare nicht mehr umgekehrt ein bestimmter Pol.* Wir können ferner einen Punkt ξ bestimmen, dessen Coordinaten gleichzeitig den drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 &= 0 \\ a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3 &= 0 \\ a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 &= 0 , \end{aligned} \tag{4}$$

denn die einzige Bedingung für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen ist eben:

$$A = 0.$$

Für diesen Punkt ξ wird also die Polare unbestimmt (d. h. wir können in gewissem Sinne jede Linie der Ebene als seine Polare betrachten), während anderseits die Polare eines jeden anderen Punktes durch ihn hindurchgeht; denn multipliciren wir die Gleichungen (3) bez. mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und addiren, so sehen wir, dass die Bedingung

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

unabhängig von den Werthen der x, dl h. für die Polaren al.er Punkte erfüllt wird (der zu der letzten Gleichung noch hinzutretende Factor ϱ wird nur verschwinden, wenn die a_{ik} sämmtlich gleich Null sind, was wir ausschliessen). *Es können daher auch umgekehrt nur diejenigen Geraden als Polaren von Punkten aufgefasst werden, welche durch ξ hindurchgehen, wenn man nicht eben alle anderen Geraden als Polaren von ξ selbst auffassen will.* Einer jeden solchen Geraden u gehören dann aber unendlich viele Punkte als Pole zu; denn ist x ein solcher Punkt, welcher den Gleichungen (3) genügt, so werden diese Gleichungen wegen (4) auch durch jeden Punkt $x + \lambda\xi$ der Verbindungslinie von x und ξ befriedigt.

Um die Gestalt der Curve selbst zu erkennen, betrachten wir die Verbindungslinie von ξ mit irgend einem Punkte x derselben. Setzen wir $x + \lambda\xi$ statt x in die Curvengleichung ein, so erhalten wir eine Gleichung

$$P + 2\lambda Q + \lambda^2 R = 0,$$

deren Coëfficienten sämmtlich verschwinden, denn es ist nach (4):

$$P = \Sigma a_{ik}\xi_i\xi_k = 0,$$

also ξ liegt auf der Curve; ferner ist nach der Annahme:

$$R = \Sigma a_{ik}x_i x_k = 0,$$

und auch wegen (4):

$$Q = \Sigma a_{ik}\xi_i x_k = 0.$$

Die Linie $x + \lambda\xi$ gehört also ganz der Curve an, *und diese kann daher nur aus zwei Geraden bestehen, welche sich in ξ schneiden;* und zwar *zwei* solchen wegen des Grades der Kegelschnittgleichung. Die Coordinaten des Punktes ξ sind aus zwei der Gleichungen (4) zu bestimmen; dieGleichung desselben können wir demnach in den 3 Formen schreiben:

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 &= 0,\\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 &= 0,\\ A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 &= 0, \end{aligned}$$

von denen jede mit der Gleichung

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$$

gleichbedeutend ist. Wir können deshalb setzen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} A_{11} &= \mu\xi_1^2 & A_{12} &= \mu\xi_1\xi_2\\ A_{22} &= \mu\xi_2^2 & A_{13} &= \mu\xi_1\xi_3\\ A_{33} &= \mu\xi_3^2 & A_{23} &= \mu\xi_2\xi_3. \end{aligned}$$

Für einen zerfallenden Kegelschnitt werden also die Unterdeterminanten seiner Determinante proportional zu den Quadraten und Producten dreier Grössen, der Coordinaten seines „Doppelpunktes“ (ξ).

Auf anderem Wege werden wir zu der Gleichung dieses Doppelpunktes geführt, wenn wir die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten bilden. Dieselbe ist nämlich:

$$A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + 2 A_{13} u_1 u_3 + 2 A_{23} u_2 u_3 = 0$$

Sie gab uns früher die Bedingung, welcher einer Linie u genügen musste, um den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Dies ist nun bei einem Linienpaare, so lange dasselbe nicht in eine Doppellinie ausartet, nur möglich, wenn die Gerade u durch den Doppelpunkt desselben hindurchgeht; und in der That geht *die Gleichung in Liniencoordinaten* wegen (6) über in:

$$(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3)^2 = 0,$$

d. h. *sie gibt doppelt zählend die Gleichung des Doppelpunktes.*

Die Coordinaten (α_i und β_i) der beiden Geraden, in welche der Kegelschnitt zerfällt, bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{array}{ll} \alpha_1 \beta_1 = a_{11} & \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 = 2 a_{23} \\ \alpha_2 \beta_2 = a_{22} & \alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3 = 2 a_{31} \\ \alpha_3 \beta_3 = a_{33} & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 2 a_{12}; \end{array}$$

dieselben ergeben sich unmittelbar durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der x in der Bedingungsgleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)$$

Die Gleichungen (7). ändern sich nicht, wenn man gleichzeitig die α_1, α_2, α_3 mit einer Grösse k multiplicirt und die β_1, β_2, β_3 durch dieselbe Grösse k dividirt; und da wir es nur mit Verhältniss-Grössen zu thun haben, ist eine solche Operation für ihre Bedeutung gleichgültig. Wir können daher eine der sechs Unbekannten α_1, α_2. α_3, β_1, β_2, β_3 gleich der Einheit setzen und haben dann 6 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Sie sind im Allgemeinen nicht auflösbar, sondern damit dies möglich ist, muss eine Bedingung zwischen den Coëfficienten a_{ik} bestehen. Eine solche ist uns bei unserer Voraussetzung aber durch die Gleichung

$$A = 0$$

gegeben, und wir werden später sehen, dass das Verschwinden von A die einzig mögliche Relation zwischen den a_{ik} ist, welche zum Ziele führt. Um die Unbekannten selbst zu berechnen, kann man etwa mit $\alpha_1 \beta_1$ in $\alpha_2 \beta_2$ und $\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2$ dividiren; es ergeben sich dadurch Summe und Product von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, und diese Grössen sind also durch eine quadratische Gleichung bestimmt; die übrigen findet man dann linear.

Symmetrischer und eleganter ist dagegen der folgende Weg. Der Punkt ξ ist der Schnittpunkt der Linien α und β; es bestehen daher die Gleichungen:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$$
$$\beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3 = 0,$$

folglich ist auch:

$$(8) \quad \begin{aligned} 2\varrho\xi_1 &= \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 \\ 2\varrho\xi_2 &= \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1 \\ 2\varrho\xi_3 &= \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 . \end{aligned}$$

Man hat also, wenn man die ξ aus (4) irgendwie bestimmt denkt, wegen (7) die folgenden 9 Gleichungen zur Berechnung der α und β:

$$(9) \quad \begin{array}{lll} \alpha_1\beta_1 = a_{11} & \alpha_2\beta_1 = a_{21} - \varrho\xi_3 & \alpha_3\beta_1 = a_{31} + \varrho\xi_2 \\ \alpha_1\beta_2 = a_{12} + \varrho\xi_3 & \alpha_2\beta_2 = a_{22} & \alpha_3\beta_2 = a_{32} - \varrho\xi_1 \\ \alpha_1\beta_3 = a_{13} - \varrho\xi_2 & \alpha_2\beta_3 = a_{23} + \varrho\xi_1 & \alpha_3\beta_3 = a_{33} . \end{array}$$

Es sind hiernach die Verhältnisse $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ und $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ unmittelbar gegeben, sobald noch ϱ bekannt ist. Dies ϱ ist zwar zunächst nur als Proportionalitätsfactor eingeführt und würde als solcher vollkommen willkürlich sein. Dasselbe ist jedoch hier wegen der Gleichungen (6) von dem Proportionalitätsfactor μ abhängig. Wir können nämlich wegen (7) die Unterdeterminanten A_{ik} durch die α und β ausdrücken und müssen dann zu denselben Ausdrücken kommen, wie sie die Quadrate und Producte der ξ aus (8) ergeben. Es ist so z. B.

$$4A_{11} = -(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)^2 = -4\varrho^2\xi_1^2,$$

und also wegen (6):

$$\varrho^2 = -\mu,$$

wodurch ϱ derartig bestimmt ist, dass in (9) auf den rechten Seiten nur noch die a_{ik} linear vorkommen. Wir haben für ϱ zwei Werthe

$$\varrho = +\sqrt{-\mu}, \quad \varrho = -\sqrt{-\mu};$$

beide geben aber dasselbe Resultat, denn man erkennt leicht, dass sich die Werthe der α und β nur vertauschen, wenn man einmal $+\sqrt{-\mu}$, einmal $-\sqrt{-\mu}$ statt ϱ setzt; und somit ist unsere Aufgabe gelöst: *Die Coordinaten der beiden Linien des zerfallenden Kegelschnittes sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 &= a_{11} : a_{12} + \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{13} - \sqrt{-\mu A_{22}} \\ &= a_{21} - \sqrt{\mu A_{33}} : a_{22} : a_{23} + \sqrt{\mu A_{31}} \\ &= a_{31} + \sqrt{-\mu A_{22}} : a_{32} - \sqrt{-\mu A_{11}} : a_{33} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &= a_{11} : a_{21} - \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{31} + \sqrt{-\mu A_{22}} \\ &= a_{12} + \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{22} : a_{32} - \sqrt{-\mu A_{11}} \\ &= a_{13} - \sqrt{-\mu A_{22}} : a_{23} + \sqrt{-\mu A_{11}} : a_{33} . \end{aligned}$$

Es gilt nun auch umgekehrt der Satz, *dass immer A verschwinden muss, sobald der Kegelschnitt ausartet;* denn die Gleichungen (3) verwandeln sich alsdann wegen des Bestehens von (7) in:

$$\varrho u_1 = \beta_1 \Sigma\alpha_i x_i + \alpha_1 \Sigma\beta_i x_i$$
$$\varrho u_2 = \beta_2 \Sigma\alpha_i x_i + \alpha_2 \Sigma\beta_i x_i$$
$$\varrho u_3 = \beta_3 \Sigma\alpha_i x_i + \alpha_3 \Sigma\beta_i x_i ,$$

und alle drei Ausdrücke verschwinden für $x = \xi$ identisch, da

$$\Sigma\alpha_i\xi_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\beta_i\xi_i = 0 ,$$

d. h. es gelten wieder die Gleichungen (4), aus denen

$$A = 0$$

folgt.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen über zerfallende Kegelschnitte bildete die Unbestimmtheit der Polarenbeziehung, welche dabei in gewisser Hinsicht eintritt. Nach unserer allgemeinen Behandlung ist andererseits diese Gestaltung der Polarentheorie geometrisch selbstverständlich. Denn es folgt unmittelbar aus der Theorie des vollständigen Vierseits, dass alle Strahlen eines Büschels die beiden Geraden so treffen, dass der vierte harmonische Punkt stets auf einer durch den Doppelpunkt gehenden Geraden liegt. Und umgekehrt ist es klar, dass einer durch den Doppelpunkt gehenden Linie alle Punkte der vierten harmonischen Geraden zu ihr und dem Linienpaare als Pole zugeordnet sind. Man construirt demnach die Polare eines Punktes, indem man denselben mit dem Doppelpunkte verbindet, und zu dieser Verbindungslinie und den Geraden, aus welchen der Kegelschnitt besteht, die vierte harmonische Gerade sucht. Diese zu den beiden Grundlinien harmonischen Linienpaare entsprechen den Paaren conjugirter Durchmesser bei nicht zerfallendem Kegelschnitte, insofern man den Doppelpunkt als Mittelpunkt auffassen kann. —

Voraussetzung bei alle diesen Betrachtungen ist, dass die Gleichungen (4) den Doppelpunkt ξ wirklich bestimmen. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn dieselben sich auf eine einzige Gleichung:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0$$

reduciren, von der sie dann nur durch constante Factoren (m_i) verschieden sind. Wir können in dem Falle setzen:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = m_1\gamma_1 & a_{12} = m_1\gamma_2 & a_{13} = m_1\gamma_3 \\ a_{21} = m_2\gamma_1 & a_{22} = m_2\gamma_2 & a_{23} = m_2\gamma_3 \\ a_{31} = m_3\gamma_1 & a_{23} = m_2\gamma_3 & a_{33} = m_3\gamma_3 . \end{array}$$

Da aber $a_{ik} = a_{ki}$ ist, so haben wir auch

$$m_1 : m_2 : m_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$$

und somit werden die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung pro
zu den Quadraten und Producten dreier Grössen, d. h. es wird,
ein Proportionalitätsfactor ist:

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} a_{11} = \mu\gamma_1^2 & a_{23} = \mu\gamma_2\gamma_3 \\ a_{22} = \mu\gamma_2^2 & a_{31} = \mu\gamma_3\gamma_1 \\ a_{33} = \mu\gamma_3^2 & a_{12} = \mu\gamma_1\gamma_2. \end{array}$$

Es folgt so, dass die linke Seite der Curvengleichung das vollst
Quadrat eines linearen Ausdrucks wird:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2,$$

und *der Kegelschnitt besteht aus einer Doppellinie:* ein jeder Punkt
selben ist nunmehr als Doppelpunkt zu betrachten.

Die Gleichungen (10) zeigen das gleichzeitige Bestehen der
genden Relationen:

$$\begin{array}{ll} A_{11} = 0 & A_{23} = 0 \\ A_{22} = 0 & A_{31} = 0 \\ A_{33} = 0 & A_{12} = 0 \end{array}$$

Anderseits folgen aus dem Verschwinden dieser Unterdeterminan
wieder die Gleichungen (10), also:

Wenn nicht nur die Determinante eines Kegelschnittes verschwin
sondern auch alle Unterdeterminanten derselben, so besteht der Ke
schnitt aus einer Doppellinie. In der That ist dann die Gleichung
Liniencoordinaten

$$\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

von jeder Geraden u erfüllt, wie es sein muss, da eine *jede Ger*
eine doppelt zählende andere Gerade in zwei zusammenfallend
Punkten schneidet. —

Die Betrachtungen dieser Ausartungen (Linienpaar und Dopp
linie) kann für die Untersuchung der allgemeinen Kegelschnitte v
grossem Nutzen werden. Es bietet sich hier nämlich die Aufgal
das Product der beiden von einem Punkte an die Curve zu legend
Tangenten zu bestimmen; und diese Aufgabe wollen wir als eine A
wendung der vorhergehenden Erörterungen noch durchführen.

Ziehen wir durch einen Punkt alle möglichen Strahlen und b
stimmen auf ihnen Punkte z so, dass sie mit y und den beid
Schnittpunkten des Strahles mit der Curve ein bestimmtes Dopp
verhältniss α bilden, so liegen die Punkte z, wie wir am Eingang d
allgemeinen Kegelschnitttheorie fanden, auf einer Curve zweiter Or
nung, gegeben durch:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0,$$

wo P, Q, R die folgende Bedeutung hatten. Es war, wenn wir uns der symbolischen Bezeichnung bedienen:

$$P = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 = \Sigma a_{ik} y_i y_k$$
$$R = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$
$$Q = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Hieraus erhielten wir für $\alpha = -1$ insbesondere eine *Doppellinie:*

$$Q^2 = 0,$$

die Polare des Punktes y. Soll dagegen $\alpha = +1$ sein, so müssen nach unseren allgemeinen Betrachtungen über Doppelverhältnisse von den vier Punkten zwei, welche bei Bildung des Doppelverhältnisses als ein Paar benutzt werden, mit einem Punkte des andern Paares zusammenfallen, also in unserem Falle auf dem durch y gelegten Strahle: die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit dem Punkte z (denn diese Punkte sind allein beweglich). Es muss daher die Linie $\overline{yz}$ die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten treffen, d. h. sie muss dieselbe berühren; und die für $\alpha = +1$ resultirende Gleichung stellt uns *das Product der beiden von y an die Curve gehenden Tangenten dar*, es ist:

$$PR - Q^2 = 0. \tag{11}$$

Um diese Gleichung wirklich in ihre linearen Factoren zu zerfällen, verfahren wir folgendermassen. Es seien v_i die Coordinaten der Polare des Punktes y in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

also die Coëfficienten der z in Q:

$$\sigma v_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Alsdann haben wir in (9) an Stelle der a_{ik} nur die Coëfficienten von $z_i z_k$ in (11) zu setzen, d. h. die Grössen:

$$a_{ik} P - \sigma^2 v_i v_k.$$

Die Coordinaten α_i und β_i der beiden Tangenten bestimmen sich daher aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1\beta_1 = a_{11} P - \sigma^2 v_1^2, & \alpha_2\beta_1 = a_{21} P - \sigma^2 v_2 v_1 - \varrho y_3, & \alpha_3\beta_1 = a_{31} P - \sigma^2 v_3 v_1 + \varrho y_2, \\
\alpha_1\beta_2 = a_{12} P - \sigma^2 v_1 v_2 + \varrho y_3, & \alpha_2\beta_2 = a_{22} P - \sigma^2 v_2^2, & \alpha_3\beta_2 = a_{32} P - \sigma^2 v_3 v_2 - \varrho y_1, \\
\alpha_1\beta_3 = a_{13} P - \sigma^2 v_1 v_3 - \varrho y_2, & \alpha_2\beta_3 = a_{23} P - \sigma^2 v_2 v_3 + \varrho y_1, & \alpha_3\beta_3 = a_{33} P - \sigma^2 v_3^2.
\end{array}$$

Hierin sind die y unmittelbar gegeben, und wir haben nur noch ϱ zu bestimmen, um dann die Verhältnisse der α und β sofort angeben zu können. Diese Bestimmung geben wieder die Gleichungen (6), denn wegen (6) haben wir:

$$A'_{ik} = -\varrho^2 y_i y_k, \tag{13}$$

wo die A_{ik}' aus den A_{ik} hervorgehen, wenn man in letzteren an Stelle der a_{ik} die Grössen $a_{ik} \,.\, P - \sigma^2 v_i v_k$ setzt. Bilden wir nun die Gleichungen (13), multipliciren eine jede mit $\sigma^2 v_i v_k$ und addiren sie, so erhalten wir wegen (12):

$$(14) \qquad \sigma^2 \Sigma A'_{ik} v_i v_k = - \varrho^2 P^2 .$$

Den hier links stehenden Ausdruck können wir noch passend umformen, wenn wir die Liniencoordinatengleichung des Kegelschnittes in der früher (p. 78) gegebenen Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zu Grunde legen.

Wenden wir diese Darstellung auf unsern Fall an und schreiben statt der a_{ik}' wieder die Grössen $a_{ik} P - \sigma^2 v_i v_k$, so geht die Gleichung (14) über in:

$$\varrho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11} P - \sigma^2 v_1^2 & a_{12} P - \sigma^2 v_1 v_2 & a_{13} P - \sigma^2 v_1 v_3 & v_1 \\ a_{21} P - \sigma^2 v_2 v_1 & a_{22} P - \sigma^2 v_2^2 & a_{23} P - \sigma^2 v_2 v_3 & v_2 \\ a_{31} P - \sigma^2 v_3 v_1 & a_{32} P - \sigma^2 v_3 v_2 & a_{33} P - \sigma^2 v_3^2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix},$$

oder indem wir die letzte Horizontalreihe der Determinante bez. mit $\sigma^2 v_1$, $\sigma^2 v_2$, $\sigma^2 v_3$ multiplicirt zu der ersten, zweiten und dritten Horizontalreihe addiren:

$$\varrho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11} P & a_{12} P & a_{13} P & v_1 \\ a_{21} P & a_{22} P & a_{23} P & v_2 \\ a_{31} P & a_{32} P & a_{33} P & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma^2 P^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir hierin die ersten drei Verticalreihen bez. mit y_1, y_2, y_3 und addiren sie zu der mit $-\sigma$ multiplicirten vierten Verticalreihe, so folgt ferner, da wegen (12)

$$\sigma \Sigma v_i y_i = \Sigma a_{ik} y_i y_k = P:$$

$$(15) \qquad \varrho^2 = -\sigma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & \frac{1}{\sigma} P \end{vmatrix} = - PA;$$

Und somit haben wir in (13) für ϱ die beiden Werthe:

$$\varrho = +\sqrt{-PA} \quad \text{und} \quad \varrho = -\sqrt{-PA}$$

einzusetzen; eine Vertauschung beider Werthe hat nur eine Vertauschung der beiden Linien α und β zur Folge, ist also unwesentlich. — Das Vorzeichen von ϱ^2 gibt uns ein Criterium über die Lage des Punktes y gegen die Curve; wir haben für eine reelle Curve die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) $\varrho^2 = -PA > 0$: Die beiden Tangenten sind reell.
2) $\varrho^2 = -PA < 0$: Die beiden Tangenten sind imaginär.
3) $\varrho^2 = -PA = 0$: Die beiden Tangenten fallen in eine zusammen ($P = 0$).

Die Ebene wird daher durch einen reellen Kegelschnitt in zwei Theile getrennt: in dem einen (*dem inneren Theile*) liegen nur Punkte mit imaginärem Tangentenpaare; in dem andern *(dem äusseren Theile)* nur solche mit reellem Tangentenpaare. Für Punkte der Curve findet ein Uebergang vom Reellen zum Imaginären Statt, indem beide Tangenten in die des betreffenden Punktes zusammenfallen.

Das Tangentenpaar vom Punkte y an die Curve erschien uns hier als die Ausartung eines Kegelschnittes von der Gleichungsform (vergl. p. 74):

$$(16) \qquad (\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0.$$

Fassen wir hierin α als einen veränderlichen Parameter auf, so stellt uns die Gleichung ein System von einfach unendlich vielen Kegelschnitten dar, unter denen insbesondere die doppelt zählende Polare von y und das Tangentenpaar enthalten war. Dieselben beiden Curven erhält man aber auch, wenn man den Kegelschnitt

$$P = 0$$

durch irgend einen andern des Systems ersetzt, d. h. *alle Kegelschnitte des Systems haben dasselbe Tangentenpaar und dieselbe Polare für den Punkt y.* Setzt man nämlich $y + \lambda z$ statt z, so erhält man:

$$(\alpha + 1)^2 P(R + 2\lambda Q + \lambda^2 P) - 4\alpha(Q + \lambda P)^2 = 0,$$

oder

$$\lambda^2 R' + 2\lambda Q' + P' = 0,$$

wo nun:

$$P' = (\alpha + 1)^2 PR = 4\alpha Q^2,$$
$$Q' = (\alpha - 1)^2 PQ,$$
$$R' = (\alpha - 1)^2 P^2,$$

und daher:

$$P'R' - Q'^2 = (\alpha^2 - 1)^2 P^2 (PR - Q^2).$$

Es sind also die Ausdrücke $P'R' - Q'^2$ und Q'^2, welche gleich Null gesetzt die Gleichungen des Tangentenpaares und der Polare für

irgend eine Curve des Systems geben, nur um constante, nicht verschwindende Factoren verschieden von den entsprechenden Ausdrücken für die gegebene Curve; und damit ist unser Satz bewiesen: *Alle Kegelschnitte des Systems* (16) *berühren sich in zwei Punkten, und ξ, η ist der Pol ihrer Berührungssehne.*

Wir wollen die Zerlegung der Gleichung des Tangentenpaares noch an einem einfachen Beispiele verfolgen. Es sei gegeben die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

und man soll das vom Punkte ξ, η an dieselbe gehende Tangentenpaar bestimmen. Es ist hier:

$$P = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1,$$

$$Q = \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1,$$

$$R = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Die Gleichung des Linienpaares lässt sich dann in der Form schreiben:

$$a^2 b^2 (PR - Q^2) = (x\eta - y\xi)^2 - (x - \xi)^2 b^2 - (y - \eta)^2 a^2 = 0.$$

Um diesen Ausdruck in seine beiden linearen Factoren

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

zu zerlegen, haben wir uns der Gleichungen für $\alpha_i \beta_k$ zu bedienen; dieselben nehmen hier die folgende Gestalt an (dieselben sind alle mit $a^2 b^2$ multiplicirt):

$$\begin{array}{lll} \alpha\alpha' = \eta^2 - b^2 & \beta\alpha' = -\xi\eta - \varrho & \gamma\alpha' = b^2\xi + \varrho\eta \\ \alpha\beta' = -\xi\eta + \varrho & \beta\beta' = \xi^2 - a^2 & \gamma\beta' = a^2\eta - \varrho\xi \\ \alpha\gamma' = b^2\xi - \varrho\eta & \beta\gamma' = a^2\eta + \varrho\xi & \gamma\gamma' = -b^2\xi^2 - a^2\eta^2, \end{array}$$

wo nun nach (15), wie man auch leicht direct nachweist:

$$\varrho^2 = b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2.$$

Die Gleichungen der beiden gesuchten Tangenten sind also, wenn ϱ eine der Wurzeln der Gleichung für ϱ^2 ist, gegeben durch:

$$b^2\xi(x - \xi) + a^2\eta(y - \eta) + \varrho(\xi y - x\eta) = 0$$

und:

$$b^2\xi(x - \xi) + a^2\eta(y - \eta) - \varrho(\xi y - x\eta) = 0.$$

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für Hyperbel und Parabel einfach durchführen.

IV. Dualistisches.

Wenn wir in unseren bisherigen Untersuchungen stets von der Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

ausgingen, so geschah dies nur, um uns der geläufigeren Vorstellung anzuschliessen, dass man den Punkt als erzeugendes Element für geometrische Gebilde betrachtet. Andererseits waren wir zu dieser einseitigen Betrachtung berechtigt, da wir bewiesen haben, dass im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung auch von der zweiten Klasse ist, und umgekehrt. In der That würden wir unter Zugrundelegung der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

$$(1) \qquad \Sigma A_{ik} u_i u_k = (A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3)^2 = 0$$

auf ganz dieselben Probleme geführt werden, die wir schon behandelt haben; dieselben würden nur unter anderem Gesichtspunkte erscheinen. Es gilt dies jedoch nicht mehr für zerfallende Kegelschnitte, sondern es tritt hier an Stelle des Linienpaares das Punktepaar. Wir wollen den Gang, welchen die den vorigen entsprechenden Untersuchungen bei diesem Ausgangspunkte nehmen würden, im Folgenden allgemein andeuten. Wir stellen dabei die dualistisch entsprechenden Aufgaben und Sätze, wie wir sie früher behandelten, den nunmehr sich darbietenden der Uebersichtlichkeit wegen noch einmal (rechts) gegenüber.

Den Anfangspunkt der Theorie bildet die Aufgabe, welche wir in der früheren Darstellung zuletzt behandelten:

Es sollen die beiden durch den Schnittpunkt zweier Geraden v und w an die Curve gehenden Tangenten bestimmt werden.	*Es sollen die beiden auf der Verbindungslinie zweier Punkte y und z liegenden Punkte der Curve bestimmt werden* (vgl. p. 73).

Wir setzen hier in (1):

$$(1) \qquad u_i = v_i + \mu w_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

und erhalten dadurch eine quadratische Gleichung in μ:

$$\mu^2 L + 2\mu H + G = 0,$$

wo:

$$L = (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)^2,$$
$$G = (A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3)^2,$$
$$H = (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)(A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3).$$

Die den beiden Wurzeln entsprechenden Werthe der u_i geben dann die Coordinaten der beiden Tangenten. Dieselben sind

reell für $H^2 > GL$,
imaginär für $H^2 < GL$,
sie fallen zusammen für $H^2 = GL$;

im letzten Falle liegt der Schnittpunkt der Linien v, w auf der Curve.

Hieran schliesst sich ferner die Frage:

Wie muss die Linie w liegen, damit sie mit v und den beiden Tangenten ein bestimmtes Doppelverhältniss α bildet?

Wie muss der Punkt z liegen, damit er mit y und den Schnittpunkten der Verbindungslinie ein bestimmtes Doppelverhältniss bildet? (vgl. p. 74)

Es findet sich für w die quadratische Gleichung:

$$(\alpha + 1)^2 GL - 4\alpha H^2 = 0;$$

dieselbe stellt, wenn man α als veränderlich betrachtet, ein System von Kegelschnitten dar, welche von w umhüllt werden müssen. Insbesondere ist darunter ein ausgezeichneter für $\alpha = -1$: ein doppelt zählender Punkt; also:

Wenn man von allen Punkten einer Geraden v die Tangenten an den Kegelschnitt zieht und von jedem aus den vierten harmonischen Strahl zu v und den beiden Tangenten, so gehen diese harmonischen Strahlen alle durch einen Punkt, den Pol der Geraden v. Seine Gleichung ist:

$$H = 0.$$

Wenn man auf allen Strahlen durch einen Punkt z die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte bestimmt und auf jedem den vierten harmonischen Punkt zu y und den beiden Schnittpunkten, so liegen diese harmonischen Punkte alle auf einer Geraden, der Polare des Punktes y. Ihre Gleichung ist:

$$Q = 0.$$

Die Coordinaten des Poles sind die Coëfficienten der Grössen w_i in dem Ausdrucke H, also:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \sigma y_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3, \\ \sigma y_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3, \\ \sigma y_3 &= A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + A_{33} v_3. \end{aligned}$$

Die Beziehung des Poles zur Linie v ist daher dieselbe, wie die früher gefundene, wenn wir unter den A_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante A eines als Punktgebilde gegebenen Kegelschnittes

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

verstehen. Man sieht dies auch sofort, wenn man die Punkte betrachtet, in denen die Berührungssehne der von einem auf v gelegenen Punkte gezogenen Tangenten die Linie v selbst schneidet. Ein solcher Punkt ist immer der Pol einer zugehörigen Linie w. Diese Geraden

müssen daher nach den bekannten Gesetzen über die Polarreciprocität den Pol von v umhüllen. Die Frage nach dem Orte, welcher von den harmonischen Strahlen zu einer Geraden und den von ihren Punkten ausgehenden Tangenten umhüllt wird, führt also hier auf nichts Neues: wir kommen auf die schon oben eingehend erörterten Polaritätsgesetze zurück. Insbesondere haben wir daher die folgenden Sätze:

Geht u durch den Pol von v, so geht v durch den Pol von u.

Der Pol einer Geraden ist der Schnittpunkt der Tangenten des Kegelschnittes in seinen Schnittpunkten mit der Geraden.

Der Pol einer Tangente des Kegelschnittes ist ihr Berührungspunkt.

Liegt x auf der Polare von y, so liegt y auf der Polare von x.

Die Polare eines Punktes ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden von ihm an den Kegelschnitt gehenden Tangenten.

Die Polare eines Punktes des Kegelschnittes ist seine Tangente.

Der letzte Satz gibt uns das Mittel, die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten darzustellen, wie oben der entsprechende Satz zum umgekehrten Schritte. Bezeichnen wir nämlich durch A die Determinante

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

und durch A_{ik} ihre zweigliedrigen Unterdeterminanten, so ergibt die Auflösung der Gleichungen (2) für $\varrho = \frac{\mathsf{A}}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \varrho v_1 &= \mathsf{A}_{11} y_1 + \mathsf{A}_{12} y_2 + \mathsf{A}_{13} y_3 \\ \varrho v_2 &= \mathsf{A}_{21} y_1 + \mathsf{A}_{22} y_2 + \mathsf{A}_{23} y_3 \\ \varrho v_3 &= \mathsf{A}_{31} y_1 + \mathsf{A}_{32} y_2 + \mathsf{A}_{33} y_3 \end{aligned}$$

und die Bedingung, dass y auf v liege, ergibt die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

$$\mathsf{A}_{11} y_1^2 + \mathsf{A}_{22} y_2^2 + \mathsf{A}_{33} y_3^2 + 2\mathsf{A}_{12} y_1 y_2 + 2\mathsf{A}_{13} y_1 y_3 + 2\mathsf{A}_{23} y_2 y_3 = 0,$$

eine Gleichung, welche wir in Determinantenform erhalten würden, wenn wir aus (2) und

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

σ und die v_i eliminiren. Wir haben also:

Ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

(3) $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$,

so ist derselbe in Punktcoordinaten dargestellt durch:

Ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

(3)* $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$,

so ist derselbe in Liniencoordinaten dargestellt durch:

(4) $\Sigma \mathsf{A}_{ik} x_i x_k = 0$,

oder durch:

(5) $$-\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(4)* $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$,

oder durch:

(5)* $$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir insbesondere voraus, dass die Gleichungen (4)*, (5)* mit (3) identisch sind, so müssen die Gleichungen (4), (5) umgekehrt auf (3)* zurückführen; und es ist dies nach den in der Einleitung über adjungirte Systeme gegebenen Determinanten-Sätzen (vgl. p. 20) in der That der Fall. Nach diesen ist nämlich:

(6) $$\mathsf{A} = A^2$$

und für die Unterdeterminanten:

(7) $$\mathsf{A}_{ik} = A \,.\, a_{ik}\,.$$

Die Gleichung (4) geht daher in der That über in:

$$A \cdot \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

d. h. sie unterscheidet sich von (3)* nur durch einen constanten, nicht verschwindenden Factor; denn wir setzen bei allen diesen Betrachtungen nicht zerfallende Kegelschnitte voraus.

Die Polarentheorie führte uns oben durch die Betrachtung sogenannter Polardreiecke auf eine einfachste Form der Kegelschnittgleichung; dasselbe gilt auch hier. *Legen wir ein Polardreieck als Coordinatendreieck zu Grunde, so ist die Gleichung*

in Liniencoordinaten:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

in Punktcoordinaten:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3}\right) = 0.$$

Die Untersuchungen, welche wir an diese Gleichungsform knüpften, indem wir zu einer Dreiecksseite die unendlich ferne Gerade wählten, sowie überhaupt die Betrachtungen über die Beziehungen des Kegelschnittes zu dieser Geraden fallen jedoch bei unseren jetzigen Darstellungen aus, denn es existirt kein einzelner entsprechend ausgezeichneter Punkt in der Ebene. Wir werden dagegen später zwei ausgezeichnete imaginäre Punkte der Ebene kennen lernen, welche durch ihre Beziehungen zu einem Kegelschnitte metrische Sätze für denselben begründen; insbesondere werden wir dadurch auf die Brennpunkte geführt werden.

Wir haben zunächst noch zu erörtern, was das Verschwinden der Determinante A bedeutet. Die Gleichungen (2) sind dann nicht mehr auflösbar; man kann dagegen eine Linie ω so bestimmen, dass gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3 = 0$$
$$A_{21}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3 = 0$$
$$A_{31}\omega_1 + A_{32}\omega_2 + A_{33}\omega_3 = 0,$$

und es findet sich weiter, dass, wenn eine Linie v der Gleichung

$$\Sigma A_{ik} v_i v_k = 0$$

genügt, auch jede Linie des Büschels $v + \lambda\omega$ diese Bedingung befriedigt. Wir folgern daraus, indem wir zugleich weitere Sätze über das Linienpaar dualistisch übertragen:

Verschwindet die Determinante A *eines Kegelschnittes, so zerfällt derselbe in ein Punktepaar.* Zu jeder Geraden gehört ein auf der Verbindungslinie der Punkte des Paares liegender Punkt als Pol; und jeder Punkt dieser Verbindungslinie hat alle Linien durch den vierten harmonischen Punkt zu Polaren.

Die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten stellt doppelt zählend die Verbindungslinie der beiden Punkte dar; es ist:

$$(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)^2 = \Sigma \mathsf{A}_{ik} x_i x_k.$$

Verschwindet die Determinante A eines Kegelschnittes, so zerfällt derselbe in ein Linienpaar. Zu jedem Punkte gehört eine durch den Schnittpunkt der Linien des Paares gehende Gerade als Polare; und jeder Strahl durch den Schnittpunkt hat alle Punkte des vierten harmonischen Strahles zu Polen.

Die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten stellt doppelt zählend den Schnittpunkt der beiden Linien dar; es ist:

$$(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3)^2 = \Sigma A_{ik} u_i u_k.$$

Um die Coordinaten der beiden Punkte a und b, in welche der Kegelschnitt zerfällt, zu bestimmen, haben wir hier die Gleichungen:

$$a_1 b_1 = A_{11} \qquad a_2 b_3 + b_2 a_3 = 2A_{23}$$
$$a_2 b_2 = A_{22} \qquad a_3 b_1 + b_3 a_1 = 2A_{31}$$
$$a_3 b_3 = A_{33} \qquad a_1 b_2 + b_1 a_2 = 2A_{12},$$

und dieselben sind nur unter der Bedingung

$$\mathsf{A} = 0$$

auflösbar.

Eine weitere Particularisation tritt ein, wenn auch die Unterdeterminanten A_{ik} verschwinden; wir haben alsdann:

Wenn sämmtliche Unterdeterminanten von A verschwinden, so stellt die Gleichung:

$$\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

einen doppelt zählenden Punkt dar.

Wenn sämmtliche Unterdeterminanten von A verschwinden, so stellt die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

eine doppelt zählende Gerade dar.

Auch aus dem so gewonnenen Satze können wir erkennen, dass die Gleichung eines Kegelschnittes, $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, mit verschwindender Determinante A, in Liniencoordinaten, $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$, den Doppelpunkt des Kegelschnittes gibt. Denn bilden wir für diese Gleichung die Unterdeterminanten ihrer Determinante A, so verschwinden dieselben wegen (7) sämmtlich.

Die Gleichungen, welche uns eine Curve zweiter Klasse mit verschwindender Determinante in ihre linearen Factoren zerfällen lehrten, können wir insbesondere zur Lösung der folgenden Aufgabe benutzen.

Es sollen die Schnittpunkte einer Geraden v mit einer Curve zweiter Klasse bestimmt werden.

Es sollen die Tangenten von einem Punkte y an eine Curve zweiter Ordnung bestimmt werden.

Wir gehen dabei von dem Kegelschnittsysteme:

$$(\alpha + 1)^2 GL - 4\alpha H^2 = 0$$

aus, welches für $\alpha = -1$ die Gleichung des Poles der Linie v:

$$H = 0$$

ergab. Die beiden gesuchten Punkte erhalten wir für $\alpha = 1$; denn für sie muss die vierte harmonische Gerade zu v und dem von einem der Punkte ausgehenden Tangentenpaare mit der Doppellinie, aus welcher dies Tangentenpaar besteht, zusammenfallen. *Das Punktepaar ist also dargestellt durch:*

$$GL - H^2 = 0;$$

und die Zerlegung dieser Gleichung geschieht dann ganz, wie oben die der entsprechenden (vgl. p. 107)

$$PR - Q^2 = 0.$$

Im Anschlusse hieran lässt sich weiter nachweisen, dass alle Curven des Systems (8) (wenn wir α als Parameter ansehen) mit der Linie v dieselben Schnittpunkte und in ihnen dieselben Tangenten haben. Eine gleiche Eigenschaft hatten wir aber oben für das System

$$(9) \qquad (\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0$$

abgeleitet; allen Curven des letzteren sind die von y ausgehenden Tangenten und deren Berührungspunkte gemeinsam. *Betrachten wir also v als die Polare des Punktes y, so stellen uns die Gleichungen* (8) *und* (9) *dasselbe Kegelschnittsystem dar*, sobald wir unter den A_{ik} die Unterdeterminanten von A verstehen. Wir wollen weiter nachweisen, dass das eine System dem andern durch die auf den Kegelschnitt $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ begründete Polarreciprocität zugeordnet ist, d. h. *dass die Polare w einen Kegelschnitt von* (8) *umhüllt, wenn ihr Pol z die durch den gleichen Parameter α bestimmte Curve von* (9) *durchläuft.* Zwischen w und z bestehen die Relationen:

(10) $$\varrho w_i = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nun ist nach der zweiten Form, welche wir der Gleichung eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten gegeben haben:

$$G = \Sigma A_{ik} w_i w_k = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in der rechts stehenden Determinante die erste, zweite und dritte Verticalreihe bez. mit z_1, z_2, z_3 und subtrahiren dieselben von der letzten, so erhalten wir wegen

$$\varrho (w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3) = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$

das Resultat:

$$\varrho^2 G = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & -\Sigma a_{ik} z_i z_k \end{vmatrix},$$

oder:

(11) $$\varrho^2 G = A \cdot R.$$

Führen wir ebenso in den Ausdruck für L die Coordinaten des Pols y der Geraden v ein, so ergibt sich:

(12) $$\varrho^2 L = - \varrho^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = A \cdot P.$$

Um endlich auch

$$H = \Sigma A_{ik} v_i w_k$$

entsprechend umzuformen, beachten wir, dass derselbe bis auf einen Factor $\frac{1}{2}$ aus G entsteht, indem wir nach w_1, w_2, w_3 ordnen, d. h. G in der Form

$$w_1 \Sigma a_{1k} w_k + w_2 \Sigma a_{2k} w_k + w_3 \Sigma a_{3k} w_k$$

schreiben und in den Summen die w durch die v ersetzen, ein Process, den wir unter Benutzung der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnungsweise kurz in folgender Weise ausdrücken können; es ist:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial w_1} v_1 + \frac{\partial G}{\partial w_2} v_2 + \frac{\partial G}{\partial w_3} v_3\right).$$

Nehmen wir nun diese Operation mit der Determinante vor, durch welche wir G darstellten, so erhalten wir:

$$H = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in dieser Determinante die erste, zweite und dritte Verticalreihe bez. mit $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$, addiren dieselben zu der mit ϱ multiplicirten letzten Reihe und berücksichtigen die Gleichung:

$$\varrho\,(v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3) = Q,$$

so finden wir:

$$\varrho H = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & -\frac{1}{\varrho} Q \end{vmatrix},$$

oder:

(13) $$\varrho^2 H = A \cdot Q.$$

Durch die Gleichungen (11), (12), (13) geht also in der That das Curvensystem

(8) $$(\alpha + 1)^2\, GL - 4\,\alpha H^2 = 0$$

bis auf den nicht verschwindenden Factor $\frac{A}{\varrho^2}$ in das andere über:

(9) $$(\alpha + 1)^2\, PR - 4\,\alpha Q^2 = 0,$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. —

Zum Schlusse dieser Betrachtungen wollen wir die verschiedenen Arten von Curven zweiter Ordnung und Klasse, wie sie durch eine quadratische Gleichung in Punkt- oder Liniencoordinaten dargestellt werden können, übersichtlich zusammenstellen. Wir fügen bei jeder Curvenzahl die Zahl der Constanten hinzu, von welchen sie abhängt, d. h. die Zahl der Punkte bez. Tangenten, durch die eine Curve der Art bestimmt wird. So enthält eine allgemeine Curve 5, ein Linienpaar 4, eine Doppellinie 2 Constante. Eine von 3 Constanten abhängende Curve würde gegeben werden durch eine Doppellinie und einen mit ihr vereinigt gelegenen Doppelpunkt, wie sie aus dem Linienpaare oder dem Punktepaare entsteht, wenn man die beiden Linien oder Punkte allmählich zusammenrücken lässt, ohne dass dabei ihr Durchschnittspunkt resp. ihre Verbindungslinie unbestimmt wird. Eine solche

Curve kann aber nicht durch *eine* Gleichung in Punkt- oder Liniencoordinaten dargestellt werden; es sind dazu vielmehr zwei Gleichungen erforderlich von der Form

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} u_i u_k = 0,$$

wo sowohl die Unterdeterminanten der a_{ik}, wie die der b_{ik} verschwinden, und wo

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33}$$
$$= \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$
$$b_{11} : b_{12} : b_{13} = b_{21} : b_{22} : b_{23} = b_{31} : b_{32} : b_{33}$$
$$= \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$$

und endlich:

$$\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 = 0.$$

Der Vollständigkeit wegen führen wir auch diesen Fall in der folgenden Tabelle mit auf, in der er dann gleichzeitig als Grenzfall zwischen Linienpaar und Doppellinie, und zwischen Punktepaar und Doppelpunkt auftritt. Wir haben somit *für Curven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse, deren Gleichungen nur reelle Coëfficienten enthalten,* folgende Tabelle:

I. *Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse* ($A \gtrless 0$, $\mathsf{A} \gtrless 0$).

5 Constante.

1) Ellipse, reell oder imaginär.
2) Hyperbel.
3) Parabel.

II. *Curven zweiter Ordnung* ($A = 0$).	III. *Curven zweiter Klasse* ($\mathsf{A} = 0$).
1) Linienpaar. 4 Constante: zwei reelle oder conjugirt imaginäre Linien. (Als Klassencurve Doppelpunkt.)	1) Punktepaar. 4 Constante: zwei reelle oder conjugirt imaginäre Punkte. (Als Ordnungscurve Doppellinie.)
2) Doppellinie und Doppelpunkt in vereinigter Lage. 3 Constante.	
3) Doppellinie.*) 2 Constante.	3) Doppelpunkt.*) 2 Constante.

Wenn auch die Parabel in der Tabelle unter den Kegelschnitten mit 5 Constanten aufgeführt wurde, so soll damit nur hervorgehoben werden, dass dieselbe der Ellipse und Hyperbel gleichberechtigt beizu-

*) Diese Gebilde sind bei reellen Coëfficienten a_{ik} in der Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, bez. A_{ik} in $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ immer reell.

stellen ist, insofern eben ein nicht zerfallender Kegelschnitt noch verschieden gegen die unendlich ferne Gerade liegen kann. Die Parabel, *als solche*, dagegen hängt nur von 4 Willkürlichkeiten ab, indem durch das Wort „Parabel" schon eine Constante bestimmt, d. h. eine ihrer Tangenten, nämlich die unendlich ferne Gerade, gegeben ist. Eine Parabel ist schon völlig bestimmt durch drei ihrer Punkte und durch die Richtung ihrer Axe; denn letztere bestimmt den Punkt, in welchem die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt wird, so dass uns ausser jenen drei noch zwei weitere unendlich ferne, einander unendlich benachbarte Punkte gegeben sind.

Der aufgestellten Tabelle gegenüber ist das Verhalten der Kegelschnitte in dem Systeme, welches durch die Gleichung (8) oder (9) dargestellt wird, besonders interessant. Die Gleichung in Liniencoordinaten (8) gibt uns einen Doppelpunkt ($H = 0$) und ein Punktepaar ($GL - H^2 = 0$); beide Curven werden dagegen durch eine Gleichung der Form (9) nicht dargestellt, und man erschliesst ihre Existenz in diesem Systeme nur, insofern dieselben durch einen Gränzübergang aus den allgemeinen Curven des Systems bei Variation des Parameters α entstehen. Die Gleichung in Punktcoordinaten (9) gibt dagegen eine Doppellinie ($Q = 0$) und ein Linienpaar ($PR - Q^2 = 0$); und beide sind durch eine Gleichung von der Form (8) nicht auszudrücken. Dabei ist der Doppelpunkt in (8) gleichzeitig der Doppelpunkt des Linienpaares in (9), und die Doppellinie in (9) gleichzeitig die Verbindungslinie der Punkte des in (8) enthaltenen Punktpaares.

V. Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten.

Sind zwei Kegelschnitte gegeben, so bietet sich naturgemäss zunächst die Frage nach der Zahl ihrer gemeinsamen Punkte, respective Tangenten und nach der analytischen Bestimmung dieser gemeinsamen Elemente.

Die Gleichungen der beiden vorliegenden Kegelschnitte seien in Punktcoordinaten:

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

und:

$$\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0 .$$

Um die Schnittpunkte beider zu bestimmen, können wir folgendermassen verfahren. Wir ordnen die Ausdrücke links nach Potenzen einer Variabeln, z. B. x_3, schreiben also die Curvengleichungen in der Form:

$$f = A + A' x_3 + A'' x_3^2$$
$$\varphi = B + B' x_3 + B'' x_3^2 ,$$

wo A, B vom zweiten, A', B' vom ersten Grade in x_1, x_2 sind, und wo

A'', B'' diese Grössen nicht mehr enthalten (also $A'' = a_{33}$, $B'' = b_{33}$). Aus den letzten Gleichungen können wir x_3 eliminiren, indem wir aus ihnen die Verhältnisse

$$1 : x_3 : x_3^2 .$$

bestimmen. Wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, 1 \quad &= A' B'' - B' A'' \\ \varrho \,.\, x_3 \quad &= A'' B \;- B'' A \\ \varrho \,.\, x_3^2 &= A \; B' \;- B \; A' ; \end{aligned}$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass das Product des ersten und letzten Ausdruckes gleich dem Quadrate des mittleren ist, d. h. dass:

$$(A' B'' - B' A'') (A B' - B A') = (A'' B - B'' A)^2 .$$

Es ist dies eine biquadratische Gleichung für die Unbekannte $\frac{x_1}{x_2}$. Ihre vier Wurzeln geben also vier durch den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gehende Strahlen nach den Schnittpunkten beider Curven; und somit haben wir, da Entsprechendes auch für zwei Curven zweiter Klasse gilt, die Sätze:

Zwei Kegelschnitte schneiden sich im Allgemeinen in 4 Punkten.	*Zwei Kegelschnitte haben im Allgemeinen 4 gemeinsame Tangenten.*

Es brauchen natürlich nicht alle vier Punkte oder Tangenten reell zu sein; sondern es können auch zwei imaginär und zwei reell, oder auch alle vier imaginär sein. Es können endlich auch von den vier Punkten mehrere einander unendlich nahe rücken, wo sich dann die Kegelschnitte berühren. Die letzteren Fälle schliessen wir jedoch zunächst ausdrücklich von unserer Betrachtung aus; wir werden später genauer auf dieselben eingehen. Wir nehmen also an, dass vier getrennte reelle oder imaginäre Schnittpunkte, bez. gemeinsame Tangenten vorhanden sind; wir werden uns jedoch im Folgenden zunächst auf die Bestimmung der gemeinsamen Punkte beschränken, die der Tangenten folgt dann durch dualistische Uebertragung.

Da erst fünf Punkte einen Kegelschnitt völlig bestimmen, so wird es noch unendlich viele Curven zweiter Ordnung geben, welche durch die vier Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$ hindurchgehen; und es lässt sich die Gleichung einer jeden Curve der Art in der Form

$$f - \lambda \varphi = 0 \tag{1}$$

schreiben, wo λ ein Parameter ist, so dass jedem Werthe von λ ein bestimmter, durch die 4 Punkte gehender Kegelschnitt entspricht. Denn die Gleichung ist erfüllt, sobald gleichzeitig f und φ verschwinden, und anderseits muss jeder Kegelschnitt unserer Art die Form (1) haben, weil durch einen beliebigen fünften Punkt nur noch ein solcher

hindurchgeht, und sich unter den Kegelschnitten (1) eben ein solcher findet. Setzt man nämlich die Coordinaten dieses fünften Punktes in (1) ein, und sind f_0, φ_0 die Ausdrücke, welche dadurch aus f, φ entstehen, so kann man die Gleichung

$$f_0 - \lambda \varphi_0 = 0$$

als eine Gleichung zur Bestimmung von λ betrachten, und die Gleichung des durch den betreffenden Punkt gehenden Kegelschnitts ist daher:

$$f - \frac{f_0}{\varphi_0} \varphi = 0 .$$

Das System dieser Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten pflegt man als ein *Kegelschnittsbüschel* zu bezeichnen, die Gleichung (1) gibt dann einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels, es ist *die Gleichung des Büschels.*

Durch die *vier Grundpunkte dieses Büschels* gehen nun insbesondere drei ausgezeichnete, uneigentliche Kegelschnitte, d. h. (da wir f und φ in Punktcoordinaten gegeben annehmen) solche, die in ein Linienpaar zerfallen; es sind dies die Paare von Verbindungslinien der vier Punkte, d. h. die sechs Seiten des durch die vier Punkte bestimmten vollständigen Vierecks. Je zwei derselben, welche zusammen alle vier Punkte enthalten, bilden in der That einen Kegelschnitt unserer Art. Die drei in dieser Weise ausgezeichneten Curven müssen daher auch für besondere Werthe von λ durch die Gleichung (1) dargestellt sein. In der That führt die Bedingung, dass der Kegelschnitt $f - \lambda\varphi = 0$ zerfalle, auf eine *cubische* Gleichung für λ, denn sie ist durch das Verschwinden der Determinante dieses Kegelschnittes gegeben, und jeder Coëfficient seiner Gleichung enthält λ linear. Bezeichnen wir diese Determinante mit $\Delta(\lambda)$, so erhalten wir also die Bedingung:

$$(2) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Sind λ', λ'', λ''' die Wurzeln dieser Gleichung, die zunächst verschieden sein mögen, so stellen die entsprechenden Curven unseres Büschels obige Linienpaare dar, und wir können setzen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f - \lambda' \varphi &= A' \cdot B', \\ f - \lambda'' \varphi &= A'' \cdot B'', \\ f - \lambda''' \varphi &= A''' \cdot B''', \end{aligned}$$

wo die A, B lineare Functionen der x bedeuten. Kennt man demnach die Wurzeln der cubischen Gleichung (2) und führt man bei zweien der Ausdrücke (3) die Zerlegung in lineare Factoren wirklich aus,

wozu nach unseren früheren Betrachtungen jedesmal eine quadratische Gleichung erforderlich ist, so geben die Durchschnitte der beiden so gefundenen Paare von Geraden die vier Schnittpunkte der beiden Curven zweiter Ordnung auf lineare Weise.

Wir wollen diese Aufgabe noch ausführlicher behandeln, indem wir von einem anderen Gesichtspunkte ausgehen; wir finden zugleich Gelegenheit, eine Reihe fundamentaler Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten zu erörtern. Wenn wir dabei scheinbar auf einem Umwege zum Ziele gelangen, indem die Lösung des Problems von der eines anderen mittelst einer cubischen Gleichung abhängig gemacht wird, so müssen wir bedenken, dass die wirkliche Lösung der direct aufgestellten biquadratischen Gleichung eben auch nur mit Hülfe einer cubischen, „ihrer *Resolvente*“, erfolgen kann.*)

Construiren wir zunächst die Nebenecken des von den vier Schnittpunkten bestimmten vollständigen Vierecks (vgl. unten Fig. 22), so folgt aus der Construction der Polare, dass jede der drei Ecken die Verbindungslinie der beiden andern für beide Curven zur Polare hat. *Das von den Nebenecken gebildete Dreieck ist daher ein gemeinsames Polardreieck für beide Kegelschnitte, und zwar ist dies das einzig mögliche Dreieck der Art.* Letzteres ergibt sich, weil das Dreieck aus denselben Gründen auch für alle Kegelschnitte des Büschels

$$f - \lambda\varphi = 0$$

Polardreieck ist, insbesondere also auch für die drei darin enthaltenen Linienpaare. Für diese geht aber die Polare eines beliebigen Punktes durch den Doppelpunkt des Linienpaares. Es müssen folglich die Verbindungslinien der drei Doppelpunkte der Paare die Seiten des Polardreiecks, und die Doppelpunkte selbst die Ecken desselben bilden.

Die Aufsuchung dieses Polardreiecks bildet den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen. Statt nämlich die drei Linienpaare des Büschels zu bestimmen, suchen wir die Doppelpunkte derselben, d. h. die Ecken des Polardreiecks, durch deren Auffindung dann unsere Aufgabe im Wesentlichen gelöst ist.

Wir haben früher gesehen, dass in der Gleichung eines Kegelschnittes nur noch die Quadrate der Veränderlichen vorkommen, sobald ein Polardreieck als Coordinatendreieck gewählt wird. Nehmen wir daher als solches das gemeinsame Polardreieck von f und φ, so werden die Gleichungen dieser beiden Kegelschnitte von der Form:

$$\begin{aligned} f &= a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 = 0, \\ \varphi &= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 = 0. \end{aligned}$$

*) Vgl. über die Lösung der biquadratischen Gleichungen die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

Die drei Coëfficienten einer der beiden Functionen f und φ kann man jedoch einfach gleich der Einheit annehmen, so dass z. B.

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

wird. Denken wir uns nämlich die y so als lineare Functionen der früheren Coordinaten x bestimmt, dass durch Einsetzung der letzteren f und φ wieder die frühere Form $\Sigma a_{ik} x_i x_h$ und $\Sigma b_{ik} x_i x_k$ annehmen, so können wir durch Multiplication der drei Gleichungen, welche eine solche Transformation darstellen, mit passend gewählten Constanten die Definition der Coordinaten y so wählen, dass obige Factoren b_1, b_2, b_3 mit in die y eingehen.*) Freilich wird — und das soll geschehen — dabei vorausgesetzt, dass φ nicht aus einem Linienpaare besteht, wo dann einer der Coëfficienten b gleich Null sein würde. In diesem Falle wäre $\varphi = 0$ selbst eines der gesuchten drei Linienpaare; und die Bestimmung der Schnittpunkte erforderte dann nur die Trennung der beiden Factoren von φ und das Aufsuchen der Schnittpunkte der so erhaltenen Geraden mit $f = 0$. Durch diese Festsetzung über die Coëfficienten von φ sind die von f auch völlig bestimmt. Denn damit die drei Gleichungen (3) bestehen können, dürfen in einem Ausdrucke $f - \lambda\varphi$ nur noch die Quadrate von zwei Veränderlichen vorkommen; eine homogene lineare Function der Quadrate von drei Variabeln kann man nicht in lineare Factoren zerlegen. Wir haben daher die a bez. gleich den Wurzeln der Gleichung (2) zu setzen und können dann unsere Aufgabe folgendermassen formuliren:

Es soll eine lineare Substitution:

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_1' \, x_1 + \alpha_2' \, x_2 + \alpha_3' \, x_3 \\ y_2 &= \alpha_1'' \, x_1 + \alpha_2'' \, x_2 + \alpha_3'' \, x_3 \\ y_3 &= \alpha_1''' x_1 + \alpha_2''' x_2 + \alpha_3''' x_3 \end{aligned}$$

so bestimmt werden, dass zwei gegebene Functionen $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ *durch dieselbe gleichzeitig in die Formen*

$$(5)\qquad \begin{aligned} f &= \lambda' y_1^2 + \lambda'' y_2^2 + \lambda''' y_3^2 \\ \varphi &= \quad y_1^2 + \quad y_2^2 + \quad y_3^2 \end{aligned}$$

übergeführt werden; wobei dann λ', λ'', λ''' die Wurzeln der cubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ werden.

---

*) Eine Gleichung:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

stellt zunächst nur einen imaginären Kegelschnitt dar, doch kann man auf diese Form auch die Gleichung

$$x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0$$

bringen, wenn man $y_1 = x_1$, $y_2 = \sqrt{\pm 1}\, x_2$, $y_3 = \sqrt{\pm 1}\, x_3$ setzt.

Nehmen wir diese Aufgabe zunächst als gelöst an, so sind die drei gesuchten Linienpaare dargestellt durch:

$$f - \lambda' \varphi = (\lambda'' - \lambda') y_2^2 + (\lambda''' - \lambda') y_3^2 = 0,$$
$$f - \lambda'' \varphi = (\lambda' - \lambda'') y_1^2 + (\lambda''' - \lambda'') y_3^2 = 0,$$
$$f - \lambda''' \varphi = (\lambda' - \lambda''') y_1^2 + (\lambda'' - \lambda''') y_2^2 = 0;$$

und diese Ausdrücke sind sofort in ihre linearen Factoren zu zerfällen. So sind die Linien des ersten Paares z. B. gegeben durch:

$$\sqrt{\lambda'' - \lambda'}\, y_2 + \sqrt{\lambda''' - \lambda'}\, y_3 = 0$$

und:

$$\sqrt{\lambda'' - \lambda'}\, y_2 - \sqrt{\lambda''' - \lambda'}\, y_3 = 0.$$

Um endlich die Schnittpunkte von f und φ selbst zu finden, brauchen wir nur die beiden Ausdrücke (5) gleichzeitig gleich Null zu setzen, wodurch wir zwei homogene lineare Gleichungen für y_1^2, y_2^2, y_3^2 erhalten. Aus ihnen können wir die Verhältnisse dieser Quadrate dann nach bekannten Regeln berechnen, und zwar ergibt sich, wenn ϱ ein Proportionalitätsfactor ist:

$$\varrho y_1^2 = \lambda'' - \lambda''',$$
$$\varrho y_2^2 = \lambda''' - \lambda',$$
$$\varrho y_3^2 = \lambda' - \lambda''.$$

Für die Coordinaten der Schnittpunkte haben wir also, wenn wir σ statt $\sqrt{\varrho}$ schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma y_1 &= \pm \sqrt{\lambda'' - \lambda'''}, \\ \sigma y_2 &= \pm \sqrt{\lambda''' - \lambda'}, \\ \sigma y_3 &= \pm \sqrt{\lambda' - \lambda''}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die 8 Vorzeichencombinationen, welche hier möglich sind, führen in der That nur auf 4 verschiedene Werthsysteme der y, denn dieselben geben paarweise Coordinaten desselben Punktes, wenn sie sich nur um einen gemeinsamen Factor -1 unterscheiden.

Unsere Aufgabe der Bestimmung der vier Schnittpunkte ist also in allgemeinster Weise gelöst, sobald wir die y als Functionen der x durch die Gleichungen (4) *gegeben voraussetzen.* Wir haben nun noch die Bestimmung der Transformationscoëfficienten α wirklich durchzuführen. Ehe wir jedoch darauf eingehen, wollen wir die dualistisch entsprechenden Erörterungen, zu welchen die Aufsuchung der vier gemeinsamen Tangenten Veranlassung bietet, erwähnen; wir werden sehen, *dass die Bestimmung dieser Tangenten durch dieselbe cubische Gleichung* (2) *und durch dieselbe Transformation* (4) *geleistet werden kann.*

Verstehen wir unter den A_{ik}, B_{ik} die bez. aus den Grössen a_{ik},

b_{ik} zu bildenden zweigliedrigen Unterdeterminanten, so sind die Gleichungen der Kegelschnitte f und φ in Liniencoordinaten:

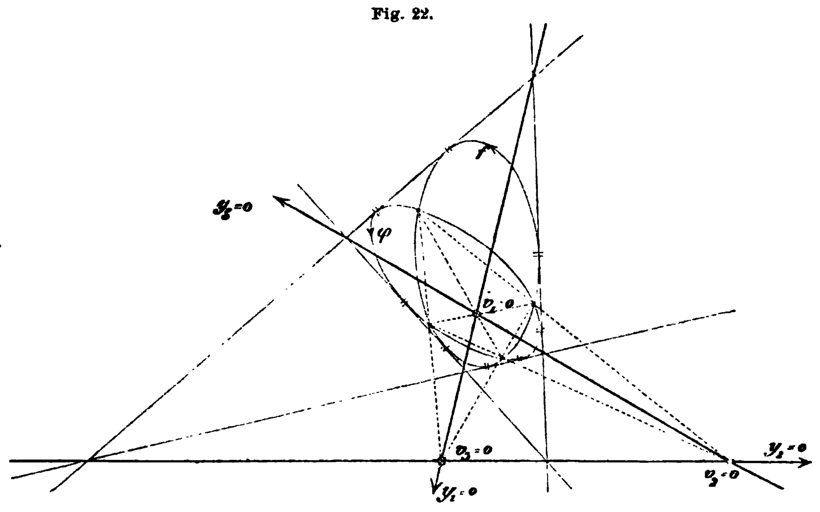
$$F = \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0,$$
$$\Phi = \Sigma B_{ik} u_i u_k = 0.$$

Ist ferner μ ein Parameter, so stellt die Gleichung

$$F - \mu \Phi = 0 \tag{7}$$

eine „Schaar" von einfach unendlich vielen Kegelschnitten dar, welche alle mit F und Φ dieselben vier Tangenten gemeinsam haben; und zwar sind unter dieser Gleichungsform *alle* Curven zweiter Klasse enthalten, welche diese vier Tangenten berühren. Insbesondere gibt es in der Schaar *drei in ein Punktepaar* zerfallende Curven; es sind dies die Paare der Schnittpunkte der vier Tangenten, d. h. die sechs Ecken des durch die letzteren bestimmten vollständigen Vierseits (vgl. Fig. 22); je zwei Punkte, durch welche zusammen die vier Tangenten alle hindurchgehen, bilden eine Curve der Schaar. Die Construction des Poles einer Geraden lehrt ferner, dass die Verbindungslinie zweier Punkte

Fig. 22.



je eines Paares Polare des Schnittpunktes der durch die beiden anderen Paare bestimmten Geraden ist, dass also *die Nebenseiten des von den gemeinsamen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits ein beiden Kegelschnitten gemeinsames Polardreieck bilden.* Da wir aber oben gezeigt haben, dass es für zwei Kegelschnitte nur ein solches Dreieck gibt, so muss das hier gefundene mit dem identisch sein, auf welches wir zuerst, von Punktcoordinaten ausgehend, geführt wurden. Man überzeugt sich davon überdies sofort durch einen Blick auf die Construction der beiden Dreiecke. Die Bestimmung der vier gemeinsamen

Tangenten geschieht nun ebenso mit Hülfe dieses Dreiecks, wie oben die der gemeinsamen Punkte; und damit ist dies Problem auf das vorige zurückgeführt, denn auch die dazu nöthige cubische Gleichung ist durch die Gleichung (2) bereits gelöst.

Legen wir nämlich das gemeinsame Polardreieck von f und φ wieder als Coordinatendreieck zu Grunde und nehnen wir diese Curven in der Form (5) an, so sind ihre Gleichungen in Liniencoordinaten:

$$(8)\qquad \begin{aligned} F &= \lambda''\lambda'''v_1^2 + \lambda'''\lambda' v_2^2 + \lambda'\lambda'' v_3^2 = 0 \\ \Phi &= \qquad v_1^2 + \qquad v_2^2 + \qquad v_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Coëfficienten hängen also in der That nur von den Wurzeln der Gleichung

$$(2)\qquad \Delta(\lambda) = 0$$

ab.*) *Die Bestimmung der Punktepaare selbst*, d. h. der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten, geschieht nun, indem man in der Gleichung

$$F - \mu\Phi = 0$$

μ bez. gleich $\lambda''\lambda'''$, $\lambda'''\lambda'$, $\lambda'\lambda''$ setzt. Man findet so die drei zerfallenden Kegelschnitte der Schaar:

$$\begin{aligned} F - \lambda''\lambda'''\Phi &= \lambda'''(\lambda' - \lambda'')v_2^2 + \lambda''(\lambda' - \lambda''')v_3^2 = 0 \\ F - \lambda'''\lambda'\Phi &= \lambda'''(\lambda'' - \lambda')v_1^2 + \lambda'(\lambda'' - \lambda''')v_3^2 = 0 \\ F - \lambda'\lambda''\Phi &= \lambda''(\lambda''' - \lambda')v_1^2 + \lambda'(\lambda''' - \lambda'')v_2^2 = 0, \end{aligned}$$

Für die Coordinaten der vier gemeinsamen Tangenten ergeben sich endlich aus den Gleichungen (8) die Werthe:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varrho v_1 &= \pm\sqrt{\lambda'(\lambda''' - \lambda'')} \\ \varrho v_2 &= \pm\sqrt{\lambda''(\lambda' - \lambda''')} \\ \varrho v_3 &= \pm\sqrt{\lambda'''(\lambda'' - \lambda')}; \end{aligned}$$

und die acht hier möglichen Vorzeichencombinationen geben wieder, wie bei den Gleichungen (6), in der That nur vier verschiedene Lagen der Tangenten.

Wir haben nun noch die Bestimmung der Transformationscoëfficienten α, die wir vorläufig als bekannt annahmen, wirklich auszuführen.

Lösen wir die betreffenden Transformationsgleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3 \\ y_2 &= \alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \alpha_3'' x_3 \\ y_3 &= \alpha_1''' x_1 + \alpha_2''' x_2 + \alpha_3''' x_3 \end{aligned}$$

*) Man sieht aus den Gleichungen (8), dass die Wurzeln der cubischen Gleichung, welche durch das Verschwinden der aus den Grössen $A_{ik} - \mu B_{ik}$ zu bildenden Determinante gegeben ist, die reciproken Werthe der Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ sind.

nach den x auf und bezeichnen die Unterdeterminante eines Elementes $\alpha_i^{(k)}$ der Determinante:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ \alpha_1''' & \alpha_2''' & \alpha_3''' \end{vmatrix},$$

dividirt durch diese Determinante selbst, mit $\beta_i^{(k)}$, so erhalten wir nach bekannten Determinantensätzen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1' y_1 + \beta_1'' y_2 + \beta_1''' y_3 \\ x_2 &= \beta_2' y_1 + \beta_2'' y_2 + \beta_2''' y_3 \\ x_3 &= \beta_3' y_1 + \beta_3'' y_2 + \beta_3''' y_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

Nach den allgemeinen, früher über Coordinatentransformation gegebenen Regeln sind die entsprechenden Gleichungen für Liniencoordinaten dann durch die transponirten Substitutionen gegeben, d. h. durch:

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta_1' u_1 + \beta_2' u_2 + \beta_3' u_3 & u_1 &= \alpha_1' v_1 + \alpha_1'' v_2 + \alpha_1''' v_3 \\ v_2 &= \beta_1'' u_1 + \beta_2'' u_2 + \beta_3'' u_3 & u_2 &= \alpha_2' v_1 + \alpha_2'' v_2 + \alpha_2''' v_3 \\ v_3 &= \beta_1''' u_1 + \beta_2''' u_2 + \beta_3''' u_3 & u_3 &= \alpha_3' v_1 + \alpha_3'' v_3 + \alpha_3''' v_3 . \end{aligned} \tag{11}$$

Ferner haben wir uns früher auch die geometrische Bedeutung der Substitutionscoëfficienten vergegenwärtigt; es sind darnach die Grössen (vgl. p. 69)

$$\begin{aligned} &\alpha_1' , \quad \alpha_2' , \quad \alpha_3' ; \\ &\alpha_1'' , \quad \alpha_2'' , \quad \alpha_3'' ; \\ &\alpha_1''' , \quad \alpha_2''' , \quad \alpha_3''' \end{aligned}$$

bez. die Coordinaten der Seiten des neuen Fundamentaldreiecks in Bezug auf das alte Coordinatensystem der x, und die Grössen:

$$\begin{aligned} &\beta_1' , \quad \beta_2' , \quad \beta_3' ; \\ &\beta_1'' , \quad \beta_2'' , \quad \beta_3'' ; \\ &\beta_1''' , \quad \beta_2''' , \quad \beta_3''' \end{aligned}$$

bez. die Coordinaten der gegenüberliegenden Ecken des neuen Dreiecks in Bezug auf das frühere. Dies neue Coordinatendreieck ist aber in unserm Falle das den Kegelschnitten f und φ gemeinsame Polardreieck, und folglich hat jede Ecke desselben in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare; d. h. die Coordinaten der letzteren, gebildet in Bezug auf f und φ müssen einander proportional sein. Dadurch erhalten wir die folgenden drei Systeme von je drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_1^{(i)} + a_{12}\beta_2^{(i)} + a_{13}\beta_3^{(i)} &= \mu_i (b_{11}\beta_1^{(i)} + b_{12}\beta_2^{(i)} + b_{13}\beta_3^{(i)}) , \\ a_{21}\beta_1^{(i)} + a_{22}\beta_2^{(i)} + a_{23}\beta_3^{(i)} &= \mu_i (b_{21}\beta_1^{(i)} + b_{22}\beta_2^{(i)} + b_{23}\beta_3^{(i)}) , \\ a_{31}\beta_1^{(i)} + a_{32}\beta_2^{(i)} + a_{33}\beta_3^{(i)} &= \mu_i (b_{31}\beta_1^{(i)} + b_{32}\beta_2^{(i)} + b_{33}\beta_3^{(i)}) . \end{aligned}$$

Hierin haben wir für $\beta_k^{(i)}$ bez. β_k', β_k'', β_k''' und für μ_i bez. μ_1, μ_2, μ_3 zu setzen, um die drei Systeme von Gleichungen zu erhalten. Ordnen wir noch nach den Grössen β, so gehen dieselben über in:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \mu_i b_{11})\,\beta_1^{(i)} + (a_{12} - \mu_i b_{12})\,\beta_2^{(i)} + (a_{13} - \mu_i b_{13})\,\beta_3^{(i)} = 0\,,\\
(12)\quad &(a_{21} - \mu_i b_{21})\,\beta_1^{(i)} + (a_{22} - \mu_i b_{22})\,\beta_2^{(i)} + (a_{23} - \mu_i b_{23})\,\beta_3^{(i)} = 0\,,\\
&(a_{31} - \mu_i b_{31})\,\beta_1^{(i)} + (a_{32} - \mu_i b_{32})\,\beta_2^{(i)} + (a_{33} - \mu_i b_{33})\,\beta_3^{(i)} = 0\,,
\end{aligned}$$

und hieraus erhalten wir durch Elimination der β zur Bestimmung von μ wieder die cubische Gleichung (2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} & a_{13} - \mu b_{13} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} & a_{23} - \mu b_{23} \\ a_{31} - \mu b_{31} & a_{32} - \mu b_{32} & a_{33} - \mu b_{33} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die Grössen μ_1, μ_2, μ_3 in den Gleichungen (12) sind also mit den eben auftretenden Wurzeln λ', λ'', λ''' dieser Gleichung identisch. Setzen wir einen dieser Werthe in (12) ein, so können wir aus je zweien der Gleichungen die Verhältnisse der $\beta_k^{(i)}$ berechnen: für die beiden anderen Systeme von je drei Gleichungen haben wir dann bez. die beiden andern Wurzeln von (2) zu verwerthen. Wir können somit die Werthe

von β_1', β_2', β_3' bis auf einen Factor ϱ'
von β_1'', β_2'', β_3'' bis auf einen Factor ϱ''
von β_1''', β_2''', β_3''' bis auf einen Factor ϱ'''

berechnen; um diese Factoren selbst endlich noch zu bestimmen, setzen wir die gefundenen Werthe der $\beta_k^{(i)}$ in die Gleichungen (10) ein; vermittelst dieser muss dann der Kegelschnitt φ auf die Form

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

gebracht werden; und gemäss dieser Forderung müssen wir ϱ', ϱ'', ϱ'', noch wählen, *wodurch dann unser Transformationsproblem vollständig gelöst ist.* —

Der Weg, welcher uns zum Ziele geführt hat, ist jedoch keineswegs als ein algebraisch eleganter zu bezeichnen; wir haben das Problem allerdings gelöst, aber das Resultat erscheint als Ergebniss unübersichtlicher Rechnung. Wir haben dabei keinen tiefern Einblick in die Natur derartiger Transformationsprobleme überhaupt gethan, während gerade die vorliegende Aufgabe bei geschickter Behandlung mannigfache Gelegenheit zu allgemeinen Erörterungen, zur Vervollständigung unserer Begriffsbildung überhaupt bietet. Wir wollen daher die Berechnung der Coëfficienten $\beta_k^{(i)}$ noch von einem anderen Gesichtspunkte aus durchführen, wobei wir dann von selbst zur Ent-

wicklung wichtiger und allgemeiner Principien Veranlassung finden werden.*)

Transformiren wir eine quadratische Function von drei homogenen Variabeln:

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

durch die Substitution (10):

$$x_i = \beta_i' y_1 + \beta_i'' y_2 + \beta_i''' y_3, \quad (i = 1, 2, 3),$$

so geht dieselbe über in eine homogene quadratische Function der y:

$$f' = \Sigma a_{ik}' y_i y_k,$$

in welcher, wie man leicht übersieht, die Coëfficienten a_{ik}' vom ersten Grade in den a_{ik}, dagegen vom zweiten Grade in den Substitutionscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$ sind. Wir haben nun oben eine Function der a_{ik}, die aus ihnen zu bildende Determinante, kennen gelernt, welche zu der Function f in einer Beziehung stand, die durch Einführung eines neuen Coordinatensystems nicht zerstört werden kann; denn ihr Verschwinden sagte aus, dass der durch $f = 0$ dargestellte Kegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt. Verschwindet daher diese Determinante A, so muss dies auch für die aus den a_{ik}' gebildete Determinante A' stattfinden, damit auch die Function f' in zwei lineare Factoren zerlegbar sei. Da demnach A' immer gleichzeitig mit A verschwindet und umgekehrt, so können wir setzen:

$$A' = m \,.\, A,$$

wo m ein nicht verschwindender Factor ist. Dieser letztere kann dann aber die a_{ik} nicht mehr enthalten (denn A' sowohl wie A sind von der 3. Dimension in denselben), sondern nur noch die $\beta_k^{(i)}$, und zwar in der 6. Dimension, denn zu so hohem Grade kommen dieselben in A' vor, während A von ihnen unabhängig ist: m ist also eine nicht verschwindende Function 6. Grades der $\beta_k^{(i)}$. Nun sind diese aber vollkommen willkürlich, nur haben wir ausdrücklich vorausgesetzt, dass ihre Determinante R nicht verschwinde, denn sonst würden unsere Transformationsgleichungen (10) nicht auflösbar sein. Das Quadrat dieser Determinante ist daher die einzige Function 6. Grades in den $\beta_k^{(i)}$, welche nicht verschwindet, und also muss

$$m = c \,.\, R^2$$

sein, wo c eine rein numerische Constante bedeutet. Wir bestimmen dieselbe durch Betrachtung einer speciellen linearen Transformation,

*) Vgl. die Behandlung des Problems bei Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Borchardt's Journal, Bd. 62.

wodurch ihr Werth nicht geändert werden kann. Betrachten wir nämlich die Anwendung der Gleichung

$$A' = c \,.\, R^2 A$$

auf die identische Substitution:

$$x_1 = y_1\,, \quad x_2 = y_2\,, \quad x_3 = y_3\,,$$

so wird $A' = A$, $R = 1$, und es folgt:

$$c = 1.$$

Wir haben deshalb auch im allgemeinen Falle*)

$$(13) \qquad A' = R^2 \,.\, A.$$

Dieselben Schlüsse gelten für beliebige andere Verbindungen der Coëfficienten einer oder mehrerer Curven, sobald dieselben, gleich Null gesetzt, Eigenschaften angeben, welche zu den betreffenden Curven in unzerstörbarer Beziehung stehen und deshalb von der Wahl des Coordinatendreiecks unabhängig sind. Solche Functionen der Coëfficienten pflegt man als *Invarianten* zu bezeichnen; die Invarianten sind dann allgemein charakterisirt durch die Bedingung

$$I' = R^k I\,,$$

wo I die betreffende Function für das alte Coordinatendreieck, I' dieselbe für das neue ist, und R die Substitutionsdeterminante bedeutet. Die Determinante eines Kegelschnittes bietet uns somit zum ersten Male ein Beispiel für einen äusserst fruchtbaren und für die weiteren Entwicklungen der Geometrie unentbehrlichen Begriff. In der That führt erst die systematische Untersuchung solcher invarianter Gebilde dazu, algebraische Rechnung und geometrische Ueberlegung als identische Operationen hinzustellen. Wir werden daher im Folgenden auch noch ausführlich auf die sich hieran knüpfenden Theorien eingehen müssen. Für jetzt möge noch eine Anwendung unserer Schlussweise in folgendem Beispiele dargelegt werden, welches uns dann unmittelbar die Mittel zur Lösung unseres Transformationsproblems an die Hand geben wird.

Die Bedingung, dass eine gerade Linie u den Kegelschnitt $f = 0$ berührt, d. h. die Gleichung

$$\Sigma A_{ik}\, u_i u_k = 0$$

drückt jedenfalls eine von der Lage des Coordinatendreiecks unabhängige Beziehung aus. Durch unsere lineare Substitution (10) hängen dann die neuen Liniencoordinaten v mit den u durch die Gleichungen

*) Man erhält diese Gleichung direct durch zweimalige Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten; vgl. Näheres hierüber am Schlusse der folgenden Abtheilung dieser Vorlesungen.

(11) zusammen, und die erwähnte Schlussweise ergibt für die transformirte Gleichung:

$$\Sigma A_{ik}' v_i v_k = R^k \cdot \Sigma A_{ik} u_i u_k .$$

Hier sind auf der linken Seite die A_{ik} in den $\beta_k^{(i)}$ von der 2. Dimension, die v dagegen linear; im Ganzen kommen also die $\beta_k^{(i)}$ links wieder in der 6. Dimension vor, und es folgt somit $k = 2$. *Wir erhalten also für die Transformation der Curvengleichung in Liniencoordinaten die Identität:**)

$$(14) \qquad \Sigma A_{ik}' v_i v_k = R^2 \Sigma A_{ik} u_i u_k .$$

Setzen wir nun wieder

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}$$

und wenden die Gleichungen (13), (14) auf einen Kegelschnitt unseres Büschels

$$f - \lambda\varphi = (\lambda' - \lambda)\, y_1^2 + (\lambda'' - \lambda)\, y_2^2 + (\lambda''' - \lambda)\, y_3^2 = 0$$

an, so ergibt sich:

$$(15) \qquad R^2 . \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda''' - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)(\lambda''' - \lambda)$$

und:

$$(16) \quad R^2 \Sigma \Delta_{ik} u_i u_k = (\lambda'' - \lambda)(\lambda''' - \lambda) v_1^2 + (\lambda''' - \lambda)(\lambda' - \lambda) v_2^2 + (\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda) v_3^2,$$

wo die Δ_{ik} die Unterdeterminanten von $\Delta(\lambda)$ sind. Aus der Gleichung (15) folgt zunächst wieder, dass $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ die Wurzeln der schon mehrfach erwähnten Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ sind, ferner aber durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von λ^3:

$$1 = R^2 . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

und also:

$$R^2 = \frac{1}{B},$$

*) Eine directe Bestätigung dieser Formel findet man wieder durch Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten, wenn man die linke Seite der Liniencoordinatengleichung in Form einer geränderten Determinante zu Grunde legt, und zwar am einfachsten, indem man die Transformation erst auf die in einem Rand stehenden u_i allein anwendet, worauf sich ein Factor R absondert, und dann mit dem andern Rande ebenso verfährt, worauf der zweite Factor R vortritt.

wo B die Determinante des Kegelschnittes $\varphi = 0$ bedeutet, von der wir überall angenommen haben, dass sie nicht verschwinde. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir dann aus (16), indem wir nach einander $\lambda = \lambda', \lambda'', \lambda'''$ setzen, unter Berücksichtigung von (11) die Relationen:

$$
\begin{aligned}
v_1^2 &= (\beta_1' u_1 + \beta_2' u_2 + \beta_3' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda')} \cdot \Sigma \Delta_{ik}(\lambda') u_i u_k, \\
(17)\quad v_2^2 &= (\beta_1'' u_1 + \beta_2'' u_2 + \beta_3'' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda''' - \lambda'')(\lambda' - \lambda'')} \cdot \Sigma \Delta_{ik}(\lambda'') u_i u_k, \\
v_3^2 &= (\beta_1''' u_1 + \beta_2''' u_2 + \beta_3''' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda''')} \cdot \Sigma \Delta_{ik}(\lambda''') u_i u_k.
\end{aligned}
$$

Wir könnten hier auf beiden Seiten die Wurzeln ziehen und die $\beta_k^{(i)}$ aus den drei dann linearen Gleichungen berechnen. Direct ergeben sie sich jedoch aus der Vergleichung der Coëfficienten von $u_i u_k$, in (17), wodurch man die folgenden Bestimmungen erhält:

$$
(18)\qquad \beta_i^{(h)} \beta_k^{(h)} = \frac{\Delta_{ik}(\lambda^{(h)})}{B \cdot \mu^{(h)}}.
$$

Durch diese Gleichungen sind nun die Substitutionscoëfficienten bis auf die nothwendig unbestimmt bleibenden Vorzeichen gegeben; in ihnen haben wir noch die mit dem obern Index h versehenen Buchstaben durch ein-, zwei-, oder dreimal gestrichene zu ersetzen, und es ist:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\mu' &= (\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda') \\
\mu'' &= (\lambda''' - \lambda'')(\lambda' - \lambda'') \\
\mu''' &= (\lambda' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda''').
\end{aligned}
$$

Wir haben damit unser Transformationsproblem und also auch das der Bestimmung der vier gemeinsamen Punkte von f und φ in vollständiger und systematischer Weise gelöst; und zwar sahen wir, dass dadurch gleichzeitig das dualistisch entsprechende Problem, die Aufsuchung der vier gemeinsamen Tangenten von selbst mitgelöst wurde. — Wir wollen zunächst noch einige weitere Betrachtungen über diese Kegelschnittsysteme:

$$
f - \lambda\varphi = 0 \quad \text{und} \quad F - \lambda\Phi = 0
$$

hinzufügen, wobei wir den gefundenen Sätzen die ihnen dualistisch entsprechenden sofort gegenüberstellen. Wir fanden schon oben die folgenden Sätze:

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels $f - \lambda\varphi$ mit 4 gemeinsamen Punkten.	*Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte der Schaar $F - \lambda\Phi$ mit 4 gemeinsamen Tangenten berührt.*

Die sich hieran anschliessende Frage nach der Zahl der Kegel-

schnitte des Büschels, welche eine gegebene Gerade berühren, wird durch Nullsetzen des Ausdruckes (16) beantwortet; denn die Gleichung

$$\Sigma \Delta_{ik}(\lambda)\, u_i\, u_k = 0$$

ist die Gleichung einer solchen Curve in Liniencoordinaten. Setzen wir hierin für die u die Coordinaten der gegebenen Geraden ein, so erhalten wir, da die $\Delta_{ik}(\lambda)$ vom zweiten Grade in λ sind, eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von λ; und somit folgt der Satz:

Jede Gerade wird von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt.	*Durch jeden Punkt gehen zwei Kegelschnitte der Schaar.*

Von besonderem Interesse ist ferner die Lage der Schnittpunkte einer beliebigen Curve des Büschels mit der betrachteten Geraden gegen die Berührungspunkte der beiden soeben bestimmten Kegelschnitte. Um diese zu untersuchen, nehmen wir die betr. Gerade zur Coordinatenseite

$$x_1 = 0.$$

Setzen wir dann für einen diese Linien berührenden Kegelschnitt $x_1 = 0$, so muss eine in x_2, x_3 quadratische Gleichung mit zwei gleichen Wurzeln für $\frac{x_2}{x_3}$ übrig bleiben, d. h. das Quadrat eines in x_2, x_3 linearen Ausdruckes. Die Gleichungen der beiden berührenden Kegelschnitte sind daher von der Form:

$$f = x_1 G + H^2 = 0,$$
$$\varphi = x_1 G' + H'^2 = 0,$$

wo G, G' linear in x_1, x_2, x_3 und H, H' linear in x_2, x_3 sind. Eine beliebige Curve des Büschels ist dann dargestellt durch die Gleichung:

$$f - \lambda\varphi = x_1 (G - \lambda G') + H^2 - \lambda H'^2 = 0;$$

und die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Geraden bestimmen sich durch:

$$x_1 = 0,$$
$$H^2 - \lambda H'^2 = 0,$$

die letzte Gleichung stellt ein von der Ecke $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Coordinatendreiecks nach den betreffenden Schnittpunkten gehendes Geradenpaar dar, gebildet aus den beiden Linien:

$$H - \sqrt{\lambda}\, H' = 0,$$

$$H + \sqrt{\lambda}\, H' = 0.$$

Diese beiden Geraden sind aber harmonisch zu den von ihrem Schnittpunkte nach den Berührungspunkten von f und φ gehenden Linien, welche durch $H = 0$, $H' = 0$ gegeben sind; und also liegen die ge-

suchten Schnittpunkte zu den beiden Berührungspunkten harmonisch. Ein solches System von Punktepaaren auf einer geraden Linie, wo jedes Paar zu denselben zwei bestimmten Punkten harmonisch liegt, nennt man nun eine *Involution* und die beiden ausgezeichneten Punkte *die Doppelpunkte der Involution* (ebenso spricht man auch von einer Involution von Geradenpaaren in einem Strahlbüschel). Es sind dies im Grunde nichts weiter, als die Doppelpunkte zweier vereinigt gelegener projectivischer Punktreihen von speciellem Charakter (vgl. p. 51). Letztere erhält man in diesem Falle, wenn man jedem Punkte der Geraden den vierten harmonischen in Bezug auf zwei feste Punkte (die beiden Doppelpunkte) zuordnet, also jedes Punktepaar der Involution in zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen auflöst.*) Unter Benutzung dieses auch für andere Probleme äusserst wichtigen Begriffes der Involution können wir jetzt folgende Sätze aussprechen:

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit einer Geraden bilden auf dieser eine Involution. In den beiden Doppelpunkten derselben wird die Gerade von je einer Curve des Büschels berührt.

Die von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar gehenden Tangenten bilden eine Involution. Die beiden Doppelstrahlen derselben werden in dem Punkte von je einer Curve der Schaar berührt.

VI. Besondere Lagen zweier Kegelschnitte gegen einander.

Es gibt einige Fälle, in denen die oben zur Bestimmung der Transformationscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$ angewandte Methode nicht zum Ziele führt. Dieselbe ist nämlich nur so lange zulässig, als alle $\mu^{(h)}$ (vgl. Gl. (18)) von Null verschieden sind. Die Grössen $\mu^{(h)}$ verschwinden aber nur (vgl. (19)), wenn zwei Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleich werden. Bei der näheren Durchführung zeigt sich, dass noch immer besonders zu berücksichtigen ist, ob für eine mehrfache Wurzel auch alle Unterdeterminanten von Δ verschwinden, oder nicht. Wir haben sonach die folgenden Ausnahmefälle zu unterscheiden.

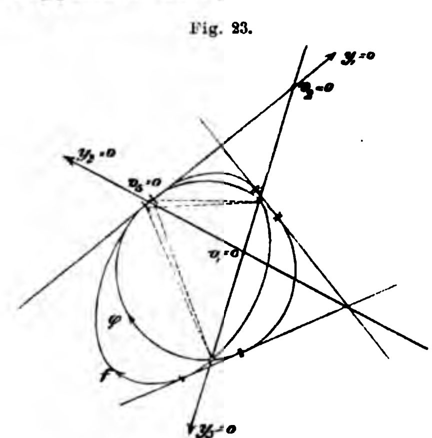
1. *Zwei Wurzeln λ sind gleich.*
2. *Zwei Wurzeln λ sind gleich, und die zugehörigen Unterdeterminanten Δ_{ik} verschwinden sämmtlich.*
3. *Alle Wurzeln λ sind gleich.*
4. *Alle Wurzeln λ sind gleich, und die zugehörigen Δ_{ik} verschwinden sämmtlich.*
5. *Alle drei Wurzeln sind gleich und jedes einzelne Glied der Determinante $\Delta(\lambda)$ verschwindet für diesen Werth von λ.*

*) Vgl. Näheres hierüber in der dritten Abtheilung dieser Vorlesungen.

Diese Fälle wollen wir im Folgenden der Reihe nach näher behandeln; auf den zuletzt genannten brauchen wir jedoch nicht näher einzugehen, denn für denselben werden die a_{ik} den b_{ik} proportional: *Beide Kegelschnitte sind identisch.*

1. *Wenn zwei der* $\lambda^{(i)}$ *einander gleich werden,* so bedeutet dies im Allgemeinen, dass zwei Seiten, resp. Ecken des Polardreiecks einander unendlich nahe rücken. Daher ist dasselbe dann als Coordinatendreieck unbrauchbar, und unsere obige Transformation verliert ihre Bedeutung. Aus der früher gegebenen Construction des Polardreiecks folgt in diesem Falle, dass zwei der durch die Schnittpunkte der Curven gelegten Linienpaare unendlich wenig verschieden sind. Diese gehen aber noch nicht (was erst im zweiten Falle eintritt) in eine Doppellinie über; daher sind nothwendig zwei ihrer Schnittpunkte unendlich benachbart zu den beiden einander unendlich nahen Doppelpunkten der Paare (d. i. Ecken des Polardreiecks). Somit fallen in der Grenze zwei Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte zusammen in einen Punkt: *die Curven berühren sich in diesem Punkte* P (vgl. Fig. 23), und in ihm liegen gleichzeitig zwei Ecken des Polardreiecks vereinigt. Letzteres geschieht aber so, dass die gemeinsame Tangente der Curven in P mit der Verbindungslinie der unendlich nahen Dreiecksecken das Doppelpaar harmonisch theilt; wobei diese Linie als Polare des Schnittpunktes Q der Tangente mit der Verbindungslinie der beiden andern gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte construirt werden kann. Ebenso werden die Schnittpunkte der doppeltzählenden Tangente mit den beiden getrennt gebliebenen gemeinsamen Tangenten durch die Punkte P und Q harmonisch getrennt.

Fig. 23.



Es liegt nahe, hier neben den beiden noch verschiedenen Seiten des Polardreiecks als dritte Coordinatenseite die Verbindungslinie der beiden getrennten Schnittpunkte der Curven einzuführen. Sei also $y_1 = 0$ die Gleichung der gemeinsamen Tangente des Berührungspunktes, $y_2 = 0$ die der einfachen Seite des Polardreiecks, $y_3 = 0$ die der erwähnten dritten Linie, so kann man die beiden Linienpaare, bei geeigneter Bestimmung der absoluten Werthe der Coëfficienten, in der Form darstellen:

$$f - \lambda' \varphi = (y_1^2 + y_2^2)(\lambda'' - \lambda'),$$
$$f - \lambda'' \varphi = -2 y_1 y_2 \; (\lambda'' - \lambda').$$

In der That werden dann die beiden Geraden des ersten Paares harmonisch von den Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ getrennt, während die des zweiten mit zwei Seiten des Coordinatendreiecks zusammenfallen. Die kanonische Form, in welche wir hier die Curven $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ und $\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ zu transformiren haben, ist somit die folgende:

$$f = \lambda'' (y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda' y_1 y_3 .$$
$$\varphi = \quad y_1^2 + y_2^2 \quad + 2 \quad y_1 y_3 .$$

Um die dazu nöthigen Substitutionscoëfficienten zu berechnen, wenden wir wieder die Gleichungen (13) und (15) auf eine Curve des Systems $f - \lambda\varphi = 0$ an. Alsdann ergibt sich:

$$R^2 \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda'' - \lambda & 0 & \lambda' - \lambda \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \\ \lambda' - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda'' - \lambda)(\lambda' - \lambda)^2 .$$

Es ist also λ' die doppelte, λ'' die einfache Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$; durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von λ^3 folgt:

$$R^2 = -\frac{1}{B} ,$$

wo B wieder die Determinante von φ bedeutet. Die Anwendung von Gleichung (14) p. 132 auf die Curve $f - \lambda\varphi$, ergibt ferner:

$$R^2 \cdot \Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = -(\lambda' - \lambda) v_2^2 + (\lambda'' - \lambda) v_3^2 - 2(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda) v_1 v_3 ,$$

und hieraus folgt, wenn

$$\Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = P - 2\lambda Q + \lambda^2 S$$

gesetzt wird:

$$R^2 . P = -\lambda'^2 v_2^2 + \lambda''^2 v_3^2 - 2\lambda'\lambda'' v_1 v_3 ,$$
$$R^2 . Q = -\lambda' v_2^2 + \lambda'' v_3^2 - (\lambda' + \lambda'') v_1 v_3 ,$$
$$R^2 . S = - v_2^2 - v_3^2 - 2 v_1 v_3 .$$

Multipliciren wir diese Gleichungen bez. einmal mit $1, -2\lambda'', \lambda''^2$, einmal mit $1, -2\lambda', \lambda'^2$, und dann noch bez. mit $1, -(\lambda' + \lambda''), \lambda'\lambda''$ und addiren dieselben jedesmal, so erhalten wir:

$$R^2 (P - 2\lambda'' Q + \lambda''^2 S) = -(\lambda' - \lambda'')^2 v_2^2$$
$$R^2 (P - 2\lambda' Q + \lambda'^2 S) = +(\lambda' - \lambda'')^2 v_3^2$$
$$R^2 (P - (\lambda' + \lambda'') Q + \lambda'\lambda'' S) = +(\lambda' - \lambda'')^2 v_1 v_3 .$$

Aus den ersten beiden Gleichungen könnten wir nun v_2, v_3, aus der letzten dann durch Division v_1 berechnen. Durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von $u_i u_k$ dagegen finden wir direct die gesuchten Transformationscoëfficienten durch die Gleichungen, welche an Stelle der Gleichungen (18) auf p. 133 treten:

$$\beta_i'' \beta_k'' = \frac{1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - 2\lambda'' Q_{ik} + \lambda''^2 S_{ik})$$

$$\beta_i''' \beta_k''' = \frac{-1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - 2\lambda' Q_{ik} + \lambda'^2 S_{ik})$$

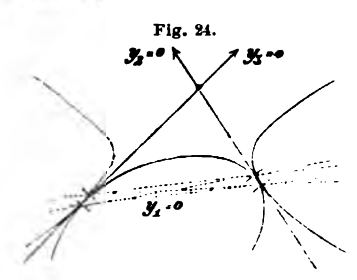
$$\beta_i' \beta_k''' + \beta_i''' \beta_k' = \frac{-1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - (\lambda' + \lambda'') Q_{ik} + \lambda' \lambda'' S_{ik}).$$

In ihnen haben die $\beta_k^{(i)}$ dieselbe Bedeutung, wie in (11) p. 128 und es ist gesetzt:

$$P = \Sigma P_{ik} u_i u_k, \quad Q = \Sigma Q_{ik} u_i u_k, \quad S = \Sigma S_{ik} u_i u_k.$$

2. *Wenn ausser $\Delta(\lambda) = 0$ für die Doppelwurzel auch alle Gleichungen $\Delta_{ik}(\lambda) = 0$ erfüllt sind**), so werden die $\beta_k^{(i)}$ nicht unendlich gross, sondern unbestimmt, die beiden Seiten des Polardreiecks, welche vorhin zusammenfielen, nehmen eine unbestimmte Richtung an. Zugleich vereinigen sich die beiden unendlich nahen Linienpaare des vorigen Falles zu einer einzigen Doppellinie oder eigentlich vierfach zählenden Linie, denn die Bedingung dafür ist eben nach p. 106 das Verschwinden aller Δ_{ik}. Sämmtliche Curven des Systems müssen sich daher in den Schnittpunkten der Doppellinie mit $f = 0$ oder $\varphi = 0$ berühren (vgl. Fig. 24); d. h. es ist dies ein System der Art, wie wir es schon früher (vgl. p. 116) behandelt haben. Hierdurch erklärt es sich auch geometrisch, dass unendlich viele gemeinsame Polardreiecke möglich sind; eine Seite eines solchen ist nämlich immer jene Doppellinie, die andern beiden Seiten gehen durch den Pol derselben und liegen harmonisch zu den beiden gemeinsamen Tangenten.

Fig. 24.



Um auf ein bestimmtes, ausgezeichnetes Coordinatendreieck zu kommen, kann man dasjenige wählen, welches durch die Doppellinie und die in den beiden Berührungspunkten gezogenen Tangenten (die zusammen auch einen Kegelschnitt des Systems geben) gebildet wird. Sind $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ diese Tangenten, ist ferner $y_1 = 0$ die Doppellinie, λ' die einfache, λ'' die Doppel-Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$, so hat man die Linienpaare:

---

*) Dies Letztere kann auch nur bei einer Doppelwurzel eintreten, denn es ist

$$\frac{\partial \Delta(\lambda)}{\partial \lambda} = - \Sigma \Delta_{ik} b_{ik};$$

mit allen Δ_{ik} verschwindet also auch immer $\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}$, was die Bedingung einer Doppelwurzel ist. Ebenso würde ein Verschwinden der zweiten Unterdeterminanten nur bei einer dreifachen Wurzel eintreten können.

$$f - \lambda'' \varphi = \quad y_1^2 (\lambda' - \lambda'')$$
$$f - \lambda' \varphi = -2 y_2 y_3 (\lambda' - \lambda''),$$

also:

$$f = \lambda' y_1^2 + 2 \lambda'' y_2 y_3$$
$$\varphi = \quad y_1^2 + \quad 2 y_2 y_3 .$$

Zur Durchführung des betreffenden Transformationsproblems benutzen wir wieder die Gleichung:

$$A' = R^2 \cdot A,$$

welche jetzt übergeht in:

$$R^2 . \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' - \lambda \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)^2;$$

und hieraus folgt wieder:

$$R^2 = -\frac{1}{B}.$$

Ferner haben wir:

$$R^2 \Sigma \varDelta_{ik}(\lambda) u_i u_k = -(\lambda'' - \lambda)^2 v_1^2 - 2(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda) v_2 v_3;$$

und es ergeben sich die Coordinaten der Doppellinie v_1 $(\beta_1', \beta_2', \beta_3')$, wenn wir $\lambda = \lambda'$ setzen und die Coëfficienten gleicher Producte $u_i u_k$ vergleichen. Wir finden so:

$$\beta_1'^2 = \frac{\varDelta_{11}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2},$$

$$\beta_1' \beta_2' = \frac{\varDelta_{12}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2},$$

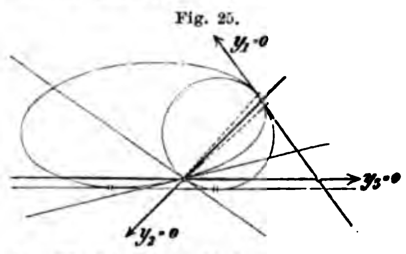
$$\beta_1' \beta_3' = \frac{\varDelta_{13}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2}.$$

Nachdem die Doppellinie gefunden, ist die Bestimmung der beiden Tangenten auf ein bestimmtes Problem, welches wir früher (vgl. p. 107) behandelten, zurückgeführt.

3. *Wenn alle drei Wurzeln von $\varDelta(\lambda) = 0$ gleich werden, ohne dass die Unterdeterminanten verschwinden*, so rücken alle drei Linienpaare zusammen, ohne jedoch in Doppellinien überzugehen; denn das Auftreten von Doppellinien würde ein identisches Verschwinden der Unterdeterminanten zur Folge haben (vgl. den folgenden Fall). Von den beiden Schnittpunkten zweier unendlich naher Linienpaare, welche im ersten Falle sich nicht in der Nähe ihrer Doppelpunkte befanden, muss noch einer diesen ebenfalls unendlich nahe rücken, damit auch das dritte Linienpaar sich mit jenen vereinige. *Die Curven berühren sich also in einem Punkte zweipunktig*, was so zu verstehen ist, dass die eine Curve die andere in 3 benachbarten Punkten schneidet: sie tritt in dieselbe hinein, geht wieder heraus und tritt dann sofort

wieder ein (vgl. Fig. 25); der vierte Schnittpunkt bleibt dagegen isolirt, und ebenso haben die Curven eine isolirte gemeinsame Tangente. Es existirt kein eigentliches gemeinsames Polardreieck mehr; ein ausgezeichnetes Coordinatendreieck dagegen ist uns durch die folgenden Linien gegeben: die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte ($y_1 = 0$), die Verbindungslinie dieses mit dem isolirten Schnittpunkte ($y_2 = 0$), und die durch den letztern gehende Linie, welche mit $y_2 = 0$ und den Tangenten der beiden Curven in dem Punkte harmonisch liegt ($y_3 = 0$). Da die Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ und $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ dann beiden Curven angehören, so müssen in f und φ die Glieder y_1^2, y_3^2 fehlen; da ferner $y_1 = 0$ Tangente ist, so müssen f, φ für $y_1 = 0$ in Quadrate übergehen, also müssen auch die Glieder mit $y_2 y_3$ fehlen. Endlich müssen die mit y_1 multiplicirten Theile, welche die Tangenten im isolirten Schnittpunkte darstellen, harmonisch zu $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sein, d. h. sich als Summe und Differenz darstellen. Wir können daher setzen:

Fig. 25.



$$f = 2\lambda' y_1 \ (y_2 + y_3) + \lambda' y_2^2$$
$$\varphi = 2 y_1 (- y_2 + y_3) + y_2^2 .$$

In der That gibt dann die Gleichung $f - \lambda' \varphi = 0$ das einzige in dem Büschel noch vorhandene Linienpaar: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Zur Bestimmung der Transformation von f und φ auf diese kanonische Form, welche aber nicht zu sich selbst dualistisch ist, haben wir:

$$R^2 . \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda' + \lambda & \lambda' - \lambda \\ \lambda' + \lambda & \lambda' - \lambda & 0 \\ \lambda' - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda' - \lambda)^3 ,$$

also:

$$R^2 = -\frac{1}{B} ,$$

und ferner:

$$R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = R^2 (P - 2\lambda Q + \lambda^2 S) = -\left\{(\lambda' - \lambda) v_2 - (\lambda' + \lambda) v_3\right\}^2 - 2(\lambda' - \lambda)^2 v_1 v$$

Setzt man hierin nach einander $\lambda = \lambda'$, $\lambda = -\lambda'$, $\lambda = 0$, so findet man durch Combination der erhaltenen Gleichungen:

$$P - 2\lambda' Q + \lambda'^2 S = -\frac{4\lambda'^2}{B} v_3^2$$
$$P - S = +\frac{4\lambda'^2}{B} v_2 v_3$$
$$P + S = -\frac{2\lambda'^2}{B} (v_2^2 + v_3^2 - 2 v_1 v_3) ,$$

und hieraus ergeben sich durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der u_i die gesuchten Substitutionscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$.

4. *Der vierte Fall, wo alle Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleich werden, und zugleich alle Unterdeterminanten Δ_{ik} verschwinden,* vereinigt den zweiten und dritten: die Curven berühren sich dreipunktig (d. h. schneiden sich in vier successiven Punkten) und haben demnach keinen weiteren Punkt gemein. Anhaltspunkte für ein besonders ausgezeichnetes Coordinatensystem sind nicht mehr gegeben. Nehmen wir jedoch die gemeinsame Tangente im Berührungspunkte zur Geraden $y_1 = 0$, und sei $y_2 = 0$ irgend eine durch diesen Punkt gehende Linie, so können wir die beiden Curven in der Form schreiben:

$$f = y_1^2 + \lambda' (\alpha y_2^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3),$$
$$\varphi = y_1^2 + \quad (\alpha y_2^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3),$$

denn die Gleichung $f - \lambda' \varphi = 0$ gibt dann in der That die einzige im System noch vorhandene Gerade

$$y_1^2 = 0.$$

— Während wir bisher die verschiedenen Lagen betrachteten, welche bei zwei Kegelschnitten durch verschiedenartiges Zusammenrücken zweier oder mehrerer der 4 Schnittpunkte entstehen können, wollen wir jetzt noch einen Blick auf diejenigen Lagenbeziehungen werfen, welche dadurch bedingt werden, dass das Polardreieck eine besondere Lage gegen die unendlich ferne Gerade hat. Dies wird insbesondere eintreten, wenn eine Seite des Dreiecks mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, woraus dann folgt, dass die beiden Kegelschnitte einen gemeinsamen Mittelpunkt (den Pol der unendlich fernen Geraden) haben; und nach unseren früheren Erörterungen (vgl. p. 81) bilden die beiden andern Seiten des Polardreiecks ein Paar conjugirter Durchmesser in Bezug auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte. Die Aufgabe, bei zwei Kegelschnitten mit demselben Mittelpunkte das ihnen gemeinsame Paar conjugirter Durchmesser zu finden, ist also durch unsere obigen allgemeineren Betrachtungen schon gelöst; wir wollen nur noch die Gestaltung der betreffenden Gleichungen unter Benutzung nicht homogener Coordinaten näher verfolgen.

Nehmen wir an, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystems bereits in den Mittelpunkt verlegt sei, so haben die beiden Kegelschnittgleichungen die Form (vgl. p. 87)

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 - 1 = 0, \\ \varphi &= b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

und wir haben dieselben auf die Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} f &= \frac{x'^2}{p'^2} + \frac{y'^2}{q'^2} - 1 = 0 \\ \varphi &= \frac{x'^2}{p''^2} + \frac{y'^2}{q''^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

zu transformiren. Die letzteren Gleichungen zeigen, da sie nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten, unmittelbar, dass die vier Schnittpunkte von f und φ symmetrisch gegen die gemeinsamen conjugirten Durchmesser liegen; und Gleiches folgt für die vier gemeinsamen Tangenten, denn die Gleichungen in Liniencoordinaten werden:

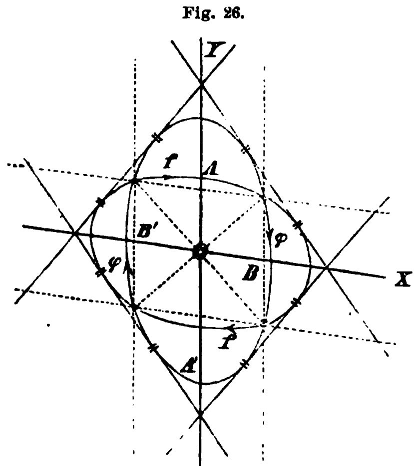
$$\begin{aligned} p'^2 u^2 + q'^2 v^2 - 1 &= 0 \\ p''^2 u^2 + q''^2 v^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Wir können auch die Coordinaten der gemeinsamen Elemente vermöge der Gleichungen (6) auf p. 125 und (9) auf p. 127 leicht angeben; sie sind:

$$\begin{aligned} x &= \pm p' p'' \sqrt{\frac{q'^2 - q''^2}{p''^2 q'^2 - p'^2 q''^2}}, & u &= \pm \sqrt{\frac{q''^2 - q'^2}{p'^2 q''^2 - q''^2 q'^2}}, \\ y &= \pm q' q'' \sqrt{\frac{p''^2 - p'^2}{p''^2 q'^2 - p'^2 q''^2}}, & v &= \pm \sqrt{\frac{p'^2 - p''^2}{p'^2 q'' - p'' q'^2}}. \end{aligned}$$

Die Lage der Schnittpunkte ergibt sich auch aus unserer obigen allgemeinen Construction des Polardreiecks, wenn wir die Ausartung desselben näher verfolgen. Die drei Linienpaare des Büschels $f - \lambda\varphi = 0$ bestehen nämlich aus je zwei Parallelen zu den gemeinsamen conjugirten Durchmessern, und aus zwei Geraden, welche sich im Mittelpunkte schneiden. Ebenso sind die gemeinsamen Tangenten von f und φ zu zweien einander parallel und schneiden sich auf den beiden gemeinsamen conjugirten Durchmessern (vgl. Fig. 26).

Fig. 26.



Die betreffende Transformation möge nun durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ x &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta \end{aligned}$$

geleistet werden; wir haben dann $\alpha, \beta, p', q', p'', q''$ zu bestimmen. Die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ gibt uns hier:

$$(4)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{21} - \lambda b_{21} & 0 \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

und es ist uns eine Wurzel $\lambda = 1$ unmittelbar bekannt, was dem Umstande entspricht, dass wir die eine Ecke des Polardreiecks, den Mittelpunkt, als gegeben annehmen. Sind λ', λ'' die beiden andern Wurzeln von (4), so können wir nach dem Früheren sofort eine Substitution angeben, wodurch die Ausdrücke f und φ übergehen in:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} f &= \lambda' x''^2 + \lambda'' y''^2 - 1 \\ \varphi &= x''^2 + y''^2 - 1 \end{aligned}
$$

Von diesen Gleichungen gelangen wir dann zu der Form (2), wenn wir weiter setzen:

$$\frac{x'}{p''} = x'', \quad \frac{y'}{q''} = y''.$$

Die Wurzeln von (4) geben uns also unmittelbar nur die Verhältnisse der Längen der conjugirten Durchmesser, d. h. es ist:

$$\lambda' = \frac{p''^2}{p'^2}, \quad \lambda'' = \frac{q''^2}{q'^2}.$$

Die Längen derselben selbst finden wir durch Benutzung der Gleichungen (18), p. 133:

$$(6) \qquad \beta_i' \beta_k' = \frac{\Delta_{ik}(\lambda')}{(\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda')} \cdot \frac{1}{B}, \text{ u. s. f.}$$

An Stelle der durch die Grössen $\beta_k^{(i)}$ bestimmten Substitution (Gleichung (10), p. 128) tritt nun hier die folgende:

$$
\begin{aligned} x &= p'' \cos\alpha\, x'' + q'' \cos\beta\, y'', \\ y &= p'' \sin\alpha\, x'' + q'' \sin\beta\, y''. \end{aligned}
$$

Ferner ist:

$$A = b_{11} b_{22} - b_{12}^2,$$

und also erhalten wir aus (6):

$$
\begin{aligned}
p''^2 \cos^2\alpha &= \frac{a_{22} - \lambda' b_{22}}{\lambda' - \lambda''} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \\
p''^2 \cos\alpha \sin\alpha &= -\frac{a_{12} - \lambda' b_{12}}{\lambda' - \lambda''} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \\
p''^2 \sin^2\alpha &= \frac{a_{11} - \lambda'' b_{11}}{\lambda'' - \lambda'} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$p''^2 = \frac{(a_{22} - \lambda' b_{22}) - (a_{11} - \lambda'' b_{11})}{(\lambda' - \lambda'')(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)},$$

ebenso könnte man $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und q'' berechnen. Für p' findet man:

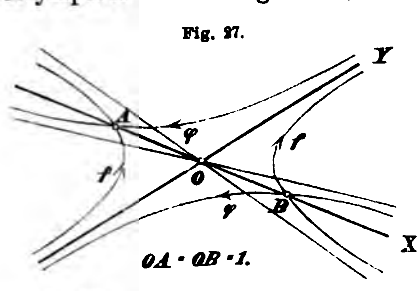
$$p'^2 = \frac{(a_{22} - \lambda' b_{22}) - (a_{11} - \lambda'' b_{11})}{\lambda'(\lambda' - \lambda'')(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)},$$

und einen ähnlichen Ausdruck würde man für q' erhalten.

Der hier eingeschlagene Weg wird wieder unmöglich, resp. unbestimmt, wenn einer der soeben behandelten Ausnahmefälle eintritt, d. h. wenn sich die Kegelschnitte irgendwie berühren. Da uns hier aber immer eine isolirte Ecke (der Mittelpunkt) und eine isolirte Seite des Polardreiecks (die unendlich ferne Gerade) gegeben sind, so können nur die Fälle 1. und 2. vorkommen, in denen sich die Curven auf einer Seite des Polardreiecks in einem, bez. in zwei Punkten berühren. Im Falle 2. gibt es unendlich viele gemeinsame Polardreiecke, deren eine Seite immer die Berührungssehne ist, während die beiden andern Seiten immer durch den Pol dieser Linie gehen. Die unendlich ferne Gerade wird daher Seite eines solchen Dreiecks sein können, wenn sie selbst Berührungssehne ist, oder wenn sich die beiden Kegelschnitte auf einem gemeinsamen Durchmesser berühren, wo dann der Pol der Berührungssehne auf der unendlich fernen Geraden liegt. Für unsere jetzige Betrachtung *tritt also ein Ausnahmefall ein, wenn die Curven eine oder zwei gemeinsame Asymptoten haben, oder wenn die beiden ihnen gemeinsamen Durchmesser zusammenfallen.*

Im erstern Falle sind die beiden conjugirten Durchmesser in die Asymptote zusammengefallen, was damit übereinstimmt, dass eine jede Asymptote (vgl. p. 82) ein Paar conjugirter Durchmesser vertritt. Das bei unserer obigen Behandlung (p. 136) ausgezeichnete Coordinatendreieck wird durch die gemeinsame Asymptote ($x = 0$), die Verbindungslinie der beiden noch getrennt liegenden Schnittpunkte ($y = 0$) und die unendlich ferne Gerade gegeben (vgl. Fig. 27). Unter Zugrundelegung dieses Dreiecks werden die Gleichungen der beiden Kegelschnitte von der Form:

Fig. 27.



$$f = a\,(x^2 + 1) + 2\,b\,x\,y = 0$$
$$\varphi = x^2 + 1 + 2\,x\,y = 0\,.$$

Haben die Kegelschnitte beide Asymptoten gemeinsam, so wird unsere Aufgabe unbestimmt: die Curven haben alle Paare conjugirter Durchmesser gemein. Dieser letzte Satz gilt gleichmässig für Ellipsen und Hyperbeln, nur dass bei ersteren die beiden Asymptoten imaginär sind. *Man nennt in diesem Falle die Kegelschnitte ähnlich und ähnlich gelegen.* Zur Bestimmung der Asymptoten von f und φ dienen uns nämlich bez. die Gleichungen (p. 84):

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0\,,$$
$$b_{11}x^2 + 2\,b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0\,.$$

Sollen nun die Asymptoten zusammenfallen, so können sich beide Gleichungen nur um einen constanten Factor unterscheiden, d. h. es ist:

$$a_{11} : a_{12} : a_{22} = b_{11} : b_{12} : b_{22} ,$$

und deshalb werden die Curven ähnlich genannt. Ihre Gleichungen haben alsdann die Form:

$$f = \quad a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 - 1 = 0 ,$$
$$\varphi = m\,(a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2) - 1 = 0 .$$

Der erste oben genannte Fall dagegen kann bei zwei Ellipsen überall nicht vorkommen, weil die beiden Asymptoten einer solchen immer conjugirt imaginär sind. Fallen also zwei derselben zusammen, so muss dies auch mit den beiden andern der Fall sein.

VII. Der Kreis.

Wir haben in unseren bisherigen Betrachtungen immer zwischen metrischen und rein projectivischen Eigenschaften geometrischer Gebilde unterschieden. Die letzteren waren im Wesentlichen dadurch charakterisirt, dass bei ihnen von Winkeln und Entfernungen nicht die Rede war, dass vielmehr gewisse Doppelverhältnissrelationen *) (hauptsächlich harmonische Theilung bei der Polarentheorie) den Hauptgegenstand der Untersuchung bildeten. Wir werden jedoch nunmehr im Anschlusse an die Kreistheorie eine Methode entwickeln, durch welche es gelingt, alle auf Winkel bezüglichen Sätze als besondere Fälle allgemeinerer, auf den Begriff des Doppelverhältnisses gegründeter Beziehungen aufzufassen. Es führt dazu der folgende fundamentale Satz: *Alle Kreise haben zwei imaginäre (bei allen Bewegungen der Ebene in sich absolut feste), auf der unendlich fernen Geraden gelegene Punkte gemein.*

Zwei Kreise können sich bekanntlich nur in zwei reellen Punkten schneiden; und in der That erhalten wir bei Benutzung Cartesischer Coordinaten zur Bestimmung der Schnittpunkte nur eine quadratische Gleichung. Als charakteristisch für die Kreisgleichung erkannten wir früher den Umstand, dass ihre höchsten Terme (bei rechtwinkligen Coordinaten) immer die Form $x^2 + y^2$ haben und das Glied mit xy fehlt (vgl. p. 88). Die Gleichungen zweier Kreise sind also:

$$x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c = 0 ,$$
$$x^2 + y^2 + 2\,a'x + 2\,b'x + c' = 0 .$$

Aus ihnen ergibt sich durch Subtraction eine lineare Gleichung, die der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte. Die letzteren selbst

*) In der That kann man nach v. Staudt (vgl. Geometrie der Lage. 1847.) auch ein Doppelverhältniss ohne Benutzung des Begriffs der Entfernung definiren.

sind also dann durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Dass die Aufsuchung der Schnittpunkte hier in so einfacher Weise möglich ist, ist lediglich in der speciellen Beziehung des Kreises zum rechtwinkligen Coordinatensysteme begründet. Führen wir nämlich mittelst der Substitution:

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{A}{C}$$

$$y = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{B}{C}$$

homogene Veränderliche ein, wo dann $C = 0$ die unendlich ferne Gerade darstellt, so werden die Gleichungen der beiden Kreise:

$$A^2 + B^2 + 2\,a\,AC + 2\,b\,AC + c\,C^2 = 0$$
$$A^2 + B^2 + 2\,a'\,AC + 2\,b'\,AC + c'\,C^2 = 0;$$

und zur Bestimmung der Schnittpunkte erhalten wir:

$$C\left(2\,(a - a')\,A + 2\,(b - b')\,B + (c - c')\,C\right) = 0,$$

also ein Linienpaar. Der eine Factor desselben, $C = 0$, gibt die beiden früher nicht berücksichtigten Schnittpunkte. Die biquadratische Gleichung, welche im Allgemeinen die vier Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten bestimmt, ist also in unserem Falle durch zwei quadratische Gleichungen lösbar. Es liegt dies daran, dass sich die früher zur Lösung benutzte cubische Resolvente ($\Delta\,(\lambda) = 0$) auf eine quadratische Gleichung reducirt; denn wir werden sehen, dass eine Seite des zwei Kreisen gemeinsamen Polardreiecks immer mit ihrer Centrale zusammenfällt, und dem entsprechend ist eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta\,(\lambda) = 0$ von vornherein gegeben. Die durch $C = 0$ gegebenen Schnittpunkte sind durch den Schnitt der unendlich fernen Geraden mit dem imaginären, zerfallenden Kegelschnitte:

$$A^2 + B^2 = 0$$

oder:

$$x^2 + y^2 = 0$$

bestimmt, also unabhängig von den Coëfficienten a, b, c, a', b', c' in den Gleichungen der beiden Kreise. Wir haben somit den Satz:

Alle Kreise der Ebene gehen durch dieselben beiden imaginären Punkte, die der unendlich fernen Geraden angehören. Wir wollen dieselben in der Folge kurz als die *imaginären Kreispunkte* der Ebene bezeichnen. Die Gleichung dieser Punkte in Liniencoordinaten ergibt sich durch Elimination von A, B, C aus den Gleichungen:

$$A \pm i B \qquad = 0$$
$$C = 0$$
$$Au + Bv + C = 0$$

in der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = \pm iu - v = 0,$$

Es ist daher das Product der Kreispunkte dargestellt durch:

(1)
$$u^2 + v^2 = 0.$$

Die Richtungen nach diesen ausgezeichneten Punkten, d. h. die der Asymptoten des Kreises, sind durch die Gleichung:

$$\text{tang}^2\,\alpha + 1 = 0$$

also durch $\text{tang}\,\alpha = \pm\sqrt{-1}$ bestimmt. Wir können somit den erwähnten Satz auch folgendermassen aussprechen:

Die Asymptoten aller Kreise sind parallel, wenn anders wir auch von parallelen imaginären Linien sprechen wollen. Die so bestimmten Richtungen haben noch andere merkwürdige und wichtige Eigenschaften, von denen zunächst die folgenden beiden erwähnt sein mögen:

1) *Sie bilden mit allen anderen Richtungen denselben (unendlich grossen) Winkel.* Ist nämlich $\text{tang}\,\alpha = i = \sqrt{-1}$, so ist:

$$\text{tang}\,(\varphi - \alpha) = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{\text{tang}\,\varphi - i}{1 + i\,\text{tang}\,\varphi} = i,$$

also von φ unabhängig; ebenso für $\text{tang}\,\alpha = -i$. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Winkel α, und also überhaupt der Winkel einer Linie, welche durch einen der Kreispunkte geht, mit einer beliebigen anderen Geraden als ein unendlich grosser aufzufassen ist. Wir haben nämlich:

$$\text{arc tang}\,\alpha = \int_0^\alpha \frac{dx}{1 + x^2},$$

und dies Integral wird unendlich für $x = \pm i$. Während also die Punkte, deren Entfernung von einem beliebigen Punkte unendlich gross ist, auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden, liegen, *umhüllen die Linien, welche mit einer beliebigen andern Linie einen unendlich grossen Winkel bilden, und die man daher als unendlich ferne Linien bezeichnen könnte, ein Punktepaar: die imaginären Kreispunkte.* In diesem verschiedenen Verhalten der unendlich fernen Punkte und der unendlich fernen Linien ist weiterhin die Ungültigkeit des Princips der Dualität bei metrischen Relationen begründet.

2) *Zwei auf einander senkrechte Linien sind harmonisch zu den von ihrem Schnittpunkte nach den beiden imaginären Kreispunkten gezogenen Geraden.* In der That sind dann die beiden letzteren Asymptoten für einen jeden Kreis, der seinen Mittelpunkt in ihrem Schnittpunkte

hat, und die beiden gegebenen Geraden sind conjugirte Durchmesser eines solchen Kreises, also nach früheren allgemeinen Sätzen harmonisch zu den Linien nach den imaginären Kreispunkten, w. z. b. w.

Diese beiden Sätze zeigen, in wie inniger Beziehung die beiden ausgezeichneten Punkte der Ebene zu allen Winkelrelationen stehen; insbesondere ist durch den zweiten Satz das Ziehen von senkrechten Linien auf die rein projectivische Aufgabe einer harmonischen Theilung zurückgeführt. Dieser Zusammenhang geht aber noch weiter. Die Theorie der Kreise muss zufolge unserer Definition des Kreises übereinstimmen mit derjenigen der Kegelschnitte mit 2 gemeinsamen Punkten. Die Untersuchung dieser letzteren erfordert aber nur rein projectivische Betrachtungen; und *somit erscheint die gewöhnliche metrische Geometrie, insofern sie auf der Kreistheorie beruht, nur als Anwendung unserer früheren rein von Lagenverhältnissen abhängigen Erörterungen.**) Insbesondere ist die Definition des Kreises selbst als eines die Kreispunkte enthaltenden Kegelschnittes jeder metrischen Gestalt entkleidet; und auch den Begriff des Winkels können wir, wie sogleich gezeigt werden soll, direct durch den eines Doppelverhältnisses ersetzen, welch' letzterer ja in unseren bisherigen Betrachtungen als fundamental für alle projectivischen Untersuchungen auftrat. Der Winkel zweier Linien mit den Coordinaten u, v und u', v' wird bekanntlich gegeben durch:

$$\alpha = \arc\cos \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{u'^2 + v'^2}};$$

und dies ist nach einer bekannten Formel der Analysis**):

$$= \frac{i}{2} \log \frac{uu' + vv' + \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}{uu' + vv' - \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}.$$

Hier haben wir den Logarithmus eines Ausdrucks vor uns, welchen wir sofort als den Quotienten der Wurzeln erkennen, die sich für λ aus der Gleichung:

$$u^2 + v^2 + 2\lambda(uu' + vv') + \lambda^2(u'^2 + v'^2) = 0$$

ergeben. Dies ist aber nach (1) die Gleichung des Productes der imaginären Kreispunkte (1), wenn man darin die Coordinaten $u + \lambda v$, $u' + \lambda v'$ einsetzt; und somit haben wir den Satz:

Der Winkel zweier Geraden ist gleich dem mit $\frac{i}{2}$ *multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches dieselben mit den von ihren Schnittpunkten nach den imaginären Kreispunkten gehenden Linien bilden,* ein Satz, durch den die projectivische Auffassung der Winkel-Geometrie in jeder Weise durchgeführt werden kann: Man untersuche

*) Als Begründer dieser Anschauungsweise ist besonders Chasles zu nennen.

**) Diese Definition gab Laguerre: Nouvelles annales de math. 1853, p. 57.

die zu betrachtenden Gebilde in ihrer Beziehung zu zwei beliebigen Punkten und zu deren Verbindungslinie, man ersetze diese Punkte dann durch die imaginären Kreispunkte, also ihre Verbindungslinie durch die unendlich ferne Gerade, und es ergeben sich aus den gefundenen projectivischen Sätzen metrische Relationen in ihrer gewöhnlichen Form. Als Beispiele mögen noch für den Kreis die folgenden Beziehungen erwähnt werden:

Ein Kreis ist durch drei Punkte der Ebene vollkommen bestimmt; denn er ist ein Kegelschnitt, der ausserdem noch durch die beiden Kreispunkte gehen muss, für den also fünf Punkte gegeben sind.

Der Mittelpunkt eines Kreises, wie überhaupt eines Kegelschnittes, ist der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf denselben; in Folge dessen *sind concentrische Kreise dadurch definirt, dass sie gemeinsame Asymptoten haben.* Sie berühren sich also in den beiden Kreispunkten, können sich daher nicht mehr schneiden. Ein solches System von Kreisen wird dargestellt durch die Gleichung (vgl. p. 139)

$$x_1 x_2 - \lambda x_3^2 = 0,$$

wo $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade gibt, während $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Asymptoten sind. Um auf rechtwinklige Coordinaten zu kommen, müssen wir setzen $(i = \sqrt{-1})$:

$$x_1 = x + iy, \quad x_2 = x - iy, \quad x_3 = 1,$$

und erhalten dann die gewöhnliche Form:

$$x^2 + y^2 - \lambda = 0,$$

wo nun der Parameter λ das Quadrat des variirenden Radius ist.

Auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel sind gleich, denn dies ist nur eine andere Form des bekannten Satzes, dass das Doppelverhältniss der von einem Punkte des Kegelschnittes nach vier festen Punkten desselben gezogenen Strahlen constant ist. Diese vier Strahlen nämlich gehen in unserm Falle von dem Scheitel des betreffenden Winkels nach den Endpunkten des betrachteten Bogens und nach den beiden imaginären Kreispunkten.

Je zwei conjugirte Durchmesser eines Kreises stehen auf einander senkrecht, denn zwei solche Linien sind der Definition nach harmonisch zu den beiden Kreisasymptoten (vgl. p. 82). Da wir nun früher gesehen haben, dass jede Asymptote eines Kegelschnittes als ein Paar zusammenfallender conjugirter Durchmesser zu betrachten ist, so könnte man den paradox scheinenden Satz aussprechen: *Jede Kreisasymptote (jede unendlich ferne Gerade) steht zu sich selbst senkrecht.*

Durch die obigen Erörterungen ist nur der Begriff des *Winkels* durch den rein projectivischen eines Doppelverhältnisses ersetzt; in ähnlicher Weise muss aber auch die *Strecke* definirbar sein, wenn

man alle metrischen Sätze in projectivische übertragen will. Letzteres gelingt jedoch nicht so unmittelbar, denn zur Messung eines Winkels ist uns eine bestimmte Einheit (etwa der Winkel von 90°) von vornherein gegeben; zur Messung einer Strecke dagegen müssen wir eine willkürlich zu wählende Einheit zu Grunde legen. Bezeichnen wir nun mit r, s, bez. r', s' die Entfernungen zweier Punkte A, C von zwei anderen Punkten B, D ihrer Verbindungslinie, die in demselben Sinne, wie früher, gemessen sein mögen (vgl. p. 33), so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte gleich $\frac{r}{s} \cdot \frac{s'}{r'}$, also gleich r für $s = s'$, $r' = 1$. Nehmen wir insbesondere $s = s' = \infty$, so haben wir den Satz: *Die Entfernung zweier Punkte A und B ist (bei richtiger Wahl des Sinnes) gleich dem Doppelverhältnisse, welches mit ihnen der unendlich ferne Punkt und der um die Einheit von B entfernte Punkt bilden.* Dieser Satz würde von Nutzen werden, wenn wir auch Streckenrelationen projectivisch auffassen wollten. Um dann auf verschiedenen Geraden gelegene Strecken zu vergleichen, muss man noch die Festsetzung machen, dass die Punkte eines Kreises von seinem Mittelpunkte *gleich weit* entfernt heissen sollen; wir gehen darauf im Folgenden jedoch nicht weiter ein.*)

*) Zufolge dieser Ausführungen kann man die metrische Geometrie auffassen als die Theorie der Beziehungen ebener Figuren zu einem in ein Punktepaar zerfallenden Kegelschnitte. In ähnlicher Weise lassen sich auch alle projectivischen Beziehungen ebener Figuren zu einem allgemeinen Kegelschnitte in ein metrisches Gewand einkleiden, wodurch dann die betreffenden Sätze wesentlich kürzer und präciser auszusprechen sind: Man wird die Tangenten des ausgezeichneten „Fundamentalkegelschnittes" ebenso einführen, wie die unendlich fernen (durch die Kreispunkte gehenden) Geraden, die Punkte desselben, wie die unendlich fernen Punkte, und somit den (mit einer Constanten multiplicirten) Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches zwei beliebige Linien mit den beiden durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten des Fundamentalkegelschnittes bilden, als *Winkel* der beiden Linien bezeichnen. Ist also $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten, so ist der Winkel zweier Geraden u, v

$$= c \log \frac{H + \sqrt{GL - H^2}}{H - \sqrt{GL - H^2}},$$

wo G, L, H die frühere Bedeutung haben (p. 111), und woraus für $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = u^2 + v^2$ und $c = \frac{i}{2}$ wieder die Definition der gewöhnlichen metrischen Geometrie folgt. Unter Benutzung eines allgemeinen Kegelschnittes ist aber auch das Princip der Dualität für metrische Relationen vollkommen gültig; man hat daher auch zur Messung von Strecken eine bestimmt gegebene Einheit und man wird die *Entfernung* zweier Punkte definiren als den (mit einer Constanten multiplicirten) Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches mit ihnen die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitte bilden. Die Entfernung zweier Punkte x, y wird also

$$= c' \log \frac{Q + \sqrt{PR - Q^2}}{Q - \sqrt{PR - Q^2}},$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die in den angeführten Sätzen ausgesprochene Beziehung der metrischen Geometrie zur projectivischen für eine systematische Behandlung geometrischer Aufgaben. Nur zu oft beruht die Lösung der letzteren, wenn man von den imaginären und unendlich fernen Elementen keinen Gebrauch macht, auf Kunstgriffen, deren Zweckmässigkeit eben nur der Erfolg lehrt. Mit Hülfe unserer Anschauungsweise gelingt es jedoch metrische Aufgaben sofort in ein allgemeineres Gewand einzukleiden und dann auf dieselben die allgemein gültigen, directen Methoden der projectivischen Geometrie anzuwenden. Andererseits können wir auch aus jedem bekannten metrischen Satze einen allgemeineren ableiten, wenn wir einfach die Kreispunkte durch zwei beliebige Punkte der Ebene ersetzen. Für beide Fälle werden uns im Folgenden noch verschiedene Beispiele begegnen. Wir wenden uns jedoch zunächst dazu, die Gestaltung unserer allgemeinen Kegelschnitttheorie für die Kreise weiter zu verfolgen, indem wir die Beziehungen zwischen zwei Kreisen untersuchen.

Dieselben können sich (ausser in den Kreispunkten) nur noch in zwei reellen, oder conjugirt imaginären Punkten schneiden. Jedenfalls ist daher die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte stets reell. Wir wollen sie als die *Chordale der beiden Kreise* bezeichnen; für dieselbe gibt die folgende Betrachtung eine bemerkenswerthe Eigenschaft.

Es sei die Gleichung des einen Kreises gegeben durch*):

$$K = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0;$$

alsdann hat der Ausdruck K in ähnlicher Weise, wie die Hesse'sche Normalform der Geraden (p. 23), für jeden bestimmten Punkt (x, y) eine geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir nämlich die Entfernung des Punktes (xy) vom Mittelpunkte (a, b) mit ϱ, so ist

$$K = \varrho^2 - r^2 = t^2,$$

wenn t die Länge der von dem Punkte an den Kreis gezogenen Tangente bedeutet. Ist nun

wo P, Q, R die früher so genannten Ausdrücke bedeuten. Insbesondere sind hiernach zwei Linien zu einander *rechtwinklig*, wenn $H = 0$ ($uu' + vv' = 0$ für die gewöhnliche Metrik), also wenn die Linien harmonisch sind zu den von ihrem Schnittpunkte ausgehenden Tangenten. Mit den so als Winkel und Entfernungen definirten Grössen lässt sich weiterhin ebenso operiren, wie mit denen der gewöhnlichen Metrik. Vgl. Näheres hierüber bei Cayley: A sixth memoir upon quantics, Philos. Transactions, vol. 149, 1859 und Klein: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. IV und VI.

*) Vgl. für die Darstellung des Folgenden Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1., und über die Eigenschaft der Chordale, Radicalaxe oder Potenzlinie: Steiner in Crelle's Journal, Bd. 1 und Gaultier: Journal de l'école polytechnique, cah. 16.

$$K' = (x - a')^2 + (y - b')^2 - r'^2 = 0$$

die Gleichung des zweiten Kreises, so ist die der Chordale gegeben durch:

$$K - K' = 0$$

d. h. es ist für einen Punkt dieser Linie

$$t^2 = t'^2$$

wenn t' die Länge der von dem Punkte an den zweiten Kreis gezogenen Tangente ist. Also folgt:

Die Chordale ist der geometrische Ort der Punkte, für welche die an die beiden Kreise gezogenen Tangenten einander gleich sind.

Die Bestimmung der auf dieser Linie gelegenen Schnittpunkte geschieht nun durch eine quadratische Gleichung. Wir setzen:

$$c = a^2 + b^2 - r^2, \quad c' = a'^2 + b'^2 - r'^2,$$
$$u = x^2 + y^2$$

und haben dann für dieselben:

$$u - 2ax - 2by + c = 0$$
$$u - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Hieraus können wir x und y linear durch u ausdrücken und haben zur Bestimmung von u diese Werthe dann nur noch in die Gleichung $u = x^2 + y^2$ einzusetzen.

Hierdurch sind *die vier gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise* ebenfalls gegeben, denn sie hängen allein von der *Lage des gemeinsamen Polardreiecks* ab, welches durch die vier Schnittpunkte völlig bestimmt ist. Die Ecken dieses Dreiecks sind die Doppelpunkte der drei in dem Kreisbüschel:

$$K - \lambda K' = 0$$

enthaltenen Linienpaare. Von diesen ist nur eines reell: gebildet von der Chordale und der unendlich fernen Geraden; die beiden anderen sind immer imaginär, ihre Doppelpunkte aber ebenfalls reell, wenn sich die Kreise in zwei imaginären Punkten schneiden. Man erkennt dies daraus, dass dann die vier Tangenten reell sind, und somit auch das Polardreieck. In diesem Falle sind zwei Seiten des Dreiecks (s_1 und s_2 in Fig. 28) parallel der Chordale (c) und die zwischen ihnen gelegene Strecke der Centrale (s_3) wird von der Chordale halbirt; denn die Richtung der letzteren bestimmt die unendlich ferne Ecke

---

*) Eine gerade Linie bildet also nach unserer Definition des Kreises zusammen mit der unendlich fernen Geraden einen Kreis (mit unendlich grossem Radius); ebenso bilden zwei conjugirt imaginäre Linien, z. B. $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$, von denen jede durch je einen Kreispunkt geht, einen Kreis vom Radius Null: $x^2 + y^2 = 0$.

des Polardreiecks, und die Centrale muss als Polare dieses unendlich fernen Punktes die dritte Seite des Dreiecks sein. Eine jede solche Seite wird aber von den beiden andern und dem entsprechenden Linienpaare des Büschels $K - \lambda K' = 0$ harmonisch getheilt, woraus in der That, da die Chordale mit der unendlich fernen Geraden zusammen ein solches Linienpaar bildet, die Halbirung der erwähnten Strecke folgt. Auch die beiden andern Seiten des Dreiecks (ausser der Centrale) sind leicht zu construiren, da sich die gemeinsamen Tangenten der Kreise auf den drei Seiten schneiden müssen. Durch diese Schnittpunkte sind dann die drei Punktepaare gegeben, welche in der durch die beiden Kreise bestimmten Kegelschnittschaar vorkommen.

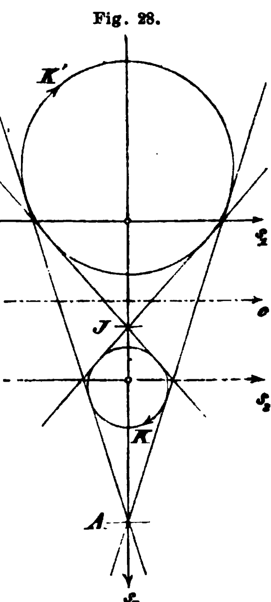


Fig. 28.

Insbesondere liegen zwei dieser Punkte auf der Centrale: *die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise* (I und A in Fig. 28). Analytisch kann man diese in folgender Weise erhalten.*) Die Gleichungen der Kreise in Liniencoordinaten sind (vgl. p. 31):

$$u^2 + v^2 - \frac{P^2}{r^2} = 0,$$

$$u^2 + v^2 - \frac{P'^2}{r'^2} = 0,$$

wo durch

$$P = ua + vb + 1 = 0,$$
$$P' = ua' + vb' + 1 = 0$$

bez. die Mittelpunkte der Kreise gegeben sind. Durch Subtraction der Kreisgleichungen erhalten wir dann das Punktepaar:

$$\frac{P^2}{r^2} - \frac{P'^2}{r'^2} = 0,$$

oder aufgelöst:

$$\frac{P}{r} - \frac{P'}{r'} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{P}{r} + \frac{P'}{r'} = 0. \tag{3}$$

In jedem dieser Punkte schneiden sich zufolge der Ableitung zwei der gemeinsamen Tangenten; (2) und (3) sind also die *Gleichungen*

*) Vgl. z. B. Hesse: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, etc. Leipzig 1873, 2. Auflage.

der beiden Aehnlichkeitspunkte. Sie liegen harmonisch gegen die Mittelpunkte der Kreise und theilen den Abstand dieser im Verhältnisse der Radien (daher der Name). Ersteres zeigt unmittelbar die Gleichungsform; das andere folgt, weil die Abstände einer Linie (u, v) von den Mittelpunkten bez. gegeben sind durch:

$$\frac{P}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{P'}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

und weil diese Abstände, wenn die Linie durch einen Aehnlichkeitspunkt geht, wegen (2) und (3) noch bez. den Bedingungen:

$$(4) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{r}{r'}, \quad \frac{P}{P'} = -\frac{r}{r'},$$

genügen müssen. Im ersten Falle sind beide Radien in derselben Richtung von der Centrale aus gemessen, dies gibt den *äusseren Aehnlichkeitspunkt,* im zweiten Falle in entgegengesetzter Richtung: *innerer Aehnlichkeitspunkt.* Für ersteren haben wir aus (2) die Coordinaten:

$$x = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}, \quad y = \frac{\frac{b}{r} - \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}},$$

für den innern Punkt dagegen aus (3):

$$x = \frac{\frac{a}{r} + \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}, \quad y = \frac{\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe können wir nunmehr *die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten* unmittelbar berechnen, und zwar wie bei den Schnittpunkten mit Hülfe von nur quadratischen Gleichungen. Wir haben wegen (4) für

den äussern Punkt:	den innern Punkt:
$P = r z$	$P = r z$
$P = r' z$	$P' = r' z$
$u^2 + v^2 = z^2,$	$u^2 + v^2 = z^2,$

woraus durch Elimination von u, v jedesmal eine *quadratische* Gleichung für z resultirt. Die Coordinaten der beiden durch den betreffenden Aehnlichkeitspunkt gehenden Tangenten sind dann linear bestimmt. Sie werden für beide Punkte imaginär, wenn der eine Kreis innerhalb des andern liegt, nur für den innern, wenn sich die beiden Kreise in reellen Punkten schneiden. Die Aehnlichkeitspunkte sind jedoch immer reell vorhanden; der innere fällt bei äusserer, der äussere bei innerer Berührung mit dem Berührungspunkte zusammen. Der Satz von der Theilung der Centrale im Verhältnisse der Radien behält jedoch immer reelle Gültigkeit. —

Betrachten wir ein System von drei Kreisen:

$$K = 0, \quad K' = 0, \quad K'' = 0,$$

so sind die Gleichungen der bez. durch je zwei derselben bestimmten Chordalen:

$$K - K' = 0, \quad K' - K'' = 0, \quad K'' - K' = 0;$$

und da die Summe dieser drei Gleichungen Null ist, so haben wir unter Berücksichtigung einer oben für die Punkte der Chordalen erwähnten Eigenschaft den Satz:

Die durch drei Kreise bestimmten drei Chordalen schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte eines Kreises, welcher die drei gegebenen unter rechtem Winkel schneidet, des sogenannten Orthogonalkreises. In der That sind nämlich die Längen der Tangenten, welche man vom Mittelpunkte des letzteren an die drei Kreise legen kann, einander gleich. Bezeichnen wir die Längen dieser Tangenten mit ϱ, die Coordinaten des Mittelpunktes mit α, β, so haben wir zur Berechnung dieser Grössen die drei Gleichungen:

$$(\alpha - a\ )^2 + (\beta - b\ )^2 - r^{\,2} = \varrho^2,$$
$$(\alpha - a'\,)^2 + (\beta - b'\,)^2 - r'^{\,2} = \varrho^2,$$
$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 - r''^2 = \varrho^2,$$

und dies sind, wenn man noch

$$u = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2$$

setzt, drei für α, β, u lineare Gleichungen.

Der zuletzt bewiesene Satz gilt, wie man leicht übersieht, nicht nur für die drei gegebenen Kreise, sondern für alle die einfach unendlich vielen Kreise des Systems*):

$$K + \lambda K' + \mu K'' = 0,$$

wo λ, μ veränderliche Parameter sind. Entsprechendes muss aber auch für Curven zweiter Ordnung überhaupt gelten, die zwei feste Punkte gemein haben. Uebertragen wir die für Kreise gewonnenen Sätze demnach in eine allgemeinere Form, indem wir die imaginären Kreispunkte durch zwei beliebige Punkte ersetzen, so erhalten wir:

Von allen Kegelschnitten, welche dieselben zwei Punkte enthalten, haben je zwei eine bewegliche Sehne gemein. Zieht man von einem Punkte derselben die vier Tangenten an die beiden Kegelschnitte, so liegen die vier Berührungspunkte mit den beiden festen Punkten auf

---

*) Ein System von Kegelschnitten, in dem jede Curve von zwei linear vorkommenden Parametern abhängt, wird als *Kegelschnittnetz* bezeichnet. Auf die allgemeinen Kegelschnittnetze werden wir in der 3ten und 5ten Abtheilung dieser Vorlesungen zurückkommen.

einer Curve zweiter Ordnung. Nimmt man drei Curven des Systems, so schneiden ihre drei Sehnen sich in einem Punkte; die sechs von ihm an die Curven gelegten Tangenten berühren in sechs Punkten, die mit den beiden festen Punkten auf einem Kegelschnitte liegen. Der Pol der Verbindungslinie dieser beiden Punkte in Bezug auf letztere Curve ist der Schnittpunkt jener drei Sehnen.

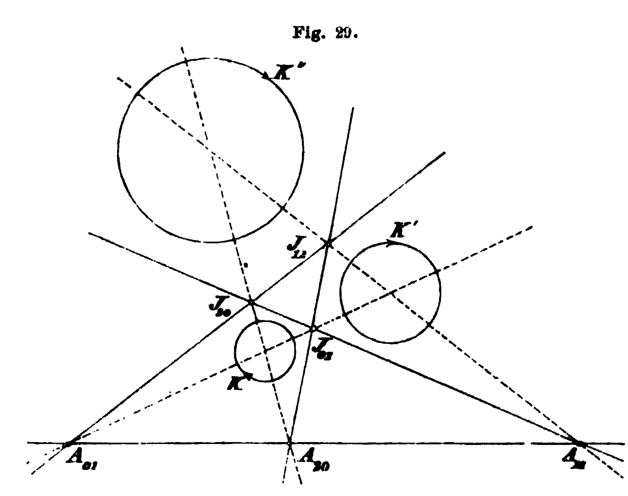
Von Interesse ist ferner in dem System der drei Kreise die Lage der durch je zwei bestimmten Aehnlichkeitspunkte. — Die drei äusseren von ihnen (A_{01}, A_{12}, A_{20} in Fig. 29) sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{p}{r} - \frac{p'}{r'} = 0, \quad \frac{p'}{r'} - \frac{p''}{r''} = 0, \quad \frac{p''}{r''} - \frac{p}{r} = 0,$$

und die drei inneren (I_{01}, I_{12}, I_{20} in Fig. 29) durch:

$$\frac{p}{r} + \frac{p'}{r'} = 0, \quad \frac{p'}{r'} + \frac{p''}{r''} = 0, \quad \frac{p''}{r''} + \frac{p}{r} = 0.$$

Fig. 29.



Da sowohl die Differenz je zweier Gleichungen der zweiten Reihe, vermehrt um die nicht darüber stehende der ersten Reihe, als auch die Summe der drei ersten Gleichungen identisch verschwindet, so haben wir den Satz:

Die durch je zwei von drei gegebenen Kreisen bestimmten sechs Aehnlichkeitspunkte bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits. Eine Seite desselben enthält die drei äusseren, jede andere einen äusseren und die zwei mit ihnen nicht auf derselben Centrale liegenden inneren Aehnlichkeitspunkte. Die drei Nebenseiten des Vierseits sind die Centralen der drei Kreise. —

Wir wollen die gewonnenen Resultate noch zur *Lösung einiger Aufgaben* verwerthen. Unter Benutzung des Satzes, dass sich die durch drei Kreise bestimmten Chordalen in einem Punkte schneiden, kann man zunächst auch für zwei sich nicht in reellen Punkten schneidende Kreise *die Chordale construiren.* Um einen Punkt dieser Linie zu finden, hat man nämlich nur den Schnittpunkt der Chordalen zu nehmen, welche ein beliebiger dritter, die ersten beiden in reellen Punkten treffender Kreis mit ihnen bestimmt. Wird der dritte Kreis

so gewählt, dass er die beiden gegebenen berührt, so schneiden sich die Tangenten desselben in den Berührungspunkten auf der gesuchten Chordale. Bei dieser Annahme des Hülfskreises fallen (bei äusserer Berührung) die beiden inneren Aehnlichkeitspunkte, welche er mit jedem der gegebenen Kreise bestimmt, mit den Berührungspunkten zusammen, und da dieselben zufolge unseres letzten Satzes auf einer Geraden mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise liegen müssen, so können, falls dieser Punkt bekannt ist, einfach zwei Punkte der Chordale gefunden werden, ohne dass man einen Hülfskreis zu zeichnen braucht. Man übersieht leicht, wie sich diese Betrachtung ändert, wenn man vom inneren Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise ausgeht. Noch einfacher gestaltet sich die Construction mit Hülfe des folgenden, aus der Elementargeometrie bekannten Satzes:

Legt man durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise irgend zwei Gerade, so liegen je zwei nicht homologe Schnittpunkte der einen Geraden mit den Kreisen und je zwei nicht homologe Schnittpunkte der anderen auf einem Kreise. Man hat also nur zwei solche Linien zu ziehen, von ihren 8 Schnittpunkten zwei Paare nicht homologer Punkte herauszuwählen und je zwei auf demselben Kreise liegende Punkte der letzteren zu verbinden, um als Schnitt der Verbindungslinien einen Punkt der Chordale zu erhalten.

Aus dem zuletzt erwähnten Satze folgt unmittelbar der folgende:

*Wenn zwei Kreise von zwei anderen berührt werden, so geht die Chordale eines jeden dieser Paare von Kreisen durch einen Aehnlichkeitspunkt des andern Paares, vorausgesetzt dass die beiden ersten Kreise von den beiden andern gleichartig berührt werden.**) Denn die Berührungspunkte eines jeden Kreises des einen Paares müssen als Aehnlichkeitspunkte mit einem solchen des andern Paares auf gerader Linie liegen; und zwei solche Geraden müssen sich auf der Chordale des letztern Paares schneiden, da die vier Berührungspunkte nach dem vorigen Satze auf einem Kreise liegen.

Durch diese Ueberlegungen sind wir in den Stand gesetzt, folgende, schon im Alterthume als Problem des Apollonius behandelte,

---

*) D. h. wir haben die folgenden Möglichkeiten:

1) Beide Kreise berühren die gegebenen Kreise von aussen, oder beide von innen, oder jeder der beiden Kreise berührt den einen von aussen, den andern von innen. Hier geht die Chordale des einen Paares durch einen äusseren Aehnlichkeitspunkt des andern.

2) Der eine Kreis berührt beide gegebene von aussen, der andere beide von innen, oder

3) der eine Kreis berührt den einen der gegebenen von aussen, den andern von innen, und der zweite Kreis verhält sich umgekehrt. Die Chordale geht in den beiden letzten Fällen durch einen inneren Aehnlichkeitspunkt.

Aufgabe ziemlich einfach zu lösen: *Es soll ein Kreis construirt werden, welcher drei gegebene Kreise berührt.*

Es seien α, β die Coordinaten des Mittelpunktes, ϱ der Radius für den gesuchten Kreis; alsdann haben wir zur Bestimmung dieser Grössen, wie man unmittelbar aus der Lage der Kreise ersieht, die drei Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2 &= (\varrho\pm r)^2 \\ (a'-\alpha)^2+(b'-\beta)^2 &= (\varrho\pm r')^2 \\ (a''-\alpha)^2+(b''-\beta)^2 &= (\varrho\pm r'')^2. \end{aligned}$$

Es sind hier in den rechts stehenden Ausdrücken im Ganzen 8 verschiedene Vorzeichencombinationen möglich. Da sich jedoch durch gleichzeitige Aenderung sämmtlicher Vorzeichen die aufgestellten Gleichungen nicht ändern, so haben wir die folgenden vier Combinationen zu berücksichtigen:

$$(6)\qquad \begin{matrix} \varrho+r, & \varrho+r', & \varrho+r'', \\ \varrho-r, & \varrho+r', & \varrho+r'', \\ \varrho+r, & \varrho-r', & \varrho+r'', \\ \varrho+r, & \varrho+r', & \varrho-r''. \end{matrix}$$

Durch Benutzung einer jeden dieser Reihen erhalten wir nun zwei Lösungen, und *es sind daher im Ganzen acht Lösungen der Aufgabe möglich.* Setzen wir nämlich:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha^2+\beta^2-\varrho^2 &= u, \\ a^2+b^2-r^2 &= c, \\ a'^2+b'^2-r'^2 &= c', \\ a''^2+b''^2-r''^2 &= c'', \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen von r, r', r'' in den Gleichungen (5) z. B. alle positiv nehmen, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{u+c}{2} &= a\,\alpha+b\,\beta+r\,\varrho \\ \frac{u+c'}{2} &= a'\alpha+b'\beta+r'\varrho \\ \frac{u+c''}{2} &= a''\alpha+b''\beta+r''\varrho. \end{aligned}$$

Hieraus können wir α, β, ϱ linear durch u ausdrücken, und dies in die quadratische Gleichung (7) eingesetzt, erlaubt in der That zwei Lösungen.

Die gestellte Aufgabe enthält eine Reihe specieller Fälle, welche durch sie von selbst mit gelöst sind: je nachdem man den Radius eines oder mehrerer der gegebenen Kreise unendlich klein oder unendlich gross werden lässt. Setzen wir z. B. $r=0$, so sind in den

Gleichungen (5) nur noch vier Vorzeichencombinationen möglich, ist auch $r' = 0$, so sind nur noch zwei Combinationen vorhanden; also:

Es gibt vier Kreise, welche zwei gegebene berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen.

Es gibt zwei Kreise, welche einen gegebenen berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen. Und endlich:

Es gibt einen Kreis, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Lassen wir dagegen r unendlich gross werden, so muss der Punkt (α, β) von der dadurch entstandenen Geraden um ϱ entfernt sein, und es ist die erste der Gleichungen (4) zu ersetzen durch (vgl. p. 23):

$$\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - d = \pm \varrho .$$

Da hierin nur $\pm \varrho$ und nicht ϱ^2 vorkommt, so sind immer noch 8 Lösungen möglich; ebenso wenn gleichzeitig $r' = \infty$ wird. Ist dagegen auch $r'' = \infty$, so haben wir statt der Gleichungen (5) die folgenden:

$$\begin{aligned} \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - d &= \pm \varrho \\ \alpha \cos \varphi' + \beta \sin \varphi' - d' &= \pm \varrho \\ \alpha \cos \varphi' + \beta \sin \varphi' - d'' &= \pm \varrho . \end{aligned}$$

Diese sind alle in ϱ linear, und es gibt nur noch vier wesentlich verschiedene Zeichencombinationen. Wir haben also:

Es gibt vier Kreise, welche drei gegebene gerade Linien berühren.

Es gibt acht Kreise, welche drei gegebene Kreise, oder zwei Kreise und eine Gerade, oder einen Kreis und zwei Gerade berühren.

Die constructive Behandlung unserer allgemeinen Aufgabe ergibt sich nun einfach aus den sogleich zu erwähnenden beiden Sätzen, die eine unmittelbare Folge der früheren sind. Es sei zuvor bemerkt, dass wir durch unsere Construction immer zwei der acht Kreise gleichzeitig finden, und zwar sind diese vier Paare dieselben, welche durch das Schema (6) gegeben sind, nämlich:

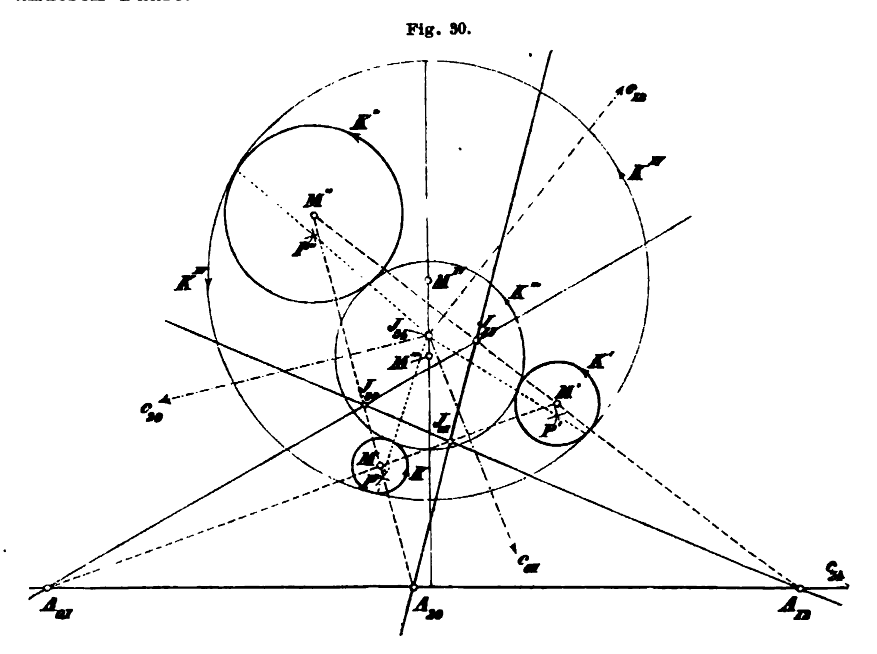
1) ein Kreis, der alle drei von innen und einer, der sie alle von aussen berührt;
2) ein Kreis, der K von innen, K' und K'' von aussen berührt, und einer, der K von aussen, K' und K'' von innen berührt;
3) ein Kreis, der K' von innen, K und K'' von aussen berührt, und einer, der K' von aussen, K und K'' von innen berührt;
4) ein Kreis, der K'' von innen, K und K' von aussen berührt, und einer, der K'' von aussen, K und K' von innen berührt.

Nehmen wir nun eines dieser Paare (K''' und K^{IV} in Fig. 30) mit je zwei der gegebenen Kreise zusammen, so muss die Chordale jedes Paares durch einen Aehnlichkeitspunkt des andern gehen; und somit folgen die Sätze:

Der Mittelpunkt des Orthogonalkreises der gegebenen Kreise ist ein

Aehnlichkeitspunkt für jedes der vier Paare der gesuchten Kreise, und zwar ein innerer für das erste Paar, ein äusserer für jedes der beiden anderen Paare.

Fig. 30.



$M^{(i)}$ ist der Mittelpunkt des Kreises $K^{(i)}$.

I_{ik} „ der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise $K^{(i)}$ und $K^{(k)}$.

A_{ik} „ „ äussere „ „ „ $K^{(i)}$ „ $K^{(k)}$.

c_{ik} „ die Chordale derselben Kreise.

$P^{(i)}$ „ der Pol von c_{34} in Bezug auf $K^{(i)}$.

Die Chordale jedes der vier Paare ist eine Seite des durch die sechs Aehnlichkeitspunkte der drei gegebenen Kreise bestimmten Vierseits (Aehnlichkeitsaxe); und zwar enthält die Chordale des ersten Paares die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte, die eines der anderen je einen äusseren und zwei innere Aehnlichkeitspunkte. Die drei Berührungssehnen für eins der vier Paare müssen nun als Verbindungslinien von zwei Aehnlichkeitspunkten (hier den Berührungspunkten) noch einen bestimmten dritten enthalten, d. h. wie man nach dem Vorhergehenden leicht übersieht, durch den Mittelpunkt des Orthogonalkreises der gegebenen Kreise gehen. Ferner schneiden sich die in den Berührungspunkten eines der drei Kreise gezogenen Tangenten auf der Chordale des betreffenden Paares (vgl. einen Satz auf p. 157), d. h. der Pol der Berührungssehne in Bezug auf den gegebenen Kreis liegt auf dieser Chordale. Daher muss der Pol der Chordale auf der

Berührungssehne liegen, und wir können so einen zweiten Punkt derselben finden, da die Chordalen als Aehnlichkeitsaxen der gegebenen Kreise bekannt sind.

Wir construiren also die Pole $[P, P', P'']$ einer der vier Aehnlichkeitsaxen (in Fig. 30 ist die äussere $[c_{34}]$ gewählt) in Bezug auf die drei Kreise, und verbinden dieselben mit dem Mittelpunkte des Orthogonalkreises (I_{34}); diese Verbindungslinien schneiden die gegebenen Kreise in 6 Punkten, in welchen zwei der gesuchten Kreise berühren; und damit ist unsere Aufgabe gelöst. In der That bietet die Construction der Mittelpunkte M''', M^{IV} der drei Kreise, welche mit I_{34} auf einer zu c_{34} senkrechten Linie liegen müssen, keinerlei Schwierigkeiten mehr.

VIII. Die Brennpunkte der Kegelschnitte.

In der Einleitung lernten wir bei Hyperbel und Ellipse zwei Punkte, bei der Parabel einen solchen kennen, welche zu diesen Curven in einer besonderen metrischen Beziehung standen, und welche wir als Brennpunkte derselben bezeichneten. Auf diese Punkte werden wir jetzt naturgemäss wieder geführt, wenn wir einen Kegelschnitt in seiner Beziehung zu den imaginären Kreispunkten betrachten; erst dadurch sind wir im Stande, die wahre Natur dieser merkwürdigen Punkte in voller Allgemeinheit aufzufassen.

Von einem jeden der Kreispunkte gehen nämlich, wie von jedem Punkte der Ebene, zwei (hier imaginäre) Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt; so entstehen vier Linien, welche sich noch in weiteren vier Punkten schneiden: in *den vier Brennpunkten des Kegelschnittes*. Von letzteren sind, wenn die Curve selbst reell ist, zwei (nicht auf derselben Tangente liegende) Punkte imaginär, die beiden anderen reell; und wir werden sehen, dass die reellen Brennpunkte mit den früher so genannten Punkten identisch sind. Analytisch werden die so definirten vier Punkte folgendermassen gefunden.

Es seien

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \Phi = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Liniencoordinaten; alsdann sind in der Schaar

$$F - \lambda \Phi = 0 \tag{1}$$

im Allgemeinen (vgl. p. 126) drei Punktepaare enthalten: die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten von F und Φ. Lassen wir insbesondere eins dieser Paare mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so geben die beiden anderen Paare die vier Brennpunkte. Um dies analytisch auszudrücken, brauchen wir nur

$$\Phi = u^2 + v^2$$

zu setzen, denn das System (1) wird dadurch nicht geändert, und dann können wir F in der Gestalt annehmen: *)

$$F = a^2 u^2 + b^2 v^2.$$

Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$(a^2 - \lambda)\, u + (b^2 - \lambda)\, v - 1 = 0. \tag{2}$$

Das eine Punktepaar der Schaar erhalten wir für $\lambda = \infty$ (die Kreispunkte); für die beiden andern Paare bestimmt sich λ durch:

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0.$$

Setzen wir die Wurzeln dieser Gleichung in (2) ein, so ergeben sich die Gleichungen der beiden Paare von Brennpunkten in der Form:

$$(b^2 - a^2)\, v^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

$$(a^2 - b^2)\, u^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

Nehmen wir, wie gewöhnlich $a^2 > b^2$ an, so stellt (2) die imaginären (3) die reellen Brennpunkte dar. Für die Coordinaten der letzteren findet man:

$$x = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$
$$y = 0;$$

dieselben stimmen daher in der That mit den früher so bezeichneten Punkten überein (vgl. p. 8).

Wie diese vier Punkte, so werden auch ihre Polaren in Bezug auf F eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Die Gleichung von F in Punktcoordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

also die der Polare eines Punktes (x', y'):

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} - 1 = 0.$$

Setzen wir hierin die Coordinaten eines reellen Brennpunktes ein, so geht dies über in:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d. h. in die Gleichung einer der Directricen von F (vergl. p. 11). Also:

*) Die Transformation der Schaar $F + \lambda\Phi = 0$ auf die kanonische Form kommt also auf die Bestimmung der Hauptaxen von $F = 0$ zurück. Das letztere Problem erscheint somit jetzt als specieller Fall für die Aufsuchung des gemeinsamen Polardreiecks; es hängt nur von einer quadratischen Gleichung ab (p. 89), da eine Seite des Dreiecks, die unendlich ferne Gerade, schon bekannt ist.

Die Directricen eines Kegelschnittes sind die Polaren seiner reellen Brennpunkte.

Es gibt nun eine Menge von Sätzen über die merkwürdigen Eigenschaften der Brennpunkte, die bei unserer Behandlungsweise dieses Gegenstandes sich einfach als Specialfälle allgemeinerer Betrachtungen ergeben. Um den Charakter dieser Sätze zu zeigen, mögen nur noch einige derselben erwähnt werden.

Wir haben früher gesehen (vgl. p. 49), dass das Doppelverhältniss, nach dem eine beliebige Tangente eines Kegelschnittes vier feste Tangenten desselben schneidet, constant ist. Nehmen wir nun statt der vier festen Tangenten die zwei durch einen der Brennpunkte gehenden und zwei beliebige andere Tangenten, so ist also das Doppelverhältniss der vier Strahlen constant, welche von dem Brennpunkte nach den imaginären Kreispunkten und nach den Schnittpunkten der beweglichen Tangente mit den beiden festen gehen, oder mit anderen Worten:

Die Strecke, welche auf einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes von zwei festen Tangenten ausgeschnitten wird, erscheint, von einem Brennpunkte aus gesehen, immer unter demselben Winkel.

Zieht man von einem beliebigen Punkte die beiden Tangenten an einen Kegelschnitt, so sind dieselben bekanntlich harmonisch zu je zwei conjugirten Polaren, welche durch den Punkt gehen. Nehmen wir daher statt dieses Punktes einen Brennpunkt, so haben wir, da die Tangenten dann durch die Kreispunkte gehen, den Satz:

Je zwei Linien, welche durch einen Brennpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen, sind conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt. —

Das Kegelschnittsystem:

$$F - \lambda \Phi = 0,$$

von welchem wir ausgingen, ist ein specieller Fall der allgemeinen früher behandelten Kegelschnittschaar, und nur dadurch ausgezeichnet, dass die vier gemeinsamen Tangenten desselben durch die Kreispunkte gehen. Alle Curven dieser Schaar haben mit F dieselben Brennpunkte, denn diese waren als die Punktepaar der Schaar bestimmt; man nennt daher die Gesammtheit dieser Curven *ein System von confocalen Kegelschnitten.* Solche Systeme kommen in den Anwendungen häufig vor; wir wollen deshalb noch einige Eigenschaften derselben anführen, indem wir einfach unsere früheren allgemeineren Resultate entsprechend particularisiren. Wir erhalten so die folgenden Sätze:

Die Gleichung der Kegelschnitte eines confocalen Systems in Punktcoordinaten ist (wegen (2)):

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0.$$

Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte des Systems berührt.

Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Curven des Systems (vgl. Fig. 31).

Die in dem System enthaltenen Punktepaare sind die imaginären Kreispunkte und die beiden Paare von Brennpunkten.

Es gibt keine in Linienpaare zerfallende Curven in dem System.

Alle Curven haben dieselben Hauptaxen; diese bilden mit der unendlich fernen Geraden zusammen das den Curven des confocalen Systems gemeinsame Polardreieck.

Die Tangenten der beiden durch einen Punkt gehenden Curven der Schaar sind die Doppelelemente der Involution, welche die durch den Punkt gehenden Tangentenpaare bilden (vgl. p. 135), d. h. sie sind stets harmonisch zu je zwei von dem Punkte an eine andere Curve der Schaar gelegten Tangenten, also in unserem Falle auch harmonisch zu den beiden Verbindungslinien des Punktes mit den Kreispunkten, oder mit anderen Worten:

Die beiden durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte des confocalen Systems durchschneiden sich rechtwinklig.

Unter den von dem betrachteten Punkte an die Curven des Systems gehenden Tangentenpaaren sind auch insbesondere die Linien nach den beiden reellen Brennpunkten (F und F' in Fig. 31), auch diese sind also harmonisch zu den Doppelstrahlen der beiden vereinigt gelegenen involutorischen Strahlbüschel. Sie bilden daher, weil die letzteren auf einander senkrecht stehen, mit diesem gleiche Winkel (vgl. p. 40), d. h.

Die Tangente in einem Punkte eines Kegelschnittes bildet gleiche Winkel mit den Verbindungslinien ihres Berührungspunktes und der Brennpunkte. Und zwar gilt dieser, besonders für physikalische Anwendungen ausserordentlich wichtige Satz für jeden Kegelschnitt, ganz unabhängig von dem confocalen Systeme, von welchem wir ausgingen. —

Die Parameterwerthe für die beiden durch einen gegebenen Punkt (x, y) gehenden Kegelschnitte sind bestimmt durch die quadratische Gleichung für λ:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0. \tag{5}$$

Sehen wir dann x und y als variabel an, so stellt dieselbe (wenn wieder $a^2 > b^2$)

für $b^2 > \lambda$ eine Ellipse,
für $b^2 < \lambda$, $a^2 > \lambda$ eine Hyperbel,
für $a^2 < \lambda$, $b^2 < \lambda$ einen imaginären Kegelschnitt

dar. Wir werden jedoch sehen, dass hier für reelle Werthe von x und y immer die beiden ersten Fälle möglich sind. Wir setzen:

$$f(\lambda) = x^2 (b^2 - \lambda) + y^2 (a^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} f(a^2) &= x^2 (b^2 - a^2), \text{ also negativ,} \\ f(b^2) &= y^2 (a^2 - b^2), \text{ also positiv,} \\ f(-\infty) &= \{-\lambda^2 + \dots\}_{\lambda = -\infty}, \text{ also negativ.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Gleichungen, dass die beiden Wurzeln der Gleichung (5) reell sind, und dass die eine zwischen a^2 und b^2, die andere zwischen b^2 und $-\infty$ liegen muss. Zufolge der eben aufgestellten Merkmale für die besondere Art der durch (2) dargestellten Curven ergibt sich sonach:

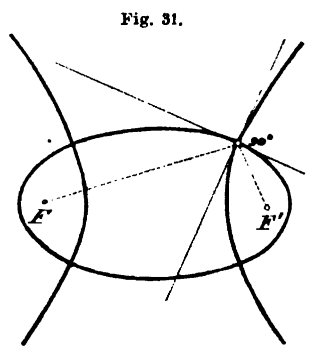


Fig. 31.

Durch jeden reellen Punkt der Ebene geht eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dem System confocaler Kegelschnitte angehören, und andere reelle Curven kommen ausser dem Paare der Brennpunkte nicht vor. Es ist leicht, sich hiernach ein Bild von der gegenseitigen Lage der Curven zu machen (vgl. Fig. 31).

Dass sich je zwei solche Kegelschnitte, die durch einen Punkt (x', y') gehen, rechtwinklig schneiden, ist unschwer analytisch einzusehen. Die Gleichungen der beiden Tangenten in dem Punkte sind, unter λ, μ die entsprechenden Parameterwerthe verstanden:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{x'x}{a^2 - \lambda} + \frac{y'y}{b^2 - \lambda} - 1 = 0, \\ \frac{x'x}{a^2 - \mu} + \frac{y'y}{b^2 - \mu} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Zieht man dieselben von einander ab, so findet sich unter Vernachlässigung eines Factors $(\lambda - \mu)$:

$$\frac{x'^2}{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)} + \frac{y'^2}{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)} = 0,$$

und dies ist in der That die Bedingung dafür, dass die Linien (6) auf einander senkrecht stehen. Den Factor $(\lambda - \mu)$ konnten wir fortlassen, da derselbe nur für einen auf den vier gemeinsamen Tangenten gelegenen Punkt verschwinden kann. In ähnlicher Weise sind auch die andern oben erwähnten Sätze leicht zu beweisen; es ist dies aber durch unsere allgemeinere Darstellung nicht nur vollständig, sondern auch in systematisch consequenter Weise geleistet.

Wir verlassen hiermit zunächst die Theorie der Curven zweiter Ordnung und Klasse, um uns zu anderen Betrachtungen von fundamentaler Bedeutung zu wenden. Dieselben werden uns neue Methoden und Hülfsmittel kennen lehren, deren Anwendung auf die Kegelschnitttheorie uns Gelegenheit geben wird, die Hauptmomente derselben noch einmal hervorzuheben und von einem neuen Gesichtspunkte aus zu überblicken. Es führt hierzu die allgemeine Invariantentheorie der algebraischen Formen, deren Wichtigkeit wir schon gelegentlich bei dem Probleme der gleichzeitigen Transformation zweier Kegelschnitte in die kanonische Form erkannt und hervorgehoben haben.

Dritte Abtheilung.

Einleitung in die Theorie der algebraischen Formen.

I. Vorbemerkungen. — Resultanten und Discriminanten.

Unter der *Theorie der algebraischen Formen* verstehen wir die Theorie der ganzen homogenen Functionen einer beliebigen Zahl von Veränderlichen, insbesondere hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber beliebigen linearen Transformationen der Variabeln. Dieselbe ist zuerst für die Zahlentheorie von grosser Bedeutung geworden; in *der* Form jedoch, in welcher wir sie im Folgenden behandeln wollen, ist sie im Wesentlichen aus der analytischen Geometrie erwachsen. Anfangs nur im Dienste dieser verwerthet, hat sie sich allmählich zu einer selbständigen Disciplin erhoben. Den ersten Anstoss dazu gaben wohl die Untersuchungen von Hesse über die ebenen Curven dritter Ordnung; ihre heutige Gestalt verdankt die Theorie jedoch wesentlich den Arbeiten englischer Mathematiker, unter denen Cayley und Sylvester vor Allen zu nennen sind, und denen sich in Deutschland besonders Aronhold anschliesst. Den Grundgedanken der heutigen Formentheorie können wir in folgender Weise aussprechen: Man führe in eine gegebene algebraische Form statt der n Veränderlichen, von welchen sie abhängt, n neue Veränderliche ein, welche mit den ursprünglichen durch n homogene lineare Gleichungen zusammenhängen. Alsdann geht die gegebene Form in eine andere über, welche mit ihr gewisse Eigenschaften gemein haben wird; *und das Studium solcher durch lineare Substitution unzerstörbaren Eigenschaften der Formen ist als Hauptaufgabe der Formentheorie zu bezeichnen.* Es kommt dies dann weiterhin im Wesentlichen darauf hinaus, solche homogene ganze Functionen der Coëfficienten (die auch noch Variable enthalten können) aufzustellen, welche bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante denselben Werth annehmen, gleichviel ob man sie für die ursprüngliche oder für die transformirte Function bildet, oder, wie man sich kurz ausdrückt, *welche die „Invarianteneigenschaft“ haben.* Beispiele für solche „invariante Bildungen“ haben wir schon bei den Kegelschnitten kennen gelernt; wir brauchen nur an die Discriminante einer Curve zweiter Ordnung oder an ihre Gleichung in Linien-

coordinaten zu erinnern. Geht nämlich die Gleichung einer solchen Curve:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

durch die Substitution:

$$x_i = \beta_i' y_1 + \beta_i'' y_2 + \beta_i''' y_3$$

über in

$$\Sigma a_{ik}' y_i y_k = 0,$$

so fanden wir, wenn r die aus den β gebildete Determinante bedeutet, für die Discriminante:

$$r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix}.$$

und für die linke Seite der Gleichung in Liniencoordinaten, wenn letztere für das neue Coordinatensystem durch v_i bezeichnet sind:

$$r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & v_1 \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & v_2 \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es wird hiernach klar sein, was im Allgemeinen unter der Invarianteneigenschaft zu verstehen ist. Gleichzeitig zeigen aber diese Beispiele den engen Zusammenhang der Theorie der *ternären algebraischen Formen*, d. h. derjenigen mit drei Variabeln, und der Geometrie der Ebene: Letztere erscheint geradezu als anschauliches Bild der ersteren. Sie entsteht direct aus dieser, indem man diejenigen Curven untersucht, welche durch Nullsetzen einer algebraischen Form dargestellt werden; und die zugehörigen invarianten Bildungen geben durch ihr Verschwinden Eigenschaften dieser Curven, welche von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig sind, resp., wenn sie noch Veränderliche enthalten, andere Curven, die zu der gegebenen in einer durch Coordinatentransformation unzerstörbaren Beziehung stehen.

In ähnlicher Weise, wie die Theorie der ternären Formen mit der sogenannten *projectivischen* Geometrie der Ebene identisch ist, d. h. mit der Theorie ebener Figuren (so weit dieselbe von metrischen Verhältnissen unabhängig dasteht) fällt die Theorie der *„quaternären“ Formen,* der Formen mit vier homogenen Variabeln, mit der projectivischen Geometrie des Raumes zusammen, d. h. mit der Theorie der Curven und Flächen im Raume. Die Formen mit mehr als vier Variabeln erlauben eine solche geometrische Interpretation nicht unmittelbar; man gebraucht daher für solche auch keine besonderen Namen

mehr, sondern untersucht dann sogleich Formen mit n Veränderlichen. Neben diese Eintheilung stellt sich eine andere *nach dem Grade, zu welchem die Veränderlichen in den untersuchten Formen vorkommen;* und nach diesem Grade behandelt man dann innerhalb der einzelnen, durch die Zahl der Variabeln getrennten Gebiete die verschiedenen Formen, von denen niedrigeren Grades zu höheren aufsteigend.

Für die Geometrie der Ebene würden wir also zunächst auf die ternären Formen näher eingehen müssen. Es gibt jedoch noch eine Vorstufe, welche wir bisher nicht so explicite berücksichtigt haben: *die Theorie der Formen mit zwei homogenen Veränderlichen, der binären algebraischen Formen.* Dieselbe findet, wie wir weiterhin sehen werden, ihre geometrische Interpretation in jedem Gebiete, dessen einzelne Inviduen nur von einer Variabeln (zunächst linear) abhängen, also insbesondere: in der *Geometrie auf einer Punktreihe* (Geraden) *oder in einem Strahlbüschel,**) Gebilde, deren Untersuchung wir früher beiläufig durch Einführung eines Parameters schon begonnen haben (vergl. p. 33). Die weitere Entwicklung der ebenen Geometrie und mit ihr der ternären Formentheorie, sowie vor Allem ein systematisch consequentes Fortschreiten von einfachen Gebilden zu complicirteren erfordert unbedingt ein genaueres, directes Studium dieser binären Formen: die Geometrie auf der Geraden oder im Strahlbüschel ist ebenso als ein selbständiges Gebiet aufzufassen, wie die in der Ebene oder im Raume. In der That hat sich diese Theorie in den letzten Jahren auch schon zu einer umfassenden Wissenschaft selbstständig entwickelt; und wenn wir im Folgenden auf dieselbe eingehen, so müssen wir uns darauf beschränken, die Gesichtspunkte zu kennzeichnen, nach denen dieselbe in neuerer Zeit vorwiegend bearbeitet wurde.**) Nur die weiterhin geometrisch unmittelbar zu verwerthenden Abschnitte werden wir ausführlicher darlegen.

Die mehrfach erwähnte *geometrische Interpretation der binären Formen* ergibt sich in folgender Weise. Es seien auf einer geraden Linie zwei Punkte A, B (die *„Grundpunkte“*) fest gegeben; ihr gegen-

---

*) Dazu tritt im Raume noch das Ebenenbüschel.

**) Die betreffenden Untersuchungen finden sich mehr oder weniger vollständig in den folgenden Werken zusammengefasst:

Cayley: Fourth and Fifth Memoir upon Quantics, Philosophical Transactions, vol. 148, 1858.

Salmon: Lessons introductory to the modern higher Algebra; deutsch von Fiedler. Leipzig 1863.

Fiedler: Elemente der neueren Geometrie. Leipzig 1862.

Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig 1872.

Auf letzteres Werk verweisen wir insbesondere für alle die Punkte, welche im Folgenden nur andeutungsweise berührt werden.

seitiger Abstand sei c. Ist nun p der Abstand eines beweglichen Punktes C von A, q der desselben Punktes von B, so ist immer

$$p + q = c\,. \tag{1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass p und q beide positiv gezählt werden, wenn C zwischen A, B liegt und dass, wenn dies nicht der Fall ist, der Abstand von dem näheren der beiden Punkte A, B negativ genommen wird. Es ist nun offenbar der Punkt C vollkommen bestimmt, sobald für ihn eine der Grössen p, q oder das Verhältniss beider bekannt ist; denn man kann in letzterem Falle wegen (1) p und q einzeln berechnen. Dasselbe gilt aber auch noch, wenn nicht das Verhältniss der bezeichneten Abstände selbst gegeben ist, sondern das Product desselben in eine gewisse Constante; und es ist zweckmässig diese Constante der Allgemeinheit wegen hinzuzufügen. Ein Punkt der Geraden ist daher durch zwei Zahlen x_1, x_2, *seine Coordinaten*, völlig bestimmt, wenn wir dieselben folgendermassen definiren:

Die Coordinaten (x_1, x_2) *eines Punktes sind zwei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände des Punktes einer Geraden von zwei festen Grundpunkten derselben, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig aber fest gewählten Constanten.**) Bezeichnen wir diese Constanten mit a, b, und ist ϱ irgend eine willkürliche Grösse, so haben wir also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= ap\,, \\ \varrho x_2 &= bq\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Jedem Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$ entspricht nur ein Werth von $\frac{p}{q}$, und somit auch nur ein Punkt der Geraden. Insbesondere ist der eine Grundpunkt gegeben durch $x_1 = 0$, der andere durch $x_2 = 0$. Die Bedeutung des Abstandsverhältnisses $\frac{x_1}{x_2}$ ist also für $a = b$ ganz dieselbe, wie die des früher zur Darstellung eines Punktes der Geraden benutzten Parameters λ, wo die Punkte der Verbindungslinie zweier Punkte $(x_0, y_0;\ x_1, y_1)$ gegeben waren durch die Gleichungen:

---

*) Man kann über diese Constanten insbesondere so verfügen, dass die Coordinaten als Doppelverhältnisse auffassbar sind. Man nimmt alsdann $a = b$ und zeichnet noch einen dritten Punkt aus, für den $\frac{x_1}{x_2} = 1$: den sogenannten *Einheitspunkt*. Der Quotient $\frac{x_1}{x_2}$ gibt dann für einen beliebigen Punkt (x_1, x_2) das *Doppelverhältniss*, welches derselbe mit den beiden Grundpunkten ($x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) und dem Einheitspunkte ($x_1 = x_2$) bestimmt; und dadurch sind dann die Coordinaten rein projectivisch definirt; vgl. Fiedler: Darstellende Geometrie. Leipzig 1871, Anhang.

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda},$$
(3)
$$y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}.$$

Wir können daher alle an diesen Parameter geknüpften Betrachtungen über die Geometrie auf einer Geraden unmittelbar für unsere jetzige Anschauung, d. h. für das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$ verwerthen; mussten wir doch auch damals der Allgemeinheit wegen statt λ einen Parameter μ einführen, der von λ nur um eine von der Lage des Punktes auf der Geraden unabhängigen constanten Factor verschieden war.

Durch dieselben Gleichungen (3) stellten wir aber auch die Strahlen eines Büschels dar; wir hatten für ein solches:

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda},$$
$$v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda},$$

Der Parameter λ ist wieder bis auf eine Constante gleich einem Abstandsverhältnisse, nämlich:

$$\lambda = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s},$$

wo r, s die Längen der von einem Punkte des beweglichen Strahles auf die beiden Grundstrahlen gefällten Lothe bedeuteten. Wir können daher für die Grössen x_1, x_2 auch folgende geometrische Interpretation wählen:

Es sind x_1, x_2 zwei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Lothe von einem beweglichen Strahle eines Strahlbüschels auf seine festen Grundstrahlen, die Länge eines jeden Lothes multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten. Wir haben in diesem Falle zu setzen:

$$\varrho x_1 = ar,$$
$$\varrho x_2 = bs,$$

wenn a, b wieder die willkürlichen Constanten bedeuten. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass auch die für Strahlbüschel früher gemachten Bemerkungen hier ohne Weiteres ihre Gültigkeit behalten. Im Folgenden werden wir jedoch die geometrischen Sätze nur für die Geometrie auf der Geraden aussprechen; die Uebertragung derselben auf Strahlbüschel ist dann selbstverständlich.

Die geometrische Bedeutung der linearen Transformationen, mit welchen wir es im Folgenden stets zu thun haben, ist hiernach sofort verständlich. Wählen wir als Grundpunkte statt A, B zwei andere Punkte A_1, B_1 der Geraden, von denen (um die Ideen zu fixiren) A_1

um d jenseits A, B_1 um e jenseits B liegen mag, und nennen y_1, y_2 die Coordinaten des Punktes C in Bezug auf diese neuen Grundpunkte, so sind y_1, y_2 proportional zu den Abständen des Punktes C von A_1 und B_1, multiplicirt mit zwei neuen Constanten α, β; und wir haben:

Fig. 32.

A_1 d A p C q B e B_1

$$\sigma y_1 = \alpha\,(p + d)\,,$$
$$\sigma y_2 = \beta\,(q + e)\,,$$

also wegen (1), wenn wir statt $\sigma \,.\, c$ wieder σ schreiben:

$$\sigma y_1 = \alpha\,(cp + d\,(p + q))$$
$$\sigma y_2 = \beta\,(cq + e\,(p + q)).$$

Drücken wir noch p, q nach (2) durch x_1, x_2 aus, so kommt:

$$\sigma y_1 = \alpha\varrho \left\{\frac{c + d}{a}\,x_1 + \frac{d}{b}\,x_2\right\}$$
$$\sigma y_2 = \beta\varrho \left\{\frac{c + e}{b}\,x_2 + \frac{e}{a}\,x_1\right\},$$

oder, da es nur auf das Verhältniss $\frac{y_1}{y_2}$ ankommt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sigma y_1 &= \alpha\,\{b\,(c + d)\,x_1 + a d x_2\} \\ \sigma y_2 &= \beta\,\{b c x_1 + a\,(c + e)\,x_2\}\,. \end{aligned}$$

Dies sind ganz allgemeine lineare Beziehungen zwischen den y und x, für welche auch die Bedingung, dass die Substitutionsdeterminante

$$\alpha\beta a b c\,(c + d + e)$$

nicht verschwindet, erfüllt ist; denn Letzteres würde nur eintreten für $c = 0$, d. h. wenn die Punkte A und B zusammenfallen, oder für $c + d + e = 0$, d. h. wenn die Punkte A_1 und B_1 zusammenfallen. Wir haben somit den Satz:

Jede lineare Substitution, deren Determinante nicht verschwindet, ist identisch mit einer Veränderung der Grundpunkte und der multiplicirenden Constanten in jener geometrischen Interpretation, bei welcher das Verhältniss der Veränderlichen durch einen Punkt einer Geraden dargestellt wird.

Auch die Coëfficienten in den Gleichungen (4) haben eine directe geometrische Bedeutung, es sind die Coordinaten der neuen Grundpunkte in Bezug auf die alten. Bezeichnen wir dieselben bez. mit x_1', x_2' und x_1'', x_2'', so ergibt sich unmittelbar aus der Bedeutung der Grössen a, b, c, d, e:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1' &= -ad\,, & \varrho x_1'' &= a\,(c + e)\,, \\ \varrho x_2' &= b\,(c + d)\,, & \varrho x_2'' &= -be\,. \end{aligned}$$

Man erkennt dies auch daran, dass für die Punkte A_1, B_1 bez. die Gleichungen

(6) $$y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

bestehen müssen.*) Eine lineare Gleichung:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

stellt nämlich immer einen Punkt mit den Coordinaten a_2, $-a_1$ dar, wie sich durch Auflösung nach $\frac{x_1}{x_2}$ sofort ergibt; und hierdurch würde man wieder aus (6) die Relationen (5) erhalten.

Ueberhaupt können wir jede homogene Gleichung zwischen x_1, x_2:

$$f(x_1, x_2) = 0$$

als eine Gleichung für das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$ auffassen, für welches sich aus ihr im Allgemeinen eine bestimmte Anzahl von Werthen ergibt, oder geometrisch ausgedrückt:

Eine binäre algebraische Form von der n^{ten} Ordnung stellt, gleich Null gesetzt, ein System von n Punkten auf einer Geraden dar.

Wirklich construirbar sind diese Punkte jedoch nur alle, wenn die Gleichung für $\frac{x_1}{x_2}$ lauter reelle Wurzeln hat. Um auch die imaginären Wurzeln zu repräsentiren, werden wir auch von imaginären Punkten der Geraden sprechen, in ähnlicher Weise, wie wir früher solche Punkte in der Ebene schon mehrfach eingeführt haben.**). Es ist dann erlaubt, alle algebraischen Sätze auch geometrisch auszusprechen, unabhängig von der Realität der betreffenden Grössen. Dieselben gelten dann aber auch unabhängig von der Realität der Coëfficienten in den betreffenden binären Formen. *Wir können die letzteren daher auch stets als complexe Grössen voraussetzen*, wo dann der Form im Allgemeinen kein reeller Punkt entspricht; und es sei dies im

---

*) Vgl. die entsprechenden Bemerkungen für die lineare Transformation ternärer Formen auf p. 69.

**) Auch die imaginären Wurzeln kann man geometrisch repräsentiren, wenn man nach Gauss die complexe Ebene $(x + iy)$ als Träger des binären Gebietes betrachtet, oder besser bie Riemann'sche Kugelfläche (vgl. z. B. C. Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1863), wie dies in der Functionentheorie üblich ist. Vgl. hierüber Möbius: Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; math.-phys. Klasse, 1852 und 1853, oder Crelle's Journal, Bd. 52, p. 218 und 229; ferner Beltrami: Sulla geometria delle forme binarie cubiche, Acad. di Bologna, 1871; F. Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, p. 47. — In Betreff einer *rein* projectivischen Definition der imaginären Elemente des binären Gebietes vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857; Stolz: Math. Annalen, Bd. 4 und Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, ib. Bd. 8.

Gegensatze zu der in der Kegelschnitttheorie gemachten Voraussetzung ausdrücklich hervorgehoben.

Die Bedingung, dass ein solches System von Punkten eine von der Lage der Grundpunkte unabhängige Eigenschaft habe, wird nach den angeführten allgemeinen Bemerkungen gegeben durch das Verschwinden einer ganzen rationalen Function der Coëfficienten der das Punktsystem darstellenden Form, welche die Invarianteneigenschaft hat.*) *Eine solche Function der Coëfficienten wird als Invariante der Form bezeichnet.*

Ferner wird es im Allgemeinen für ein gegebenes Punktsystem gewisse andere Punktsysteme geben, welche zu demselben eine ausgezeichnete, von der Lage der Grundpunkte unabhängige Beziehung haben. Eine Punktgruppe der Art wird dann durch das Verschwinden einer Function dargestellt, welche die Invarianteneigenschaft hat, und welche ausser den Coëfficienten der gegebenen Form auch noch die Veränderlichen x_1, x_2 enthält. *Eine solche Function heisst eine Covariante der gegebenen Form.* Dass die Ordnung einer solchen Covariante in den Veränderlichen, wie überhaupt jeder Form, bei linearer Transformation ungeändert bleibt, ist unmittelbar ersichtlich. Betrachtet man gleichzeitig mehrere Formen, so wird es invariante Bildungen geben, welche gleichzeitig von den Coëfficienten der verschiedenen Formen abhängen; diese werden dann *simultane Covarianten oder simultane Invarianten des Systems* genannt, je nachdem sie die Veränderlichen enthalten, oder nicht.

Bezeichnen wir also durch $a_0, a_1, a_2 \ldots$ die Coëfficienten der Form $f(x_1, x_2)$ und durch $a_0', a_1', a_2' \ldots$ die einer Form $F(y_1, y_2)$, wo F aus f durch eine lineare Transformation entsteht, ist ferner Π eine ganze rationale Function ihrer Argumente und r die Substitutionsdeterminante, *so ist eine Invariante von f definirt durch***):

*) Es kann auch eintreten, dass das Verschwinden einer oder mehrerer Invarianten nicht genügt, um die betreffende Eigenschaft darzustellen, sondern dass dazu noch das identische Verschwinden von Covarianten erforderlich ist. — Näher werden wir auf diese Frage bei den ternären Formen eingehen, dort auch die betreffenden Beweise erbringen, nachdem wir in der Theorie der binären Formen Beispiele für das Verschwinden von Covarianten kennen gelernt haben.

**) Daneben stellt sich eine andere Definition der Invarianten durch gewisse partielle Differentialgleichungen, deren rationale Lösungen sie sind. Vgl. Cayley: Crelle's Journal, Bd. 47 und Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, ib. Bd. 62. Für diese Fragestellung ist ferner von Wichtigkeit der Aufsatz Christoffel's: Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie, Borchardt's Journal, Bd. 68; vgl. auch Aronhold, ib. Bd. 69. Letzterer gibt noch eine andere Definition, wobei die Invarianten durch die Relationen bestimmt sind, welche unabhängig von den Transformationscöefficienten zwischen den Coëfficienten zweier Formen bestehen, wenn dieselben linear in einander transformirbar sein sollen. Ueber jene Differentialgleichungen vergl. auch Clebsch: Theorie der binären Formen, § 80, und Borchardt's Journal, Bd. 65, p. 267.

$$\Pi(a_0', a_1', a_2' \ldots) = r^\lambda \, \Pi(a_0, a_1, a_2 \ldots),$$

und eine Covariante von f durch:

$$\Pi(a_0', a_1', a_2' \ldots; \, y_1, y_2) = r^\lambda \, \Pi(a_0, a_1, a_2 \ldots; \, x_1, x_2).$$

Es möge dies an einigen *Beispielen* erläutert werden.

Es seien zunächst zwei Formen beliebiger Ordnung:

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

gegeben; dann ist, wie wir zeigen wollen, die Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

die sogenannte *Functional-* oder (nach ihrem Entdecker) Jacobi'*sche Determinante* von f und φ*), eine simultane Covariante der letzteren. Machen wir nämlich die lineare Substitution:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ x_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2. \end{aligned}$$

und sind $F(y_1, y_2)$, $\Phi(y_1, y_2)$ bez. die Formen, in welche f, φ dadurch übergehen, so sind:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial f}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

In Folge dessen geht unsere Determinante, gebildet für die Formen F, Φ über in:

$$\begin{vmatrix} \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_2} & \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

und nach dem Multiplicationssatze der Determinanten haben wir also:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

---

*) Vgl. Jacobi: De determinantibus functionalibus, Crelle's Journal, Bd. 22. — Gleich Null gesetzt gibt dieselbe die Punkte, deren lineare Polaren (vgl. den folgenden Abschnitt) in Bezug auf f und φ identisch sind.

d. h. *die Functionaldeterminante von f und φ ist eine simultane Covariante,* q. e. d.; in unserem Falle ist nämlich:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

Ein Beispiel für eine Covariante einer einzigen gegebenen Form $f(x_1, x_2)$ gibt uns die Determinante aus den zweiten Differentialquotienten derselben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

welche nach ihrem Entdecker Hesse*) gewöhnlich als die Hesse'*sche Determinante* von f bezeichnet wird. Es sei wieder $F(y_1, y_2)$ die Form, in welche $f(x_1, x_2)$ durch die Transformation (7) übergeht; dann folgt durch Differentiation der Gleichungen (8):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial p}{\partial x_2}\gamma$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial p}{\partial x_2}\delta = \frac{\partial q}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial q}{\partial x_2}\gamma$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} = \frac{\partial q}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial q}{\partial x_2}\delta,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9) \qquad \begin{aligned} p &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma \\ q &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta, \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die für F gebildete Determinante ein, so wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial p}{\partial x_2}\gamma & \frac{\partial p}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial p}{\partial x_2}\delta \\ \frac{\partial q}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial q}{\partial x_2}\gamma & \frac{\partial q}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial q}{\partial x_2}\delta \end{vmatrix};$$

und dies ist nach dem Determinantenmultiplicationssatze

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Wenden wir endlich hierauf unter Berücksichtigung der Gleichungen (9) noch einmal den mehrfach erwähnten Multiplicationssatz an, so kommt:

---

*) Vgl. Crelle's Journal, Bd. 28, p. 83.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = r^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix};$$

d. h. *die* Hesse'*sche Determinante einer Form ist eine Covariante derselben.*

Eine *simultane* Invariante zweier Formen f, φ ist jedenfalls durch die Bedingung gegeben, dass die beiden zugehörigen Punktgruppen einen Punkt gemeinsam haben, denn diese Bedingung ist von der zufälligen Lage der Coordinatengrundpunkte unabhängig. Sind beide Formen linear, so ist dieselbe leicht zu bilden. Es bestehen dann für den gemeinsamen Punkt die Gleichungen:

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$
$$\varphi = b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0,$$

und die Elimination der x ergibt für die fragliche Bedingung das Verschwinden der Determinante:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dies ist aber nichts anderes, als die Functionaldeterminante von f, φ; sie hat daher in der That die Invarianteneigenschaft. Letzteres ergibt sich auch direct in derselben Weise, wie das Entsprechende für Functionaldeterminanten nachgewiesen wurde. Durch Anwendung der Substitution (7) nämlich gehen f und φ bez. über in:

$$F = (a_1 \alpha + a_2 \gamma) y_1 + (a_1 \beta + a_2 \delta) y_2$$
$$\Phi = (b_1 \alpha + b_2 \gamma) y_1 + (b_1 \beta + b_2 \delta) y_2;$$

und unsere Determinante, gebildet für diese beiden Formen, zerfällt sofort wieder in das Product:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ q. e. d.}$$

Ist nur *eine* lineare Form gegeben, so stellt dieselbe einen einzelnen Punkt dar; ein solcher kann aber offenbar keine geometrische Eigenschaft mehr haben ausser der, dass er überhaupt vorhanden ist, d. h. dass die betreffende lineare Form nicht identisch verschwindet, d. h. nicht jeder ihrer Coëfficienten einzeln Null ist. Also: *Es gibt keine Invariante einer linearen Form* Anders ist dies schon, wenn eine quadratische Form vorliegt; denn hier können die beiden ihr entsprechenden Punkte zusammenfallen. Soll dies eintreten, so muss die durch Nullsetzen der Form entstehende quadratische Gleichung für $\frac{x_1}{x_2}$:

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln haben; und die Bedingung hierfür ist bekanntlich:

$$(12) \qquad a_0 a_2 - a_1^2 = 0.$$

Dies ist aber bis auf einen Zahlenfactor die Hesse'sche Determinante der Form f, denn wir haben hier:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\, a_0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\, a_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2\, a_2,$$

und somit:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 4\,(a_0 a_2 - a_1^2).$$

Da sich nun die Hesse'sche Determinante, wie soeben gezeigt ist, stets bei einer linearen Transformation nur um das Quadrat der Substitutionsdeterminante ändert, so ist dies auch mit dem Ausdrucke (12) der Fall, d. h. *derselbe ist eine Invariante von f.*

Die hier zuletzt gegebenen Beispiele für Invarianten sind specielle Fälle von invarianten Bildungen allgemeinerer Art, die man bez. als *Resultanten* und *Discriminanten* bezeichnet*); diese sind allgemein in folgender Weise definirt:

Die Resultante zweier Formen f und φ ist diejenige ganze Function ihrer Coëfficienten, welche verschwinden muss, damit ein Punkt der zu f gehörigen Punktgruppe mit einem Punkte der zu φ gehörigen Gruppe zusammenfalle; d. h. damit die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Die Discriminante einer Form f ist diejenige ganze Function ihrer Coëfficienten, welche verschwindet, sobald zwei Punkte der zu f gehörigen Gruppe zusammenfallen, d. h. sobald die Gleichung $f = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat.

Für diese Functionen kann man nun ganz allgemeine Bildungsgesetze angeben; und zwar folgen die für die Discriminanten aus denen für die Resultanten. Wir beginnen daher mit den letzteren.

Ist eine Gleichung n^{ten} Grades für $x : f = 0$ gegeben, und sind $p, p^{(1)}, p^{(2)} \ldots p^{(n-1)}$ die Wurzeln derselben, so ist bekanntlich, wenn c eine Constante bedeutet:

$$f = c\,(x - p)\,(x - p^{(1)})\,(x - p^{(2)}) \ldots . (x - p^{(n-1)}).$$

---

*) Vgl. hierüber neben den erwähnten Werken von Clebsch und Salmon: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1870, § 11 und für die später zu besprechende symbolische Darstellung besonders: Gordan: Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen, Math. Annalen, Bd. 3.

Setzen wir nun $x = \frac{x_1}{x_2}$, so ist f eine binäre Form, und setzen wir gleichzeitig $p = \frac{p_1}{p_2}$, $p^{(1)} = \frac{p_1^{(1)}}{p_2^{(1)}}$, ... $p^{(n-1)} = \frac{p_1^{(n-1)}}{p_2^{(n-2)}}$, so sind die p die Coordinaten der die Form f repräsentirenden Punkte. Wir haben dann für $\gamma = c \cdot p_2 p_2^{(1)} \ldots p_2^{(n-1)}$:

$$f = \gamma\,(x_1 p_2 - x_2 p_1) \cdot (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)})(x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) \ldots (x_1 p_2^{(n-1)} - x_2 p_1^{(n-1)}),$$

oder wenn wir zur Abkürzung (rs) für die Determinante $(r_1 s_2 - r_2 s_1)$ schreiben:

$$(13) \qquad f = \gamma\,(xp)\,(xp^{(1)})\,(xp^{(2)}) \ldots (xp^{(n-1)}).$$

Ist ferner eine zweite Form φ vom m^{ten} Grade gegeben, und sind q die Coordinaten ihrer Verschwindungspunkte, so haben wir ebenso:

$$(14) \qquad \varphi = \gamma'\,(xq)\,(xq^{(1)})\,(xq^{(2)}) \ldots (xq^{(m-1)}).$$

Soll nun ein Punkt $p^{(\mu)}$ von f mit einem Punkte $q^{(\nu)}$ von φ zusammenfallen, so muss die Determinante

$$(p^{(\mu)} q^{(\nu)}) = p_1^{(\mu)} q_2^{(\nu)} - p_2^{(\mu)} q^{(\nu)}$$

verschwinden. In diesem Falle muss auch immer die gesuchte Resultante R ihrer Definition nach Null werden, und zwar für jedes Werthepaar der Indices μ, ν. Andererseits darf diese Function aber auch nur unter dieser Bedingung verschwinden; sie muss daher das Product aller der Determinanten $(p^{(\mu)} q^{(\nu)})$ sein, und wir haben:

$$(15) \quad \begin{array}{rlllll} R = & (p\,q) & (p\,q') & (p\,q'') & \ldots\ldots & (p\,q^{(m-1)}) \\ \cdot & (p'\,q) & (p'\,q') & (p'\,q'') & \ldots\ldots & (p'\,q^{(m-1)}) \\ \cdot & (p''q) & (p''q') & (p''q'') & \ldots\ldots & (p''q^{(m-1)}) \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & (p^{(n-1)} q) & (p^{(n-1)} q') & (p^{(n-1)} q'') & \ldots\ldots & (p^{(n-1)} q^{(m-1)}) \end{array}$$

Uns kommt es jedoch wesentlich darauf an, die Resultante in Function der Coëfficienten von f und φ, ohne Benutzung der Verschwindungswerthe p, q zu bilden. Die Coëfficienten einer dieser Formen sind leicht in R einzuführen; denn die Horizontalreihen in dem gegebenen Ausdrucke (15) entstehen, wenn man in φ die x der Reihe nach durch die verschiedenen p ersetzt und die Verticalreihen, indem man in f die x durch die q ersetzt. Es ist somit auch:

$$\begin{aligned} R &= f\,(q_1, q_2) \cdot f\,(q_1', q_2') \cdot f\,(q_1'', q_2'') \ldots f\,(q_1^{(m-1)}, q_2^{(m-1)}) \\ &= \varphi\,(p_1, p_2) \cdot \varphi\,(p_1', p_2') \cdot \varphi\,(p_1'', p_2'') \ldots \varphi\,(p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)}), \end{aligned}$$

und die Form dieser Bildungen ergibt unmittelbar den Satz:

Die Resultante zweier Formen der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ist in den Coëfficienten derselben homogen und vom n^{ten} Grade in den Coëfficienten der ersten, vom m^{ten} Grade in den Coëfficienten der zweiten.

Zur directen Darstellung der Resultante in Function der Coëfficienten beider Formen hat man verschiedene Methoden, die jedoch im Ganzen keinen Einblick in die eigentlichen Bildungsgesetze liefern, wenigstens nicht in dem Sinne, wie es die Invariantentheorie fordern muss. Man kann z. B. nach dem Vorgange von Sylvester in folgender Weise verfahren:

Wenn für einen Werth von x f und φ verschwinden ($x = \frac{x_1}{x_2}$ gesetzt), so müssen auch die folgenden $m + n$ Gleichungen bestehen:

$$f = 0, \quad x \cdot f = 0, \quad x^2 \cdot f = 0, \ldots . x^{m-1} \cdot f = 0,$$
$$\varphi = 0, \quad x \cdot \varphi = 0, \quad x^2 \cdot \varphi = 0, \ldots . x^{n-1} \cdot \varphi = 0.$$

Aus ihnen können wir dann die $(m + n)$ Grössen: $1, x, x^2, \ldots x^{m+n-1}$ eliminiren und erhalten so die Resultante in der Form einer $(m + n)$-gliedrigen Determinante. Ist z. B. f vom zweiten, φ vom dritten Grade, also:

$$f = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2$$
$$\varphi = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3,$$

so bestehen für eine gemeinsame Wurzel die Gleichungen:

$$\begin{array}{rl} x^2 \cdot f = a_0 x^4 + 2 a_1 x^3 + a_2 x^2 & = 0 \\ x \cdot f = a_0 x^3 + 2 a_1 x^2 + a_2 x & = 0 \\ f = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 & = 0 \\ x \cdot \varphi = b_0 x^4 + 3 b_1 x^3 + 3 b_2 x^2 + b_3 x & = 0 \\ \varphi = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3 & = 0, \end{array}$$

und die Elimination von $x^4, x^3, x^2, x, 1$ ergibt:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Schon etwas übersichtlicher wird das Eliminationsresultat bei zwei Formen gleicher Ordnung nach einer von Bézout und Cayley gegebenen Methode. Sind nämlich f und φ beide von der n^{ten} Ordnung, so ist:

$$f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)$$

ein Ausdruck, welcher unabhängig von y für einen gemeinsamen Punkt

von f und φ verschwindet, und der durch $(x - y)$ theilbar sein muss, da er für $x = y$ Null wird. Daher ist

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)}{x - y}$$

eine Form von der Ordnung $(n - 1)$ in den x, die für jeden Werth von y verschwindet, sobald x eine gemeinsame Wurzel von f und φ ist. Ordnen wir F nach Potenzen von y, so erhalten wir dafür die Form:

$$\begin{array}{lllllll}
(16)\; F = & & c_{00} + & c_{01}x + & c_{02}x^2 + \ldots + & c_{0\,n-1}x^{n-1} & \\
+ y & (& c_{10} + & c_{11}x + & c_{12}x^2 + \ldots + & c_{1\,n-1}x^{n-1}) & \\
+ y^2 & (& c_{20} + & c_{21}x + & c_{22}x^2 + \ldots + & c_{2\,n-1}x^{n-1}) & \\
+ \ldots & & & & & & \\
+ y^{n-1} & (& c_{n-1,0} + & c_{n-1,1}x + & c_{n-1,2}x^2 + \ldots + & c_{n-1,n-1}x^{n-1}). &
\end{array}$$

Soll diese Function nun unabhängig von y verschwinden, so müssen die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von y sämmtlich Null sein. Dies gibt n Gleichungen, aus denen wir die Grössen $1, x, x^2 \ldots . x^{n-1}$ eliminiren können, um dann die Resultante in Gestalt einer Determinante zu bekommen, nämlich:

$$R = \begin{vmatrix}
c_{00} & c_{01} & c_{02} & \ldots & c_{0\,n-1} \\
c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1\,n-1} \\
c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2\,n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1}
\end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hülfe der eingeschobenen Form F haben wir in diesem Falle die Resultante auf eine $n$gliedrige Determinante reducirt, während sie nach der Sylvester'schen Methode $2n$ Reihen enthalten würde. —

Auf die Elimination von x aus zwei Gleichungen von gleich hohem Grade lässt sich auch immer die Bildung der *Discriminante* zurückführen. Soll nämlich eine Form n^{ter} Ordnung $f(x_1, x_2)$, wenn man sie wie in (13) in ihre linearen Factoren auflöst, das Quadrat eines derselben enthalten, so kommt dieser Factor in den Functionen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ noch linear vor, wenn man für x_1, x_2 die Coordinaten des betreffenden doppelt zählenden Punktes einsetzt; und man hat daher für diesen Punkt gleichzeitig die beiden Gleichungen $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Aus ihnen sind x_1, x_2 zu eliminiren. Die Gleichung $f = 0$ brauchen wir dabei nicht mehr zu berücksichtigen, denn sie ist wegen der Relation:

$$n f = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2$$

eine Folge der Gleichungen (17).

Die Discriminante einer Form ist also die Resultante der beiden ersten Differentialquotienten der Form und daher vom Grade $2(n-1)$ *in den Coëfficienten derselben.*

Als Function der Wurzeln von $f = 0$ können wir die Discriminante, ähnlich wie die Resultante, leicht darstellen. Sie muss nämlich immer und nur dann verschwinden, wenn zwei Wurzeln $\frac{p_1^{(i)}}{p_2^{(i)}}$ und $\frac{p_1^{(k)}}{p_2^{(k)}}$ von $f = 0$ einander gleich werden. Eine Function der Art ist aber jedenfalls das Product aller Factoren

$$p_1^{(i)} p_2^{(k)} - p_2^{(i)} p_1^{(k)} = (p^{(i)} p^{(k)}),$$

welche man aus den n Wurzeln von f bilden kann, d. h. der Ausdruck:

$$\begin{aligned} P = (p^{(1)}p^{(2)}) \,.\, (p^{(1)}p^{(3)}) \,.\, (p^{(1)}p^{(4)}) \,\ldots\, (p^{(1)} & \quad p^{(n)}) \\ .\, (p^{(2)}p^{(3)}) \,.\, (p^{(2)}p^{(4)}) \,\ldots\, (p^{(2)} & \quad p^{(n)}) \\ .\, (p^{(3)}p^{(4)}) \,\ldots\, (p^{(3)} & \quad p^{(n)}) \\ \ldots\ldots & \\ .\, (p^{(n-1)} & p^{(n)}) \,. \end{aligned}$$

Das „Differenzenproduct“ P ändert aber sein Zeichen, wenn man irgend zwei der Wurzeln mit einander vertauscht, was bei einer rationalen Function der Coëfficienten von f, wie es die Discriminante ist, nicht eintreten darf, weil diese Coëfficienten dadurch nicht geändert werden. Da sich nun eine *symmetrische* Function der Wurzeln immer als *rationale* Function der Coëfficienten darstellen lässt, so *ist die Discriminante durch das Quadrat des Differenzenproductes der Wurzeln von* $f = 0$ *gegeben,* d. h. durch das Quadrat von P.

Um ein Beispiel für die Bildung der Discriminante als Resultante der Formen $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ zu geben, führen wir dieselbe noch für eine cubische Form aus. Ist also:

$$f = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_2 + 3 c x_1 x_2^2 + d x_2^3,$$

so haben wir die Resultante zu bilden aus:

$$\tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x_1} = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2,$$

$$\tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x_2} = b x_1^2 + 2 c x_1 x_2 + d x_2^2.$$

und daher ist die Discriminante von f, wenn wir das Sylvester'sche Eliminationsverfahren anwenden

$$= \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Diese Betrachtungen haben uns allerdings gezeigt, wie es möglich ist, die Resultanten und Discriminanten allgemein aufzustellen; aber dieselben erscheinen in einer Form, welche uns nicht ohne weitläufige Rechnungen ihren invarianten Charakter erkennen lässt, obgleich letzterer nach ihrer Bedeutung vorhanden sein muss. Man kann jedoch die fraglichen Bildungen auch in solcher Form herstellen, dass ihre Invarianteneigenschaft, auf die es uns hier wesentlich ankommt, sofort in's Auge fällt; und zwar geschieht dies mit Hülfe der im Folgenden zu entwickelnden Methoden. Dieselben lassen nämlich überhaupt jede Invariante und Covariante so darstellen, dass sie als solche ohne weitere Rechnung sofort erkannt wird.

II. Die symbolische Darstellung der binären Formen.

Die für die weitere Entwicklung der Invariantentheorie fundamentale Betrachtungsweise, welcher wir uns jetzt zuwenden, stützt sich im Wesentlichen auf den folgenden Satz:

Ist Π eine Function der Coëfficienten $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ einer allgemeinen Form n^{ter} Ordnung $f(x_1, x_2)$, welche die Invarianteneigenschaft besitzt, so hat die Form:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} b_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} b_n$$

ebenfalls die Invarianteneigenschaft, wenn die b die entsprechenden Coëfficienten einer anderen Form n^{ter} Ordnung φ sind.

Legen wir nämlich statt f die Form $f + \varkappa\varphi$ zu Grunde, so muss Π eine Invariante dieser Form sein, sobald man darin die a durch die Coëfficienten $a + \varkappa b$ ersetzt, da die Form $f + \varkappa\varphi$ von ebenso allgemeiner Natur ist, als f; und zwar muss dies unabhängig von dem Werthe von $\varkappa$ stattfinden. Es ist also:

$$\Pi(a_0' + \varkappa b_0', \; a_1' + \varkappa b_1', \ldots a_n' + \varkappa b_n') = r^\lambda \Pi(a_0 + \varkappa b_0, \; a_1 + \varkappa b_1, \ldots a_n + \varkappa b_n),$$

wenn die gestrichenen Buchstaben die Coëfficienten von Formen sind, welche aus f und φ durch eine lineare Transformation mit der Determinante r hervorgehen. Diese Gleichung soll unabhängig von $\varkappa$ bestehen, und folglich müssen, wenn man nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten dieselben sein. Insbesondere hat man also für die erste Potenz von $\varkappa$:

$$(1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_0'} b_0' + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1'} b_1' + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n'} b_n' = r^\lambda \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} b_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} b_n \right\},$$

und damit ist unser Satz bewiesen. Man erkennt auch leicht, dass derselbe ebenso für eine simultane Invariante eines Systems von Formen gilt: Fügt man diesem Systeme eine weitere Form φ hinzu, so erhält man eine simultane Invariante des so erweiterten Systems, indem man eine simultane Invariante des ursprünglich gegebenen Systems in der bezeichneten Weise nach den Coëfficienten einer der gegebenen Formen, welche mit φ von gleicher Ordnung ist, differentiirt, bez. mit den Coëfficienten von φ multiplicirt und addirt. — Setzt man dann in (1) $b_i = a_i$, so entsteht nach dem Euler'schen Satze von den homogenen Functionen wieder bis auf einen Zahlenfactor die ursprüngliche Invariante Π.

Der Grad von Π in den Coëfficienten von f wird durch Anwendung dieses Differentiationsprocesses jedesmal um eine Einheit verringert. Wir können daher, indem wir nach einander die Coëfficienten verschiedener neuer Formen einführen, es erreichen, dass aus Π eine in den Coëfficienten aller dieser Formen und in denen von f lineare Invariante entsteht. *So wird eine Invariante ν^{ten} Grades in den Coëfficienten einer gegebenen Form n^{ter} Ordnung unzweideutig vorgestellt durch eine Invariante, welche die Coëfficienten von ν Formen n^{ter} Ordnung je zum ersten Grade enthält, und bis auf einen Zahlenfactor in die gegebene Invariante übergeht, wenn man die ν Formen alle der ursprünglichen gleich setzt.*

Wir können in dieser Reduction aber noch weiter gehen: wir werden zeigen, dass eine jede Invariante formal so darstellbar ist, als wäre sie eine simultane Invariante von lauter *linearen* Formen; und darauf beruht dann die sogenannte symbolische Darstellung der binären Formen. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst die Systeme von solchen linearen Formen näher in's Auge fassen. Es sei eine Anzahl linearer Formen gegeben, bez. mit den Coëfficienten a_1, a_2; b_1, b_2; $c_1, c_2 \ldots$; wir stellen uns die Aufgabe, den formalen Typus einer simultanen Invariante

$$\Pi\,(a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2;\ \ldots)$$

dieses Systems ganz allgemein anzugeben.*) Es kommt im Wesentlichen darauf an, den Ausdruck Π als Aggregat anderer Ausdrücke darzustellen, die zum Theil aus weniger linearen Formen gebildet, zum Theil auch von niedererem Gesammtgrade als Π sind, wobei unter Gesammtgrad die Summe der Grade in den Coëfficienten der einzelnen Formen verstanden ist.

*) Ausführlicheres hierüber vgl. bei Clebsch: Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 59; und: Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 24 ff.

Wir bezeichnen durch Π' das, was aus Π entsteht, wenn man darin $a_i = b_i$ setzt, also:

$$\Pi' = \Pi(a_1, a_2; a_1, a_2; c_1, c_2; \ldots);$$

und bilden die folgende Reihe von Functionen, die nach unserem letzten Satze sämmtlich simultane Invarianten sind:

$$\Pi_1' = \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2} b_2$$

$$\Pi_2' = \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_2} b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Pi_l' = \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_2} b_2 .$$

Es ist dabei unter l der Grad von Π in den Coëfficienten b_1, b_2 verstanden; alsdann ist durch diesen successiven Process aus Π' wieder rückwärts eine Invariante Π_l' gebildet, welche die a und b zu demselben Grade enthält, wie Π, nur in anderer Weise, denn Π_l' ist abgeleitet aus einer Invariante Π' einer um Eins geringeren Anzahl von linearen Formen. Ist ferner k der Grad von Π in den Coëfficienten a_1, a_2, so ist Π' vom Grade $k+l$ in den a, Π_1' dagegen vom Grade $k+l-1$, und allgemein Π_r' vom Grade $k+l-r$ in den a. Wir haben somit nach dem Euler'schen Satze über homogene Functionen:

$$(\Pi_1')_{b=a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2} a_2 = (k+l)\,\Pi'$$

$$(\Pi_2')_{b=a} = \left(\frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_2} a_2\right)_{b=a} = (k+l-1)(k+l)\,\Pi'$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(\Pi_l')_{b=a} = \left(\frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_2} a_2\right)_{b=a} = \ldots = (k+1)(k+2)\ldots(k+l).\Pi'.$$

So entsteht also Π' einmal (bis auf einen Zahlenfactor) aus Π_l' für $a_i = b_i$, einmal aus Π für $a_i = b_i$. Wir haben daher die Relationen:

$$\left\{\Pi_l' - (k+1)(k+2)\ldots(k+l)\,\Pi\right\}_{a_i = b_i} = 0.$$

Wenn aber die links stehende Differenz für $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ immer verschwinden soll, so muss sie durch den Factor

$$(ab) = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

theilbar sein; und wir können setzen:

$$\Pi - m\,\Pi_l' = (ab) \,.\, M,$$

wo M eine neue Function von invariantem Charakter ist, und m den

reciproken Werth des Zahlenfactors $(k+1)(k+2)\ldots(k+l)$ bedeutet. Wir haben somit Π zunächst zerlegt in eine Invariante Π_l', welche aus Π' durch unseren invarianten Process hervorgeht, wo Π' eine Reihe von Coëfficienten weniger, als Π enthält, und in eine andere M von niedererem Gesammtgrade, multiplicirt in die Determinante (ab).

Es ist nun klar, wie man diesen Zerlegungsprocess fortsetzen kann, indem man Π_l' und M wieder derselben Operation unterwirft, u. s. f. bis man schliesslich zu lauter Producten aus Invarianten vom Gesammtgrade 2 gelangt, bei denen nur je zwei lineare Formen benutzt sind (aus einer einzigen Form der Art ist ja überall keine Invariante zu bilden). Zwei solche Formen, etwa

$$a_1 x_1 + a_2 x_2$$

und

$$b_1 x_1 + b_2 x_2$$

haben aber nur *eine* Invariante, die wir schon oben betrachteten, (p. 177) nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (ab),$$

denn zwei Punkte können offenbar keine andere besondere Lagenbeziehung zu einander haben, als die, dass sie zusammenfallen.*) — Die hier durchgeführte Ueberlegung begründet nun den folgenden fundamentalen Satz:

Jede simultane Invariante von linearen Formen ist ein Aggregat aus Producten der aus je zweien der Formen gebildeten Invarianten: (ab), (ac), (bc), u. s. f.

Für den allgemeinen Typus der simultanen *Covarianten* eines Systems von linearen Formen brauchen wir nunmehr keine besondere Betrachtung mehr anzustellen. Eine Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

gleich Null gesetzt, stellt nämlich einen Punkt dar mit den Coordinaten $y_1 = -a_2$, $y_2 = a_1$ (vgl. p. 173). Wir erhalten daher aus jeder Invariante linearer Formen eine Covariante, wenn wir darin eine Reihe von Coëfficienten mittelst der Gleichungen

$$a_1 = x_2 \qquad a_2 = -x_1 \tag{2}$$

durch Veränderliche ersetzen. In der That erkennt man leicht, dass sich die Coëfficienten in derselben Weise linear transformiren, wie die Variabeln, denn durch die Substitution

*) Ein algebraischer Beweis hierfür findet sich unten, wo bei den quadratischen Formen gezeigt ist, dass eine solche Form nur eine Invariante hat, welche durch ihr Verschwinden aussagt, dass die beiden repräsentirenden Punkte zusammenfallen.

$$\varrho x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 , \quad \varrho x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

wird:

$$\varrho (a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1' y_1 + a_2' y_2 ,$$

wenn man setzt:

$$a_1' = \alpha a_1 + \gamma a_2 , \quad a_2' = \beta a_1 + \delta a_2 .$$

Man hat also in den Substitutionsgleichungen der Variabeln nur die Coëfficienten zu transponiren, um diejenigen der Coëfficienten linearer Formen zu erhalten.

Durch die Substitution (2) geht aber jeder Determinantenfactor (ab) über in einen linearen Factor $b_1 x_1 + b_2 x_2$; und da umgekehrt auch aus jeder simultanen Covariante durch die Substitution (2) eine Invariante, also eine Bildung aus Determinanten (ab), (ac), u. s. f. entsteht, so folgt:

Jede simultane Covariante von einer Reihe linearer Formen ist ein Aggregat von Producten, deren Factoren einen der folgenden Typen haben:

1) (ab), *Invariante aus je zweien der linearen Formen*
2) $a_1 x_1 + a_2 x_2$, *eine der linearen Formen selbst.*

Wendet man die Substitution (2) gleichzeitig auf mehrere Reihen von Coëfficienten an, indem man auch mehrere Reihen von Variabeln einführt, so sieht man, dass ausser den genannten Factoren nur noch solche vom Typus (xy) vorkommen: sogenannte *identische Covarianten.* Man könnte ferner überhaupt bei der Untersuchung Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen $(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; \ldots)$ zu Grunde legen. Es lässt sich jedoch zeigen, dass man dabei nicht zu neuen Bildungen gelangt, dass es vielmehr hinreichend allgemein ist, bei den Grundformen *eine* solche Reihe allein anzunehmen; und so werden wir es im Folgenden immer thun. —

Indem wir nun eine *symbolische Bezeichnung für die binären Formen* einführen, gelingt es mittelst der hier für lineare Formen gegebenen Sätze auch den Typus einer beliebigen invarianten Bildung allgemein anzugeben. Wir erörtern dies zunächst an einem einfachen Beispiele, und zwar wollen wir die Discriminante der quadratischen Form:

$$f = a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

als Product zweier Determinantenfactoren (ab) darstellen. Zu dem Zwecke fassen wir f *symbolisch* als Quadrat einer linearen Form auf (vgl. auch p. 72) und setzen:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 .$$

Wir können dann, wenn wir wollen, statt der Symbole a_1, a_2 stets wieder die wirklichen Coëfficienten einführen mittelst der Gleichungen:

$$a_1^2 = a_{11}, \quad a_1 a_2 = a_{12}, \quad a_2^2 = a_{22};$$

doch dies geht nur, wenn wir es mit einer in den a_{ik} linearen Bildung zu thun haben. In der That könnte man z. B. für $a_1^2 a_2^2$ ebensowohl das Product $a_{11} a_{22}$, als das Quadrat a_{12}^2 setzen; es würden also Mehrdeutigkeiten möglich sein. Um das zu vermeiden, führen wir in der unsere Discriminante darstellenden Determinante:

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

in der ersten Verticalreihe die angegebene Substitution aus, schreiben aber in der zweiten Reihe neue Symbole b statt der a, welche mit diesen gleichwerthig sein sollen:

$$b_1^2 = a_{11}, \quad b_1 b_2 = a_{12}, \quad b_2^2 = a_{22}.$$

Dann wird:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 a_1 & b_1 b_2 \\ a_2 a_1 & b_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \, (ab).$$

Da es aber gleichgültig sein muss, in welcher Verticalreihe wir die a, in welcher die b einführen, so ist auch

$$I = b_1 a_2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - b_1 a_2 \, (ab),$$

und wenn wir die Summe beider Ausdrücke bilden:

$$I = \tfrac{1}{2} (a_1 b_2 - b_1 a_2)(ab) = \tfrac{1}{2} (ab)^2,$$

womit die verlangte Darstellung geleistet ist. Statt der Symbole a, b können wir nun umgekehrt unzweideutig wieder die Coëfficienten a_{ik} einführen; denn man findet unmittelbar

$$2\, I = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2\, a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 a_2^2 = 2\,(a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

— Im Allgemeinen gestaltet sich die Einführung der verschiedenen Symbole jedoch nicht so einfach; vielmehr ist dazu die wiederholte Anwendung des bekannten Differentiationsprocesses nöthig. Die betreffenden Erörterungen stellen sich folgendermassen.

Wir haben gesehen (p. 184), dass man eine beliebige Invariante in eine solche überführen kann, welche die Coëfficienten jeder Form einer Reihe von Formen gleicher Ordnung linear enthält, wobei wir uns nachher diese Formen als mit der Grundform identisch angenommen dachten. Statt der Coëfficienten jeder dieser Formen können wir nun weiter die einer linearen Form einführen, indem wir eine jede der Hülfsformen durch die Potenz einer linearen Form ersetzen. Wir schreiben also statt der Coëfficienten a der gegebenen Grundform die entsprechenden der Form

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$$

und ebenso statt der Coëfficienten b einer der anderen Formen n^{ter} Ordnung die der Form

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n,$$

u. s. w. *Alsdann ist unsere invariante Bildung unzweideutig durch die Coëfficienten dieser linearen Formen:* $a_1 x_1 + a_2 x_2$, $b_1 x_1 + b_2 x_2$, *u. s. f. ausgedrückt;* denn man kann von dieser „*symbolischen Darstellung*“ derselben*) jederzeit zu der wirklichen Darstellung zurückkehren. Sei nämlich die Grundform f gegeben durch:

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

so haben wir nur die folgenden Substitutionen zu machen:

$$\begin{array}{llllll}
a_0 & = a_1^n & = b_1^n & = c_1^n & = \ldots \\
a_1 & = a_1^{n-1} a_2 & = b_1^{n-1} b_2 & = c_1^{n-1} c_2 & = \ldots \\
a_2 & = a_1^{n-2} a_2^2 & = b_1^{n-2} b_2^2 & = c_1^{n-2} c_2^2 & = \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_n & = a_2^n & = b_2^n & = c_2^n & = \ldots
\end{array}$$

Eine nothwendige Bedingung für die Möglichkeit dieser Substitutionen — und darin liegt der Grund für die Einführung obiger Hülfsformen — ist immer die, dass die invariante Bildung in der That linear in den Coëfficienten einer jeden der Hülfsformen angenommen wird. Andernfalls würde, wie schon obiges Beispiel lehrte, der Rückgang zur ursprünglichen Function nicht mehr eindeutig möglich sein; denn käme z. B. ein Glied mit dem symbolischen Coëfficienten

$$b_1^{2n-i} \cdot b_2^i$$

vor, so könnte man dies für $i = k + l$ auf sehr verschiedene Weise in zwei Factoren von der Form:

$$b_1^{n-k} b_2^k, \quad b_1^{n-l} b_2^l,$$

zerlegen und die zugehörigen wirklichen Coëfficienten a_k, a_l würden also unbestimmt werden. — *Einige Beispiele* werden diese Methode der symbolischen Rechnung am besten erläutern. Wir beginnen wieder mit der Invariante einer quadratischen Form

*) Die symbolische Darstellung in der hier angewandten Form wurde zuerst von Aronhold mit Erfolg gebraucht (Borchardt's Journal, Bd. 39, 55 und 62) und von Clebsch zur Grundlage der ganzen Invariantentheorie gemacht (vgl. ib. Bd. 59). Schon vorher wurde von Cayley eine Symbolik benutzt (vgl. besonders die Memoirs upon Quantics und Salmon's Introductury lessons etc.), welche sich von der unsrigen eigentlich nur durch die Bezeichnungsweise unterscheidet und in dieser sich mehr an die auch sonst in der Theorie der Differentialgleichungen (von Cauchy, Boole u. A.) oder in der Darstellung der Taylor'schen Reihe angewandte Symbolik anlehnt.

$$f = a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

d. h. mit der Function

$$I = a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,.$$

Sind nun b_{11}, b_{12}, b_{22} die Coëfficienten einer zweiten, nachher mit f identisch zu setzenden Form, so haben wir bei Anwendung der allgemeinen Methode:

$$I' = \frac{\partial I}{\partial a_{11}}b_{11} + \frac{\partial I}{\partial a_{12}}b_{12} + \frac{\partial I}{\partial a_{22}}b_{22} = a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - 2\,a_{12}b_{12}\,.$$

Hierin sind noch die a_{ik} durch die Coëfficienten der Form:

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2,$$

die b_{ik} durch die der Form

$$(b_1x_1 + b_2x_2)^2$$

zu ersetzen, um unsere Invariante I symbolisch in der Gestalt

$$I' = a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 - 2\,b_1b_2a_1a_2$$

zu erhalten. Da für $b = a$ nun $I' = 2\,I$ wird, und da wir hier in der That die Symbole b, ebenso wie die a, durch wirkliche Grössen a_{ik} ersetzt denken müssen, so haben wir:

$$2\,I = a_1^2b_2^2 - 2\,a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2,$$

oder, wie schon früher gefunden:

$$I = \tfrac{1}{2}\,(ab)^2 = \tfrac{1}{2}\,(a_1b_2 - b_1a_2)^2$$

als symbolische Darstellung unserer Invariante.

Ein anderes Beispiel möge uns die Functionaldeterminante zweier binären Formen liefern, welche wir ebenfalls schon als Covariante erkannten (vgl. p. 175). Es seien

$$\begin{aligned} f &= (a_1x_1 + a_2x_2)^m = (b_1x_1 + b_2x_2)^m \\ \varphi &= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^n = (\beta_1x_1 + \beta_2x_2)^n \end{aligned}$$

die beiden Formen in ihrer symbolischen Gestalt, die wir noch kürzer durch Einführung der Bezeichnung:

$$\begin{aligned} a_x &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ \alpha_x &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \end{aligned}$$

in der Form schreiben können:

$$\begin{aligned} f &= a_x^m = b_x^m \\ \varphi &= \alpha_x^n = \beta_x^n\,. \end{aligned}$$

Die Functionaldeterminante ist dann gegeben durch:

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix}\,.$$

Auf unsere symbolischen Potenzen f, φ können wir nun die gewöhnlichen Regeln der Differentiation anwenden; denn der Grad der Form in den Coëfficienten wird durch diese Operation nicht beeinflusst, und es kann also dadurch keine Zweideutigkeit entstehen: Wir erhalten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = m a_x^{m-1} a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = m a_x^{m-1} a_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = n \alpha_x^{n-1} \alpha_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = n \alpha_x^{n-1} \alpha_2,$$

und die Functionaldeterminante wird symbolisch dargestellt durch:

$$F = \begin{vmatrix} m a_x^{m-1} a_1 & m a_x^{m-1} a_2 \\ n \alpha_x^{n-1} \alpha_1 & n \alpha_x^{n-1} \alpha_2 \end{vmatrix} = m n a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} (a \alpha).$$

In ganz analoger Weise stellt sich die (Hesse'sche) Determinante Δ der zweiten Differentialquotienten einer Form $f = a_x^n = b_x^n$ dar. Wir setzen in ihr:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = n(n-1)\, a_x^{n-2} a_1^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = n(n-1)\, a_x^{n-2} a_1 a_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = n(n-1)\, b_x^{n-2} b_1 b_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = n(n-1)\, b_x^{n-2} b_2^2,$$

und erhalten:

$$\Delta = n^2 (n-1)^2 a_1 b_2 (ab) a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$

also auch wegen der gleichen Bedeutung der a und b:

$$\begin{aligned} \Delta &= n^2 (n-1)^2 a_2 b_1 (ab)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} \\ &= \tfrac{1}{2} n^2 (n-1)^2 (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}. \end{aligned}$$

Es erinnert die sogenannte symbolische Bezeichnung an eine abkürzende Schreibweise, deren wir uns schon in der Theorie der Kegelschnitte bedienten (vgl. p. 72); aber, während sie dort eben nur als erleichterndes Hülfsmittel verwerthet wurde, bietet sie uns jetzt die principielle Grundlage für die ganze Theorie; und zwar gewinnt sie diese hohe Bedeutung durch den folgenden Satz, der sich aus unseren bisherigen Ueberlegungen unmittelbar ergibt:

Jede Invariante einer binären algebraischen Form stellt sich symbolisch als das Aggregat von Producten symbolischer Determinanten vom Typus (ab) dar; jede Covariante als das Aggregat von Producten symbolischer Determinanten (ab) mit linearen symbolischen Factoren vom Typus c_x.

Der zu diesem Satze führende Gedankengang, welcher durch die Beispiele wiederholt unterbrochen war, ist kurz folgender. Wir haben gezeigt, dass jede solche Invariante oder Covariante als simultane Bildung mit Invarianteneigenschaft eines Systems von linearen Formen angesehen werden kann, deren Potenzen als symbolische Ausdrücke

für die Grundform dienen; ferner, dass jede solche Invariantenbildung linearer Formen ein Aggregat von Producten aus Factoren vom Typus (ab), resp. c_x sein muss; und diese beiden Bemerkungen haben wir nur zusammenzufassen. — Die principielle Wichtigkeit des Satzes ist evident; denn, während wir früher erst durch Rechnung die Invarianteneigenschaft nachweisen mussten, können wir letztere nunmehr an der symbolischen Form ohne Weiteres direct aus der Natur ihrer Bildung abnehmen: jeder einzelne Factor hat eben für sich invarianten Charakter. — Dass der Satz auch umkehrbar ist, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden: *Man kann jede Invariante oder Covariante linearer Formen, welche die Coëfficienten dieser Formen in geeigneten Dimensionen enthält, als symbolische Darstellung einer Invariante oder Covariante höherer Formen auffassen*; die Dimensionen müssen dabei nur bez. dieselben sein, wie die Ordnungen der entsprechenden höheren Formen. In der That ist es auch evident, dass die Symbole einer Form sich durch dieselben Gleichungen linear transformiren, wie die wirklichen Coëfficienten linearer Formen (vgl. p. 187). —

Die Beispiele, welche wir soeben für symbolische Bildungen angeführt haben, bestätigen obigen Satz; ihre Invarianteneigenschaft tritt nunmehr unmittelbar hervor. In derselben Weise müssen sich aber auch die Resultanten und Discriminanten durch symbolische Determinanten-Producte darstellen lassen. Es führt dazu eine Methode, mittelst deren es überhaupt gelingt, eine jede symmetrische Function der Coordinaten der Verschwindungspunkte einer Form (d. i. der Wurzeln einer Gleichung) in eine rationale Function der Coëfficienten der Form überzuführen, und zwar in die symbolische Darstellung dieser rationalen Function.*) Wir werden jedoch von dieser allgemeinen Methode weiterhin keinen Gebrauch mehr machen, und beschränken uns daher darauf, später bei Besprechung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Formen die Discriminantenbildungen in ihrer symbolischen Form zu geben. Liegt es doch überhaupt im Charakter solcher allgemeinen Methoden, dass sie verhältnissmässig umständlich werden, wenn specielle Fälle vorliegen, wo dann andere Behandlungsweisen schneller zum Ziele führen. —

Bei längeren symbolischen Rechnungen, wie sie in den folgenden Entwicklungen nicht immer zu vermeiden sind, kann man durch geschickte Anwendung gewisser *identischer Gleichungen* sehr oft eine wesentliche Vereinfachung erzielen. Wir stellen dieselben daher hier kurz zusammen. Durch Elimination von 1, x_1, x_2 aus den drei identischen Gleichungen:

---

*) Vgl. § 20 in dem Werke von Clebsch.

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$
$$b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2$$
$$c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

folgt zunächst die ebenfalls identische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach den Gliedern der ersten Verticalreihe entwickelt:

(I) $$(bc)\, a_x + (ca)\, b_x + (ab)\, c_x = 0.$$

Schafft man ein Glied auf die andere Seite und quadrirt, so folgt weiter die Identität:

(II) $$(ab)(ac)\, b_x c_x = \tfrac{1}{2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2\right\}.$$

Ersetzen wir in (I) x_1, x_2 bez. durch d_2 und $-d_1$, so erhalten wir:

(III) $$(bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0.$$

Setzen wir dagegen in (I) $c_2 = y_1$, $c_1 = -y_2$, so folgt die wichtige Gleichung:

(IV) $$a_x b_y - b_x a_y = (ab)(xy).$$

Ein anderes häufig anwendbares Mittel zur Umformung symbolischer Ausdrücke und zur Herstellung ihrer einfachsten Form besteht in der Vertauschung zweier Symbole, wodurch bei der gleichen Bedeutung beider der wahre Werth des betreffenden Ausdrucks ungeändert bleiben muss. Ein Beispiel hierfür bietet uns die Function $F(x, y)$, welche wir früher bei Bildung der Resultante zweier Formen f und φ gleicher Ordnung benutzten (vgl. p. 181). Es sei symbolisch:

$$f = a_x^n,$$
$$\varphi = \alpha_x^n;$$

dann ist $F(x, y)$ gegeben durch:

$$F = \frac{f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\, f(y)}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{a_x^n \alpha_y^n - \alpha_x^n a_y^n}{(xy)}$$

$$= \frac{a_x \alpha_y - \alpha_x a_y}{(xy)}\left\{a_x^{n-1}\alpha_y^{n-1} + a_x^{n-2}\alpha_y^{n-2}\alpha_x a_y + a_x^{n-3}\alpha_y^{n-3}\alpha_x^2 a_y^2 + \dots\right\},$$

oder wegen der Identität (IV):

$$F(x, y) = (a\alpha)\left\{a_x^{n-1}\alpha_y^{n-1} + a_x^{n-2}\alpha_y^{n-2}\alpha_x a_y + \dots\right\},$$

Nehmen wir insbesondere an, dass f und φ die ersten Differentialquotienten einer Form a_x^n seien, also:

$$f = a_x^{n-1} a_1, \quad \varphi = a_x^{n-1} a_2,$$

so wird, da wir in φ neue Symbole b einführen müssen:

$$F(x, y) = \quad (ab)\, a_1 b_2 \left\{a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots\right\},$$

oder *wenn wir a und b vertauschen:*

$$F(x, y) = -(ab)\, a_2 b_1 \left\{a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots\right\},$$

und wenn wir beide Ausdrücke addiren, so kommt:

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}\, (ab)^2 \left\{a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots\right\}.$$

Setzt man hierin insbesondere $n = 2$, so erhält man $\frac{1}{2}\,(ab)^2$, die Discriminante der quadratischen Form a_x^2, wie es sein muss.

Aus dieser Verfahrungsweise folgt noch die oft nützliche Bemerkung: *Wenn ein symbolischer Ausdruck durch Vertauschung zweier gleichwerthiger Symbole sein Zeichen ändert, so verschwindet er identisch.* Es ergibt sich z. B. mit Hülfe dieses Satzes das identische Verschwinden eines jeden Ausdrucks:

$$(ab)^k a_x^{n-k} b_x^{n-k},$$

in welchem k eine ungerade Zahl ist, und a, b Symbole derselben Form n^{ter} Ordnung $f = a_x^n = b_x^n$ bedeuten. Für $n = 2$, $k = 1$ ist diese Behauptung auch leicht direct zu verificiren, denn wir haben:

$$\begin{aligned}(ab)\, a^x b_x &= (a_1 b_2 - b_1 a_2) \,.\, \Sigma\, (a_i b_k + b_i a_k)\, x_i x_k \\ &= \Sigma\, (a_1 a_i b_2 b_k - a_2 a_i b_1 b_k - a_2 a_k b_1 b_i + a_1 a_k b_2 b_i)\, x_i x_k \\ &= \Sigma\, (a_{1i} a_{2k} + a_{2i} a_{1k} - a_{2i} a_{1k} - a_{1i} a_{2k})\, x_i x_k.\end{aligned}$$

Weitere Anwendungen der hier bezeichneten Hülfsmittel werden sich im Folgenden noch in grosser Zahl darbieten; und die sorgfältige Durchrechnung aller dieser Beispiele dürfte als bestes Mittel zur Einführung in die symbolischen Operationsmethoden zu empfehlen sein. —

Wir erwähnen hier nur noch eines Resultats, welches die symbolische Darstellung sofort ergibt, und das uns gelegentlich nützlich sein wird. Jede invariante Bildung Π einer Form n^{ter} Ordnung f ändert sich bei linearer Transformation um eine Potenz r^λ, wo r die Substitutionsdeterminante bedeutet. Die Transformationsformeln der Symbole (p. 187), lehren aber, dass dabei jeder lineare Factor a_x von Π ungeändert bleibt, während jede symbolische Determinante (ab) den Factor r erhält. Um die Zahl λ zu bestimmen, haben wir also nur nach der Zahl solcher Determinantenfactoren zu fragen. Es sei nun Π vom p^{ten} Grade in den Coëfficienten und von der m^{ten} Ordnung in den Variabeln*), so enthält Π — wie aus der Einführung der Symbole

---

*) Wir werden in der Folge das Wort „*Grad*" immer für die Dimension anwenden, zu welcher die Coëfficienten der Grundform, das Wort „*Ordnung*" für die Dimension, zu welcher die Variabeln vorkommen.

sofort folgt — p verschiedene Symbole und jedes zur n^{ten} Dimension, so dass im Ganzen $p \cdot n$ Symbolreihen vorkommen. Diese vertheilen sich zum Theil paarweise auf die λ Determinantenfactoren, zum Theil einzeln auf die m symbolischen linearen Factoren von Π. Man hat also die Gleichung:

$$2\lambda + m = p \cdot n,$$

und den Satz: *Eine invariante Bildung einer binären Form n^{ter} Ordnung, vom Grade p und der Ordnung m erhält $\lambda = \frac{1}{2}(pn - m)$ symbolische Determinantenfactoren, ändert sich also um die λ^{te} Potenz der Substitutionsdeterminante bei einer linearen Transformation.*

III. Projectivische Punktreihen. Polarentheorie. Involutionen.

Eine lineare Transformation haben wir früher als analytischen Ausdruck für die Veränderung der Coordinatengrundpunkte erkannt. Man kann aber noch eine andere geometrische Deutung für dieselbe angeben; und diese ist für die Auffassung der Invariantentheorie von hervorragenderer Wichtigkeit. Wir werden durch dieselbe gleichzeitig wieder auf die Grundlagen der synthetischen Geometrie geführt, die wir schon früher eingehend behandelten.

Diese neue Interpretation der linearen Substitution kann gewissermassen als der früheren entgegengesetzt aufgefasst werden: Während wir dieselbe früher zur Darstellung desselben Punktes (bez. Strahles) mit Hülfe verschiedener Grundelemente benutzten, betrachten wir sie nunmehr als Beziehung zwischen zwei verschiedenen Punkten, die auf dieselben Grundelemente bezogen sind, als analytischen Ausdruck „*einer linearen Verwandtschaft*". Durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varrho\,\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \varrho\,\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

ordnen wir jedem Punkte der Geraden *einen* anderen Punkt derselben Geraden zu, und umgekehrt, wobei vorausgesetzt ist, dass die Determinante der Substitution (a_{12} nicht nothwendig $= a_{21}$):

$$r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

von Null verschieden ist; und zwar *ist diese Zuordnung dieselbe, welche überhaupt zwei projectivische Punktreihen mit einander verbindet.* Diese Reihen sind hier nur als vereinigt, d. h. auf demselben Träger gelegen anzusehen. Die projectivische Zuordnung ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass das Doppelverhältniss von je vier entsprechenden Punkten der Reihen denselben Werth hat; der letztere ist, wenn μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die Parameter der vier Punkte sind (vergl. p. 37)

$$= \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_4 - \mu_2)}{(\mu_3 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_4)} = \alpha.$$

Nach einer oben gemachten Bemerkung erhalten wir das Doppelverhältniss für vier Punkte x, y, z, t gebildet in deren Coordinaten, wenn wir setzen:

$$\mu_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \mu_2 = \frac{y_1}{y_2}, \quad \mu_3 = \frac{z_1}{z_2}, \quad \mu_4 = \frac{t_1}{t_2},$$

und es wird also (wie man auch leicht direct aus der Definition der binären Coordinaten ableitet):

$$(2) \qquad \alpha = \frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}.$$

Ebenso ist das Doppelverhältniss der entsprechenden Punkte ξ, η, ζ, τ

$$= \frac{(\xi\zeta)(\eta\tau)}{(\xi\tau)(\eta\zeta)};$$

und dass dieser Ausdruck gleich dem Werthe α ist, ergibt sich sofort, da jeder der Factoren (xz), (yt), (xt), (yz) beim Uebergange zu dem entsprechenden Factor $(\xi\zeta)$, $(\eta\tau)$, $(\xi\tau)$, $(\eta\zeta)$ sich, wie wir wissen, nur um die Substitutionsdeterminante r ändert, diese Determinante aber in dem Quotienten (2) sich forthebt. Es ist damit obige Behauptung bewiesen, und wir können in Folge dessen auch die geometrische Bedeutung der invarianten Gebilde folgendermassen aussprechen:

Invarianten und Covarianten gleich Null gesetzt, liefern solche Gleichungen, welche projectivische Beziehungen zwischen Elementen von Punktreihen, bez. Strahlbüscheln darstellen. Dabei sind unter „projectivischen Beziehungen" diejenigen verstanden, welche, wenn man ein mit dem ursprünglich benutzten Gebilde projectivisches construirt, für die entsprechenden Elemente dieses neuen Gebildes erhalten bleiben.

Der Begriff des Doppelverhältnisses, dem wir hier wieder begegnen, und den wir früher als fundamental für die neuere synthetische Geometrie erkannten, ist auch für die Invariantentheorie als solche von hervorragender Bedeutung. Er gibt nämlich zunächst ein erstes und einfachstes Beispiel einer *„absoluten Invariante"*, d. h. einer Function der Coëfficienten der Grundform, welche bei einer linearen Transformation *vollkommen* ungeändert bleibt. Solche Functionen kann man immer bilden, sobald die Grundform mehr als eine Invariante besitzt. Seien z. B. I und I_1 zwei Invarianten derselben, die bei einer linearen Substitution in I' und I_1' übergehen mögen, so haben wir:

$$I' = r^\lambda I$$

$$I_1' = r^\mu I_1,$$

und also ist der Quotient

$$\frac{I'^\mu}{I_1'^\lambda} = \frac{I^\mu}{I_1^\lambda}$$

eine absolute Invariante. Eine solche kann man weiter immer geradezu als Function von Doppelverhältnissen darstellen. Jede Invariante nämlich ist auch Invariante der linearen Factoren der Grundform und in Folge dessen ein Aggregat von Producten der Form

$$(xy)^\alpha (yz)^\beta (xz)^\gamma \ldots,$$

wo $x, y, z \ldots$ die Coordinaten der Verschwindungspunkte der Grundform sind, und wo die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so bestimmt sein müssen, dass die Function in den Coordinaten aller dieser Punkte symmetrisch wird. Dividirt man nun das Aggregat durch eines seiner Glieder, so erhält man unmittelbar eine absolute Invariante, deren Zusammensetzung aus Doppelverhältnissen evident ist. Erinnern wir uns ferner daran, dass jede Covariante als simultane Invariante linearer Formen und der Grundform aufgefasst werden kann (p. 186); so haben wir also, wenn die Function auch noch von Veränderlichen abhängig gedacht wird, den Satz:*)

Eine Invariante oder Covariante einer binären Form ist der Zähler einer ganzen rationalen Function von Doppelverhältnissen, welche aus den Verschwindungselementen der Grundform und im Falle der Covariante aus anderen (veränderlichen) Elementen zusammengesetzt sind.

Die Theorie der Doppelverhältnisse selbst haben wir bereits genauer behandelt, ebenso diejenige der projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel; auch erwähnten wir schon gelegentlich (p. 51), dass zwei vereinigt gelegene projectivische Punktreihen im Allgemeinen zwei Elemente entsprechend gemein haben. Dieselben ergeben sich hier analytisch, wenn man in (1) $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2$ setzt, indem man dann durch Elimination der x eine für ϱ quadratische Gleichung erhält:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die gefundenen Werthe von ϱ in (1) ein, so ergeben sich daraus die Coordinaten der Doppelelemente. Man kann dieselben auch direct aus der Gleichung:

$$(3) \qquad (a_{11} - a_{22})\, x_1 x_2 + a_{12} x_2^2 - a_{21} x_1^2 = 0,$$

welche man durch Elimination von ϱ findet, berechnen. Die constructive Bestimmung dieser Punkte wird, indem man das binäre Gebiet verlässt, mit Hülfe eines Kegelschnittes ermöglicht, wie ebenfalls schon früher ausgeführt wurde. —

Eine andere Darstellung projectivischer Punktreihen, an welche sich weitere interessante Betrachtungen knüpfen, ergibt sich in folgender Weise. Die Gleichung

*) Vgl. Weiteres hierüber im zweiten Abschnitte des Werkes von Clebsch.

(4) $$a_x + \lambda b_x = 0$$

stellt offenbar, wenn man λ als veränderlichen Parameter betrachtet, alle Punkte der Geraden dar, welche zur Repräsentation des binären Gebietes dient. Dabei ist λ gleich dem negativen Verhältnisse des Abstandes eines beweglichen Punktes von zwei festen Centren ($a_x = 0$, $b_x = 0$) multiplicirt mit einer constanten Zahl. Diese Punktreihe ist zu einer anderen

(5) $$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0$$

projectivisch, wenn zwei Punkte beider Reihen, für die λ denselben Werth hat, einander entsprechend gesetzt werden; denn das Doppelverhältniss der Punkte $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ ist dann für beide Reihen gleich $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, und aus den Gleichungen:

$$a_x + \lambda b_x = \frac{(\lambda - \lambda'')(a_x + \lambda' b_x) - (\lambda - \lambda')(a_x + \lambda'' b_x)}{\lambda' - \lambda''}$$

$$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = \frac{(\lambda - \lambda'')(\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi) - (\lambda - \lambda')(\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi)}{\lambda' - \lambda''}$$

folgt, dass die Beziehung beider Reihen zu einander nicht geändert wird, wenn man die Punktepaare, a_x, b_x; α_ξ, β_ξ durch zwei beliebige zusammengehörige Paare $a_x + \lambda' b_x$, $a_x + \lambda'' b_x$; $\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi$, $\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi$ ersetzt. An Stelle des reihenden Elementes λ tritt dann nur das andere:

(6) $$\mu = -\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}.$$

Man kann übrigens auch direct wieder aus (4) und (5) eine lineare Transformation herstellen, indem man das Verhältniss $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ aus der Gleichung

$$a_x \beta_\xi - b_x \alpha_\xi = 0 \text{*)}$$

berechnet.

Für die Doppelpunkte der beiden Reihen (d. i. für $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$) erhält man durch Elimination von λ die für $\frac{x_1}{x_2}$ quadratische Gleichung:

$$a_x \beta_x - b_x \alpha_x = 0,$$

welche an Stelle von (3) tritt, oder durch Elimination von x_1, x_2 die in λ quadratische Gleichung:

(7) $$0 = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{vmatrix} = (a\alpha) + \lambda\,[(a\beta) + (b\alpha)] + \lambda^2\,(b\beta).$$

---

*) Man kann überhaupt die lineare Verwandtschaft durch eine in den x und ξ bilineare Gleichung

$$a_{11} x_1 \xi_1 + a_{12} x_1 \xi_2 + a_{21} x_2 \xi_1 + a_{22} x_2 \xi_2 = 0$$

vermittelt annehmen; vgl. Clebsch, a. a. O. p. 66.

Es gibt also in der That im Allgemeinen zwei Doppelpunkte, wenn nicht etwa die Bedingung:

$$[(a\beta) + (b\alpha)]^2 = 4\,(a\alpha)\,(b\beta) \tag{8}$$

erfüllt ist, wo dann die beiden Doppelpunkte zusammenfallen. Es könnte endlich auch vorkommen, dass geradezu alle Coëfficienten von (7) verschwinden, wodurch die lineare Transformation eine sogenannte *identische* wird: jeder Punkt der Geraden entspricht dann sich selbst. Setzen wir voraus, dass diese Fälle nicht eintreten, so können wir die Doppelpunkte als Coordinatengrundpunkte einführen. Seien λ', λ'' die Wurzeln von (7), so müssen wir zu dem Zwecke setzen:

$$\begin{aligned} a_x + \lambda' b_x &= X_1 = p_x \\ a_x + \lambda'' b_x &= X_2 = q_x, \end{aligned} \tag{9}$$

und dadurch muss auch identisch sein:

$$\begin{aligned} \alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi &= c\,\Xi_1 = c\,p_\xi \\ \alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi &= c'\,\Xi_2 = c'\,q_\xi, \end{aligned} \tag{10}$$

wo c, c' Constante sind. Die Gleichungen der beiden Punktreihen sind dann nach (6) gegeben durch

$$X_1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''} X_2 = 0$$

$$\Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,\Xi_2 = 0,$$

oder für

$$\varrho = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}$$

durch:

$$\begin{aligned} X_1 - \varrho\, X_2 &= 0 \\ \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\varrho\,\Xi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Die hier auftretende Constante $\frac{c'}{c}$ ist für die Transformation charakteristisch; sie gibt nämlich unmittelbar *das Doppelverhältniss zweier entsprechender Punkte mit den beiden Doppelelementen;* und dies ist somit constant. Es bietet daher Interesse, die Constanten c', c durch die Coëfficienten der Transformation, d. h. in unserem Falle durch die Coëfficienten a, b, α, β auszudrücken. Für λ', λ'' haben wir aus (7) die Werthe:

$$\begin{aligned} 2\,(b\beta)\,\lambda' &= -\,[(a\beta) + (b\alpha)] + \sqrt{l} \\ 2\,(b\beta)\,\lambda'' &= -\,[(a\beta) + (b\alpha)] - \sqrt{l}, \end{aligned}$$

wo

$$l = [(a\beta) + (b\alpha)]^2 - 4\,(a\alpha)\,(b\beta)$$

gesetzt ist. Wegen der Identität (vgl. (I) p. 193):

$$(b\beta)\,a_x = (a\beta)\,b_x - (ab)\,\beta_x$$

gehen dann die Gleichungen (9) über in:

$$(12)\quad \begin{aligned} \left((a\beta) - (b\alpha) + \sqrt{l}\right) b_x - 2\,(ab)\,\beta_x &= 2\,(b\beta)\,p_x \\ \left((a\beta) - (b\alpha) - \sqrt{l}\right) b_x - 2\,(ab)\,\beta_x &= 2\,(b\beta)\,q_x; \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sollen auch für $x_i = \xi_i$ bestehen. Setzt man andererseits die Werthe von λ', λ'' in (10) ein und benutzt die Identität:

$$(b\beta)\,\alpha_\xi = (\alpha\beta)\,b_\xi - (\alpha b)\,\beta_\xi,$$

so kommt

$$(13)\quad \begin{aligned} 2\,(b\beta)\,(\alpha_\xi + \lambda'\,\beta_\xi) &= \left(k + \sqrt{l}\right)\beta_\xi + 2\,(\alpha\beta)\,b_\xi \\ 2\,(b\beta)\,(\alpha_\xi + \lambda''\beta_\xi) &= \left(k + \sqrt{l}\right)\beta_\xi + 2\,(\alpha\beta)\,b_\xi, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$k = (a\beta) - (b\alpha)$$

gesetzt ist. Mit Hülfe der Identität

$$(a\alpha)\,(b\beta) = (ab)\,(\alpha\beta) + (a\beta)\,(b\alpha)$$

kann man nun die Invariante l auch auf die Form

$$l = [(a\beta) - (b\alpha)]^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta) = k^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta)$$

bringen. Unter Berücksichtigung dieser Relation erhält man, wenn man in (12) die x mit den ξ vertauscht, daraus b_ξ, β_ξ berechnet und in (13) einsetzt, das Resultat:

$$\alpha_\xi + \lambda'\,\beta_\xi = \frac{k - \sqrt{l}}{(ab)}\,p_\xi = c\,p_\xi$$

$$\alpha_\xi + \lambda''\beta_\xi = \frac{k + \sqrt{l}}{(ab)}\,q_\xi = c'\,q_\xi.$$

Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Das Doppelverhältniss zwischen den Doppelpunkten und zwei entsprechenden Punkten der beiden projectivischen Reihen ist eine Constante; und zwar drückt sich dieselbe durch die Invarianten k, l aus in der Form:

$$\frac{c}{c'} = \frac{k - \sqrt{l}}{k + \sqrt{l}}.$$

Für besondere Werthe dieser Constanten ergeben sich auch besonders ausgezeichnete Beziehungen der beiden Punktreihen zu einander. Zu einer weiterhin noch öfter anzuwendenden Invariantenrelation gelangt man z. B. in folgender Weise. Jedem Punkte mit dem Parameter ϱ der ersten Reihe (13) entspricht in der zweiten

Reihe ein Punkt, welchem, insofern er der ersten angehört, der Parameterwerth $\varrho \cdot \frac{c}{c'}$ zukommt, d. h. welcher gegeben ist durch:

$$X_1 + \varrho \frac{c}{c'} X_2 = 0.$$

Diesem entspricht wieder ein dritter Punkt der zweiten Reihe, dessen Parameter, insofern er der ersten angehört, gleich $\varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^2$ ist, u. s. f. bis zu einem $(n+1)^{\text{ten}}$ Punkte mit dem Parameter $\varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^n$. Wir haben dann eine Reihe von Punkten:

$$\varrho, \quad \varrho \frac{c}{c'}, \quad \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \cdots \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^{n-1}, \quad \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^n,$$

von denen jeder folgende dem vorhergehenden durch unsere projectivische Zuordnung der beiden Punktreihen entspricht. Wir fragen nach der Bedingung dafür, dass wir durch Fortsetzung dieses Processes zu dem Ausgangspunkte ϱ zurückgeführt werden. Soll dies z. B. für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Punkt eintreten, so haben wir offenbar nur

$$\left(\frac{c}{c'}\right)^n = \left(\frac{k-\sqrt{l}}{k+\sqrt{l}}\right)^n = 1$$

anzunehmen. Bezeichnen wir nun ein Systen von solchen Punkten als ein *cyclisch-projectivisches*, so haben wir den Satz:

*Wenn das eine projectivische Verwandtschaft charakterisirende Doppelverhältniss gleich einer n^{ten} Wurzel der Einheit ist, so kann man von jedem Punkte der Reihe ausgehend ein cyclisch-projectivisches System von n Punkten angeben.**) D. h. sind $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ die Parameter dieser Punkte in der Reihe

$$X_1 + \lambda X_2 = 0,$$

so sind die durch folgendes Schema angegebenen Systeme von Punkten alle zu einander projectivisch:

---

*) Legt man statt der Punktreihe ein Strahlbüschel als geometrisches Bild zu Grunde und wählt die beiden vom Mittelpunkte desselben nach den imaginären Kreispunkten gehenden Linien als Doppelstrahlen für eine lineare Transformation, so ist die letztere identisch mit einer Drehung des Büschels um seinen Mittelpunkt. Die Forderung der cyclischen Projectivität geht dann in die andere über, dass ein Strahl durch n-malige Wiederholung einer Drehung um einen bestimmten Winkel (welcher durch das Doppelverhältniss $\frac{c}{c'}$ gegeben ist) in seine Anfangslage zurückkehre. Man wird also dann zu den *Kreistheilungsgleichungen* geführt.

$$
\begin{array}{llllll}
0, & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}, & \lambda_n, & \infty \\
0, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4 \ldots \lambda_n, & \lambda_1, & \infty \\
0, & \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5 \ldots \lambda_1, & \lambda_2, & \infty \\
\cdot & \cdot & & \cdots & \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdots & \cdot & \\
0, & \lambda_{n-1}, & \lambda_n, & \lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}, & \lambda_{n-2}, & \infty \\
0, & \lambda_n, & \lambda_1, & \lambda_2 \ldots \lambda_{n-2}, & \lambda_{n-1}, & \infty .
\end{array}
$$

Es darf hier jedoch nicht $\frac{c}{c'} = 1$ werden, denn dies würde nur für $l = 0$ eintreten, also nur, wenn die Doppelelemente zusammenfallen.*) Die n Punkte können bei reellen Doppelelementen nur sämmtlich reell sein für $\frac{c}{c'} = -1$, d. h. für $n = 2$. *In diesem Falle, den man als Involution bezeichnet, entsprechen immer zwei Punkte einander wechselseitig*, so dass es gleichgültig ist, welchen von ihnen man der einen, welchen der andern Reihe zuzählt. Wir sind auf diese Involution schon früher in der Kegelschnitttheorie geführt (p. 135); sie ist, wie wir schon damals sahen, dadurch charakterisirt, dass *je zwei entsprechende Punkte mit den Doppelpunkten ein harmonisches System bilden.* Die Gleichungen der beiden Reihen werden in der That von der Form:

$$X_1 - \lambda X_2 = 0$$
$$X_1 + \lambda X_2 = 0;$$

und wegen

$$\frac{c}{c'} = \frac{k - \sqrt{l}}{k + \sqrt{l}} = -1$$

ist allgemein die *Bedingung der Involution:*

(14) $$k = (a\beta) - (b\alpha) = 0.$$

Wir können eine Involution auch durch eine einzige Gleichung:

(15) $$X_1^2 - \varrho^2 X_2^2 = 0$$

darstellen, wo wir dann für jeden Werth von ϱ das Product der beiden

---

*) Es sei ferner bemerkt, dass ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon = \sqrt[n]{1})$ nichts Verschiedenes geben; denn sie bewirken nur eine Vertauschung von $\sqrt{l}$ und $\sqrt{-l}$, also nur eine Vertauschung der beiden projectivischen Gebilde. Man hat daher bei ungeraden n nur auf $\frac{1}{2}(n-1)$ Werthe von ε Rücksicht zu nehmen. Ebenso ist bei geradem n, sobald $n > 2$ der Fall $\varepsilon = -1$ auszulassen; und es bleiben wieder nur $\frac{1}{2}(n-2)$ Werthe von ε. — Gibt es eine m^{te} Potenz von ε, welche niederer, als die n^{te} ist, und für die schon $\varepsilon^m = 1$, so besteht der Cyclus nur aus m verschiedenen Punkten, die $\frac{n}{m}$ mal durchlaufen werden, indem dann m ein Factor von n ist.

einander entsprechenden Punkte erhalten.*) Unter diesem Gesichtspunkte erscheint die Involution als Specialfall eines allgemeineren Gebildes, das durch eine Gleichung von der Form:

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0$$

dargestellt wird. Ehe wir jedoch auf diese sogenannten *Involutionen höherer Ordnung* näher eingehen, müssen wir kurz einen Blick auf eine Art von Covarianten mit zwei Reihen von Variabeln werfen, die aus der Grundform f durch wiederholte Anwendung des Processes

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2$$

entstehen und eben dadurch schon als invariante Bildungen gekennzeichnet sind.

Wir erhalten dieselben nach dem Taylor'schen Satze einfach als Coëfficienten einer Reihenentwicklung, wenn wir in der Form $f = a_x^n$ setzen:

$$x_1 = y_1 + \lambda z_1$$
$$x_2 = y_2 + \lambda z_2,$$

wo dann der veränderliche Parameter

$$\lambda = \frac{(xy)}{(xz)}$$

proportional zu dem Abstandsverhältnisse eines beweglichen Punktes x von zwei festen Punkten y und z ist. Durch diese Substitution geht die Gleichung $f = 0$, nach Potenzen von λ entwickelt, über in:

$$0 = a_y^n + \frac{n}{1} \lambda a_y^{n-1} a_z + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \lambda^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \lambda^n a_z^n.$$

Die n Wurzeln dieser Gleichung geben die n Punkte, durch welche die Form f geometrisch dargestellt wird.

Die Coëfficienten der Gleichung sind bekanntlich proportional zu den Combinationssummen ihrer Wurzeln; und hieraus ist die geometrische Bedeutung einer jeden Gleichung:

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0$$

evident. Dieselbe ist, je nachdem die y oder z als gegeben angenommen werden, eine Gleichung von der r^{ten} Ordnung für die z oder von der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung für die y. Man nennt im ersten Falle die Punkte z *das Polarsystem***) *r^{ter} Ordnung oder das $(n-r)^{\text{te}}$ Polarsystem*

*) Vgl. Näheres hierüber in dem folgenden Abschnitte über binäre quadratische Formen.

**) System der harmonischen Mittelpunkte nach der Bezeichnung von Poncelet: Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques, Crelle's Journal, Bd. 3, 1828. — Der Polarenbegriff im ternären Gebiete (vgl. die folgende Ab-

des Poles y in Bezug auf das gegebene System der n Punkte x, im letzteren Falle die Punkte y *das Polarsystem $(n - r)^{ter}$ Ordnung des Poles z.* Wir können also sofort die folgenden Sätze aussprechen:

Das r^{te} Polarsystem eines gegebenen Poles z in Bezug auf ein gegebenes System von n Punkten besteht aus $n - r$ Punkten y, welche die Eigenschaft haben, dass für sie die Summe der Combinationen der Quotienten (Abstandsverhältnisse) $\frac{(xy)}{(xz)}$ zu $n - r$ verschwindet.

Gehört y zum r^{ten} Polarsysteme des Poles z, so gehört z zum $(n - r)^{ten}$ Polarsysteme des Poles y.

Der letztere Satz ist in dem folgenden allgemeineren enthalten, der sich aus Betrachtung einer Gleichung

$$a_z^\mu a_t^\nu \ldots a_y^\lambda = 0, \quad (\mu + \nu + \ldots + \lambda = n)$$

von selbst ergibt: *Bildet man für die gegebene Punktgruppe das ν^{te} Polarsystem eines Poles t, für dies neue Punktsystem das μ^{te} Polarsystem eines Poles z, etc. und gelangt man so schliesslich zu einer Gleichung λ^{ten} Grades, welcher λ Punkte y entsprechen, so bleibt derselbe Zusammenhang noch bestehen, wenn man in irgend einer Weise gleichzeitig die Punkte $y, z, t \ldots$ und die Ordnungen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ der einzelnen Polarsysteme vertauscht.*

Ferner folgt aus der Gleichung

$$a_y^\lambda a_z^\mu a_z^\nu = a_y^\lambda a_z^{\mu+\nu}.$$

Bildet man für die gegebene Punktgruppe das ν^{te} Polarsystem des Poles z und für dies neue System das μ^{te} Polarsystem desselben Poles, so ist das letztere auch das $(\mu + \nu)^{te}$ für diesen Pol in Bezug auf die gegebene Punktgruppe.

In ähnlicher Weise lassen sich noch eine Menge Sätze über die Polargruppen ableiten.*) Wir erwähnen nur die folgenden:

Das $(n - 1)^{te}$ Polarsystem besteht aus einem einzelnen Punkte. Ist nun das gegebene System entstanden aus einem Punkte $b_x = 0$ und einer Gruppe von $(n - 1)$ Punkten $c_x^{n-1} = 0$, so ist

---

theilung dieser Vorlesungen) findet sich bereits bei Cramer, der jedoch nur den unendlich fernen Punkt der Y-Axe als Pol nahm (Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genf 1750, p. 135); die $(n - 1)^{ten}$, d. h. linearen Polaren mit unendlich fernem Pole hat schon Newton. Die Bezeichnung der ganzen Reihe als erste, zweite . . . Polare stammt von Bobillier (Gergonne, Annales t. 18 und 19, 1828); die einfache Behandlung der Theorie mittelst homogener Coordinaten von Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5, 1829). Vgl. ferner Grassmann: Theorie der Centralen, ib. Bd. 24, 1842; Jonquières: Mémoire sur la théorie des poles et polaires, Liouville's Journal, août 1857; Cayley: Fifth memoir upon quantics, Philos. Transactions, t. 148, 1858; und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

*) Es sei bemerkt, dass diese Sätze später für die Theorie der algebraischen Curven von Wichtigkeit werden.

$$n a_y a_z^{n-1} = b_y c_z^{n-1} + (n-1) b_z c_y c_z^{n-2}.$$

Genügt also y zugleich den Gleichungen

$$b_y = 0 \quad \text{und} \quad c_y c_z^{n-2} = 0,$$

so verschwindet auch $a_y a_z^{n-1}$, d. h.:

Der $(n-2)^{te}$ Polarpunkt eines Systems von $(n-1)$ Punkten ist auch der $(n-1)^{te}$ Polarpunkt des Systems, welches aus jenen $(n-1)$ Punkten und aus ihm selbst gebildet wird.

Fallen p Punkte der gegebenen Gruppe zusammen, so enthält, wenn $p > r$, die Gleichung $a_y^{n-r} a_z^r = 0$ den betreffenden Punkt (y) $(p-r)$-mal als Factor, oder:

Fallen in dem gegebenen Systeme p Punkte zusammen, so fallen in denselben Punkt $(p-r)$ Punkte des r^{ten} Polarsystemes eines jeden beliebigen Poles.

Ist der vielfache Punkt, dessen Gleichung $c_z = 0$ sein mag, zugleich der Pol, so folgt aus der Form

$$a_x^n = c_x^p b_x^{n-p}$$

bei Bildung der r^{ten} Polare für diesen Pol:

$$a_y^{n-r} a_z^r = \mu \,.\, c_y^p b_y^{n-p-r} b_z^r,$$

wo μ einen Zahlenfactor bedeutet, d. h.

Das r^{te} Polarsystem eines p-fachen Punktes besteht aus diesem Punkte selbst, p-mal gerechnet, und aus der r^{ten} Polare dieses Punktes für die übrigen $(n-p)$ Punkte des Systems.

Für $p + r > n$ verschwindet aber der Ausdruck $a_y^{n-r} a_z^r$ identisch d. h. unabhängig von den z; und das Polarsystem wird unbestimmt. Also:

*Alle Polarsysteme des p-fachen Punktes von einer höheren, als der $(n-p)^{ten}$ Ordnung sind unbestimmt.**)

Die hier entwickelte Polarentheorie gibt sofort Gelegenheit zur geometrischen Interpretation einiger sehr wichtiger Covarianten, die noch erwähnt sein mögen. Es gibt nämlich solche Pole (y), für welche zwei Punkte des ersten Polarsystems (z) zusammenfallen. Zur Bestimmung derselben haben wir (vgl. p. 181):

$$\frac{\partial a_y a_z^{n-1}}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial a_y a_z^{n-1}}{\partial z_2} = 0,$$

oder wegen

$$a_y a_z^{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} y_2\right):$$

*) Dem entspricht z. B. in der Ebene der Satz, dass für einen zerfallenden Kegelschnitt jede Gerade als Polare des Doppelpunktes aufgefasst werden kann (vgl. p. 101).

$$(16)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\, y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\, y_2 &= n\,(n-1)\, a_y a_z^{n-2} a_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}\, y_2 &= n\,(n-1)\, a_y a_z^{n-2} a_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen y_1, y_2, so sind die Doppelpunkte der Polarsysteme gegeben durch (rechts müssen in einer Gleichung neue Symbole b eingeführt werden, vgl. p. 191):

$$(17)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} = n^2\,(n-1)^2\, a_z^{n-2} b_y^{n-2}\,(ab)\, a_1 b_2 = 0\,.$$

Dies ist aber die uns schon bekannte Hesse'sche Determinante von f, die wir oben auch in ihrer symbolischen Gestalt bildeten. Wir wollen dieselbe abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2} n^2 (n-1)^2$ mit Δ bezeichnen, und also setzen:

$$(18)\quad \begin{aligned} \Delta &= a_z^{n-2} b_z^{n-2}\,(ab)\,(a_1 b_2 - b_1 a_2) = (ab)^2\, a_z^{n-2} b_z^{n-2} \\ &= \frac{2}{n^2\,(n-1)^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right)^2 \right)\,. \end{aligned}$$

Eliminirt man dagegen aus den Gleichungen (16) die z, so erhält man eine andere Gleichung $\mathsf{P} = 0$, die ebenso wie $\Delta = 0$ von der Ordnung $2n - 4$ ist. Also:

Für jedes System von n Punkten gibt es eine Gleichung $(2n-4)^{ter}$ Ordnung ($\mathsf{P} = 0$), welche die $2n - 4$ Pole angibt, deren erste Polarsysteme Doppelpunkte haben. Diese Doppelpunkte selbst sind durch die Hesse*'sche Covariante ((17) bez. (18)) gegeben.*

Ferner kann man nach solchen Polen fragen, deren erste Polarsysteme in Bezug auf die Grundform und in Bezug auf die Hesse'sche Form einen gemeinsamen Punkt haben. Diese Pole bestimmen sich durch das Zusammenbestehen der Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\, y_2 = n\, a_y a_z^{n-1} \\ 0 &= \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial z_2}\, y_2 = (n-2)(ab)^2 (a_z^{n-2} b_z^{n-3} b_y + b_z^{n-2} a_z^{n-3} a_y). \end{aligned}$$

Die Elimination der y führt hier auf die Functionaldeterminante der Grundform und der Hesse'schen Covariante:

$$(20)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial z_2} \end{vmatrix} = n\,(2n-4)\,(a\Delta)\, a_x^{n-1} \Delta_x^{2n-5} = 0\,,$$

wo Δ_1, Δ_2 Symbole von Δ sind, indem

$$\Delta_x^{2n-4} = (\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2)^{2n-4} = \Delta$$

gesetzt ist. Um für dieselben die Symbole der Grundform (a, b, c) einzuführen, haben wir nur die Elimination aus den in (19) rechts stehenden Ausdrücken auszuführen. Wir müssen dabei jedoch die a einmal durch neue Symbole c ersetzen, weil sonst beim Rückgange zu den wirklichen Coëfficienten Mehrdeutigkeit entstehen könnte. Ferner bemerken wir, dass die beiden Glieder der zweiten Gleichung mit einander identisch sind, denn das eine geht aus dem andern durch Vertauschung von a und b hervor. Wir haben demnach die y aus den folgenden beiden Gleichungen zu eliminiren:

$$a_y a_z^{n-1} = 0$$
$$(bc)^2 c_z^{n-2} b_z^{n-3} b_y = 0,$$

und erhalten dadurch an Stelle von (20):

$$(21) \qquad T = (ab)(bc)^2 a_z^{n-1} c_z^{n-2} b_z^{n-3} = 0$$
$$= \frac{1}{n(2n-4)} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial \Delta}{\partial z_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_2}\right).$$

Die Elimination der z aus (19) ergibt eine andere Gleichung $\Theta = 0$, die ebenso wie $T = 0$ von der Ordnung $3n - 6$ ist; wir haben also den Satz:

Es gibt $3n - 6$ Pole ($\Theta = 0$), deren erste Polarsysteme, gebildet für das gegebene System und für das System der Doppelpunkte (d. i. der Hesse*'schen Form), einen gemeinsamen Punkt haben. Die gemeinsamen Punkte bestimmen sich durch die Gleichung $T = 0$ von der $(3n - 6)^{ten}$ Ordnung.*

— Von der Polarentheorie werden wir nun in der Theorie der allgemeinen Involutionen*) Gebrauch machen, zu der wir uns jetzt wenden. *Eine Involution n^{ter} Ordnung* ist durch die Gleichung:

$$(22) \qquad a_x^n + \lambda b_x^n = 0$$

gegeben, wo unter a und b Symbole verschiedener Formen verstanden sind, und λ ein veränderlicher Parameter ist. Die Gleichung stellt eine Reihe von Punktgruppen (in Anlehnung an Curvenvorstellungen auch *Büschel* genannt) vor, deren jede aus n Punkten besteht, so dass jeder Punkt der Geraden nur in einer Gruppe vorkommt; und das ganze Büschel ist durch irgend zwei Gruppen bestimmt. Die Betrachtung entspricht sonach durchaus derjenigen eines Kegelschnittbüschels in der Ebene, wo auch durch jeden Punkt der Ebene nur eine Curve des Büschels geht. Wie hierin drei zerfallende Kegelschnitte (drei Curven mit Doppelpunkt) vorkommen, so gibt es in der Involution

*) Vgl. Cremona: Einleitung in die Theorie der ebenen Curven; Jonquières: Généralisation de la théorie de l'involution. Annali di Matematica t. II; und Cayley: Transactions of the Cambridge Philosophical Society, t. XI, 1865.

einige Gruppen, welche zwei zusammenfallende Punkte enthalten; sie sind gegeben durch die Bedingungen:

$$a_x^{n-1} a_1 + \lambda b_x^{n-1} b_1 = 0$$
$$a_x^{n-1} a_2 + \lambda b_x^{n-1} b_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von λ das Verschwinden der Functionaldeterminante von a_x^n und b_x^n:

(23) $$(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0,$$

und eine andere Gleichung ebenso hoher Ordnung durch Elimination von x_1, x_2, in welcher λ die Unbekannte ist. *In einer Involution n^{ter} Ordnung gibt es daher $2n - 2$ Punktgruppen, die einen Doppelpunkt haben; und die Doppelpunkte sind durch die Gleichung* (23) *bestimmt.*

Diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man eine oder beide der Formen a_x^n, b_x^n durch irgend eine andere der Involution ersetzt: So ist z. B. die Functionaldeterminante der Formen $a_x^n + \lambda b_x^n$, $a_x^n + \lambda' b_x^n$, wenn a und a', b und b' bez. gleichwerthige (vertauschbare) Symbole bedeuten, gleich:

$$(aa')\, a_x^{n-1} a'^{n-1}_x + \lambda\, (ba)\, b_x^{n-1} a_x^{n-1} + \lambda'\, (ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1}$$
$$+ \lambda\lambda'\, (bb')\, b_x^{n-1} b'^{n-1}_x = (\lambda' - \lambda)\,.\,(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1};$$

denn das erste und letzte Glied ändert bei der Vertauschung von a und a' bez. b und b' sein Vorzeichen; beide verschwinden also identisch (vgl. p. 194). Solche simultane *invariante Bildungen aus Formen gleicher Ordnung, welche sich nur um einen Factor ändern, wenn man eine dieser Formen durch eine lineare Combination aller ersetzt,* sind von ausserordentlicher Wichtigkeit, und wir werden denselben noch wiederholt begegnen. Man pflegt sie als *Combinanten* des betreffenden Systems*) von Formen zu bezeichnen: Insbesondere ist also die Functionaldeterminante zweier binärer Formen gleicher Ordnung eine Combinante für die durch dieselben bestimmte Involution.

Eine Involution kann man z. B. unmittelbar durch die ersten Polarsysteme einer Form a_x^n:

$$a_x^{n-1} a_y = 0$$

erzeugt denken, wenn man $\frac{y_1}{y_2}$ als Parameter ansieht; also: *Jedes erste Polarsystem einer Gruppe von n Punkten bildet eine Involution $(n - 1)^{ter}$ Ordnung.* Mit Hülfe des vorigen Satzes folgt hieraus wieder die geometrische Bedeutung der Hesse'schen Covariante einer binären Form.

Zwei Involutionen von der Form:

(24) $$\begin{aligned} a_x^n + \lambda b_x^n &= 0 \\ \alpha_\xi^m + \lambda \beta_\xi^m &= 0, \end{aligned}$$

*) Vgl. Näheres hierüber bei Gordan: Ueber Combinanten, Math. Annalen, Bd. 5.

die einander so zugeordnet sind, dass einer Gruppe von n Punkten x der ersteren immer eine Gruppe von m Punkten ξ der anderen entspricht, wenn beiden Gruppen derselbe Werth von λ zugehört, heissen *projectivisch* (allgemeiner könnte man in der zweiten Involution einen Parameter μ annehmen, der mit λ durch eine lineare Gleichung verknüpft ist). In diesem Sinne ist folgender Satz sofort ersichtlich:

Wenn man von einem Involutionssysteme ausgeht und für eine beliebige Anzahl fester Pole in Bezug auf jede Gruppe des Systems nach einander die Polarsysteme derselben Ordnung bildet, so sind alle Reihen dieser neuen Systeme involutorisch, und die Involutionen sind alle unter einander projectivisch. Die $(n-1)^{ten}$ Polarsysteme eines gegebenen Poles y:

$$a_y^{n-1} a_x + \lambda b_y^{n-1} b_x = 0$$

bilden eine einfache Punktreihe. Das Doppelverhältniss von vier Punkten dieser Reihe soll auch das Doppelverhältniss der entsprechenden (d. i. für denselben Werth von λ gebildeten) Gruppen der gegebenen Involution, oder, was dasselbe ist, der für jenen Punkt als Pol abgeleiteten Polarsysteme heissen. Das Doppelverhältniss ist aber nur von den Werthen des reihenden Elementes λ für die vier Punkte abhängig, also unabhängig von dem Pole; und somit folgt:

Das Doppelverhältniss von vier Punktgruppen einer Involution, welche durch Polarenbildung aus vier Gruppen einer gegebenen Involution entstanden sind, ist gleich dem Doppelverhältniss der letzteren und unabhängig von den benutzten Polen. —

Die projectivische Zuordnung der beiden Involutionen (24) können wir auffassen als eine höhere Verwandtschaft: Jedem Punkte x der Geraden entsprechen m Punkte ξ und jedem Punkte ξ n Punkte x; und zwar ist der Zusammenhang zwischen den Punkten x und ξ gegeben durch die Gleichung:

$$a_x^n \beta_\xi^m - b_x^n \alpha_\xi^m = 0, \tag{25}$$

welche das Resultat der Elimination von λ aus (24) ist und die Stelle der bei der linearen Verwandtschaft auftretenden Gleichung (6) vertritt. Es kann nun insbesondere vorkommen, dass ein Punkt x mit einem der ihm entsprechenden Punkte ξ zusammenfällt, d. h. dass die beiden einander zugeordneten Gruppen der Involutionen einen gemeinsamen Punkt haben. Wir erhalten diese gemeinsamen Punkte aus der Gleichung

$$a_x^n \beta_x^m - b_x^n \alpha_x^m = 0, \tag{26}$$

oder aus einer Gleichung für λ von ebenso hohem Grade. Es ergibt sich also der Satz:

Zwei Involutionen vom m^{ten} und n^{ten} Grade, welche projectivisch sind, haben $m + n$ entsprechende Gruppen, denen ein Punkt gemeinsam ist.

Dieser Satz ist in einem noch allgemeineren enthalten; zu letzterem gelangt man einfach, wenn man die Gleichung (25) durch die andere

$$\varphi(\overset{m}{x}, \overset{n}{\xi}) = 0 \tag{27}$$

ersetzt, wo φ eine homogene Function m^{ter} Ordnung in x_1, x_2 und n^{ter} Ordnung in ξ_1, ξ_2 bedeutet. Die Gleichung (27) begründet dann wieder eine Verwandtschaft *(Correspondenz)* allgemeinster Art, bei der jedem x n Punkte ξ und jedem ξ m Punkte x entsprechen. Die Bedingung, dass ein Punkt x mit einem entsprechenden ξ zusammenfalle, gibt eine Gleichung von der Ordnung $m + n$, d. h. $m + n$ *„Coincidenzpunkte der Correspondenz φ"*. Wir sprechen dies im folgenden Satze aus, der als Chasles'sches Correspondenzprincip*) bekannt ist, und den wir noch sehr oft anwenden werden:

Hat man auf einer Geraden eine Verwandtschaft (Correspondenz), durch welche jedem Punkte x m Punkte ξ, jedem dieser Punkte ξ aber n Punkte x entsprechen, so kommt es $(m + n)$-mal vor, dass ein Punkt x mit einem entsprechenden Punkte ξ zusammenfällt. —

Wenn in (24) die Functionen $a_x{}^n$, $b_x{}^n$ einen gemeinsamen Factor p^{ter} Ordnung enthalten, so kommen die ihm entsprechenden Punkte in jeder Gruppe der Involution vor, und letztere besteht aus diesen p festen Punkten und einer Involution $(n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist dasselbe mit der zweiten Gleichung (24) für einen Factor vom p'^{ten} Grade der Fall, so zerfällt die Gleichung (26) in die beiden Factoren von der Ordnung p und p' und in einen Factor von der $(m + n - p - p')^{\text{ten}}$ Ordnung. Also: *es gibt dann nach Ausscheiduug dieser festen Punkte nur noch $m + n - p - p'$ Gruppen der Involutionen mit je einem gemeinsamen Punkte.*

Enthält dagegen eine bestimmte Gruppe der einen Involution einen linearen Factor r-fach, die entsprechende der andern denselben Factor s-fach und ist $r > s$, so enthält die Gruppe der gemeinsamen Punkte der Involutionen diesen Factor s-fach; und so lassen sich noch eine Reihe ähnlicher Sätze aufstellen. Wir verlassen indessen diese allgemeinen Erörterungen; wir werden im Folgenden noch Gelegenheit haben auf die quadratischen, sowie auf einige besondere cubische und biquadratische Involutionen näher einzugehen.

IV. Die binären quadratischen und cubischen Formen.

Wenn wir uns jetzt dazu wenden, die Formen niedrigster Ordnung systematisch zu behandeln (um hauptsächlich die geometrischen

*) Vgl. Chasles: Comptes rendus de l'académie des sciences, 27. Juin 1864.

Bedeutungen ihrer Invarianten und Covarianten kennen zu lernen), so ist es nach den obigen formentheoretischen Ausführungen zunächst unsere Aufgabe, für die betrachtete Grundform alle möglichen Invarianten und Covarianten aufzustellen und die etwaigen Abhängigkeitsgesetze derselben unter einander anzugeben. Es drängt sich somit die Frage auf: Giebt es für eine gegebene Form eine endliche Anzahl von unter einander unabhängigen invarianten Bildungen, durch welche sich alle andern rational und ganz ausdrücken lassen? In der That hat nun Gordan den Beweis gegeben*), *dass eine jede binäre Form, sowie ein jedes simultane System solcher Formen ein endliches „Formensystem“ besitzt*, d. h. eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten der verlangten Art. Der Beweis dieses Satzes, auf den wir hier nicht näher eingehen können, beruht wesentlich auf der von uns schon sonst als wichtig erkannten symbolischen Darstellung der Formen. Wir sahen früher, wie man mittelst derselben ganz allgemein die äussere Gestalt der invarianten Bildungen angeben kann; es kommt also nur darauf an, einen Process anzugeben, durch welchen man im Stande ist, die zunächst unendliche Zahl derselben in systematischer Weise nach einander und aus einander zu bilden; und dann hat man nachzuweisen, (dass dieser Process *alle* Invarianten und Covarianten gibt, und) dass derselbe nicht in's Unendliche fortgesetzt werden kann, ohne auf Verbindungen von schon vorher erhaltenen Bildungen zurückzuführen. Diese Bildungsmethode besteht in Folgendem.

Es seien zwei Formen gegeben

$$f = a_x^n \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x^m, \quad \text{wo} \quad n > m,$$

so kann man in einfachster Weise aus denselben Covarianten erzeugen, indem man die Ausdrücke

$$(1) \qquad (a\alpha)^k a_x^{n-k} \alpha_x^{m-k}$$

für $k = 1$ bis $k = m$ bildet. Dass diese sogenannten „*Ueberschiebungen von f über φ*“ die Invarianteneigenschaft besitzen, ist aus ihrer Gestalt klar; und gleichzeitig sind es die einzigen Formen, in welchen die Coëfficienten von a_x^n und α_x^m *linear* vorkommen. Für $k = 0$ würden wir das Product der beiden Grundformen, für $k = 1$ ihre Functionaldeterminante erhalten. Das nicht symbolische Bildungsgesetz für letztere kennen wir bereits; es ist dargestellt durch die Gleichung:

$$(a\alpha)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1} = \frac{1}{n \cdot m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right);$$

*) Für eine einzelne binäre Form im 69. Bd. von Crelle's Journal; vereinfacht und für ein simultanes System im 2. Bd. der Math. Annalen. Vgl. auch den vierten und sechsten Abschnitt in dem erwähnten Werke von Clebsch.

ebenso lässt sich aber auch die k^{te} Ueberschiebung (1) auf eine Combination der Differentialquotienten von f und φ zurückführen. Durch Entwicklung der Potenz $(a\alpha)^k$ und nachherige Multiplication mit $a_x^{n-k}\alpha_x^{m-k}$ erhält man nämlich lauter Glieder von der Form

$$(-1)^i \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1.2.3\ldots i} a_1^{k-i}\alpha_2^{k-i}a_2^i\alpha_1^i a_x^{n-k}\alpha_x^{m-k}$$
$$= (-1)^i \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1.2\ldots i.n\ldots(n-k+1).m\ldots(m-k+1)} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i}\partial x_2^i} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}};$$

und man übersieht nun leicht, wie sich durch Einsetzung dieser Werthe die wirklichen Bildungen gestalten.*) Für $k = 2$ bekommt man z. B.:

$$(a\alpha)^2 a_x^{n-2}\alpha_x^{m-2} = \frac{1}{n(n-1)m(m-1)} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right\}.$$

Statt zweier Formen f, φ kann man bei Bildung einer Ueberschiebung auch zweimal dieselbe Form $f = a_x^n = b_x^n$ anwenden; es entstehen dadurch Invarianten und Covarianten von f, welche die Coëfficienten im zweiten Grade enthalten, und von denen man nach den oben genannten Principien beweist, dass sie die einzigen Bildungen zweiten Grades sind, nämlich:

$$(ab)^k a_x^{n-k} b_x^{n-k}.$$

Für $k = 2$ erhält man so z. B. wieder die Hesse'sche Covariante. Es verschwinden hier aber alle diejenigen Ueberschiebungen identisch, für welche k eine ungerade Zahl ist, weil diese Formen durch Vertauschung der beiden gleichbedeutenden Symbole das Vorzeichen ändern (vgl. p. 194). Ist nun eine Form f gegeben, so bildet man, um ein vollständiges Formensystem zu erhalten, zunächst alle Ueberschiebungen von f über sich selbst; darauf die der erhaltenen neuen Formen über f, u. s. f. Es wird dann in dem von Gordan gegebenen Beweise gezeigt, dass man auf diese Art sämmliche Covarianten und Invarianten erhalten kann, und dass die Zahl der von einander unabhängigen eine endliche ist. — Es sei noch bemerkt, dass sich durch diesen Process unmittelbar eine Anordnung der erhaltenen Formen nach dem *Grade in den Coëfficienten* der Grundform ergibt, denn dieser wird bei jeder neuen Ueberschiebung über die Grundform um eine Einheit erhöht. Es ist diese Eintheilung wichtiger, als etwa die nach der Ordnung in den Variabeln, da sie gleichzeitig Covarianten und Invarianten umfasst.

Wir wollen diese Principien nun zum Studium der quadratischen,

*) Diese Bildungen wurden von Cayley angegeben: A fourth memoir upon quantics; Philos. Transactions, 1858.

cubischen und biquadratischen Formen benutzen. Es sei zunächst *eine quadratische Form*

$$f = a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

gegeben. Die erste Ueberschiebung derselben über sich selbst liefert die uns schon bekannte Invariante

$$D = (ab)^2 = 2\,(a_0 a_2 - a_1^2),$$

und weiter können wir den Process des Ueberschiebens nicht fortsetzen. In der That lässt sich hier auch leicht direct zeigen, *dass D die einzig mögliche invariante Bildung von f ist.* Ein jedes Punktepaar nämlich kann, wenn es nicht aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht, in jedes andere Punktepaar (∞ oft) linear transformirt werden, denn eine lineare Transformation ist erst festgelegt, wenn man drei Punkte dreien anderen zuordnet. Ein Punktepaar hat daher keine absolute Invariante, d. h. es kann nur die *eine* Invariante auftreten, deren Verschwinden das Zusammenfallen der Punkte des Paares aussagt; und diese Bedingung ist, wie wir schon früher sahen (p. 190) durch $D = 0$ gegeben. Eine Covariante von f müsste nach unseren allgemeinen Sätzen (p. 187) von der Form sein:

$$\Pi = (ab)\, a_x b_y \,.\, M,$$

wo M die Symbole a, b nicht enthält, und wo x, y beliebige Grössen sind (entweder selbst Punktcoordinaten oder, indem z. B. $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$, Symbole von f, die durch weitere in M enthaltene Symbole zu wirklichen Coëfficienten von f ergänzt werden). Vertauschen wir in Π die Symbole (a, b) und nehmen die halbe Summe beider Ausdrücke, so kommt nach Identität IV:

$$\begin{aligned}\Pi &= \tfrac{1}{2}\,(ab)\;(a_x b_y - b_x a_y)\, M \\ &= \tfrac{1}{2}\,(ab)^2\,(xy)\, M\,.\end{aligned}$$

Hat also eine Covariante von f den Factor (ab), so hat sie auch den Factor $(ab)^2$. Indem man nun auf M denselben Process anwendet, erkennt man, dass alle Covarianten Aggregate von Producten der Form $D^\mu \,.\, f^\nu \,.\, N$ sein müssen, wo N die Coëfficienten von f nicht mehr enthält.

Die Theorie einer quadratischen Form wäre damit vollständig behandelt; es sei nur noch erwähnt, dass der Pol eines Punktes y zu diesem Punkte und den Punkten der Grundform immer harmonisch liegt. Die Gleichung

$$a_x a_y = 0$$

sagt nämlich unseren allgemeinen Bemerkungen zufolge aus, dass die Summe der Abstandsverhältnisse des Poles und des Punktes y von dem gegebenen Punktepaare Null, d. h. das Doppelverhältniss der vier

Punkte gleich -1 sei. Führt man daher den Punkt y und dessen Pol, *„zwei in Bezug auf f conjugirte Punkte"*, als Coordinatengrundpunkte ein, so wird f bei passender Bestimmung der in die neuen Coordinaten ξ_i eingehenden Constanten von der Form (vgl. p. 86):

$$f = a_x^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

— Sind *zwei quadratische Formen* gegeben:

$$f = a_x^2 = b_x^2 \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2, \tag{2}$$

so veranlassen dieselben zum Studium der Involution zweiter Ordnung:

$$a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 = 0. \tag{3}$$

Letztere lässt sich immer auf die schon erwähnten projectivischen Punktreihen zurückführen, deren entsprechende Punkte zu demselben festen Paare harmonisch sind. Dieses Paar wird nämlich durch die beiden in (3) enthaltenen Gruppen gegeben, welche aus zwei zusammenfallenden Punkten bestehen (vgl. p. 135). Wir erhalten dieselben hier aus der für λ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 + \lambda \alpha_0 & a_1 + \lambda \alpha_1 \\ a_1 + \lambda \alpha_1 & a_2 + \lambda \alpha_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder symbolisch, wenn man berücksichtigt, dass $(b\alpha)^2 = (a\beta)^2 = (a\alpha)^2$ ist:

$$(ab)^2 + 2\lambda (a\alpha)^2 + \lambda^2 (\alpha\beta)^2 = 0. \tag{4}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien λ', λ'' und wir wollen zunächst ausdrücklich annehmen, dieselben seien von einander verschieden; dann ist identisch in Bezug auf die x:

$$\begin{aligned} a_x^2 + \lambda' \alpha_x^2 &= a_x'^2 = \xi^2 \\ a_x^2 + \lambda'' \alpha_x^2 &= a_x''^2 = \eta^2, \end{aligned} \tag{5}$$

wo nun die a', a'' wirkliche Coëfficienten linearer Formen a_x', a_x'' sind. Eliminiren wir hieraus und aus (3) a_x^2, b_x^2, und führen statt λ das neue reihende Element

$$\mu = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}$$

ein, so wird die Involution dargestellt durch

$$\xi^2 - \mu \eta^2 = 0,$$

und zerfällt also in der That in die beiden projectivischen Punktreihen

$$\xi - \sqrt{\mu}\,\eta = 0, \quad \xi + \sqrt{\mu}\,\eta = 0,$$

welche die verlangte Eigenschaft haben. Die Coëfficienten der Gleichung (4) sind gegeben durch die zweite Ueberschiebung von f über sich selbst:

$$D = (ab)^2 = 2\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,,$$

die zweite Ueberschiebung von φ über sich selbst:

$$D'' = (\alpha\beta)^2 = 2\,(\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2)\,,$$

und durch die zweite Ueberschiebung von f über φ:

$$D' = (a\alpha)^2 = a_0\alpha_2 + a_2\alpha_0 - 2\,a_1\alpha_1.$$

Die erste Ueberschiebung von f über φ führt dagegen zu der simultanen Covariante (Functionaldeterminante von f und φ und Combinante der Involution $f + \lambda\varphi$):

$$\vartheta = (a\alpha)\, a_x\, \alpha_x = \vartheta_x^2.$$

Durch diese vier Formen ist das vollständige simultane Formensystem von f und φ gegeben; denn alle weiteren Ueberschiebungen führen auf sie zurück oder verschwinden identisch, wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.

Die geometrische Bedeutung von D und D'' sind uns bekannt; es sind dies bez. die Discriminanten f und φ. Die Bedeutung der simultanen Invariante D'' folgt aus Gleichung (4); ihr Verschwinden sagt nämlich aus, das die Summe der Wurzeln $\lambda' + \lambda''$ verschwinde. In diesem Falle erhalten wir aus (5) durch Addition

$$a_x^2 = \tfrac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2),$$

und durch Substitution:

$$\alpha_x^2 = \frac{1}{\lambda' - \lambda''}\,(\xi^2 - \eta^2)\,;$$

das Punktepaar von f ist daher gegeben durch

$$\xi + i\eta = 0\,,\quad \xi - i\eta = 0 \quad (i = \sqrt{-1})$$

und das von φ durch

$$\xi + \eta = 0\,,\quad \xi - \eta = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte wird somit

$$= \frac{i-1}{i+1}\cdot\frac{-i+1}{-i-1} = -1\,.$$

*Die Gleichung $D' = (a\alpha)^2 = 0$ sagt also aus, dass die Punkte von $f = 0$ zu denen von $\varphi = 0$ harmonisch liegen.**) Mit Hülfe dieses Satzes ergibt sich auch leicht die geometrische Bedeutung von $\vartheta = 0$. Bilden wir nämlich die D' entsprechende simultane Invariante der

*) Bedient man sich der geometrischen Repräsentation auf der Kugelfläche (vgl. die Anmerkung auf p. 173), so werden alle Punktepaare, welche zu einem gegebenen harmonisch liegen, durch diejenigen geraden Linien ausgeschnitten, welche die Verbindungslinie der gegebenen Punkte und deren harmonische Polare in Bezug auf die Kugelfläche gleichzeitig treffen.

beiden quadratischen Formen $f = a_x^2$ und $\vartheta = \vartheta_x^2$, so ist dieselbe $= (a\vartheta)^2$; sie entsteht also aus ϑ_x^2, wenn man darin die Grössen x_1, x_2 bez. durch $a_2 = b_2$, $-a_1 = -b_1$ ersetzt, und sie wird sonach

$$= (a\alpha)(ab)(\alpha b).$$

Diese Form ändert aber durch Vertauschung von a und b ihr Zeichen, verschwindet also identisch. Dasselbe ist mit der simultanen Invariante von ϑ und φ der Fall, und somit folgt aus der eben abgeleiteten Bedeutung dieser Invarianten, *dass die beiden durch* $\vartheta = 0$ *dargestellten Punkte zu den Verschwindungselementen sowohl von* f, *als von* φ *harmonisch liegen, d. h. mit den Grundpunkten der Involution* (3) *identisch sind.**) Denn da die beiden simultanen Invarianten $(a\vartheta)^2$, $(\alpha\vartheta)^2$ in den Coëfficienten von ϑ linear sind, kann es nur *ein* Punktepaar dieser Lagenbeziehung geben.

Durch die Gleichungen (5) ist das Problem gelöst, zwei binäre quadratische Form durch ein Aggregat der Quadrate der Veränderlichen darzustellen, was der gleichzeitigen Transformation zweier Kegelschnitte in die kanonische Form (p.124, ff.) im ternären Gebiete entspricht. Wir erhalten nämlich:

$$\varphi = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\lambda' - \lambda''}$$

$$f = -\frac{\lambda''\xi^2 - \lambda'\eta^2}{\lambda' - \lambda''}.$$

Die Verschwindungselemente beider Formen sind nun gegeben durch die Gleichungen:

$$\xi - \eta = 0, \qquad \xi + \eta = 0,$$

$$\xi - \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda''}}\,\eta = 0, \quad \xi + \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda''}}\,\eta = 0.$$

Bei der hier vorliegenden Trennung der vier Punkte in zwei Paare können wir das Doppelverhältniss derselben nur auf zwei Weisen bilden. Bezeichnen wir mit α einen Werth desselben:

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{\lambda'} - \sqrt{\lambda''}}{\sqrt{\lambda'} + \sqrt{\lambda''}}\right)^2,$$

so ist der andere gleich $\frac{1}{\alpha}$. Da aber λ', λ'' die Wurzeln der Gleichung (4) sind, so haben wir:

---

*) Diese Punkte sind andererseits durch das Product der Gleichungen (5) gegeben. In der That erweist man leicht durch Anwendung der Identitäten auf p. 193 die Relation:

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}(Df^2 - 2D'f\varphi + D''\varphi^2).$$

Es ist dieselbe auch eine Folge einer später zu gebenden allgemeinen Gleichung für das Quadrat einer Functionaldeterminante.

$$1 : \lambda' + \lambda'' : \lambda'\lambda'' = D : -2D' : D'',$$

und folglich wird

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\frac{(\lambda' + \lambda'')^2 + 4\lambda'\lambda''}{(\lambda' + \lambda'')^2 - 4\lambda'\lambda''} = 2\frac{D'^2 + DD''}{D'^2 - DD''}.$$

Die beiden Werthe des Doppelverhältnisses α *und* $\frac{1}{\alpha}$ *sind daher gegeben durch die quadratische Gleichung* (vgl. das entsprechende Problem der Kegelschnitttheorie auf p. 74):

$$\alpha^2 - 2\alpha\frac{D'^2 + DD''}{D'^2 - DD''} + 1 = 0$$

oder:

$$D'^2(\alpha - 1)^2 - DD''(\alpha + 1)^2 = 0;$$

eine Gleichung, welche für $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ das vorhin über die Bedeutung von D, D'' und D' Gesagte bestätigt.

Obige Herstellung der „*kanonischen Form*" ist jedoch nur möglich, so lange die Wurzeln der Gleichung (4) verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, d. h. ist

$$R = DD'' - D'^2 = 0,$$

so fallen die Punkte ξ und η zusammen, und ϑ wird das Quadrat eines linearen Ausdruckes. In der That ist die Bedingung $R = 0$ auch mit dem Verschwinden der Invariante von ϑ (der zweiten Ueberschiebung von ϑ über sich selbst) identisch, denn wir haben

$$R = (ab)^2(\alpha\beta)^2 - (a\alpha)^2(b\beta)^2 = [(ab)(\alpha\beta) + (a\alpha)(b\beta)][(ab)(\alpha\beta) - (a\alpha)(b\beta)],$$

oder wegen der Identität III, (p. 193):

$$R = [(a\alpha)(b\beta) + (ab)(\alpha\beta)](a\beta)(b\alpha).$$

Dies entsteht aber aus

$$\vartheta_x\vartheta_y = \tfrac{1}{2}(a\beta)(a_x\beta_y + a_y\beta_x),$$

wenn man für x_1, x_2, y_1, y_2, bez. α_2, $-\alpha_1$, b_2, $-b_1$ setzt und mit $-2(b\alpha)$ multiplicirt. Es ist daher auch:

$$R = -2(\vartheta\alpha)(\vartheta b)(b\alpha);$$

und dieser Ausdruck wieder entsteht aus

$$\vartheta = \vartheta_x'^2 = (b\alpha)b_x\alpha_x,$$

wenn man x_1, x_2 durch ϑ_2, $-\vartheta_1$ ersetzt und mit -2 multiplicirt. Es folgt also in der That

$$R = -2(\vartheta\vartheta')^2,$$

wo $(\vartheta\vartheta')^2$ die Invariante von ϑ ist.

Soll nun auch in diesem Falle das Punktepaar ϑ zu f und φ harmonisch liegen — wie dies doch aus den früheren Formeln, die

hier durchaus ihre Geltung behalten, hervorgeht, so ist dies nur möglich (vgl. p. 40), wenn f und φ gleichzeitig den durch $\vartheta = 0$ doppelt dargestellten Punkt enthalten; also:

Die Resultante zweier quadratischen Formen kann durch die Discriminante ihrer Functionaldeterminante ersetzt werden; sie ist

$$R = -2(\vartheta\vartheta')^2 = DD'' - D'^2. \tag{6}$$

Nicht symbolisch kann man dieselbe durch Elimination von x_1^2, $2x_1x_2$, x_2^2 aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0 \\ \varphi &= \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 = 0 \\ \vartheta &= \vartheta_0 x_1^2 + 2\vartheta_1 x_1 x_2 + \vartheta_2 x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

in Gestalt einer Determinante erhalten; man findet:

$$R = -\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden derselben ist gleichzeitig die Bedingung dafür, dass die Gleichung (3) einen von λ unabhängigen Factor hat. Denn wenn identisch (indem der Ausdruck (4) ein Quadrat wird)

$$(a_0 + \lambda\alpha_0)(a_2 + \lambda\alpha_2) - (a_1 + \lambda\alpha_1)^2 = -(p + \lambda q)^2$$

ist, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} a_0 + \lambda\alpha_0 &= m\left\{(a_1 + \lambda\alpha_1) + (p + \lambda q)\right\} \\ a_2 + \lambda\alpha_2 &= \frac{1}{m}\left\{(a_2 + \lambda\alpha_2) - (p + \lambda q)\right\}, \end{aligned}$$

und dadurch geht die Gleichung (3) über in:

$$(mx_1 + x_2)\left\{(a_1 + \lambda\alpha_1)(mx_1 + x_2) + (p + \lambda q)(mx_1 - x_2)\right\} = 0.$$

Die Involution löst sich also für $R = 0$ in einen festen Punkt und in eine einfache Punktreihe auf. —

— Gehen wir nunmehr zur Betrachtung *einer binären cubischen Form* über. Für eine solche:

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3 \\ &= a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 \end{aligned}$$

ist das vollständige Formensystem gegeben durch:

Die zweite Ueberschiebung von f mit sich selbst, die Hesse'sche Covariante (zweiten Grades und zweiter Ordnung):

(7) $\Delta = (ab)^2 a_x b_x$;

$$= 2 \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2 & a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x_2^2 \\ a_1 & a_2 & -x_1 x_2 \\ a_2 & a_3 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + 2(a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2.$$

Die zweite Ueberschiebung von $\Delta = \Delta_x^2 = \Delta_x'^2$ *über sich selbst,* die Discriminante von Δ (Invariante vierten Grades):

(8) $R = (\Delta\Delta')^2$
$$= 2\left\{4\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2\right\}.$$

Die erste Ueberschiebung von f mit Δ, die Functionaldeterminante beider Formen (dritten Grades, dritter Ordnung):

(9) $Q = (c\Delta)\, c_x^2 \Delta_x$
$$= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2$$
$$- 3\,(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3.$$

Die zweite Ueberschiebung von f mit Δ:

$$(c\Delta)^2\, c_x$$

verschwindet jedoch identisch; sie entsteht, wenn man in (9) x_1, x_2 bez. durch c_2, $-c_1$ ersetzt und mit c_x multiplicirt; also ist

$$(c\Delta)^2\, c_x = (ab)^2\,(ac)\,(bc)\,c_x,$$

oder wenn man einmal c mit a, einmal c mit b vertauscht und die Summe der drei Ausdrücke bildet:

(10) $(c\Delta)^2 c_x = \frac{1}{3}\,(ab)\,(ac)\,(bc)\left\{(ab)\,c_x - (cb)\,a_x - (ac)\,b_x\right\} \equiv 0.$

Dieser Ausdruck verschwindet nämlich, weil der eingeklammerte Theil desselben nach der Identität I. p. 193 Null ist. Es lassen sich ferner, wie hier nicht ausgeführt werden soll, auch alle weiteren Ueberschiebungen auf die Formen f, Δ, R, Q zurückführen. Dass es in der That nur eine Invariante von f gibt, ist auch daraus klar, dass jedes Punktetripel in jedes andere linear transformirt werden kann; denn durch die Zuordnung dreier Punkte ist gerade eine lineare Verwandtschaft festgelegt. Es ist dabei nur vorausgesetzt, dass nicht ein einzelnes der Tripel einen doppelt zählenden Punkt enthalte, d. h. dass nicht eine der Discriminanten der beiden betreffenden cubischen Formen verschwinde. *Eine cubische Form hat also nur e i n e Invariante, und dies ist ihre Discriminante**), *nämlich*

*) Der in (8) gegebene ausgerechnete Werth von R stimmt in der That mit dem auf p. 183 beispielsweise berechneten Werthe der Discriminante bis auf den Factor -2 überein. Diese Discriminante ist bis auf einen Zahlenfactor gleich

$$R = (\Delta\Delta')^2,$$

die Discriminante der Hesse'schen Covariante. In R können wir statt Δ, Δ' in folgender Weise die Symbole a, b, c, d der Grundform einführen: es entsteht R aus $\Delta_x'^2 = (ab)^2 a_x b_x$, indem wir darin x_1, x_2 bez. durch Δ_2, $-\Delta_1$ ersetzen, also ist:

$$R = (ab)^2 (a\Delta)(b\Delta).$$

Dieser Ausdruck entsteht nun aus

$$\begin{aligned}\Delta_x \Delta_y &= \tfrac{1}{2}(cd)^2 (c_x d_y + d_x c_y) \\ &= (cd)^2 c_x d_y,\end{aligned}$$

wenn man darin für x_1, x_2 die Symbole a_2, $-a_1$, für y_1, y_2 die Symbole b_2, $-b_1$ einsetzt und mit $(ab)^2$ multiplicirt; es ist also endlich:

$$R = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \tag{11}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen $\Delta = 0$ und $Q = 0$ ergibt sich aus früheren allgemeinen Sätzen. Wir erwähnten damals im Zusammenhange mit Δ noch einer anderen Covariante $P = 0$, welche sich aus den Gleichungen (16) p. 206 durch Elimination der z ergab, während die Elimination der y die Hesse'sche Determinante lieferte. Diese Gleichungen werden für $n = 3$

$$\begin{aligned}a_y a_z a_1 &= 0 \\ a_y a_z a_2 &= 0;\end{aligned}$$

in ihnen kommen also die y, z symmetrisch vor. Die Elimination der letzteren führt somit ebenfalls auf $\Delta = 0$, d. h.

Für ein Punktetripel gibt es zwei Pole, deren erste Polargruppe

---

dem Quadrate des aus den Differenzen der Wurzeln von $f = 0$ gebildeten Productes, d. h. gleich

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die aus $f = 0$ sich ergebenden Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$ sind. Um den Zahlenfactor zu bestimmen, brauchen wir nur in den Ausdruck (8) für R die Wurzeln α durch die folgenden Gleichungen einzuführen:

$$\begin{aligned}-3\frac{a_1}{a_0} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3\frac{a_2}{a_0} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \\ -\frac{a_3}{a_0} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3.\end{aligned}$$

Alsdann tritt z. B. das Glied $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$ mit dem Zahlenfactor $-\frac{2}{9}$ auf, während dasselbe in dem Producte $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2$ den Factor -6 hat; und es ist sonach:

$$R = \tfrac{1}{27} a_0^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2.$$

aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht; und zwar gehört immer zu jedem dieser Punkte als Pol der andere als Doppelpunkt der Polargruppe.

Die Form Q entsteht für $n = 3$ aus der im allgemeinen Falle durch T bezeichneten Covariante (p. 207); sie ist daher, wenn man die Symbole von f statt derer von Δ einführt, gegeben durch:

(12) $$Q = (ab)^2 (cb) c_x^2 a_x.$$

In Verbindung mit Q erwähnten wir noch eine andere Form Θ, deren Verschwinden sich für $n = 3$ durch Elimination der z aus den Gleichungen

$$a_x a_z^2 = 0$$
$$\Delta_x \Delta_z = 0$$

ergibt. Die Ausführung dieser Elimination geschieht, indem wir in $a_x a_z^2 = 0$ die Grössen z_1, z_2 durch $\Delta_2 \Delta_x$, $-\Delta_1 \Delta_x$ ersetzen. Da aber der Ausdruck $a_x a_z^2$ in den z quadratisch ist, so dürfen wir diese symbolische Substitution nur in dem einen Factor a_z desselben ausführen, während wir in dem andern Factor a_z $z_1 = \Delta_2' \Delta_x'$, $z_2 = -\Delta_1' \Delta_x'$ zu setzen haben ($\Delta_x^2 = \Delta_x'^2 = \Delta$); wir erhalten somit:

$$\Theta = a_x \Delta_x \Delta_x' (a\Delta)(a\Delta').$$

Diese Form lässt sich auf f zurückführen. Wir haben nämlich wegen der Identität II (p. 193):

$$(a\Delta)(a\Delta') \Delta_x \Delta_x' = \tfrac{1}{2} \left\{ (a\Delta)^2 \Delta_x'^2 + (a\Delta')^2 \Delta_x^2 - (\Delta\Delta')^2 a_x^2 \right\}.$$

Setzen wir dies in Θ ein, so verschwinden die beiden ersten Terme, von denen jeder die zweite Ueberschiebung von f mit Δ als Factor enthält, identisch wegen (10); und wir erhalten:

(13) $$\Theta = -\tfrac{1}{2} (\Delta\Delta')^2 a_x^3 = -\frac{R}{2} f.$$

Geometrisch gibt dies wegen der bekannten Bedeutungen von $Q = 0$ und $\Theta = 0$ den Satz:

Nur die drei gegebenen Punkte selbst haben die Eigenschaft, dass ihr erstes Polarsystem denjenigen Punkt enthält, welcher ihr Polarsystem in Bezug auf das Punktepaar $\Delta = 0$ bildet; die drei so entstehenden Polarpunkte für dieses Paar sind durch $Q = 0$ gegeben.

Hieraus folgt ferner, da der Polarpunkt eines Poles in Bezug auf ein Punktepaar nichts anderes, als der vierte harmonische Punkt ist: *Man erhält die Punkte der Covariante $Q = 0$, indem man zu den Grundpunkten von $f = 0$ die vierten harmonischen Punkte in Bezug auf das Punktepaar $\Delta = 0$ construirt;* oder mit andern Worten:

Die beiden durch $Q = 0$ und $f = 0$ gegebenen Punktetripel bestimmen zwei involutorische projectivische Reihen, deren Doppelpunkte durch $\Delta = 0$ gegeben sind.

Wegen der ausgezeichneten Rolle, welche sonach den Punkten von Δ zukommt, empfiehlt es sich, dieselben als Coordinatengrundpunkte einzuführen, wodurch dann die weitere Theorie der cubischen Formen sowie der Involution dritter Ordnung:

$$\varkappa f + \lambda Q = 0$$

wesentlich vereinfacht wird. Um den Einfluss der dazu führenden Substitution auf f und Q leicht zu übersehen, stellen wir zunächst eine identische Gleichung auf, welche zwischen den drei Covarianten f, Q, Δ besteht. Eine solche muss nämlich immer bestehen, sobald eine binäre Form zwei linear von einander unabhängige Covarianten zulässt; denn man kann z. B. in unserem Falle aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 \\ \Delta &= (ab)^2\, a_x b_x \\ Q &= (ab)^2\, (cb) c_x^2 a_x \end{aligned}$$

die Variabeln x_1, x_2 eliminiren, und erhält dann eine Gleichung, in welcher als Coëfficienten der Ausdrücke f, Δ, Q Invarianten von f auftreten. Statt die Elimination direct auszuführen, beweisen wir sogleich den folgenden allgemeineren Satz:

Das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen (ersten Ueberschiebung) ist eine quadratische Function dieser Formen, deren Coëfficienten die zweiten Ueberschiebungen sind.

Für die Functionaldeterminante zweier quadratischer Formen a_x^2 und α_x^2 haben wir nämlich:

$$\vartheta_x^2 = (a\alpha)\, a_x \alpha_x = \begin{vmatrix} a_1^2 & \alpha_1^2 & x_2^2 \\ a_1 a_2 & \alpha_1 \alpha_2 & -x_1 x_2 \\ a_2^2 & \alpha_2^2 & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir diese Identität auf beiden Seiten mit a_x^{m-2}, α_x^{n-2} und seien f, φ die beiden gegebenen Formen:

$$f = a_x^m, \quad \varphi = \alpha_x^n;$$

so folgt für die erste Ueberschiebung $(f, \varphi)_1$ derselben, wenn $f_{ik} = \frac{1}{m(m-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, $\varphi_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt wird:

$$(f, \varphi)_1 = (a\alpha)\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = \begin{vmatrix} f_{11} & \varphi_{11} & x_2^2 \\ f_{12} & \varphi_{12} & -x_1 x_2 \\ f_{22} & \varphi_{22} & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun die oben für eine Ueberschiebung gegebene nicht symbolische Definition benutzen (p. 212), so wird offenbar:

$$2(f,\varphi)_1^2 = \begin{vmatrix} f_{11} & \varphi_{11} & x_2^2 \\ f_{12} & \varphi_{12} & -x_1x_2 \\ f_{22} & \varphi_{22} & x_1^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{22} & \varphi_{22} & x_1^2 \\ -2f_{12} & -2\varphi_{12} & 2x_1x_2 \\ f_{11} & \varphi_{11} & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f,f)_2 & (f,\varphi)_2 & f \\ (f,\varphi)_2 & (\varphi,\varphi)_2 & \varphi \\ f & \varphi & 0 \end{vmatrix},$$

wo $(f, \varphi)_2$ die zweite Ueberschiebung von f über φ bedeutet, also:

$$(f,f)_2 = (ab)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2}, (f,\varphi)_2 = (a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{n-2}, (\varphi,\varphi)_2 = (\alpha\beta)^2\alpha_x^{n-2}\beta_x^{n-2}.$$

Durch Ausrechnung der in der letzten Gleichung rechts stehenden Determinante erhalten wir schliesslich die gesuchte Relation:

$$(f,\varphi)_1^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{(\varphi,\varphi)_2 \cdot f^2 - 2(f,\varphi)_2 \cdot f\varphi + (f,f)_2 \cdot \varphi^2\right\}.$$

— In unserem Falle haben wir $f = a_x^3$, $\varphi = \Delta = (f, f)_2$, $(\varphi, \varphi)_2 = R$, $(f, \varphi)_2 = 0$ (wegen (10)), $(f, \varphi)_1 = Q$, und somit geht jene Identität über in:

$$Q^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{Rf^2 + \Delta^3\right\},$$

oder:

$$\Delta^3 = -(2Q^2 + Rf^2)$$

$$(14) \qquad = -2\left\{Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\}\left\{Q - f\sqrt{-\frac{R}{2}}\right\}.$$

Denken wir uns nun Δ in seine linearen Factoren aufgelöst und führen diese als neue Variable ein, d. h. setzen wir*)

$$(15) \qquad \Delta = -2\xi\eta,$$

so haben wir in (14) auf der linken Seite das Product zweier vollständiger Cuben. Auf der rechten Seite steht das Product zweier cubischen Formen; und da diese im Allgemeinen keinen gemeinsamen Factor haben (wovon man sich durch ein Zahlenbeispiel überzeugt), so muss jede dieser Formen ebenfalls den Cubus eines der linearen Factoren von Δ darstellen. Wir dürfen somit setzen:

$$(16) \qquad \begin{aligned} Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}} &= 2\xi^3 \\ Q - f\sqrt{-\frac{R}{2}} &= 2\eta^3; \end{aligned}$$

und dadurch sind die linearen Factoren ξ, η bis auf dritte Wurzeln der Einheit bestimmt. Wir kennen nämlich die Coëfficienten der cubischen Form $Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}}$; dieselben seien α_0, $3\alpha_1$, $3\alpha_2$, α_3; alsdann haben wir zur Bestimmung von $\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ die Gleichungen

$$\xi_1^3 = \alpha_0, \quad \xi_1^2\xi_2 = \alpha_1, \quad \xi_1\xi_2^2 = \alpha_2, \quad \xi_2^3 = \alpha_3.$$

Wir brauchen also nur eine Cubikwurzel auszuziehen, denn es ist:

---

*) Vorzeichen und Zahlenfactor sind mit Rücksicht auf das Folgende gewählt.

$$\xi_1 = \sqrt[3]{\alpha_0}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_1}{\sqrt[3]{\alpha_0^2}}.$$

Durch Einführung dieser neuen Coordinatengrundpunkte sind f, Q, Δ *gleichzeitig auf eine kanonische Form gebracht;* und zwar erhält man aus (16):

$$(17) \qquad \begin{aligned} f\sqrt{-\frac{R}{2}} &= \xi^3 - \eta^3 \\ Q &= \xi^3 + \eta^3 \\ \Delta &= -2\xi\eta. \end{aligned}$$

Die Grundform f ist dadurch zugleich in ihre drei linearen Factoren zerlegt. Bedeutet nämlich ε eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, so wird

$$(18) \qquad f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{R}{2}}}(\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta).$$

Durch diese Transformation ist ferner auch die Tripelschaar

$$\varkappa f + \lambda Q = 0,$$

welche wir näher untersuchen wollten, auf eine einfache Gestalt gebracht: auch sie enthält nur noch die Cuben der neuen Veränderlichen. Ihre Gleichung wird nach (17):

$$(19) \qquad \left(\varkappa + \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}\right)\xi^3 + \left(\varkappa - \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}\right)\eta^3 = 0.$$

Die Verschwindungspunkte irgend eines Tripels dieser Involution sind jetzt gegeben durch:

$$(20) \qquad \xi - a\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon a\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon^2 a\eta = 0,$$

wo:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\varkappa - \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa + \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}}.$$

Insbesondere erhalten wir hieraus für $\lambda = 0$ die Verschwindungspunkte von f:

$$(21) \qquad \xi - \eta = 0, \quad \xi - \varepsilon\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon^2\eta = 0,$$

und für $\varkappa = 0$ die Verschwindungspunkte von Q:

$$(22) \qquad \xi + \eta = 0, \quad \xi + \varepsilon\eta = 0, \quad \xi + \varepsilon^2\eta = 0.$$

Man sieht hieraus zunächst, *dass von den Wurzeln von $f = 0$ und $Q = 0$ nur je eine reell ist, wenn die Wurzeln von $\Delta = 0$ reell sind.* Nehmen wir jedoch an, dass ($i = \sqrt{-1}$):

$$\xi = p + qi, \quad \eta = p - qi,$$

so wird:

$$f \cdot \sqrt{-\frac{R}{2}} = (p+qi)^3 - (p-qi)^3 = 2i(3p^2q - q^3);$$

und die linearen Factoren von f sind also proportional zu $q, p\sqrt{3}+q$, $p\sqrt{3}-q$, mithin reell. Also: *Bei reellen Coëfficienten hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln bei positivem, nur eine bei negativem R.*

Man erkennt ferner aus (21) und (22), wie in der That jedem Punkte von f ein Punkt von Q zugeordnet ist, welcher mit ihm und den Punkten von Δ harmonisch liegt, wie oben erwähnt wurde. Aber zwischen den Punkten von f und Q besteht noch eine andere Lagenbeziehung. Suchen wir nämlich zu je zwei Punkten von f den vierten harmonischen Punkt in Bezug auf den dritten Punkt von f, so führt dies auf drei andere Punkte, deren Coordinaten ξ, η bez. bestimmt sind durch $\left(\varrho = \frac{\xi}{\eta}\right)$:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\varrho}\cdot\frac{\varepsilon^2-\varrho}{\varepsilon^2-1} = -1, \quad \frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{\varepsilon^2-\varrho}\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varepsilon} = -1, \quad \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varrho}\cdot\frac{\varepsilon-\varrho}{\varepsilon-\varepsilon^2} = -1,$$

und hieraus ergibt sich für $\frac{\xi}{\eta}$ bez.:

$$\frac{\xi}{\eta} = -1, \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varepsilon, \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varepsilon^2.$$

Dies sind aber nach (23) gerade wieder die Punkte $Q=0$; also:

Die drei Punkte $Q=0$ liegen so, dass jeder zu einem Punkte der gegebenen Form in Bezug auf die beiden anderen derselben harmonisch conjugirt ist; und ebenso überzeugt man sich, dass die Punkte von $f=0$ zu denen von $Q=0$ in derselben Beziehung stehen, *dass also zwischen f und Q in dieser Beziehung völlige Reciprocität stattfindet.**)

Die Elemente von $f=0$ und die von $Q=0$ liegen ferner so zu denen von $\Delta=0$, dass sie mit diesem Punktepaare ein *cyklisch-projectivisches System bilden* (vgl. p. 201); denn das Doppelverhältniss je zweier Elemente von f mit den Punkten $\xi=0$, $\eta=0$ ändert sich bei cyklischer Vertauschung nicht, es bleibt immer gleich $\frac{1}{\varepsilon}$, *und dasselbe gilt für die Punkte von Q, sowie für ein jedes Tripel der Schaar* (19). Wir haben für jeden Werth von $\frac{\varkappa}{\lambda}$ die folgenden drei projectivischen Punktreihen:

1)	$\xi=0$	$\xi-a\eta=0$	$\xi-\varepsilon a\eta=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\eta=0$
2)	$\xi=0$	$\xi-\varepsilon a\eta=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\xi-a\eta=0$	$\eta=0$
3)	$\xi=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\xi-a\eta=0$	$\xi-\varepsilon a\eta=0$	$\eta=0.$

Sind andererseits beliebig drei Punkte gegeben und vertauscht

*) Vgl. v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 121, und: Beiträge zur Geometrie der Lage, ib. 1857, p. 178.

man dieselben cyklisch unter einander, d. h. macht man eine lineare Transformation, welche jeden der gegebenen Punkte in einen anderen von ihnen überführt, so sind dadurch zwei Punkte auf den Geraden bestimmt, welche bei diesen Transformationen stets sich selbst entsprechen; und diese stellen die quadratische Covariante des betreffenden Tripels dar.*) Da nun die Verschwindungspunkte von $\Delta = 0$ nach dem Vorigen zu allen Tripeln der Schaar $\varkappa f + \lambda Q = 0$ in dieser Beziehung stehen, so folgt, dass die quadratische Covariante irgend einer cubischen Form $\varkappa f + \lambda Q$ sich von Δ nur um einen Factor unterscheiden kann. Wir haben also, wenn wir überhaupt durch die Indices $\varkappa$, λ andeuten, dass die betreffende Form für $\varkappa f + \lambda Q$ statt für f gebildet werde:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = M \,.\, \Delta.$$

Es kann sich ebenso die Invariante $R_{\varkappa\lambda}$ von R nur um einen Factor unterscheiden, denn $R_{\varkappa\lambda}$ ist die Discriminante von $\Delta_{\varkappa\lambda}$, wie R die von Δ; und da sie vom zweiten Grade in den Coëfficienten von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ sein muss, so wird

$$R_{\varkappa\lambda} = M^2 R.$$

Diese Resultate können wir nach unseren früheren Erörterungen dahin zusammenfassen, *dass Δ und R Combinanten des Systems $\varkappa f + \lambda Q$ sind* (vgl. p. 208). — Endlich muss $Q_{\varkappa\lambda}$ ein zu $\Delta_{\varkappa\lambda}$, mithin auch zu Δ cyklisch projectivisches Tripel liefern, d. h. es muss die Form haben:

$$Q_{\varkappa\lambda} = kf + lQ.$$

Diese Relationen für die Formen $\Delta_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $Q_{\varkappa\lambda}$ kann man in der That direct aufstellen und so den Factor M und die k, l bestimmen. Sind nämlich a_0, a_1, a_2, a_3 die Coëfficienten von f; α_0, α_1, α_2, α_3 die von Q, so hat man in den Formen nur $\varkappa a_i + \lambda \alpha_i$ statt a_i einzusetzen und nach Potenzen von $\varkappa$, λ zu entwickeln. So wird z. B.

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 \Delta + \varkappa\lambda\Delta_1 + \lambda^2\Delta_2,$$

wo:
$$\Delta_1 = \Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial a_i} \alpha_i, \quad \Delta_2 = \Sigma \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_i} \alpha_i.$$

Indem man nun diesen Differentiationsprocess an den symbolischen Ausdrücken ausführt, wobei man nur jedes in der betreffenden Form

*) Für die Interpretation des complexen Werthgebietes der Variabeln $\frac{x_1}{x_2}$ auf der Kugelfläche (vgl. die Anmerkung auf p. 173) gelangt man für die cubischen Formen zu folgenden Resultaten: Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man $f = 0$ durch drei äquidistante Punkte eines grössten Kreises, des Aequators, darstellen. Dieselben mögen die geographische Länge 0°, 120°, 240° haben. Dann ist $Q = 0$ repräsentirt durch drei Punkte des Aequators mit der Länge 60°, 180°, 300°, und die Punkte von $\Delta = 0$ fallen in die beiden Pole.

vorkommende Symbol von f nach einander durch ein solches von Δ zu ersetzen und die erhaltenen Ausdrücke zu addiren braucht, wird man schliesslich nach passenden Umformungen zu den folgenden Resultaten geführt; es wird:*)

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)\Delta \tag{23}$$

$$R_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)R \tag{24}$$

$$Q_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)\left(\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f\right). \tag{25}$$

Die Gleichung (24) gibt zu folgendem Satze Veranlassung:

In der Tripelschaar (19) *kommen nur zwei Tripel vor, bei welchen Elemente zusammenfallen; es vereinigen sich dann jedesmal alle drei in einen der Verschwindungspunkte von* Δ. Denn setzt man die aus $R_{\varkappa\lambda} = 0$ sich ergebenden Werthe von $\frac{\varkappa}{\lambda}$ in (19) ein, so geht dies in $\xi^3 = 0$ oder in $\eta^3 = 0$ über.

Durch die Gleichung (25) endlich entspricht jedem Tripel der Schaar:

$$\varkappa f + \lambda Q = 0$$

ein anderes Tripel

$$\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f = 0;$$

und umgekehrt, so dass je ein Punkt der einen Schaar zu einem der andern in Bezug auf die beiden übrigen der letzteren conjugirt ist. Diese Zuordnung ist ferner eine reciproke, denn von dem Tripel $\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f$ wird man durch Wiederholung desselben Processes zu $-\frac{R}{2}(\varkappa f + \lambda Q)$, also zu dem ursprünglichen Tripel zurückgeführt. Insbesondere gibt es jedoch solche Tripel, welche sich selbst conjugirt sind. Diese bestimmen sich durch die Gleichung

$$\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2 = 0,$$

und fallen daher mit je einem (dreifach zählenden) Verschwindungspunkte von Δ zusammen. —

Die vorstehenden Betrachtungen erleiden eine wesentliche Modification, *wenn die Discriminante R verschwindet,* wenn also jede der Gleichungen $f = 0$, $\Delta = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat. Man hat dann $\xi = \eta$, und Δ wird ein volles Quadrat, während nach (14) oder (17) f dem Cubus desselben linearen Ausdrucks proportional wird, so dass

*) Vgl. Näheres hierüber in dem Werke von Clebsch.

$\frac{Q}{\Delta}$ diesen Ausdruck selbst darstellt. *Die Doppelwurzel von Δ ist aber auch gleichzeitig Doppelwurzel von f.* Die Coëfficienten der zweiten Ueberschiebung von f mit Δ nämlich verschwinden nach (10) identisch; setzen wir nun $\Delta = -2\,(\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1)^2$, so gehen dieselben über in die ersten Differentialquotienten von f für $x_i = \xi_i$; wir haben:

$$0 = (a_0 \xi_1^2 + 2\,a_1 \xi_1 \xi_2 + a_1 \xi_2^2)\,\xi_1 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x=\xi},$$
$$0 = (a_1 \xi_1^2 + 2\,a_2 \xi_1 \xi_2 + a_3 \xi_2^2)\,\xi_2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x=\xi};\ \text{q. e. d.}$$

Während diese Doppelwurzel aus $\frac{Q}{\Delta} = 0$ direct bestimmt wird, kann man also die einfache Wurzel aus der linearen Gleichung $\frac{f}{\Delta} = 0$ finden.

Hat endlich f eine *dreifache* Wurzel, d. h. ist $f = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^3$, so wird $\Delta = (\xi\xi)^2\,\xi_x^2 = 0$: *$\Delta$ verschwindet identisch, d. h. es bestehen die Relationen:*

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0,\quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0,\quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0,$$

welche sich auf die beiden reduciren:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}.$$

V. Die binären biquadratischen Formen. — Schlussbemerkungen.

Verwickelter, als die Theorie der cubischen Formen wird bereits die der biquadratischen, d. h. der Formen vierter Ordnung.*) Ist eine Form vierter Ordnung symbolisch gegeben durch

$$f = a_x^4 = b_x^4 \ldots,\quad \text{oder in gewöhnlicher Weise:}$$
$$f = a_0 x_1^4 + 4\,a_1 x_1^3 x_2 + 6\,a_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,a_3 x_1 x_2^3 + a_3 x_2^4,$$

so kann man zeigen, dass sie durch die folgenden vier Bildungen zu ihrem vollständigen Formensysteme ergänzt wird:

*Die zweite Ueberschiebung von f über sich selbst***), die Hesse'sche Covariante (zweiten Grades, vierter Ordnung):

---

*) Für die Theorie dieser Formen vgl. neben den mehrfach erwähnten Aufsätzen von Cayley, besonders: Hesse, Crelle's Journal, Bd. 41; Hermite, ib. Bd. 52 und Brioschi, ib. Bd. 53.

**) Dieselbe ist, wie üblich, mit H bezeichnet, während wir sie allgemein Δ nannten (p. 206), zum Unterschiede von der entsprechenden Bildung bei cubischen Formen.

(1) $H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = H_x^4 = H_x'^4$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 & a_1 x_1^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 \\ a_1 x_1^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 & a_2 x_1^2 + 2 a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 \end{vmatrix};$$

die vierte Ueberschiebung von f über sich selbst (Invariante zweiten Grades):

(2) $$i = (ab)^4 = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2);$$

die erste Ueberschiebung von f mit H, die Covariante T nach unserer früheren (p. 207) Bezeichnung (dritten Grades, sechster Ordnung):

(3) $T = (cH) c_x^3 H_x^3 = (ab)^2 (cb) c_x^3 a_x^2 b_x = T_x^6$

$$= \frac{1}{16} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}$$

$$= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2$$
$$+ 5 (a_0 a_1 a_4 - 3 a_0 a_2 a_3 + 2 a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2 + 10 (a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) x_1^3 x_2^3$$
$$+ 5 (-a_0 a_3 a_4 + 3 a_1 a_2 a_4 - 2 a_1 a_3^2) x_1^2 x_2^4 + (9 a_4 a_2^2 - a_4^2 a_0 - 2 a_1 a_3 a_4 - 6 a_3^2 a_2) x_1 x_2^5$$
$$+ (3 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2 a_3^3) x_2^6;$$

endlich *die vierte Ueberschiebung von f mit H* (Invariante dritten Grades):

(4) $j = (cH)^4 = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2$

$$= 6 \left\{ a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^2 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \right\} = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Alle weiteren Ueberschiebungen und somit nach dem Gordanschen Satze alle weiteren Invarianten und Covarianten von f lassen sich auf diese zurückführen, wie wir bei einzelnen auch noch gelegentlich nachweisen werden. Insbesondere gilt dies also für die Formen P und Θ, deren Verschwinden uns Gruppen von vier und sechs Punkten liefern, welche mit denen von $H = 0$ bez. $T = 0$ in bekannter Relation stehen (vgl. p. 206). Mit der letzteren ist in unserem Falle, wie wir später sehen werden, die Punktgruppe $\Theta = 0$ identisch; die Covariante P dagegen erscheint als lineare Combination der Formen f und H, wie die folgende Rechnung zeigt. Das Verschwinden von P gibt diejenigen Punkte, deren erste Polargruppen einen Punkt doppelt zählend enthalten; P selbst ist daher die Discriminante der cubischen Form

$$a_x a_z^3 = \alpha_z^3 = \beta_z^3 = \ldots$$

d. h. wir haben (vgl. Gleichung (11) p. 220)

(5) $$\mathsf{P} = (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\alpha\gamma) (\beta\delta) = (ab)^2 (cd)^2 (ac) (bd) a_x b_x c_x d_x.$$

Zur Umformung dieses Ausdrucks benutzen wir zunächst die beiden Identitäten (vgl. (II) p. 193):

$$-(ab)(ca)\,b_x c_x = \tfrac{1}{2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (bc)^2 b_x^2 - (ac)^2 a_x^2\right\}$$
$$-(ab)(bd)\,a_x d_x = \tfrac{1}{2}\left\{(ab)^2 d_x^2 + (bd)^2 a_x^2 - (ad)^2 b_x^2\right\}.$$

Setzen wir dies in (5) ein, so werden bei Ausführung der Multiplication zweimal zwei Glieder einander entgegengesetzt gleich, da sie bis auf das Vorzeichen durch Vertauschung von a und b aus einander entstehen; und es bleibt, wenn wir zweimal zwei andere sich nur durch die Stellung der Symbole a, b unterscheidende Glieder durch das Doppelte eines derselben ersetzen:

$$\begin{aligned}(6)\qquad 4\,\mathsf{P} &= (ab)^4 (cd)^2 c_x^2 d_x^2 - 2\,(bc)^2 (bd)^2 (cd)^2 a_x^4 \\ &\quad + 2\,(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2 \\ &= iH - 2jf + 2\,(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2.\end{aligned}$$

Den letzten Term dieses Ausdruckes können wir ebenfalls leicht durch f und H ausdrücken, indem wir seine Bildung in der folgenden Weise geschehen lassen. Quadriren wir die Identität (II) p. 193, so kommt:

$$\begin{aligned}(7)\qquad &(ab)^2 (ac)^2 b_x^2 c_x^2 + (ba)^2 (bc)^2 a_x^2 c_x^2 + (ca)^2 (cb)^2 a_x^2 b_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{a_x^4 (bc)^4 + b_x^4 (ac)^4 + c_x^4 (ab)^4\right\},\end{aligned}$$

und sehen wir hierin a, b, c als gleichbedeutende Symbole einer biquadratischen Form an, so wird dies, wenn wir b durch d ersetzen:

$$(8)\qquad (ca)^2 (cd)^2 a_x^2 d_x^2 = \tfrac{1}{2}(ad)^4 c_x^4 = \tfrac{1}{2}\,if.$$

Durch Polarenbildung folgt hieraus weiter:

$$2\,(ca)^2 (cd)^2 (a_x^2 d_x d_y + d_x^2 a_x a_y) = 4\,(ca)^2 (cd)^2 a_x^2 d_x d_y = 2\,ic_x^3 c_y\,.$$

und:

$$(9)\qquad (ca)^2 (cd)^2 (2\,a_x a_y d_x d_y + a_x^2 d_y^2) = \tfrac{3}{2}\,ic_x^2 c_y^2.$$

Nun ist aber identisch, wie sich durch Quadriren der Gleichung (IV) p. 193 ergibt:

$$a_x a_y d_x d_y = \tfrac{1}{2}\left\{a_x^2 d_y^2 + a_y^2 d_x^2 - (ad)^2 (xy)^2\right\},$$

oder, da in unserem Falle a und d vertauschbar sind:

$$(10)\qquad a_x a_y d_x d_y = a_x^2 d_y^2 - \tfrac{1}{2}(ad)^2 (xy)^2.$$

Dadurch erhalten wir aus (9):

$$\begin{aligned}3\,(cd)^2 (ca)^2 a_x^2 d_y^2 &= \tfrac{3}{2}\,ic_x^2 c_y^2 + (ca)^2 (cd)^2 (ad)^2 (xy)^2 \\ &= \tfrac{3}{2}\,ic_x^2 c_y^2 + j\,(xy)^2.\end{aligned}$$

Setzen wir hierin endlich $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$ und multipliciren auf beiden Seiten mit b_x^2, so erscheint links der in Gleichung (6) noch umzuformende Term; es wird nämlich:

(11) $$(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2 = \tfrac{1}{2} i (bc)^2 c_x^2 b_x^2 + \tfrac{1}{3} j b_x^4$$
$$= \tfrac{1}{2} iH + \tfrac{1}{3} jf,$$

und für die gesuchte Covariante finden wir demnach:

(12) $$\mathsf{P} = \tfrac{1}{6}(3iH - 2jf).$$

Die Punkte, deren erstes Polarsystem in Bezug auf $f = 0$ einen Doppelpunkt enthalten, bilden also ein Quadrupel der Schaar $\varkappa f + \lambda H = 0$, gegeben durch die Gleichung:

$$3iH - 2jf = 0.$$

Ehe wir auf das Studium letzterer Involution vierter Ordnung näher eingehen, wollen wir die Lage der Punkte $T = 0$ untersuchen. Es knüpfen sich diese Betrachtungen wesentlich an eine identische Gleichung, welche einer früheren Bemerkung zufolge zwischen den Formen f, H, T bestehen muss. Dieselbe ergibt sich wieder aus dem Satze, nach welchem das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen als quadratische Function dieser Formen selbst darstellbar ist. Wir haben somit in unserem Falle, wenn wieder $(\varphi, \chi)_r$ die r^{te} Ueberschiebung von φ mit χ bedeutet (vgl. p. 223):

(13) $$T^2 = (f, H)_1^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{(f, f)_2 H^2 - 2(f, H)_2 fH + (H, H)_2 f^2\right\},$$

worin noch die Ueberschiebungen $(f, H)_2$ und $(H, H)_2$ zu berechnen sind. Zu dem Zwecke gehen wir von den Polaren der Form H aus. Es ist

$$4 H_x^3 H_y = (ab)^2 (2 b_x b_y a_x^2 + 2 a_x a_y b_x^2),$$

oder da beide Glieder durch Vertauschung von a und b in einander übergehen

$$H_x^3 H_y = (ab)^2 a_x a_y b_x^2.$$

Hieraus folgt ferner für die zweite Polare von y:

$$3 H_x^2 H_y^2 = (ab)^2 (a_y^2 b_x^2 + 2 a_x a_y b_x b_y),$$

oder nach Gleichung (10):

(14) $$H_x^2 H_y^2 = (ab)^2 a_y^2 b_x^2 - \tfrac{1}{3} i (xy)^2.$$

Setzen wir nun $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$ und multipliciren mit c_x^2, so erhalten wir:

$$(f, H)_2 = (cH)^2 H_x^2 c_x^2 = (ab)^2 (ac)^2 b_x^2 c_x^2 - \tfrac{1}{3} i c_x^4,$$

oder unter Berücksichtigung von (8):

(15) $$(f, H)_2 = \tfrac{1}{6} if.$$

Die zweite Ueberschiebung von H mit sich selbst entsteht dagegen aus (14), indem man y_1, y_2 bez. durch H_2', $-H_1'$ ersetzt und mit $H_x'^2$ multiplicirt; man erhält dann:

$$(H, H)_2 = (HH')^2 H_x^2 H_x'^2 = (ab)^2 (aH')^2 b_x^2 H_x'^2 - \tfrac{1}{3} i H_x'^4.$$

Nun folgt aber aus der identischen Gleichung (7), indem man H' statt c schreibt und die Vertauschbarkeit von a und b berücksichtigt:

$$2 (ab)^2 (aH')^2 b_x H_x'^2 + (aH')^2 (bH')^2 a_x^2 b_x^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \left\{(ab)^4 H_x'^4 + 2 (aH')^4 b_x^4\right\}$$

und dadurch erhalten wir:

$$(H, H)_2 = iH + \tfrac{1}{2} j f - \tfrac{1}{2} (aH')^2 (bH')^2 a_x^2 b_x^2.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes entsteht wieder aus $H_z'^2 H_y'^2$, wenn man in bekannter Weise die z durch Symbole a, die y durch Symbole b ersetzt und mit $a_x^2 b_x^2$ multiplicirt; wegen (14):

$$H_z'^2 H_y'^2 = (cd)^2 c_z^2 d_y^2 - \tfrac{1}{3} i (zy)^2$$

ergibt sich daher:

$$(H'a)^2 (H'b)^2 a_x^2 b_x^2 = (cd)^2 (ca)^2 (db)^2 a_x^2 b_x^2 - \tfrac{1}{3} iH,$$

oder wegen (11):

$$= \tfrac{1}{6} i H + \tfrac{1}{3} jf.$$

Setzen wir dies schliesslich in den Ausdruck für $(H, H)_2$ ein, *so erhalten wir für die zweite Ueberschiebung von H mit sich selbst:*

(16) $$(H, H)_2 = \tfrac{1}{3} jf - \tfrac{1}{6} iH;$$

was nebenbei den Satz ergibt, dass *die* Hesse*'sche Form der* Hesse*schen Form von f ein Quadrupel der Involution* $\varkappa f + \lambda H$ *bildet*, wie es sein muss, wenn obiges Formensystem ein vollständiges ist.

Wir haben somit alle in (13) vorkommenden Ueberschiebungen gebildet; und diese Gleichung geht wegen der erhaltenen Resultate über in:

(17) $$T^2 = -\tfrac{1}{2} \left\{H^3 - \tfrac{1}{2} iHf^2 + \tfrac{1}{3} jf^3\right\}.$$

Die Gleichung $T^2 = 0$ kann daher als eine cubische für die Grösse $\frac{H}{f}$ aufgefasst werden; und folglich muss sich, wenn $-m_1, -m_2, -m_3$ die Wurzeln dieser cubischen Gleichung sind, der Ausdruck (17) in der Form

$$T^2 = -\tfrac{1}{2} (H + m_1 f) (H + m_2 f) (H + m_3 f)$$

darstellen lassen. Hier steht links ein vollständiges Quadrat; dasselbe muss also auch auf der rechten Seite der Fall sein. Aber keiner der drei biquadratischen Factoren hat im Allgemeinen mit den andern einen linearen Factor gemein; denn ein solcher würde dann auch gemeinsamer Factor von f und H werden, und Letzteres tritt im Allgemeinen nicht ein, wovon man sich durch folgendes Beispiel überzeugen mag: Es sei

$$f = x_1^4 + x_2^4;$$

dann wird:

$$H = 2\,x_1^2 x_2^2.$$

Daher muss jeder der Factoren $(H + m_i f)$ das vollständige Quadrat eines Ausdrucks zweiter Ordnung sein, dessen Coëfficienten sich mit Hülfe von Coëfficientenvergleichung durch Ausziehen *einer* Quadratwurzel bestimmen lassen müssen. Wir können demnach diese quadratischen Factoren von T, welche durch φ, ψ, χ bezeichnet sein mögen, als bekannt ansehen und dieselben durch die folgenden Gleichungen bestimmt annehmen:

$$\begin{aligned} H + m_1 f &= -2\,\varphi^2 \\ H + m_2 f &= -2\,\psi^2 \qquad (18) \\ H + m_3 f &= -2\,\chi^2 \end{aligned}$$

$$T = 2\,\varphi\psi\chi, \qquad (19)$$

wobei das Vorzeichen zweier Formen beliebig gewählt, das der dritten dann aber aus der letzten Gleichung bestimmt ist, und wo m_1, m_2, m_3 die negativ genommenen Wurzeln der Gleichung:

$$m^3 - \frac{i}{2}\,m - \frac{j}{3} = 0$$

sind. Durch die Möglichkeit dieses Verfahrens ist T als eine Form sechster Ordnung von sehr speciellem Charakter gekennzeichnet, denn bei den allgemeinen Formen dieser Art ist eine Zerlegung in quadratische Factoren durch eine cubische Gleichung nicht möglich.*) Zwischen den Punkten von $T = 0$ bestehen in der That entsprechend der Eintheilung in drei Punktepaare noch besondere Relationen. Die Functionen φ, ψ, χ genügen nämlich der folgenden Bedingung, die sich aus (18) durch Elimination von H und f ergibt:

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & \varphi^2 \\ 1 & m_2 & \psi^2 \\ 1 & m_3 & \chi^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn wir die Determinante entwickeln:

$$(m_2 - m_3)\,\varphi^2 + (m_3 - m_1)\,\psi^2 + (m_1 - m_2)\,\chi^2 = 0. \qquad (20)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass jedes der drei Punktepaare $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ zu den beiden anderen harmonisch liegt. Bilden wir nämlich nach einander die ersten Ueberschiebungen der Formen φ, ψ, χ mit dem Ausdrucke (20), so erhalten wir, da die erste Ueberschiebung einer jeden Form mit sich selbst verschwindet:

---

*) Ueber die Bedingungen, denen eine binäre Form 6. Ordnung zu genügen hat, damit sie als Covariante T einer biquadratischen Form aufgefasst werden kann, vgl. Clebsch: a. a. O. p. 447, und Crelle's Journal, Bd. 67.

$$(m_3 - m_1)\,\psi \cdot (\psi, \varphi)_1 + (m_1 - m_2)\,\chi \cdot (\chi, \varphi)_1 = 0$$
$$(m_2 - m_3)\,\varphi \cdot (\varphi, \psi)_1 + (m_1 - m_2)\,\chi \cdot (\chi, \psi)_1 = 0$$
$$(m_2 - m_3)\,\varphi \cdot (\varphi, \chi)_1 + (m_3 - m_1)\,\psi \cdot (\psi, \chi)_1 = 0;$$

und hieraus folgt zunächst, *dass jede der Formen φ, ψ, χ proportional ist zu der Functionaldeterminante der beiden anderen.* Jede dieser Functionaldeterminanten stellt aber die beiden Doppelpunkte der durch die betreffenden zwei Punktepaare bestimmten Involution dar (vgl. p. 216); und somit haben wir den Satz:

Die sechs Punkte $T = 0$ lassen sich der Art in drei Paare eintheilen, dass jedes Paar gleichzeitig zu den beiden andern harmonisch liegt, oder, was dasselbe ist, dass immer das eine Paar die Doppelpunkte der durch die beiden anderen bestimmten quadratischen Involution darstellt.

Die betrachteten sechs Punkte stehen ferner auch zu dem gegebenen Punktquadrupel in einer wichtigen Beziehung. Aus den Gleichungen (18) ergibt sich nämlich:

$$f = 2\,\frac{\chi^2 - \psi^2}{m_2 - m_3} = 2\,\frac{\psi^2 - \varphi^2}{m_1 - m_2} = 2\,\frac{\varphi^2 - \chi^2}{m_3 - m_1}; \tag{21}$$

d. h. die Form f ist, wenn φ, ψ, χ bekannt sind, in zwei quadratische Factoren zerlegt und zwar auf drei verschiedene Weisen: die vier Punkte von f sind dann dargestellt durch jedes Paar der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \psi + \chi &= 0, \quad \psi - \chi = 0 \\ \chi + \varphi &= 0, \quad \chi - \varphi = 0 \\ \varphi + \psi &= 0, \quad \varphi - \psi = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Aus diesen kann man nun die Coordinaten der vier Grundpunkte rational berechnen; und damit wäre die vollständige Lösung der Gleichung vierten Grades $f = 0$ gegeben, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

Der geometrische Inhalt dieser Beziehung der Punktepaare von $T = 0$ zu denen von $f = 0$ folgt ebenfalls aus unseren früheren Betrachtungen über quadratische Involutionen. Nach denselben liegen alle Punktepaare $\psi + \lambda\varphi = 0$ harmonisch zu dem Paare, welches durch das Verschwinden der Functionaldeterminante von φ, ψ gegeben ist, also zu

$$(\varphi, \psi)_1 = (\varphi\psi)\,\varphi_x\psi_x = 0.$$

Diese Functionaldeterminante aber ist nach einem soeben bewiesenen Satze proportional zu der dritten Form χ; und also liegt das durch letztere dargestellte Punktepaare harmonisch zu allen Paaren der Involution $\psi + \lambda\varphi = 0$, und insbesondere daher auch zu den beiden Paaren

$$\psi + \varphi = 0, \quad \psi - \varphi = 0.$$

Analoges gilt für die andern Formen (22), und somit haben wir den Satz:

Theilt man vier gegebene Punkte auf die drei möglichen Arten in zwei Paare und sucht jedesmal das zu beiden Paaren harmonische Punktepaar, so sind die entstehenden drei Paare auch unter einander harmonisch. Die letzteren werden, wenn die vier Punkte durch das Verschwinden einer biquadratischen Form f gegeben sind, durch das Verschwinden der Covariante sechster Ordnung T bestimmt. — Dieser Satz lehrt uns die Punkte von T construiren, wenn die von f gegeben sind, wie man unmittelbar einsieht.

Damit sind die Covarianten von f geometrisch vollständig interpretirt, und es bleibt uns noch übrig die geometrische Bedeutung der Invarianten i, j aufzusuchen. Ihr Verschwinden muss unseren allgemeinen Betrachtungen zufolge (p. 197) eine Relation für das Doppelverhältniss der vier Punkte $f = 0$ ergeben, und ebenso muss die absolute Invariante $\frac{i^3}{j^2}$ mit diesem Doppelverhältnisse in enger Beziehung stehen. Das letztere (α) ist aber, je nachdem wir die vier gegebenen Punkte in zwei Paare eintheilen, durch eine der folgenden Gleichungen bestimmt (vgl. p. 217):

$$(23)\qquad \begin{aligned} D_1'^2(\alpha-1)^2 - D_1 D_1''(\alpha+1)^2 &= 0 \\ D_2'^2(\alpha-1)^2 - D_2 D_2''(\alpha+1)^2 &= 0 \\ D_3'^2(\alpha-1)^2 - D_3 D_3''(\alpha+1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Es bedeuten hier D_1, D_2, D_3 bez. die Invarianten der quadratischen Formen $\psi+\chi$, $\chi+\varphi$, $\varphi+\psi$; D_1'', D_2'', D_3'' bez. die Invarianten der Formen $\psi-\chi$, $\chi-\varphi$, $\varphi-\psi$; und D_1', D_2', D_3' bez. die simultanen Invarianten aus je einem Paare der quadratischen Formen (22). Von den Wurzeln einer jeden dieser Gleichungen ist die eine der reciproke Werth der andern; und alle sechs Wurzeln zusammen geben uns daher die sechs Werthe des aus den vier Punkten von f zu bildenden Doppelverhältnisses, nämlich, wenn α einer dieser Werthe ist:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ \frac{\alpha-1}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen (23) erhalten wir also eine Gleichung sechster Ordnung für dies Doppelverhältniss, von deren Wurzeln sich je fünf durch eine derselben in angegebener Weise ausdrücken, und bei deren Bildung die Formen φ, ψ, χ in symmetrischer Weise benutzt sind. Dieselbe wird, wenn wir $\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} = \frac{p}{q}$ setzen:

$$(24)\qquad \Delta_0 p^3 - \Delta_1 p^2 q + \Delta_2 p q^2 - \Delta_3 q^3 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta_0 = D_1'^2 D_2'^2 D_3'^2, \quad \Delta_3 = D_1 D_2 D_3 D_1'' D_2'' D_3'',$$

$$\Delta_1 = D_1'^2 D_2'^2 D_3 D_3'' + D_2'^2 D_3'^2 D_1 D_1'' + D_3'^2 D_1'^2 D_2 D_2'',$$

$$\Delta_2 = D_1'^2 D_2 D_3 D_2'' D_3'' + D_2'^2 D_3 D_1 D_3'' D_1'' + D_3'^2 D_1 D_2 D_1'' D_2''.$$

Die Coëfficienten dieser Gleichung lassen sich nun rational durch die Invarianten i, j ausdrücken. Wir können sie nämlich als symmetrische Functionen der Grössen m_1, m_2, m_3 darstellen und somit auch als Functionen der Coëfficienten der Gleichung:

$$(25) \qquad \Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2} \varkappa \lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3 = 0,$$

als deren Wurzeln $\frac{\varkappa}{\lambda}$ eben $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$ gegeben waren.

Zunächst führen wir erstere Darstellung aus. Wir sahen schon früher, dass sich die erste Ueberschiebung zweier der Formen φ, ψ, χ von der dritten nur um einen Zahlenfactor unterscheidet. Letzteren können wir durch die folgenden Bildungen, welche sich aus (18) und (19) ergeben, bestimmen. Es ist:

$$4\varphi\psi(\varphi\psi)\varphi_x\psi_x = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} + m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} + m_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{16}\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} = (m_1 - m_2) T = 2\varphi\psi\chi(m_1 - m_2).$$

Hier kann man auf beiden Seiten den Factor $2\varphi\psi$ fortlassen und erhält so, wenn man die analogen Bildungen für die beiden anderen Ueberschiebungen macht, die drei Gleichungen:

$$2(\psi, \chi)_1 = (m_2 - m_3)\varphi$$

$$2(\chi, \varphi)_1 = (m_3 - m_1)\psi$$

$$2(\varphi, \psi)_1 = (m_1 - m_2)\chi.$$

Andererseits lässt sich (vgl. p. 223) das Quadrat jeder der links stehenden Ueberschiebungen durch die beiden betreffenden Formen ausdrücken: Man erhält z. B.:

$$(\varphi, \psi)_1^2 = -\frac{1}{2}\left\{\varphi^2(\psi, \psi)_2 - 2\varphi\psi(\varphi, \psi)_2 + \psi^2(\varphi, \varphi)_2\right\},$$

oder wegen der soeben abgeleiteten Relationen und mit Hülfe der Identität (20):

$$\frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left\{(m_2 - m_3)\varphi^2 + (m_3 - m_1)\psi^2\right\} = \varphi^2(\psi, \psi)_2 - 2\varphi\psi(\varphi, \psi)_2 + \psi^2(\varphi, \varphi)_2,$$

woraus sich durch Vergleichung der Coëfficienten von φ^2, ψ^2 die Werthe der Invarianten $(\varphi, \varphi)_2$, $(\varphi, \psi)_2$, $(\psi, \psi)_2$ ergeben. Bildet man

die beiden entsprechenden Gleichungen für die Quadrate der Ueberschiebungen $(\psi, \chi)_1$, $(\chi, \varphi)_1$, so kommt man also zu den folgenden Resultaten:

$$(26)\qquad \begin{aligned} (\varphi, \varphi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)(m_3 - m_1), \\ (\psi, \psi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_2 - m_3)(m_1 - m_2), \\ (\chi, \chi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_3 - m_1)(m_2 - m_3), \end{aligned}$$

$$(27)\qquad (\psi, \chi)_2 = 0, \quad (\chi, \varphi)_2 = 0, \quad (\varphi, \psi)_2 = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben sich auch aus dem Satze, dass jedes der drei Punktepaare φ, ψ, χ zu den beiden anderen harmonisch liegt. Mittelst dieser Relationen können wir nun die Invarianten D durch die Wurzeln m_1, m_2, m_3 darstellen. Es wird nämlich*) wegen des Verschwindens der simultanen Invarianten:

$$\begin{aligned} D_1 = D_1'' &= (\psi, \psi)_2 + (\chi, \chi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_2 - m_3)^2 \\ D_2 = D_2'' &= (\chi, \chi)_2 + (\varphi, \varphi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_3 - m_1)^2 \\ D_3 = D_3'' &= (\varphi, \varphi)_2 + (\psi, \psi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)^2; \end{aligned}$$

und wenn wir berücksichtigen, dass wegen des Fehlens des zweiten Gliedes in der Gleichung $\Omega(x, \lambda) = 0$ die Summe der Wurzeln m_1, m_2, m_3 verschwindet:

$$\begin{aligned} D_1' &= (\psi, \psi)_2 - (\chi, \chi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_2 - m_3)\, m_1 \\ D_2' &= (\chi, \chi)_2 - (\varphi, \varphi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_3 - m_1)\, m_2 \\ D_3' &= (\varphi, \varphi)_2 - (\psi, \psi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_1 - m_2)\, m_3. \end{aligned}$$

Die Coëfficienten der Gleichung (24) sind mittelst dieser Relationen als symmetrische Functionen von m_1, m_2, m_3 dargestellt; um diese nun weiter durch i und j auszudrücken, müssen wir uns der folgenden Gleichungen bedienen:

$$\begin{aligned} \Sigma m_1 \quad &= m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ \Sigma m_1 m_2 &= m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = -\frac{i}{2} \\ m_1 m_2 m_3 &= \frac{j}{3}. \end{aligned}$$

Aus ihnen leitet man ferner die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} (\Sigma m_1)^2 - \Sigma 2 m_1 m_2 &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \Sigma m_1^2 = i, \\ \Sigma m_1^3 \quad &= -\Sigma m_1^2 m_2 = 3 m_1 m_2 m_3 = j, \\ \Sigma m_1^2 m_2^3 &= (\Sigma m_1 m_2)^3 - 3 m_1 m_2 m_3 (2 m_1 m_2 m_3 + \Sigma m_1^2 m_2) \\ &= -\tfrac{1}{8} i^3 + \tfrac{1}{3} j^2, \\ \Sigma m_1^4 m_2^2 &= \tfrac{1}{4} i^3 - \tfrac{1}{3} j^2, \quad \Sigma m_1^6 = \tfrac{1}{2} i^3 + \tfrac{1}{3} j^2, \\ \Sigma m_1^5 m_2 \quad &= -\tfrac{1}{4} i^3 - \tfrac{1}{3} j^2. \end{aligned}$$

*) Vgl. Gleichung (4), p. 214, worin $\lambda = 1$ zu nehmen ist.

Endlich müssen wir noch das Quadrat des Productes der Differenzen $m_1 - m_2$, $m_2 - m_3$, $m_3 - m_1$ bilden. Dasselbe ist bekanntlich von der Discriminante R der cubischen Form $\Omega(\varkappa, \lambda)$ nur um einen Zahlenfactor verschieden, und zwar hat man (vgl. p. 220, Anmerk.):

$$R = \tfrac{2}{27}(m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2.$$

Andererseits findet man in unserem Falle nach Gleichung (8) p. 219:

$$R = \tfrac{1}{27}(i^3 - 6j^2),$$

und somit folgt:

$$(m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 = \tfrac{1}{2}(i^3 - 6j^2).$$

Die Anwendung der aufgestellten Relationen und der Gleichungen (26), (27) ergibt nun für die Coëfficienten der Gleichung (24) die folgenden Resultate. Es wird:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \tfrac{27^2}{64}(m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2\, m_1^2 m_2^2 m_3^2 \\
&= \tfrac{81}{128}(i^3 - 6j^2)\, j^2. \\
\Delta_1 &= \tfrac{81}{64}(m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 \left\{m_1^2 m_2^2 (m_1 - m_2)^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_2^2 m_3^2 (m_2 - m_3)^2 + m_3^2 m_1^2 (m_3 - m_1)^2\right\} \\
&= \tfrac{81}{128}(i^3 - 6j^2)\left\{\Sigma m_1^4 m_2^2 - 2\,\Sigma m_1^3 m_2^3\right\} \\
&= \tfrac{81}{128}(i^3 - 6j^2)\left(\frac{i^3}{2} - j^2\right). \\
\Delta_2 &= \tfrac{9}{128}(i^3 - 6j^2)\left\{m_1^2 (m_1 - m_2)^2 (m_3 - m_1)^2 + m_2^2 (m_2 - m_3)^2 (m_1 - m_3)^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_3^2 (m_3 - m_1)^2 (m_2 - m_2)^2\right\} \\
&= \tfrac{9}{128}(i^3 - 6j^2)\left\{\Sigma m_1^6 - 2\,\Sigma m_1^5 m_2 + \Sigma m_1^4 m_2^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_1 m_2 m_3 (4\,\Sigma m_1^3 - 2\,\Sigma m_1^2 m_2 + 3\, m_1 m_2 m_3)\right\} \\
&= \tfrac{9}{128}(i^3 - 6j^2)(i^3 + 3j^2). \\
\Delta_3 &= \tfrac{1}{64}(m_1 - m_2)^4 (m_2 - m_3)^4 (m_3 - m_1)^4 \\
&= \frac{1}{2 \cdot 128}(i^3 - 6j^2).
\end{aligned}$$

Setzen wir die so gefundenen Werthe in die Gleichung (24) ein, so geht dieselbe, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{128}(i^3 - 6j^2)$ über in:

$$81\, p^3 j^2 - 81\, p^2 q \left(\frac{i^3}{2} - j^2\right) + 9\, p q^2 (i^3 + 3j^2) - \tfrac{1}{2} q^3 (i^3 - 6j^2) = 0,$$

oder anders geordnet:

$$\tfrac{9}{2} i^3 q \left(2pq - \tfrac{1}{9} q^2 - 9p^2\right) + 3j^2 (27p^3 + 27p^2 q + 9pq^2 + q^3) = 0,$$

woraus sich der Werth für die absolute Invariante ergibt, nämlich:

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2}{3}\,\frac{(3p + q)^3}{q\left(\frac{1}{3} q - 3p\right)^2},$$

oder, wenn wir statt $\frac{p}{q}$ wieder das Doppelverhältniss α einführen, d. h. $\frac{p}{q} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}$ setzen:

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}. \tag{28}$$

Diese Gleichung stellt die gesuchte Beziehung zwischen dem Doppelverhältnisse der Grundpunkte von f und der absoluten Invariante dar. Sie lässt uns auch die Bedeutung des Verschwindens der Invarianten i, j unmittelbar erkennen. Soll nämlich das Doppelverhältniss α äquianharmonisch werden, so muss $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ sein, d. h. der Zähler in (28) verschwinden. *Die Bedingung der äquianharmonischen Lage ist also*

$$i = 0.$$

Dieselbe ist ferner nach Gleichung (16) dadurch charakterisirt, *dass die* Hesse'*sche Form der* Hesse'*schen Form von f mit der Grundform f identisch ist.* Sollen dagegen die vier Punkte $f = 0$ harmonisch liegen, so wird $\alpha = -1, +2$ oder $+\frac{1}{2}$, und in allen drei Fällen verschwindet der Nenner in (28). *Die Bedingung der harmonischen Lage ist also*

$$j = 0.$$

Der Werth des Doppelverhältnisses wird endlich gleich der Einheit, wenn zwei der vier Grundpunkte zusammenfallen. Setzen wir also in (28) $\alpha = 1$, so folgt *als Bedingung dafür, dass die biquadratische Gleichung $f = 0$ eine Doppelwurzel habe:*

$$i^3 - 6j^2 = 0.$$

Die Discriminante R der cubischen Form $\Omega(\varkappa, \lambda)$ ist daher gleichzeitig *die Discriminante von f.* —

Durch das Verschwinden von R werden die vorstehenden Betrachtungen mehrfach modificirt. Es möge in diesem Falle $m_2 = m_3$ werden, dagegen m_1 und m_2 noch verschieden sein; dann wird zunächst:

$$\Omega = \left(\varkappa + \frac{j}{i}\lambda\right)^2 \left(\varkappa - \frac{2j}{i}\lambda\right),$$

und also:

$$m_2 = -\frac{j}{i}, \quad m_1 = 2\frac{j}{i}.$$

Aus (18) folgt ferner $\psi = \chi$, und aus (26) $(\psi, \psi)_2 = 0$; es ist also $\psi = \chi$ das Quadrat eines linearen Ausdrucks ξ, und es wird:

$$H + m_2 f = H - \frac{j}{i} f = -2\xi^4$$

Die Identität (27) $(\varphi, \psi)_2 = 0$ geht hier über in $(\varphi\xi)^2 = 0$; es verschwindet also φ, wenn man $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$ setzt, d. h. man hat

$$\varphi = \xi\eta,$$

wo η ein von ξ *verschiedener* linearer Ausdruck ist; denn es wird nach (26)

$$(\varphi, \varphi)_2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\xi\xi)(\eta\eta) - (\xi\eta)^2\right\} = -\tfrac{1}{2}(\xi\eta)^2$$
$$= (m_1 - m_2)^2, \text{ also nicht } = 0.$$

Setzt man nun die angegebenen Werthe von m_1, m_2 in die Gleichungen (18) ein, so findet man:

$$f = \tfrac{2}{3}\frac{i}{j}\xi^2(\xi^2 - \eta^2)$$
$$H = -\tfrac{2}{3}\xi^2(2\xi^2 + \eta^2)$$
$$T = 2\xi^5\eta;$$

und dies gibt den Satz: *Wenn R verschwindet, so wird der Doppelfactor ξ von f bestimmt durch die Gleichung $iH - jf = i\xi^4$; und derselbe ist auch zweifacher Factor von H und fünffacher von T.*

Diese Bestimmung der Doppelwurzel wird aber illusorisch, wenn neben R auch i verschwindet; dann muss, da $R = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2)$, auch j Null sein. Dadurch wird aber $\Omega = x^3$. Die drei quadratischen Factoren von T sind also unter einander identisch: $\varphi = \psi = \chi$, und zwar alle gleich dem Quadrate eines linearen Ausdrucks ξ; denn aus (26) folgt $(\varphi, \varphi)_2 = 0$. Ferner wird nach (18), da $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, H das Biquadrat dieses linearen Ausdrucks, und T proportional zu der sechsten Potenz desselben:

$$H = -2\xi^4, \quad T = 2\xi^6.$$

Nun ist aber nach (15), wenn $i = 0$, auch $(f, H)_2 = 0$, d. h.

$$(a\xi)^2 a_x^2 = 0,$$

unabhängig von den x, also $(c\xi)^4 = 0$: f enthält den Factor ξ. Setzen wir demnach:

$$f = a_x^4 = \xi \cdot u, \quad (u = \alpha_x^3)$$

und bilden wieder die Form $(f, H)_2$, so wird:

$$3(a\xi)^2 a_x^2 = \xi \cdot (\alpha\xi)^2 \alpha_x = 0,$$

also auch $(\alpha\xi)^3 = 0$; und eine Fortsetzung desselben Verfahrens zeigt, dass wir setzen müssen:

$$f = \xi^3 \cdot \eta,$$

wo η ein von ξ verschiedener linearer Ausdruck ist. Umgekehrt folgt, wenn $f = \xi^3 \cdot \eta$ und somit $H = -\frac{1}{8}(\xi\eta) \cdot \xi^4$, dass dann immer i und j verschwinden; denn wegen $iH - jf = i\xi^4$ muss $j = 0$ sein, und dann ergibt sich wegen $R = 0$ auch $i = 0$.

Wenn also H ein Biquadrat ist, so hat man $i = 0$, $j = 0$, und f

hat einen dreifachen Factor; so wie umgekehrt im letzteren Falle immer H ein Biquadrat und $i = 0$, $j = 0$ ist.

Die Bestimmung der Doppelwurzel von f durch die Gleichung $\psi = \chi = iH - jf = 0$ wird aber auch illusorisch, wenn die einzelnen Coëfficienten dieser Gleichung Null sind. In dem Falle verschwindet also $\chi = \psi$ identisch, und wir haben:

$$iH - jf = 0, \quad T = 0.$$

Ferner gibt die erste der Gleichungen (18):

$$f = -\frac{2i}{3j}\varphi^2.$$

Ist umgekehrt f das Quadrat einer Form zweiter Ordnung: $f = (\alpha_x{}^2)^2$, deren Invariante $D = (\alpha\beta)^2$ ist, so wird $i = D^2$, $j = D^3$ und $H = D.f$; also haben wir den Satz:

Wenn H von f nur um einen constanten Factor verschieden ist ($iH = jf$), dann und nur dann hat f zwei verschiedene Doppelfactoren, d. h. ist f das Quadrat einer quadratischen Form.

Dieser Fall ist also nicht mehr, wie die beiden vorigen durch das Verschwinden von Invarianten zu charakterisiren; vielmehr geschieht dies durch das *identische* Verschwinden der Covariante $iH - jf$ (vgl. p. 174). Dies führt auf 5 Gleichungen, zwischen den 5 Coëfficienten von f, während doch das Auftreten zweier Doppelwurzeln nur die Bestimmung von 2 Constanten involvirt. Wir haben also zwar eine zu grosse Zahl von Gleichungen; aber keine von ihnen ist überflüssig, und ihr *Zusammenbestehen* wird eben nur durch die erwähnte Ausartung unseres Punktquadrupels $f = 0$ ermöglicht. Aehnliche Vorkommnisse werden uns später bei den Kegelschnitten und den Curven dritter Ordnung wiederholt begegnen; wir heben den soeben behandelten Fall nur als erstes Beispiel hervor.*) (Vgl. hierzu auch unten p. 272, f.)

Endlich kann es noch eintreten, dass H identisch verschwindet, dass also die Gleichungen bestehen:

$$a_0a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0a_3 - a_1a_2 = 0,$$
$$a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2 = 0,$$
$$a_1a_4 - a_2a_3 = 0, \quad a_2a_4 - a_3^2 = 0.$$

Dann wird $a_2 = \frac{a_1^2}{a_0}$, $a_3 = \frac{a_1^3}{a_0^2}$, $a_4 = \frac{a_1^4}{a_0^3}$, und:

$$f = a_0\left(x_1 + \frac{a_1}{a_0}x_2\right)^4.$$

Alsdann verschwinden *alle* Invarianten und Covarianten von f, indem

*) Der Fall einer dreifachen Wurzel bei einer cubischen Gleichung (p. 228) gab allerdings schon ein Beispiel für das identische Verschwinden einer Covariante (Δ); aber dies lieferte gerade so viele Bedingungsgleichungen (nämlich zwei), als durch das Auftreten einer dreifachen Wurzel gefordert sind.

die symbolische Darstellung in die wirkliche übergeht; wir haben also: *Wenn H identisch verschwindet, so ist f immer das Biquadrat eines linearen Ausdrucks, und umgekehrt.* —

Zu den vier Punkten f und den covarianten Punktgruppen derselben steht die Schaar von Punktquadrupeln

$$\varkappa f + \lambda H = 0$$

in besonders merkwürdigen Beziehungen. Es ergeben sich dieselben, wenn wir die Formen H, T, i, j für die zusammengesetzte Function vierter Ordnung $\varkappa f + \lambda H$ ebenso bilden, wie dies früher für die Form f geschah. Wir wollen diese invarianten Bildungen bez. durch $H_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, $i_{\varkappa\lambda}$, $j_{\varkappa\lambda}$ bezeichnen. Es ist dann, nach dem Taylor'schen Satze:

$$H_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 (f, f)_2 + 2\varkappa\lambda (f, H)_2 + \lambda^2 (H, H)_2,$$

wo der Definition zufolge $(f, f)_2 = H$ ist, während sich die Ueberschiebungen $(f, H)_2$, $(H, H)_2$ aus den Gleichungen (15) und (16) ergeben. Durch Einsetzen der dort gefundenen Werthe erhalten wir:

$$\begin{aligned} H_{\varkappa\lambda} &= \varkappa^2 H + 2\varkappa\lambda \frac{i}{6} f + \lambda^2 \left(\frac{j}{3} f - \frac{i}{6} H\right) \\ &= H\left(\varkappa^2 - \frac{i}{6}\lambda^2\right) + f\left(\frac{i}{3}\varkappa\lambda + \frac{j}{3}\lambda^2\right). \end{aligned}$$

Diese Formel können wir in eine elegantere Gestalt mit Hülfe der Function

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{j}{3}\lambda^3$$

bringen; es wird nämlich:

$$H_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{3}\left(H \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - f \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right). \tag{29}$$

Die Einführung der Function Ω erleichtert auch die Berechnung von $T_{\varkappa\lambda}$; denn diese Form ist nach (3) als die Functionaldeterminante von $\varkappa f + \lambda H$ und $H_{\varkappa\lambda}$, dividirt durch 16, definirt; d. h. wir haben:

$$\begin{aligned} T_{\varkappa\lambda} &= \frac{1}{3 \cdot 16} \begin{vmatrix} \varkappa \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} \\ \varkappa \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 16} \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} & \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die erste der rechts stehenden Determinanten hat aber den Werth $3\,\Omega(\varkappa, \lambda)$, die andere den Werth $16\,(f, H)_1 = 16\,T$, und also ist

$$T_{\varkappa\lambda} = \Omega(\varkappa, \lambda) \,.\, T. \tag{30}$$

Diese Gleichung giebt geometrisch den folgenden Satz:

*Die drei quadratischen Factoren von T stehen zu allen Quadrupeln der Schaar $\varkappa f + \lambda H = 0$ in derselben Beziehung, wie zu dem Quadrupel $f = 0$. D. h. die Involution vierter Ordnung $\varkappa f + \lambda H = 0$ lässt sich auf drei verschiedene Arten in zwei projectivische Involutionen zweiter Ordnung auflösen, deren Gruppen einander wechselseitig entsprechen. Je zwei solche projectivische Involutionen haben immer ein Paar der Punkte $T = 0$ gemeinsam; das zweite dieser Punktepaare aber bildet für die eine, das dritte für die andere dieser Involutionen die beiden Doppelelemente.**)

---

*) Bei Betrachtung der drei möglichen Collineationen, welche die vier Punkte a, b, c, d einer binären biquadratischen Form in einander überführen, insofern:

$$\begin{array}{lcl} (abcd) & \text{projectivisch zu} & (badc) \\ & \text{"} \quad \text{"} & (cdab) \\ & \text{"} \quad \text{"} & (dcba), \end{array}$$

erscheinen die Punktepaare von T bez. als die Doppelelemente dieser Collineationen. Man gelangt dadurch für die Darstellung auf der Kugel (vgl. die Anmerkungen auf p. 173 und p. 215) zu folgenden Resultaten. Die drei Punktepaare von T kann man sich durch drei zu einander rechtwinklige Durchmesser der Kugel ausgeschnitten denken. Sind in Bezug auf letztere x, y, z die Coordinaten *eines* Punktes des Quadrupels $\varkappa f + \lambda H = 0$, so sind die *vier* Punkte des Quadrupels durch das Schema

$$\begin{array}{rrr} x & y & z \\ x & -y & -z \\ -x & y & -z \\ -x & -y & z \end{array}$$

dargestellt. Es sind die Ecken eines symmetrischen Tetraeders, dessen gegenüberstehende Seiten von den Axen des Coordinatensystems halbirt werden. Einem jeden Quadrupel der Schaar ist ein anderes zugeordnet, dessen Punkte conjugirt imaginär zu denen des ersteren sind. Dieselben haben dann die Coordinaten

$$\begin{array}{rrr} x & y & -z \\ x & -y & z \\ -x & y & z \\ -x & -y & -z. \end{array}$$ —

Die auf drei Weisen mögliche Zerlegung von $\varkappa f + \lambda H$ in zwei quadratische Involutionen wird geometrisch übersichtlich, wenn man als Träger des binären Werthgebietes statt der Geraden einen Kegelschnitt zu Grunde legt (vgl. Hesse: Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie; Leipzig, 1866). Führt man zu dem Zwecke die drei quadratischen Factoren φ, ψ, χ von T als ternäre Variable ein, so ist die Gleichung des Kegelschnittes durch (20) gegeben. Die 6 Punkte von T werden also durch die Seiten eines Polardreiecks ausgeschnitten. Benutzt man zwei dieser Seiten als Doppelelemente einer Strahleninvolution, so schneiden je zwei zusammengehörige Strahlen dieser Involution nach (21) auf dem Kegelschnitte eine Form des Büschels $\varkappa f + \lambda H$ aus. Der verschiedenen Benutzung der drei Ecken des Polardreiecks entspricht die dreifache Zerlegung des Büschels in quadratische Involutionen. — Aehnliches gilt auf der Kugel.

An diese Beziehung der Punkte von T zu jeder Gruppe $\varkappa f + \lambda H$ knüpfen wir sogleich die folgenden Bemerkungen. Es gibt (vgl. p. 207) sechs Pole $\Theta = 0$, deren Polarsysteme in Bezug auf f und H und also in Bezug auf jedes Quadrupel $\varkappa f + \lambda H$ bez. in den sechs Punkten von T einen gemeinsamen Punkt haben. Nun zerfällt das Polarsystem in Bezug auf ein Paar von Doppelpunkten stets in diese Doppelpunkte und den zu ihnen und dem Pole vierten harmonischen Punkt (vgl. p. 205 und p. 213). Das zu zwei Punktepaaren von T gleichzeitig harmonisch liegende Punktepaar hat also die Eigenschaft, dass, wenn man einen Punkt des Paares als Pol betrachtet, der andere ein Punkt seines Polarsystems wird in Bezug auf die beiden anderen Paare von T, und also auch in Bezug auf alle Gruppen $\varkappa f + \lambda H$, da sich diese linear aus zwei Punktepaaren von T zusammensetzen lassen. Jenes dritte Paar gehört also sowohl zu T als zu Θ; und demnach haben wir folgenden Satz:

Die Punkte $\Theta = 0$ sind identisch mit den Punkten $T = 0$, in der Weise, dass zu jedem Punkte von Θ derjenige von T gehört, der mit demselben ein Paar von T bildet. Das Resultat der Elimination der x aus den Gleichungen:

$$a_x^3 a_y = 0$$
$$H_x^3 H_y = (ab)^2 a_x^2 b_x b_y = 0$$

ist also durch $T = 0$ gegeben.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (30) für $T_{\varkappa\lambda}$ können wir auch $i_{\varkappa\lambda}$ und $j_{\varkappa\lambda}$ leicht bilden. Für ein Quadrupel $\varkappa f + \lambda H = 0$ zerfällt nämlich die Form $T_{\varkappa\lambda}$ in drei quadratische Factoren, deren Quadrate nach (18) durch drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_1 (\varkappa f + \lambda H) + l_1 H_{\varkappa\lambda} &= 0 \\ k_2 (\varkappa f + \lambda H) + l_2 H_{\varkappa\lambda} &= 0 \\ k_3 (\varkappa f + \lambda H) + l_3 H_{\varkappa\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

bestimmt sind, wenn $\frac{k_1}{l_1}, \frac{k_2}{l_2}, \frac{k_3}{l_3}$ die negativen Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\Omega (k, l)_{\varkappa\lambda} = k^3 - \frac{i_{\varkappa\lambda}}{2} k l^2 - \frac{j_{\varkappa\lambda}}{3} l^3 = 0 \tag{32}$$

bedeuten. Nach (30) sind diese quadratischen Factoren jedoch identisch mit den Formen φ, ψ, χ, in welche T zerfällt, und deren Quadrate durch die Gleichungen (18) gegeben sind; sie können sich daher von diesen nur um einen Factor unterscheiden. Die Ausdrücke (31) sind aber wegen (29), wenn wir nach f und H ordnen:

$$\left(k_i \varkappa + \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l_i\right) f + \left(k_i \lambda - \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l_i\right) H;$$

und diese Formen entstehen, wenn man $\varkappa$, λ als binäre Variable auffasst aus einer Form $\varkappa' f + \lambda' H$ mittelst der linearen Substitution

$$\varkappa' = k\varkappa + \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l$$

$$\lambda' = k\lambda - \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l.$$

Die für $\frac{k}{l}$ aus (32) zu findenden Werthe müssen daher identisch sein mit denjenigen, welche sich aus der Gleichung

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2}\varkappa^2\lambda - \frac{j}{2}\lambda^3 = 0$$

ergeben, wenn man darin $\varkappa$, λ bez. durch die Ausdrücke

$$k\varkappa + \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l, \quad k\lambda - \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l$$

ersetzt. Beide Gleichungen können sich also dann nur um einen Factor M unterscheiden, d. h. wir haben

$$M\Omega(k, l)_{\varkappa\lambda} = \Omega\left(k\varkappa + \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l, k\lambda - \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l\right),$$

oder wenn wir auf der rechten Seite nach Potenzen von k, l entwickeln, indem der Factor von $k^2 l$ identisch verschwindet:

$$(33) \quad M \, . \, (k^3 - \frac{i_{\varkappa\lambda}}{2} k l^2 - \frac{j_{\varkappa\lambda}}{3} l^3) = k^3 \Omega(\varkappa, \lambda) + \tfrac{1}{2}\Phi k l^2 - \tfrac{1}{6}\Psi l^3,$$

wo

$$\Phi = \tfrac{1}{9}\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa\,\partial \lambda}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \lambda^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\right)^2\right\}$$

$$\Psi = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\right\}.$$

Drücken wir in Φ die ersten Differentialquotienten von Ω einmal nach dem Satze von den homogenen Functionen durch die zweiten aus, so dass dieselben nur noch linear vorkommen, so wird:

$$\Phi = \tfrac{1}{18}\left(\varkappa\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} + \lambda\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa\,\partial \lambda}\right)^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\,\Omega(\varkappa, \lambda)\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial \varkappa\,\partial \lambda}\right)^2\right).$$

Betrachten wir nun Ω als binäre Form dritter Ordnung in $\varkappa$, λ und bezeichnen durch Δ_Ω, Q_Ω die ihr zugehörigen Formen Δ, Q, von denen die erste als die Hesse'sche Determinante, dividirt durch 18, die zweite als die Functionaldeterminante von Ω und Δ, dividirt durch 6, definirt ist, so erhalten wir:

$$\Phi = 3\,\Omega(\varkappa, \lambda)\,\Delta_\Omega$$
$$\Psi = \Omega(\varkappa, \lambda)\left\{\frac{\partial \Delta}{\partial \varkappa}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\right\}$$
$$= -6\,\Omega_{\varkappa\lambda}\,Q_\Omega.$$

Durch Vergleichung der Coëfficienten von k^3, kl^2, l^3 in (33) finden wir schliesslich:

$$M = \Omega_{\varkappa\lambda},$$

und also:

(34) $$i_{\varkappa\lambda} = -3\,\Delta_\Omega = i\varkappa^2 + 2j\varkappa\lambda + \frac{i^2}{6}\lambda^2$$

(35) $$j_{\varkappa\lambda} = -3\,Q_\Omega = j\varkappa^3 + \frac{i^2}{2}\varkappa^2\lambda + \frac{ij}{2}\varkappa\lambda^2 + \left(\frac{j^2}{3} - \frac{i^3}{36}\right)\lambda^3.$$

Diese Invarianten haben für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda H$ dieselbe Bedeutung, wie i, j für die Form f. Ihr Verschwinden gibt Gleichungen bez. vom zweiten und dritten Grade in $\frac{\varkappa}{\lambda}$, und folglich haben wir den Satz:

Es gibt in der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ zwei Punktquadrupel mit äquianharmonischem und drei Quadrupel mit harmonischem Doppelverhältnisse.

Im Allgemeinen dagegen ist das Doppelverhältniss α eines solchen Quadrupels gegeben durch die Gleichung sechsten Grades in $\frac{\varkappa}{\lambda}$:

$$\frac{i_{\varkappa\lambda}^3}{j_{\varkappa\lambda}^2} = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Es gibt daher in der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ sechs Punktquadrupel mit gegebenem Doppelverhältnisse.

Soll letzteres gleich der Einheit sein, d. h. das Quadrupel einen Doppelpunkt enthalten, so muss

$$i_{\varkappa\lambda}^3 - 6\,j_{\varkappa\lambda}^2 = 0$$

werden. Diesen Ausdruck können wir mit Hülfe der Form $R_\Omega = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2)$, der Discriminante von f, leicht durch i und j darstellen. Zwischen den Formen Ω, Δ, Q, R besteht nämlich die Identität (vgl. p. 223):

$$Q_\Omega^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{\Delta_\Omega^3 + \Omega^2 R_\Omega\right\},$$

und hieraus folgt wegen (34) und (35):

(36) $$i_{\varkappa\lambda}^3 - 6\,j_{\varkappa\lambda}^2 = [\Omega(\varkappa, \lambda)]^2\,(i^3 - 6j^2).$$

Hier steht links die Discriminante von $\varkappa f + \lambda H$; dieselbe kann wegen des Ausdruckes auf der rechten Seite im Allgemeinen, d. h. so lange $R \lessgtr 0$, nur verschwinden, wenn $\Omega(\varkappa, \lambda) = 0$ ist. Die letztere Gleichung bestimmt aber die Punktepaare von $T = 0$, und somit folgt:

Unter den Quadrupeln der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ kommt, ausser den doppelt zählenden Punktepaaren von $T = 0$, keines vor, für welches zwei Punkte zusammenfallen.

Es sei schliesslich noch erwähnt, dass man die biquadratische Form f auf eine *kanonische Form,* in der nur noch die Quadrate der Veränderlichen vorkommen, bringen kann, wenn man die linearen Factoren einer der quadratischen Formen φ, ψ, χ als neue Variable einführt. Da jedes der letztere darstellenden Punktepaare zu den beiden anderen harmonisch liegt, so können wir z. B. setzen

$$\varphi = 2\,\xi\eta$$
$$\psi = \xi^2 + \eta^2$$
$$\chi = \xi^2 - \eta^2.$$

In der That erhalten wir alsdann wegen der Gleichungen (21) für f die folgende kanonische Darstellung:

$$f = p\,(\xi^4 + \eta^4) + 6\,q\,\xi^2\eta^2.$$

Hierin kommt *eine* absolute Constante $\frac{p}{q}$ vor, und dieselbe ist dadurch, dass man die gegebene Form für f verlangt, völlig bestimmt, soweit es die Gleichberechtigung der Functionen φ, ψ, χ erlaubt; und zwar wird sich zeigen, dass sie bei derselben Form f 6 verschiedene Werthe annehmen kann. Der Werth dieser Constanten ist daher charakteristisch für die biquadratische Form, und man kann nur solche Formen der Art linear in einander überführen, für welche diese Constante einen von 6 zusammengehörigen Werthen hat. Es erhellt hieraus, dass letztere mit der absoluten Invariante von f in enger Beziehung steht, wie wir auch sofort erkennen werden. Die Invarianten und Covarianten von f erhalten für die kanonische Darstellung die folgende Gestalt. Es wird, wenn wir die neuen Bildungen durch beigesetzte obere Striche bezeichnen, und wenn r die Substitutionsdeterminante $(\xi\eta)$ bedeutet:

$$H = r^2 H' = (\xi\eta)^2.\ \{2\,pq\,(\xi^4 + \eta^4) + 2\,(p^2 - 3\,q^2)^2\,\xi^2\eta^2\}$$
$$T = r^3 T' = (\xi\eta)^3\,.\,4\,\xi\eta\,(\xi^2 + \eta^2)\,(\xi^2 - \eta^2)$$
$$i\ = r^4 i'\ = (\xi\eta)^4\,.\,2\,(p^2 + 3\,q^2)$$
$$j\ = r^6 j'\ = (\xi\eta)^6\,.\,6\,q\,(p^2 - 3\,q^2).$$

Aus diesen Gleichungen folgt für die absolute Invariante:

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2\,(p^2 + 3\,q^2)^3}{9\,q^2\,(p^2 - q^2)^2},$$

wodurch der Zusammenhang derselben, sowie, nach (28), der des Doppelverhältnisses mit der Constanten $\frac{p}{q}$ gegeben ist. Wir haben

eine Gleichung sechsten Grades für $\frac{p}{q}$, die sich jedoch auf eine cubische für $\frac{p^2}{q^2}$ reducirt. Den drei Wurzeln für den letzteren Ausdruck entspricht der Umstand, dass man die Formen φ, ψ, χ gleichmässig zur Herstellung der kanonischen Form benutzen kann. Zu jeder Wurzel $\frac{p}{q}$ gehört ferner eine andere $-\frac{p}{q}$; und zwar führt auf die letztere die Einführung von $\sqrt{-1}\,\xi\eta$ statt einer der quadratischen Formen, wenn die erstere der Einführung von $\xi\eta$ entspricht.

Das angewandte Verfahren zur Bestimmung von p, q, der Coëfficienten der transformirten Form ist überhaupt von Nutzen, wenn man eine als möglich erkannte kanonische Darstellung nur in der Endform angeben will, ohne dabei auf die linearen Substitutionsgleichungen zu achten, welche die Transformation selbst leisten. In einem solchen Falle braucht man nur die absoluten Invarianten der Form aus den Coëfficienten ihrer kanonischen Darstellung zu bilden, und erhält so unmittelbar Gleichungen zur Bestimmung dieser Coëfficienten, ebenso wie wir oben die Gleichung sechsten Grades für $\frac{p}{q}$ aufstellten. —

An die Theorie der biquadratischen Formen würde sich naturgemäss die der Formen fünfter und höherer Ordnung anschliessen. Wir werden auf dieselbe jedoch nicht eingehen, zumal da wir sie für die späteren geometrisch-algebraischen Untersuchungen nicht nöthig haben. Zur Orientirung in den betreffenden Theorien erwähnen wir nur das Folgende. Soweit man auf die Theorie der höheren Formen bisher näher eingegangen ist, verfolgt man dabei wesentlich andere Gesichtspunkte und bedient sich demgemäss anderer Methoden, als wir es bisher gethan haben. Während wir nämlich nach solchen invarianten Bildungen fragten, aus denen sich alle anderen nach dem Gordan'schen Satze *rational und ganz* zusammensetzen lassen, kann man sich auch die Aufgabe stellen, ein System von Formen anzugeben, durch welche alle anderen *nur rational* darstellbar sind.*) Zu einem solchen Systeme von „*associirten Formen*“ gelangt man am einfachsten, indem man zwei lineare Covarianten einer Form als neue Variable einführt; die Coëfficienten der neuen Form sind dann Invarianten der

*) Die in dieser Richtung liegenden Fragen wurden zuerst von Hermite (*Cambridge* and *Dublin*, math. Journal 1854 und Crelle's Journal, Bd. 52) und Brioschi (Annali di matem. t. I) aufgeworfen und behandelt. Vgl. die weitere Entwicklung der Theorie in dem erwähnten Werke von Clebsch, sowie einen Aufsatz von Clebsch und Gordan: Annali di matemat., Bd. I, 2. Serie, 1867, und Gundelfinger: Crelle's Journal, Bd. 74.

gegebenen und es tritt eine Potenz der Substitutionsdeterminante, also auch eine Invariante, in den Nenner. Bei Formen gerader Ordnung existiren jedoch keine lineare Covarianten; man bedient sich in diesem Falle der Polaren von anderen Covarianten in Bezug auf einen variabeln Punkt y. Sind nämlich zwei der letzteren durch φ, ψ bezeichnet, so setzt man

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} y_2$$

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} y_2,$$

und hierdurch werden die alten Veränderlichen y_1, y_2 durch die neuen ξ, η ausgedrückt, welche für $y = x$ in Covarianten der gegebenen Form f übergehen. Man wird so auf die folgende *„typische Darstellung von f“* geführt; es ist:

$$f(y_1, y_2) = \frac{A_0 \xi^n + A_1 \xi^{n-1}\eta + \ldots + A_n \eta^n}{D^\lambda},$$

wo nun D, A_0, $A_1, \ldots A_n$ Covarianten von f sind; und zwar ist D die Substitutionsdeterminante, d. h. in unserem Falle die Functionaldeterminante der Formen φ und ψ. Ist nun $\Pi(y_1, y_2, a_0, a_1 \ldots a_n)$ eine Covariante von f, wo $a_0, a_1 \ldots a_n$ die Coëfficienten von f bedeuten, so wird durch unsere Substitution:

$$\Pi(y_1, y_2, a_0, a_2 \ldots a_n) = \Pi\left(\xi, \eta, \frac{A_0}{D^\lambda}, \frac{A_1}{D^\lambda} \ldots \frac{A_n}{D^\lambda}\right),$$

und wenn wir hierin $y = x$ setzen, nach dem Satze von den homogenen Functionen:

$$c \cdot \Pi(y_1, y_2, a_0, a_1 \ldots a_n) \cdot D^\lambda = \Pi(\varphi, \psi, A_0, A_1 \ldots A_n),$$

wo c ein Zahlenfactor ist. Eine jede Covariante von f ist daher durch die $n + 4$ Covarianten $D, A_0, A_1, \ldots, A_n, \varphi, \psi$ rational darstellbar. Die letzteren sind jedoch nicht von einander unabhängig, sondern sie lassen sich noch auf eine niedrigere Anzahl reduciren. Wir haben nämlich früher hervorgehoben (p. 222), dass eine binäre Form nur zwei von einander unabhängige Covarianten haben kann; durch dieselben müssen sich alle anderen, wenn auch irrational, ausdrücken lassen. Ferner hat eine Form n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $n - 3$ absolute Invarianten, denn mittelst einer linearen Transformation können wir bei passender Wahl der vier Substitutionscoëfficienten immer vier von den $n + 1$ Coëfficienten einer Form n^{ter} Ordnung bestimmte Werthe annehmen lassen; und es bleiben also nur $n - 3$ *für die Form charakteristische Zahlen oder absolute Invarianten.* Jede derselben muss der Quotient zweier Invarianten sein, und um $n - 3$ solche Quotienten bilden zu können haben wir $n - 2$ Invarianten

nöthig. Nehmen wir hierzu die zwei von einander unabhängigen Covarianten, so haben wir also *n Formen, durch welche sich alle anderen invarianten Bildungen der Grundform ausdrücken lassen; und zwar lehrt die Theorie der associirten Formen ein solches System von Bildungen angeben, dass dies auf rationale Weise ausführbar ist.*

Diese Bemerkungen mögen dazu dienen, im Allgemeinen die weitere Entwicklung der binären Formentheorie zu kennzeichnen. Eine eingehendere Ausführung würde unserem gegenwärtigen Zwecke nicht entsprechen, zumal da die geometrischen Resultate, welche die typische Darstellung der Formen liefert, bisher verhältnissmässig nur gering zu nennen sind.

VI. Die Collineationen im ternären Gebiete.

Die Theorie der binären Formen, wie wir sie im Vorstehenden entwickelt haben, gewinnt wesentlich an geometrischem Interesse durch die Anwendungen, welche man von ihr auch in der Geometrie der Ebene machen kann; in der That werden wir weiterhin ein Princip entwickeln, welches erlaubt, aus einem jeden Satze über binäre Formen einen solchen für das ternäre Gebiet, d. h. die Geometrie der Ebene, abzuleiten, ein Princip, dessen Ausdehnung auf mehrere Variable dann keiner Schwierigkeit unterliegt. Andererseits haben wir bei der Behandlung der binären Formen gewisse Gesichtspunkte gewonnen, deren Befolgung und Erweiterung naturgemäss auch für ternäre Formen zu wichtigen Resultaten führt. Zu wesentlich neuen Gedanken werden wir jedoch beim Aufsteigen zu den homogenen Functionen von drei Variabeln durch das bekannte Princip der Dualität geführt. In der Geometrie auf der Punktreihe war der Punkt (bez. im Strahlbüschel der Strahl) das einzige erzeugende Element; in der Geometrie der Ebene tritt dagegen dem Punkte die gerade Linie als gleichberechtigt gegenüber: wir haben demnach ebensowohl ternäre Formen zu betrachten, deren Variable Punktcoordinaten, als solche, deren Variable Liniencoordinaten sind; und nur die gleichzeitige Berücksichtigung der beiderlei Bildungen wird eine erschöpfende Behandlung *der Theorie der ternären Formen* erwarten lassen. Die letztere nun beschäftigt sich mit Aufsuchung und Behandlung der durch lineare Transformation (mit nicht verschwindender Determinante) unzerstörbaren Eigenschaften einer ternären Form, oder, geometrisch ausgesprochen, mit der Untersuchung der Eigenschaften einer algebraischen Curve, welche unabhängig von der Lage des Coordinatendreiecks sind, sei es, dass man die Curve als Punkt-, oder als Liniengebilde auffasst.

Gemäss dieser Fragestellung der Invariantentheorie werden wir uns im Folgenden zunächst mit den linearen Transformationen an sich

eingehender beschäftigen müssen, insbesondere um uns über die geometrische Bedeutung derselben völlig klar zu werden.

Bei den binären Formen erkannten wir, dass die lineare Transformation, welche zunächst eine Veränderung der Coordinatengrundpunkte repräsentirte, auch als der allgemeinste analytische Ausdruck für die projectivische Beziehung zweier Punktreihen oder Strahlbüschel aufgefasst werden kann. Dem entsprechend lässt auch die lineare Transformation im ternären Gebiete eine doppelte Interpretation zu: sie kann einmal — und so haben wir sie bisher allein betrachtet — als Coordinatentransformation angesehen werden, dann aber auch — und diese Auffassung entspricht der geometrischen Begriffsbildung der Invariantentheorie in höherem Masse — als Beziehung der Punkte zweier verschiedener Ebenen auf einander, sei es dass dieselben getrennt oder mit einander vereinigt liegen.

Denken wir uns die beiden Ebenen zunächst vereinigt liegend (unendlich benachbart) und die Punkte derselben auf dasselbe Coordinatendreieck bezogen. Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte der einen Ebene mit x, die der anderen mit y, so wird durch die linearen Gleichungen (a_{ik} nicht nothwendig gleich a_{ki}):

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \varrho y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \varrho y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1}$$

derartig eine *„lineare Verwandtschaft“* oder *„Collineation“* zwischen beiden Ebenen begründet*), dass jedem Punkte x der einen Ebene ein Punkt y (Bildpunkt von x) der anderen Ebene entspricht. Es ist dieses Verhältniss im Allgemeinen nicht unmittelbar umkehrbar; einem Punkte y entspricht nicht wieder derselbe Punkt x, sondern der ihm zugehörige Punkt der ersten Ebene bestimmt sich durch Auflösung der Gleichungen (1), vorausgesetzt, dass ihre Determinante nicht verschwindet, mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + A_{13}y_3 \\ \sigma x_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + A_{23}y_3 \\ \sigma x_3 &= A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{33}y_3 , \end{aligned} \tag{2}$$

wo die A_{ik} in bekannter Weise die aus den a_{ik} gebildeten zweigliedrigen Determinanten bedeuten. Die Formeln sind also dieselben wie die der Coordinatentransformation (vgl. p. 69); aber während dort derselbe Punkt auf zwei Coordinatensysteme bezogen wurde, sind hier zwei verschiedene Punkte auf dasselbe System bezogen.

*) Die Collineationen sind zuerst eingehend behandelt von Möbius: Barycentrischer Calcul, Leipzig 1827, p. 266 ff., dann von Magnus: Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833. Vgl. auch Chasles: Aperçu historique etc., Note 4.

Durchläuft einer dieser Punkte eine Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, so durchläuft sein Bildpunkt eine andere $F(y_1, y_2, y_3) = 0$, wo F aus f durch die Gleichungen (2) entsteht. Da letztere linear sind, so folgt der Satz:

Einer algebraischen Curve entspricht bei einer linearen Verwandtschaft immer eine andere von derselben Ordnung.

Beide Curven werden nun gewisse Eigenschaften mit einander gemein haben, die eben durch Collineationen überhaupt unzerstörbar sind; und zwar müssen dies dieselben Eigenschaften sein, welche wir früher durch ihre Unabhängigkeit vom Coordinatensysteme charakterisirten, denn Coordinatentransformation und lineare Verwandtschaft sind ja nur verschiedene Auffassungen für dieselbe algebraische Operation. Diese Eigenschaften werden daher durch das Verhalten der zu der ternären Form $f(x_1, x_2, x_3)$ gehörigen Invarianten*) angegeben, und somit haben wir für letztere selbst einen neuen und wichtigen Gesichtspunkt gewonnen, dessen volle geometrische Bedeutung im Folgenden entwickelt werden wird.

Betrachten wir zunächst eine gerade Linie mit den Coordinaten u:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

so entspricht derselben in der Bildebene eine von Punkten y durchlaufene Gerade, deren Coordinaten v ebenso wie bei der Coordinatentransformation durch die transponirte Substitution von (1) gegeben sind, d. i. durch die Gleichungen:

$$\mu u_i = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3 . \tag{4}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die für Punktcoordinaten bestehenden; es gilt daher der Satz, welcher übrigens auch eine directe Folge des allgemeinen Dualitätsprincips ist:

Zwei durch Collineation einander entsprechende Curven sind von gleicher Klasse.

Drücken wir einen Punkt der Geraden u mittelst eines Parameters λ durch zwei feste Punkte a, b derselben aus, so haben wir bekanntlich

$$\sigma x_i = a_i + \lambda b_i ;$$

seien ferner α, β die den Punkten a, b entsprechenden Bilder, so wird die von y auf v durchlaufene Punktreihe gegeben durch

$$\sigma y_i = \alpha_i + \lambda \beta_i ,$$

wo

---

*) Solche Eigenschaften können statt durch das Verschwinden von Invarianten auch durch *identisches* Verschwinden von Covarianten angezeigt werden, wofür wir bei den binären Formen Beispiele hatten (vgl. p. 241). Wir gehen hierauf weiter unten näher ein (p. 272, f.).

$$\varrho \alpha_i = a_{i1} a_1 + a_{i2} a_2 + a_{i3} a_3$$
$$\varrho \beta_i = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 .$$

In beiden Gleichungen kommt aber derselbe Parameter λ vor, und somit folgt:

Wenn ein Punkt eine Punktreihe durchläuft, so beschreibt der entsprechende Punkt eine ihr projectivische Punktreihe; und Analoges gilt für Strahlbüschel.

An diesen Satz knüpft sich unmittelbar die Beantwortung der sich zunächst aufdrängenden Frage: wie construirt man zu einem gegebenen Punkte den Bildpunkt? Dieselbe wird durch eine rein geometrische Bestimmung einer Collineation ermöglicht, welche in folgendem Satze ausgesprochen ist:

Ordnet man vier Punkten, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bez. vier andere zu, von denen ebenfalls keine drei in gerader Linie liegen, so ist dadurch die lineare Verwandtschaft völlig bestimmt. In der That kann man, wenn die Gleichungen

$$\varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

für vier Punkte, x^0, x', x'', x''' und für die vier entsprechenden y^0, y', y'', y''' bestehen sollen, die Coëfficienten a_{ik} eindeutig bestimmen; denn man hat für sie 12 lineare Gleichungen mit 13 homogen vorkommenden Unbekannten (den 9 Grössen a_{ik} und 4 Proportionalitätsfactoren ϱ^0, ϱ', ϱ'', ϱ'''). Aus irgend dreien der vier Gleichungen:

$$\varrho^{(h)} y_i^{(h)} = a_{i1} x_1^{(h)} + a_{i2} x_2^{(h)} + a_{i3} x_3^{(h)} \tag{5}$$

berechnen wir nämlich die Coëfficienten a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}. Anderseits kann man letztere aus je dreien dieser Gleichungen eliminiren, und erhält dadurch bez.:

$$0 = \varrho^0 y_i^0 X^0 + \varrho' y_i' X' + \varrho'' y_i'' X'' + \varrho''' y_i''' X''' .$$

Hier bedeuten die $X^{(h)}$ die vier aus den x zusammengesetzten Determinanten, z. B. ist

$$X^0 = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} ;$$

dieselben verschwinden nicht, weil keine drei der vier Punkte x auf gerader Linie gelegen vorausgesetzt sind. Aus den drei Gleichungen, welche sich so für die ϱ ergeben ($i = 1, 2, 3$), finden wir für die Verhältnisse derselben folgende Ausdrücke:

$$\varrho^0 X^0 = m Y^0, \quad \varrho' X' = m Y', \quad \varrho'' X'' = m Y'', \quad \varrho''' X''' = m Y''', \tag{6}$$

wo die Y die aus den y zu bildenden Determinanten sind, also z. B.:

$$Y^0 = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_2'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix},$$

und wo m einen unbestimmt bleibenden Factor bedeutet. Aus (6) werden somit die Verhältnisse der ϱ, aus (5) dann die der a_{ik} berechnet; und damit ist unser Satz bewiesen.*)

Vorausgesetzt nun, dass vier Punkte der einen Ebene als vier Punkten der andern bez. entsprechend gegeben sind, so construirt man zu jedem fünften Punkte $x^{(IV)}$ den ihm entsprechenden Punkt $y^{(IV)}$ in folgender Weise. Nach einem soeben bewiesenen Satze ist das Büschel der vier von x^0 nach x', x'', x''', $x^{(IV)}$ gehenden Strahlen zu dem von y^0 nach y', y'', y''', $y^{(IV)}$, und das der Strahlen von x' nach x^0, x'', x''', $x^{(IV)}$ zu dem von y' nach y^0, y'', y''', $y^{(IV)}$ projectivisch. Man kann daher nach bekannten Sätzen die Strahlen $\overline{y^0 y^{(IV)}}$ und $\overline{y' y^{(IV)}}$ construiren, so dass $y^{(IV)}$ selbst als Schnitt beider bestimmt ist. Diese Construction wird in der That, ebenso wie die Rechnung, nur dann nicht ausführbar, wenn drei der Punkte x oder drei der Punkte y auf gerader Linie liegen.

Tritt jedoch dieser zunächst ausgeschlossene Fall ein, so werden wir dadurch zu dem Begriffe der sogenannten *Centralperspective* geführt. Die dabei vorkommenden Besonderheiten entsprechen gewissermassen denjenigen, welche wir im binären Gebiete bei der perspectivischen Lage zweier projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel hervorgehoben haben. Wir wollen dieselben in den folgenden Ueberlegungen um so mehr näher erörtern, als wir sehen werden, dass man sich jede Collineation aus diesem besondern Falle hervorgegangen denken darf

Die linearen Gleichungen (1) oder (2) beziehen sich auf ein

*) Die Bestimmung einer Collineation durch vier Punkte und die ihnen zugeordneten kann man auch in folgender Weise einsehen. Der Verbindungslinie zweier Punkte in E_1 entspricht jedenfalls die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in E_2, und dem Schnittpunkte zweier Geraden in E_1 der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden in E_2. Verbinden wir nun die vier in E_1 gegebenen Punkte unter einander, so bestimmen die 6 Verbindungslinien 3 neue Punkte, deren zugehörige in E_2 durch die entsprechende Construction sofort gegeben sind. Verbinden wir die 3 neuen Punkte in E_1 wieder unter einander und mit den 4 ursprünglich gegebenen, und setzen diese Construction beliebig fort, so erhalten wir immer neue Punkte in E_1, deren entsprechende in E_2 sofort gegeben sind. Schliesslich wird die ganze Ebene E_1 mit einem Netze von beliebig vielen Geraden bedeckt, und zwar lässt sich zeigen, dass man durch fortgesetzte Verdichtung des Netzes jedem Punkte von E_1 beliebig nahe kommen kann. Denkt man sich nun gleichzeitig das entsprechende Netz in E_2 construirt, so ist durch diese Netze die gegenseitige Zuordnung der einzelnen Punkte beider Ebenen festgelegt; und *also die Collineation völlig bestimmt.* Vgl. hierüber Möbius, a. a. O. p. 273.

beliebiges Coordinatendreieck; bei Aenderung desselben werden ihre Coëfficienten immer andere Werthe annehmen. Legen wir z. B. ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, so werden sie (wenn wir dieselben Coëfficienten der Einfachheit wegen beibehalten) von der Form:

$$\varrho \cdot X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$
$$\varrho \cdot Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$
$$\varrho \cdot 1 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}$$

oder:

$$X = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad Y = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

und umgekehrt:

$$x = \frac{A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}}{A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}}, \quad y = \frac{A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}}{A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}}.$$

Die Gleichung

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

ist dann die einer geraden Linie, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des Bildes ($X = \infty$, $Y = \infty$) entsprechen und ebenso sind die Punkte der Geraden

$$A_{31}X + A_{32}Y + A_{33} = 0$$

die Bilder der unendlich fernen Punkte der ersten Ebene ($x = \infty$, $y = \infty$). In der That müssen wir ja überhaupt die unendlich fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden gelegen annehmen (vergl. p. 67); aus einer solchen kann aber durch Collineation nur wieder eine Gerade werden.

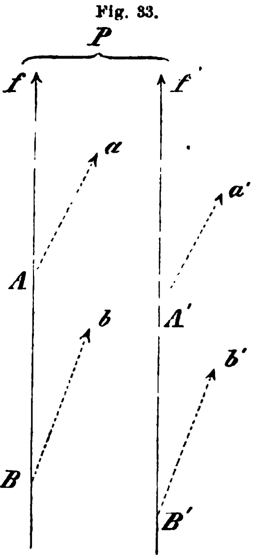


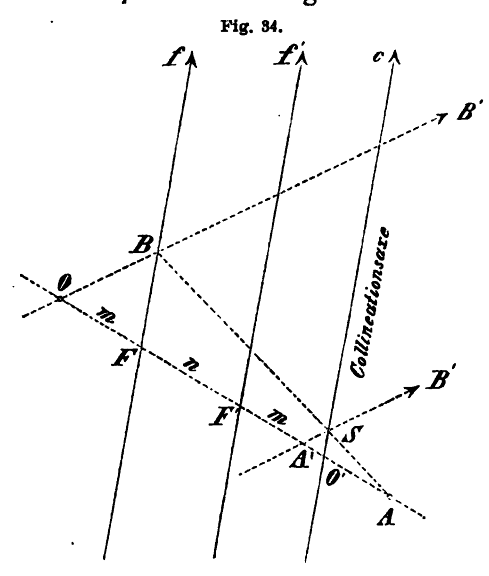
Fig. 83.

Die erwähnten beiden geraden Linien werden als *Fluchtlinien* bezeichnet; durch eine besondere Lage derselben gegen einander können wir nun die Centralperspective charakterisiren: Wir wollen uns die eine der beiden unendlich nahen Ebenen (E und E') — ohne beide von einander zu entfernen — so gegen die andere gedreht denken, dass die beiden Fluchtlinien einander parallel werden. *Alsdann entspricht der unendlich ferne Schnittpunkt P der beiden Fluchtlinien f und f' sich selbst;* denn, insofern er auf f liegt, muss ihm ein unendlich ferner Punkt der Ebene E', insofern er auf f' liegt, ein solcher der Ebene E entsprechen, und dies kann nur gleichzeitig eintreten, wenn er mit dem ihm zugeordneten zusammenfällt. Einem beliebigen anderen Punkte A auf f entspricht dagegen ein

unendlich ferner Punkt in E', der durch die von A nach ihm führende Richtung a gegeben ist (vgl. Fig. 33); diesem unendlich fernen Punkte, betrachtet als Punkt von E, entspricht wieder ein auf f' gelegener Punkt A', so dass seine Verbindungslinie a' mit diesem zu a parallel wird. Gehen wir ebenso von einem Punkte B auf f aus, so werden wir in derselben Weise zu einem Punkte B' auf f' geführt, so dass zwei parallele bez. von B und B' ausgehende Linien b und b' den unendlich fernen Punkt bestimmen, welcher zu B und B' in besagter Beziehung steht. Durch Parallelverschiebung der beiden Ebenen gegeneinander, können wir es nun insbesondere so einrichten, dass bez. die Linien a und a', b und b' zusammenfallen*) und so durch ihren Schnittpunkt O einen dann besonders ausgezeichneten Punkt bestimmen; und zwar ist dies auf zwei Weisen möglich, da wir die eine Ebene immer noch um 180^0 drehen können, ohne das Resultat zu ändern. Die Fluchtlinien bleiben dabei einander parallel und ändern nur ihren gegenseitigen Abstand.

Die Beziehung, in welche die Ebenen nunmehr gebracht sind, ist es, welche als *die perspectivische Lage der ebenen Systeme* bezeichnet wird; der Punkt O heisst das *Centrum der Perspectivität oder der Collineation.* Dieser Punkt ist in der Weise ausgezeichnet, dass nicht nur die Strahlen a und b mit ihren entsprechenden Strahlen a', b' zusammenfallen, sondern *dass jeder durch ihn gehende Strahl sich selbst entspricht.* Es folgt dies unmittelbar daraus, dass ausser den Strahlen a, b auch die Verbindungslinie von O mit dem unendlich fernen Punkte P der Fluchtlinien mit ihrem entsprechenden Strahle zusammenfällt, und sonach die beiden durch O gehenden, einander projectivischen Strahlbüschel der Ebenen E und E' ganz zusammenfallen müssen (vgl. p. 44). Bei dieser perspectivischen Lage können wir den zu einem beliebigen Punkte A in E gehörigen Punkt A' in E' sehr einfach construiren. Letzterer nämlich muss zunächst auf der Linie $\overline{AO}$ liegen,

Fig. 34.



*) Dass dies in der That immer möglich ist, ergibt sich auch aus den folgenden analytischen Entwicklungen.

da dieselbe mit $\overline{A'O}$ zusammenfällt. Auf diesem Strahle sind dann zwei projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage bestimmt. Der eine Doppelpunkt derselben fällt in das Collineationscentrum O (vgl. Fig. 34); ferner entspricht dem unendlich fernen Punkte der einen Reihe der Schnittpunkt F' von AO mit f', und dem Schnittpunkte F von AO mit f der unendlich ferne Punkt, insofern er der andern Reihe angehört; durch diese Zuordnung ist die Projectivität festgelegt. Der zweite Doppelpunkt O' ist ebenso weit von dem Schnittpunkte mit der Fluchtlinie F' entfernt, wie O von dem mit F; in der That ist nämlich das Doppelverhältniss dieses Punktes mit den drei erwähnten Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältnisse mit den drei entsprechenden der andern, nämlich

$$= \frac{\frac{n}{\infty}}{-\frac{n+m}{\infty}} = -\frac{n}{n+m},$$

wo n die Entfernung $\overline{FF'}$, m die Entfernung $\overline{FO} = \overline{F'O'}$ bezeichnet. Der Punkt O', und ebenso jeder Punkt der durch O' zu den Fluchtlinien gezogenen Parallele entspricht daher sich selbst. Diese Parallele wird als *Collineationsaxe* (c in Fig. 34) bezeichnet. Wir haben dann die Sätze:

Bei der perspectivischen Lage collinear verwandter Systeme

entspricht jeder Strahl durch das Collineationscentrum sich selbst.	*entspricht jeder Punkt auf der Collineationsaxe sich selbst.*

Die Punkte der Ebene werden also in diesem Falle durch die Transformation auf den durch O gehenden Strahlen verschoben, und die Linien der Ebene um ihre Schnittpunkte mit der Collineationsaxe gedreht. Mit Hülfe dieser Sätze können wir nun die verlangte Construction des dem Punkte A entsprechenden Punktes A' auch ohne Benutzung der Fluchtlinien ausführen, vorausgesetzt, dass Centrum (O) und Axe (c) der Collineation, sowie zwei entsprechende Punkte (B, B') (deren Verbindungslinie durch O geht) oder zwei entsprechende Gerade (deren Schnittlinie auf der Axe liegt) gegeben sind. Es müssen nämlich auch die Verbindungslinien von B und A, B' und A', als einander entsprechend, sich auf der Axe schneiden.*) Verbinden wir daher den Schnittpunkt (S) der Linie und der Axe mit B', so wird diese Verbindungslinie von dem Strahle OA in dem gesuchten Punkte A' geschnitten.

Die hier betrachtete perspectivische Beziehung gibt eine klare Anschauung über die durch eine lineare Transformation hervorge-

*) In Fig. 34 ist für B ein Punkt auf f und also für B' der unendlich ferne Punkt von OB gewählt.

brachten Veränderungen ebener Figuren überhaupt. Es gilt nämlich wie bei projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln der folgende Satz:

Zwei collineare Systeme können durch congruente Ortsveränderung des einen von ihnen immer in perspectivische Lage gebracht werden.

Zunächst nämlich ist ersichtlich, dass wir eine projectivische Beziehung zweier Ebenen auf einander durch folgende räumliche Construction herstellen können, von der wir dann unmittelbar zur perspectivischen Lage zurückgeführt werden. Wir beziehen zwei gegen einander im Raume geneigte Ebenen dadurch auf einander, dass wir sie von einem Punkte ausserhalb derselben betrachten, d. h. dass wir je zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch einen bestimmten, willkürlich gewählten Punkt (O) des Raumes geht, einander entsprechend setzen. In der That sind dann entsprechende Punktreihen und entsprechende Strahlbüschel in beiden Ebenen projectivisch. Man überzeugt sich davon sofort, wenn man durch den Punkt O eine beliebige Ebene legt; diese schneidet die gegebenen Ebenen in zwei Linien, welche unmittelbar perspectivisch auf einander bezogen sind. Lassen wir nun die beiden gegebenen Ebenen allmählich zusammenfallen, indem wir die eine um ihre Schnittlinie mit der andern drehen, so geht letztere Gerade in die Collineationsaxe über und der Punkt O fällt in die eine Ebene hinein: er gibt das Collineationscentrum. Die beiden ebenen Systeme befinden sich somit in perspectivischer Lage. Unser oben aufgestellter Satz ist also bewiesen, sobald wir noch zeigen, dass durch die angegebene räumliche Construction die *allgemeinste* collineare Verwandtschaft erhalten werden kann.

Letzteres ergibt sich nun folgendermassen. Wir können immer in jeder der Ebenen E, E' zwei entsprechende Punktreihen angeben, welche einander congruent sind. Setzen wir nämlich die Transformationsgleichungen in der Form voraus:

$$(7)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} = \frac{A}{C} \\ Y &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} = \frac{B}{C}, \end{aligned}$$

so muss für ein Punktepaar einer solchen Geraden und für das entsprechende Paar der andern Ebene die Gleichung:

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 = \left(\frac{A'}{C'} - \frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B'}{C'} - \frac{B}{C}\right)^2$$

bestehen. Nehmen wir nun die Punkte x, y und x', y' auf einer zu der Geraden $C = 0$ (der einen Fluchtlinie) parallelen Geraden an, d. h. setzen wir:

$$C = C' = k,$$

so erhalten wir die Relation:

$$k(x'-x)^2+(y'-y)^2=(a_{11}(x'-x)+b_{12}(y'-y))^2+(a_{21}(x'-x)+a_{22}(y'-y))^2;$$

und diese ist für:

$$x'-x=r\cos\alpha,\quad y'-y=r\sin\alpha$$

offenbar erfüllt, wenn wir

$$k^2=(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)^2+(a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)^2$$

nehmen, und zwar unabhängig von dem Werthe von r. Es gibt daher in jeder Ebene zwei Gerade, parallel und symmetrisch zur Fluchtlinie gelegen, deren Punktreihen mit denen der entsprechenden Geraden congruent sind. Bei obiger Construction sind nun die Ebenen nur so gegen einander gelegt, dass diese beiden Geraden in die Schnittlinie der Ebenen zusammenfallen, und dass je zwei einander entsprechende Punkte derselben über einander liegen. Um die Verwandtschaft der beiden ebenen Punktsysteme durch Zuordnung von vier Punkten festzulegen, können wir daher, ohne eine Specialisirung zu verursachen, zwei Punktepaare auf der Schnittlinie der Ebene E und E' annehmen, während die beiden anderen beliebig, aber in einer dritten Ebene*), liegen mögen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der letzteren Paare bestimmen dann den festen Punkt O, und dass jeder andere von ihm ausgehende Strahl die Ebenen EE' in entsprechenden Punkten trifft, ersieht man leicht aus der Gleichheit der in der so construirten Figur auftretenden Doppelverhältnisse. Legt man insbesondere durch O eine Parallelebene zu der einen Ebene, so schneidet dieselbe in der andern die Fluchtlinie derselben aus. Man erkennt hieraus, dass bei allmähligem Nähern der beiden Ebenen das Collineationscentrum O in einen Punkt fällt der von der einen Fluchtlinie ebensoweit entfernt ist, wie die Collineationsaxe, die Schnittlinie der beiden Ebenen, von der andern. Diese Strecke (m) und die gegenseitige Entfernung der beiden Fluchtlinien (n) sind somit für die perspectivische Lage besonders charakteristisch, *sie bestimmen dieselbe geradezu vollständig.*

In der That lassen sich auch die Coëfficienten unserer Transformationsgleichungen (7) durch diese Grössen m, n ausdrücken; wir brauchen, um dies zu erkennen, nur das Coordinatensystem passend zu legen. Der Anfangspunkt falle mit dem Collineationscentrum zusammen, und die Y-Axe laufe zu den Fluchtlinien parallel. Die Gleichung der einen Fluchtlinie $C=0$ wird dann

*) Dies ist nöthig, da die Verbindungslinie des Paares in E die Schnittlinie von E und E' in einem Punkte schneidet, der mit seinem entsprechenden vereinigt liegt und der daher ebenso durch die Verbindungslinie des Paares in E' erhalten werden muss.

$$x - m - n = 0.$$

Ferner muss der Punkt x, y mit dem Punkte X, Y auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen; wir haben also

$$X : Y = x : y,$$

und die Transformationsgleichungen nehmen daher die Form an:

$$X = \frac{\varrho x}{x - m - n}$$

$$Y = \frac{\varrho y}{x - m - n}.$$

Für $x = \infty$, $y = \infty$ muss die Gleichung der anderen Fluchtlinie resultiren, d. h. $X = -m$ werden. Es ist daher

$$\varrho = m\,(m + n)$$

zu setzen. Führen wir noch eine neue Constante $\sigma = m + n$ ein, *so erhalten wir die Collineation bei perspectivischer Lage in allgemeinster Weise dargestellt durch die Gleichungen:*

$$X = \frac{\varrho x}{x - \sigma}, \quad Y = \frac{\varrho y}{x - \sigma}.$$

Auf diese Form müssen sich nach dem Vorhergehenden die Gleichungen für jede lineare Verwandtschaft durch Einführung neuer, rechtwinkliger Coordinaten, d. i. durch Drehung und Verschiebung bringen lassen. Um die betreffenden Umformungen durchzuführen, gehen wir von den Gleichungen (7) aus. Wir verschieben die Ebene der X, Y, indem wir dem früher mit dem der andern Ebene vereinigten Coordinatensysteme die Verschiebungen p, q und die Drehung φ ertheilen. Der zu x, y gehörige Punkt (früher X, Y) erhält dann die Coordinaten X', Y', und zwar ist:

$$X' = p + X \cos\varphi - Y \sin\varphi$$
$$Y' = q + X \sin\varphi + Y \cos\varphi.$$

Es gilt jetzt, p, q, φ so zu bestimmen, dass die Bedingung dafür, dass ein Punkt X', Y' mit einem Punkte x, y zusammenfällt, auf eine lineare Gleichung in x, y führt, die dann die Collineationsaxe darstellt. Setzen wir also die Werthe der X, Y aus (7) in die letzten Gleichungen ein, so müssen für $X' = x$, $Y' = y$ die entstehenden Gleichungen (τ sei Proportionalitätsfactor):

$$\tau\,(x - p) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cos\varphi - (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) \sin\varphi$$
$$\tau\,(y - q) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \sin\varphi + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) \cos\varphi$$
$$\tau = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}$$

sich sämmtlich auf die *eine* Gleichung

$$\varkappa x + \lambda y + 1 = 0$$

reduciren. Zunächst haben wir daher:

$$\varkappa = \frac{a_{31}}{a_{33} - \tau}, \quad \lambda = \frac{a_{32}}{a_{33} - \tau};$$

wo sich nun τ aus den ersten beiden Gleichungen durch Coëfficientenvergleichung bestimmt. Man findet:

$$\frac{a_{11} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi - \tau}{a_{12} \cos \varphi - a_{22} \sin \varphi} = \frac{a_{31}}{a_{32}}, \quad \frac{a_{11} \sin \varphi + a_{21} \cos \varphi}{a_{12} \sin \varphi + a_{22} \cos \varphi - \tau} = \frac{a_{31}}{a_{32}},$$

oder, wenn man die Unterdeterminanten

$$A_{13} = a_{32} a_{21} - a_{22} a_{31}, \quad A_{23} = a_{31} a_{12} - a_{11} a_{32}$$

einführt:

$$A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi = -\tau a_{32}$$
$$A_{13} \cos \varphi + A_{23} \sin \varphi = \tau a_{31}.$$

Für den Werth von τ hat man also:

$$\tau^2 = \frac{A_{13}^2 + A_{23}^2}{a_{32}^2 + a_{31}^2};$$

die Grössen p, q, φ ergeben sich dann linear; es gibt also zwei Arten, die perspectivische Lage hervorzurufen, wie wir auch schon vorhin rein geometrisch erkannten (p. 256).

Es liegt nahe, auch bei der allgemeinen Collineation nach solchen Punkten zu fragen, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Wir finden die Coordinaten derselben aus den Gleichungen

$$\varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3,$$

wenn wir $y_i = x_i$ setzen, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho) x_1 + \quad & a_{12} x_2 + \quad & a_{13} x_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) & x_2 + & a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + \quad & a_{32} x_2 + (a_{23} - \varrho) & x_3 = 0; \end{aligned} \tag{8}$$

und die Elimination der x ergibt die für ϱ cubische Gleichung:

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Im Allgemeinen gibt es daher drei Punkte, welche mit ihren zugehörigen zusammenfallen. Ebenso muss es auch *drei sich selbst entsprechende Gerade geben;* es sind offenbar die Verbindungslinien der drei Punkte, da die Linien, welche entsprechende Punkte verbinden, auch entsprechende sind. Das so bestimmte Dreieck bildet ein besonders einfaches Coordinatensystem für die Transformation. Da unter Zu-

grundelegung desselben der Linie $x_i = 0$ die Linie $y_i = 0$ entspricht, so müssen die Gleichungen (1) dann die vereinfachte Form annehmen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \alpha_1 x_1 \\ \varrho y_2 &= \alpha_2 x_2 \\ \varrho y_3 &= \alpha_3 x_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

Man kann sich dieselben aus (1) entstanden denken, indem man jene Gleichungen mit u_1, u_2, u_3 multiplicirt und addirt:

$$\varrho\,(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = \Sigma\, a_{ik}\, u_i\, x_k\,, \tag{11}$$

und dann die u so bestimmt, dass der lineare Ausdruck links dem rechts proportional wird, also:

$$\alpha u_k = \Sigma\, a_{ik}\, u_i .$$

Die u_k sind dann die Coordinaten einer sich selbst entsprechenden Geraden, und die Elimination derselben aus den letzten Gleichungen führt für α auf die cubische Gleichung (9). Die Gleichung (11) verwandelt sich in ($u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$):

$$\varrho u_y = \alpha u_x\,,$$

d. h. in eine der Gleichungen (10). Man sieht also, *dass* α_1, α_2, α_3 *die Wurzeln jener cubischen Gleichung sind.*

Die drei so ausgezeichneten Punkte sind im Allgemeinen von einander verschieden*); und nur dann ist das Dreieck derselben in dieser Weise einzuführen. Rücken zwei der Punkte einander unendlich nahe, oder, was dasselbe ist, hat die Gleichung (9) zwei gleiche Wurzeln, so wird kein eigentliches Dreieck mehr gebildet, und man kann die Transformation nicht mehr in der Gestalt (10) darstellen. Dagegen ist dies noch möglich, wenn eine unendliche Zahl von Punkten existirt, die alle mit ihren entsprechenden zusammenfallen, wie es bei der perspectivischen Lage der Fall war; und zwar tritt dies ein, wenn alle Unterdeterminanten Δ_{ik} der Determinante (9) verschwinden. Denn die Coordinaten der drei Punkte genügen nach (8) den Relationen:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} \\ &= \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23} \\ &= \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33}\,; \end{aligned}$$

ein solcher Punkt wird also in der That unbestimmt, wenn für eine

*) Zwei derselben können auch imaginär werden. Es tritt dies z. B. ein bei den Transformationen, durch welche eine Drehung der Ebene in sich um einen ihrer Punkte dargestellt wird. In diesem Falle fallen zwei der Punkte in die imaginären Kreispunkte, der dritte ist das Rotationscentrum; ebenso sind zwei der Geraden imaginär, die dritte fällt in die unendlich ferne Gerade.

Wurzel von (9) alle Δ_{ik} Null werden. Diese Wurzel ist dann aber Doppelwurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$, denn es wird auch

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varrho} = -\varrho(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) = 0.$$

Bezeichnen wir diese Doppelwurzel durch σ, so können sich also bei der perspectivischen Lage, vorausgesetzt, dass $\Delta(\varrho) = 0$ nicht eine dreifache Wurzel habe*), die Gleichungen (8) nur um einen constanten Factor unterscheiden; d. h. *wir können die neun Coëfficienten a_{ik} der Transformation in der folgenden Weise durch sechs Grössen ausdrücken:*

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \alpha_1\beta_1 + \sigma & a_{21} = \alpha_1\beta_2 & a_{31} = \alpha_1\beta_3 \\ a_{12} = \alpha_2\beta_1 & a_{22} = \alpha_2\beta_2 + \sigma & a_{32} = \alpha_2\beta_3 \\ a_{13} = \alpha_3\beta_1 & a_{23} = \alpha_3\beta_2 & a_{33} = \alpha_3\beta_3 + \sigma \end{array}$$

Unsere Gleichungen (1) nehmen dadurch die einfachere Form an:

$$(12) \qquad \varrho y_i = \sigma x_i + \beta_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3),$$

und die cubische Gleichung geht über in:

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 - (\varrho - \sigma) & \alpha_2\beta_1 & \alpha_3\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 & \alpha_2\beta_2 - (\varrho - \sigma) & \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\beta_3 & \alpha_2\beta_3 & \alpha_3\beta_3 - (\varrho - \sigma) \end{vmatrix} = -(\varrho - \sigma)^2(\varrho - \sigma - \beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3).$$

Wir erhalten also in der That die Doppelwurzel $\varrho = \sigma$ und die einfache Wurzel

$$\varrho = \sigma + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Die erstere gibt uns *die Gleichung der Collineationsaxe:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

die andere *die Coordinaten des Collineationscentrums:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.$$

Die Gleichung dieses Punktes ergibt sich ebenso, wie die der Axe aus (12), wenn wir die Collineationsgleichungen für Liniencoordinaten aufstellen; denn diese werden:

$$(13) \qquad \varrho u_i = \sigma v_i + \alpha_i(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3).$$

Aus (12) folgt ferner durch Elimination von ϱ, σ und α_x:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

und ebenso aus (13) durch Elimination von ϱ, σ, v_β:

*) Eine vollständige Behandlung der verschiedenen hier auftretenden Möglichkeiten findet sich in der letzten Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wodurch wieder die früher schon bewiesenen Sätze gegeben sind, dass Verbindungslinien entsprechender Punkte durch das Collineationscentrum gehen, und entsprechende Gerade sich auf der Collineationsaxe schneiden.

Legen wir nun zwei Ecken des Coordinatensystems auf die Axe, die dritte in das Centrum der Collineation, so erhalten wir die Transformation in der kanonischen Form:

$$\varrho y_1 = \tau x_1, \quad \varrho y_2 = \sigma x_2, \quad \varrho y_3 = \sigma x_3$$

welche sich von der obigen Form nur dadurch unterscheidet, dass dort die unendlich ferne Gerade statt der Collineationsaxe als dritte Coordinatenseite benutzt wurde.

Auf andere Besonderheiten, welche bei den linearen Verwandtschaften eintreten können, werden wir später von anderem Gesichtspunkte aus zurückkommen. Wir gedenken hier nur noch mit einigen Worten der sogenannten *dualistischen Verwandtschaften oder Transformationen*, von denen wir in der durch einen Kegelschnitt begründeten Polarreciprocität einen speciellen Fall kennen gelernt haben. Eine solche Verwandtschaft wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\varrho u_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3,$$

oder aufgelöst: $$\sigma x_i = A_{1i} u_1 + A_{2i} u_2 + A_{3i} u_3;$$

sie ordnet also jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden einen Punkt zu und kann somit als algebraischer Ausdruck für das allgemeine Dualitätsprincip betrachtet werden. Besonders ausgezeichnet sind dabei zwei Kegelschnitte:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0,$$

der eine als Ort der Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, der andere als umhüllt von diesen Geraden. Beide Curven sind mit einander identisch für $a_{ik} = a_{ki}$, und dann ist $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ die Liniencoordinatengleichung von $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$: *In diesem Falle geht also die dualistische Verwandtschaft in die Polarreciprocität in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ über.* —

VII. Die ternären Formen im Allgemeinen.

Bevor wir zu allgemeinen Sätzen über ternäre Formen übergehen, schicken wir einige Bemerkungen über die Natur der bei ihnen auftretenden Bildungen voraus. Weiterhin wird uns hauptsächlich die symbolische Darstellung derselben und die aus dieser fliessende Uebertragung der Resultate der binären Formentheorie auf das ternäre Gebiet beschäftigen.

Betrachten wir zunächst eine lineare Form:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

so stellt dieselbe bekanntlich gleich Null gesetzt eine gerade Linie dar; und die u_i sind die *Coordinaten dieser Geraden.* Dies werden wir jedoch gemäss dem Dualitätsprincip besser dahin aussprechen, dass die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

die *Bedingung für die vereinigte Lage des Punktes x und der Geraden u ist* (vgl. p. 69). Schon hieraus ersehen wir, dass unsere lineare Form die Invarianteneigenschaft haben muss; denn wir haben gesehen, dass die vereinigte Lage von Punkt und Gerade durch eine Collineation nicht zerstört werden kann. Sei nun eine solche gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho X_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3, \tag{1}$$

so werden die entsprechenden Gleichungen für Liniencoordinaten (vgl. p. 68):

$$\sigma u_i = \alpha_{1i} U_1 + \alpha_{2i} U_2 + \alpha_{3i} U_3. \tag{2}$$

Durch Benutzung dieser Relationen und unter Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten erkennt man zunächst, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

die Invarianteneigenschaft hat, ebenso wie bei den binären Formen die zweigliedrige Determinante (xy). Wir haben nämlich, wenn Y, Z die Coordinaten der Punkte sind, in welche y, z vermöge der Gleichungen (1) übergehen, unmittelbar:

$$\varrho^3 \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

oder wenn wir die aus den x, y, z gebildete Determinante kurz durch (xyz), die Substitutionsdeterminante der α_{ik} durch $r\,.\,\varrho^3$ bezeichnen:

$$(3)\qquad (XYZ) = r\,(xyz)\,.$$

Die Coordinaten einer Geraden sind nun proportional zu den zweigliedrigen Unterdeterminanten irgend zweier auf ihr gelegener Punkte; und die dabei auftretenden Proportionalitätsfactoren wollen wir in der Folge immer so bestimmt denken, *dass der Ausdruck* $U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3$ *ohne Factor in* $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ *übergeht.* D. h. wir setzen:

$$\begin{aligned} rU_1 &= Y_2Z_3 - Y_3Z_2\,, & u_1 &= y_2z_3 - y_3z_2\,,\\ rU_2 &= Y_3Z_1 - Y_1Z_3\,, & u_2 &= y_3z_1 - y_1z_3\,,\\ rU_3 &= Y_1Z_2 - Y_2Z_1\,, & u_3 &= y_1z_2 - y_2z_1\,; \end{aligned}$$

und dadurch erhalten wir also in abgekürzter Schreibweise:

$$(4)\qquad U_X = u_x$$

Diesen Ausdruck u_x wollen wir in der Folge, da er nur von Punkt- und Liniencoordinaten abhängt, ohne sonst noch Coëfficienten zu enthalten, als *identische Covariante* bezeichnen.

Die Mannigfaltigkeit der geometrischen Gebilde, welche durch das Auftreten der Liniencoordinaten im ternären Gebiete bedingt ist, nöthigt uns, auch den Kreis der invarianten Bildungen entsprechend zu erweitern. Während nämlich bei den binären Formen nur Invarianten und Covarianten auftreten, haben wir bei drei homogenen Veränderlichen die folgenden Klassen von Functionen mit der Invarianteneigenschaft:

1. *Invarianten.* Dieselben hängen nur von den Coëfficienten der Grundform (oder bei simultanen Systemen, der Grundformen) ab, und geben durch ihr Verschwinden besondere Eigenschaften des durch die Grundform dargestellten Gebildes (Curve).
2. *Covarianten.* Dieselben enthalten ausser den Coëfficienten der Grundform noch die Coordinaten eines Punktes, oder auch mehrerer. Im ersten Falle geben sie, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Curve, die mit der Grundcurve in einer invarianten Beziehung steht.
3. *Zugehörige Formen oder Contravarianten.* Sie enthalten ausser den Coëfficienten der Grundform noch Liniencoordinaten. Kommt nur eine Reihe von diesen vor, so stellen sie, gleich Null gesetzt, eine von den Linien umhüllte Curve dar.
4. *Zwischenformen.* Dieselben enthalten ausser den Coëfficienten gleichzeitig Punkt- und Liniencoordinaten. Ist von jeder Art dieser Veränderlichen nur eine Reihe vorhanden, so wird durch

Nullsetzen einer Zwischenform jedem Punkte x der Ebene eine von Linien u umhüllte Curve, jener Linie u eine von Punkten x beschriebene Curve zugeordnet. Man hat diese Gebilde bisher nur eingehender betrachtet, wo man, ausgehend von Grundformen mit Punkt- *oder* Liniencoordinaten, durch covariante Bildungen auf sie geführt wurde. Es ist jedoch, wenn anders man systematische Vollständigkeit erreichen will, von diesen Zwischenformen selbst als Grundformen auszugehen. Wir werden hierauf später zurückkommen.*)

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass endlich noch *absolute Invarianten***) auftreten, d. h. Functionen, die bei linearen Transformationen *völlig* ungeändert bleiben, und die, wie bei den binären Formen, durch Quotienten passender Potenzen von Invarianten gegeben werden (p. 196). — Alle diese Bildungen wollen wir im Folgenden kurz unter dem Ausdrucke *Functionalinvariante* zusammenfassen. Wir theilen dieselben ein nach dem „*Grade*“ in den Coëfficienten der Grundform, nach der „*Ordnung*“ in den Punktcoordinaten und nach der „*Klasse*“ in den Liniencoordinaten.

Es drängt sich hier naturgemäss die Frage auf, ob es möglich ist, ganz allgemein die formale Gestalt einer solchen invarianten Bildung zu charakterisiren, wie uns dies ja bei den Invarianten und Covarianten binärer Formen gelang. Dies ist nun in der That erreichbar; und zwar werden wir dazu durch Anwendung einer symbolischen Bezeichnungsweise geführt, welche der bei zwei homogenen Variabeln benutzten ganz analog ist, und welche daher wohl nur einer kürzeren Erörterung bedarf. Es beruht diese Symbolik darauf, dass wir eine ternäre Form n^{ter} Ordnung in den x oder u durch die n^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks ersetzen, so dass dieselbe in der Form

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x{}^n$$

bezüglich:

$$\varphi = (u_1 \alpha_1 + u_1 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^n = u_\alpha{}^m$$

erscheint. Die Functionalinvarianten einer Grundform sind dadurch, wie bei den binären Formen, auf diejenigen linearer Formen zurückzuführen. Von einem symbolischen Ausdrucke $a_x{}^n$ einer solchen

---

*) Vgl. die letzte Abtheilung des vorliegenden Bandes.

**) Die Zahl derselben für eine Form n^{ter} Ordnung ist

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 9,$$

denn durch lineare Transformation kann man immer 9 von den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coëfficienten der Form beliebig gegebene Werthe annehmen lassen. Vgl. die entsprechende Bestimmung für binäre Formen auf p. 249, und Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 62.

Bildung nämlich kann man zu dem wirklichen der betreffenden Form nur in eindeutig bestimmter Weise zurückkehren, wenn in jenem die Coëfficienten von a_x^n *linear* vorkommen. Ist nun die Bildung vom ϱ^{ten} Grade in den Coëfficienten von a_x^n, so können wir durch Anwendung des invarianten Processes:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} b_i, \tag{4}$$

wo die a_i die wirklichen Coëfficienten von f bedeuten, die b_i diejenigen einer andern Form f', welche von derselben Ordnung wie f in den Variabeln ist, aus Π eine andere invariante Function ableiten, welche vom $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grade in den Coëfficienten von f und vom ersten Grade in den Coëfficienten von f' ist. Durch $(\varrho - 1)$malige Wiederholung des angeführten Processes, wobei jedesmal die Coëfficienten einer neuen Grundform eingeführt werden, erhalten wir so schliesslich eine simultane invariante Function, welche die Coëfficienten einer jeden von ϱ verschiedenen Formen n^{ter} Ordnung linear enthält; und von der wir zu der ursprünglichen Function Π unzweideutig zurückgehen können, wenn wir successive die Symbole dieser verschiedenen Formen durch die wirklichen Coëfficienten der einen Grundform f ersetzen. Denkt man sich andererseits die verschiedenen Hülfsformen n^{ter} Ordnung durch Potenzen linearer Formen b_x^n, c_x^n, d_x^n etc. ersetzt, so ist Π als simultane Functionalinvariante linearer Formen dargestellt. So erscheint z. B. die Invariante eines Kegelschnittes $f = a_x^2 = 0$ als simultane Invariante dreier Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2. In der That setzen wir in der ersten Horizontalreihe der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{ik} = a_i a_k$, in der zweiten $a_{ik} = b_i b_k$, in der dritten $a_{ik} = c_i c_k$, so wird:

$$A = a_1 b_2 c_3 (abc),$$

oder wenn wir in der zweiten Reihe die a, in der dritten die b, in der ersten die c einführen und so alle möglichen Vertauschungen vornehmen:

$$6A = (abc) \left\{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2\right\}$$
$$= (abc)^2. —$$

Dass *der benutzte Differentationsprocess in der That die Invarianteneigenschaft der Function* Π *nicht ändert*, erkennt man in derselben Weise, wie den entsprechenden Satz bei binären Formen, denn der dort gegebene Beweis ist seinem Inhalte nach völlig unabhängig von

der Zahl der Veränderlichen (vgl. p. 183). Es sei nur bemerkt, dass man in die Form Π statt der b_i, wenn die a_i als Coëfficienten linearer Formen in Punktcoordinaten angesehen werden, auch die entsprechenden zweigliedrigen Unterdeterminanten aus Coëfficienten α, β von linearen Formen in Liniencoordinaten: u_α, u_β einführen kann; denn diese Unterdeterminanten verhalten sich ja bei linearen Transformationen, wie die a, oder b, d. h. ebenfalls wie Liniencoordinaten. Also *auch die Operation*

$$(5) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3) + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}(\alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial a_3}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

ändert die Invarianteneigenschaft nicht, wenn die a Coëfficienten linearer Ausdrücke in Punktcoordinaten waren. Dass ganz Analoges für eine Functionalinvariante einer Form n^{ter} Klasse $u_\alpha{}^n$ oder einer Zwischenform, sowie für simultane Systeme gilt, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

Durch diese symbolische Darstellung sind alle invarianten Bildungen auf solche von simultanen linearen Formen zurückgeführt. Wir brauchten also nur die symbolische Gestalt dieser letzteren zu untersuchen, um zur Beantwortung der gestellten Frage zu gelangen. Auf directerem Wege gelingt dies auch, wenn wir das folgende fundamentale Theorem voraussetzen, auf welches wir erst bei einer späteren Gelegenheit eingehen werden; dasselbe lautet:

Ein System von beliebig vielen ternären Formen, deren jede mehrere Reihen von Punktcoordinaten $(x, y, \ldots)$ *und Liniencoordinaten* $(u, v, \ldots)$ *enthält, kann stets durch ein „reducirtes äquivalentes System" ersetzt werden, d. h. durch ein anderes System von Formen, deren keine mehr, als eine Reihe Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält, und dessen sämmtliche simultane covariante Bildungen mit denen des ursprünglichen Systems identisch sind;**) und zwar besteht dies reducirte System immer aus einer endlichen Anzahl von Formen. Ist z. B. eine ternäre Form gegeben, welche vom m^{ten} Grade in den x und vom n^{ten} in den y ist, so kann man dieselbe durch ein reducirtes äquivalentes System von drei Formen ersetzen. Stellen wir die gegebene Form symbolisch durch

$$f = a_x{}^m b_y{}^n = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^m (b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3)^n$$

dar, wo dann erst das Product von je m Symbolen a und je n Symbolen b durch einen wirklichen Coëfficienten zu ersetzen ist, so wird das verlangte zu f äquivalente System gegeben durch:

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 17, 1872; und die letzte Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (abu), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (abu)^2.$$

Dabei bedeutet wieder (abu) die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Ist nun eine beliebige Function Π mit der Invarianteneigenschaft gegenüber einem beliebigen simultanen Systeme von ternären Formen gegeben, so können wir dieselbe mittelst der Processe (4), (5) symbolisch darstellen, als wenn dieselbe aus einem bestimmten Systeme linearer Formen abgeleitet sei. Die Coëfficienten linearer Formen, in denen die x variabel sind, können wir aber geradezu als Liniencoordinaten ansehen, da sie sich bei linearen Transformationen ebenso verhalten, und in gleicher Weise können wir die Coëfficienten der linearen Formen von der Gestalt u_α als Punktcoordinaten betrachten. Die Function Π kann also als eine Form angesehen werden, welche neben reinen Zahlen nur verschiedene Reihen der Coordinaten beider Arten enthält. Nach dem angeführten Satze über äquivalente Systeme muss daher Π auch als covariante Bildung aus einem Systeme von Formen ableitbar sein, von denen jede ausser *rein numerischen* Coëfficienten nur *eine* Reihe von Punkt- und *eine* Reihe von Liniencoordinaten enthält. Eine Form der letzteren Art kann aber, wie wir sogleich nachweisen werden, nur eine Potenz von $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ sein. Es wird ferner in der Theorie der äquivalenten Systeme gezeigt, dass man die Formen des ursprünglich gegebenen Systems als simultane Invarianten aus denen des reducirten Systems ableiten kann, indem man auf letztere die Operationen (4), (5) in passender Weise anwendet und die so gebildeten Formen, multiplicirt mit bestimmten Zahlencoëfficienten, addirt. Es muss daher die Invariante Π in derselben Weise aus Ausdrücken von der Form u_x^m, v_y^n etc. entstehen. Die erwähnten Operationen, auf diese identischen Covarianten angewandt, liefern aber immer nur Formen, welche sich aus Factoren von dem Typus

$$u_x\, u_y\, v_x\, v_y\, (uvw)\, (xyz)$$

zusammensetzen; also ist Π als Aggregat von Producten solcher Bildungen und numerischer Coëfficienten darstellbar.

Wir haben nur noch nachträglich zu beweisen, *dass jede Functionalinvariante, welche ausser reinen Zahlen nur eine Reihe Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält, eine Potenz von u_x, also von der Form u_x^λ sein muss.* Die gegebene Functionalinvariante sei:

$$\Pi\,(x_1, x_2, x_3;\; u_1, u_2, u_3);$$

in ihr können wir die Coordinaten der Geraden u durch die Unterdeterminanten aus denen zweier ihrer Punkte ersetzen, nämlich:

$$u_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3, \quad u_2 = y_3 z_1 - z_3 y_1, \quad u_3 = y_1 z_2 - z_1 y_2.$$

Nach dieser Substitution wenden wir auf die Function $\Pi(x, u)$ die folgende specielle lineare Transformation an:

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 T_1 + y_1 T_2 + z_1 T_3 \\ t_2 &= x_2 T_1 + y_2 T_2 + z_2 T_3 \\ t_3 &= x_3 T_1 + y_3 T_2 + z_3 T_3, \end{aligned}$$

wobei die t_i die laufenden Coordinaten sein mögen, und die T_i die entsprechenden für das neue Coordinatensystem. Bezeichnen wir durch X, Y, Z die neuen Coordinaten für die Punkte x, y, z, so ergeben sich für dieselben, indem man t bez. mit x, y, z identisch setzt, die Werthe:

$$(6) \qquad \begin{aligned} X_1 &= 1, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0 \\ Y_1 &= 0, \quad Y_2 = 1, \quad Y_3 = 0 \\ Z_1 &= 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = 1, \end{aligned}$$

und hieraus für die der Linie u entsprechenden Coordinaten:

$$U_1 = 1, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0.$$

Nun ist zufolge unserer Definition einer Functionalinvariante

$$(7) \qquad \Pi = r^{\lambda} \Pi',$$

wenn Π' die Function Π, gebildet für die neuen Coordinaten, und r die Transformationsdeterminante bedeutet. Letztere ist in unserem Falle

$$r = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (xyz),$$

und somit geht wegen (6) die Gleichung (7) über in:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = (xyz)^{\lambda} \Pi(1, 0, 0; 1, 0, 0).$$

Rechts steht jetzt aber wegen der über die Natur von Π gemachten Annahme neben der Potenz von u_x ein reiner Zahlenfactor; bezeichnen wir denselben also mit c und führen statt der Coordinaten von y und z wieder die ihrer Verbindungslinie ein, so wird:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = u_x^{\lambda} . c.$$

Und damit ist unsere Behauptung bewiesen, denn die angewandte Transformation ist der Definition nach auf die Natur einer Invariante ohne Einfluss.

Wir können daher nunmehr das folgende wichtige Theorem aussprechen:

Jede invariante Bildung eines Systems von ternären Formen kann als ein Aggregat symbolischer Producte dargestellt werden, deren Factoren identische Invarianten der Form u_x, (xyz) oder (uvw) sind.

Wir wollen die symbolische Darstellung der Formen zunächst verwerthen, um die Natur solcher Functionen festzustellen, durch deren Verschwinden Eigenschaften des Systems von Grundformen gegeben werden, welche bei allen Collineationen erhalten bleiben, und um uns so zu überzeugen, dass dazu die oben erwähnten Functionalinvarianten genügen. Der Einfachheit wegen werden wir nur *eine* Grundform $f = a_x^n = b_x^n$ als gegeben voraussetzen: man erkennt sofort, dass ganz dieselben Schlüsse für Systeme von beliebig vielen Formen gültig sind, unter denen dann auch Contravarianten und Zwischenformen enthalten sein können.

Man übersieht nun sofort, *dass eine einzelne Bedingung der Art nur durch das Verschwinden einer Invariante dargestellt werden kann.**) Ist nämlich Π (die Function, deren Verschwinden die besagte Bedingung liefert) Invariante, und Π' eine daraus durch Collineation hervorgehende, so muss $\Pi' = 0$ sein, *sobald* $\Pi = 0$ und *nur*, wenn $\Pi = 0$; also hat man

$$\Pi' = c \,.\, \Pi\,,$$

wo c nur von den Substitutionscoëfficienten abhängt. Um nun Π als Invariante zu erkennen, haben wir zu zeigen, dass c eine Potenz der Determinante r ist. Da wir es aber nur mit ganzen, algebraischen Functionen zu thun haben, so können wir wieder die schon gelegentlich bei den Kegelschnitten benutzte Schlussweise anwenden (vgl. p. 130) und erhalten so unmittelbar:

$$\Pi' = r^\lambda \,.\, \Pi\,, \text{ q. e. d.}$$

Genügt die Form f jedoch gleichzeitig mehreren Bedingungen**):

$$\Pi_1 = 0\,,\quad \Pi_2 = 0\,,\quad \Pi_3 = 0 \ldots,$$

wo die Π_i keine Veränderliche enthalten, so lässt sich zeigen, dass dieselben dadurch erhalten werden können, dass man die Coëfficienten einer (oder mehrerer) von den Variabeln abhängigen Functionalinvariante von f einzeln Null setzt, wie wir dies schon bei den binären cubischen und biquadratischen Formen gesehen haben (vgl. p. 228 und p. 241). Denken wir uns nämlich einen Ausdruck Π_1 symbolisch dargestellt, so wird derselbe neben Factoren vom Typus (abc), welche unmittelbar die Invarianteneigenschaft haben, noch einzelne Symbole a_i, b_k oder zweigliedrige symbolische Determinanten vom Typus $a_i b_k - b_i a_k$ als Factoren enthalten, d. h. es wird:

---

*) Vgl. Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 63, p. 302.

**) Vgl. im Folgenden Gram: Math. Annalen, Bd. 7, p. 230.

$$\Pi_1 = \Pi\left\{(abc)^{\varrho} \ldots a_i^{\lambda} b_k^{\mu} \ldots (a_i b_k - b_i a_k)^{\nu} \ldots\right\}.$$

Das System der Functionen Π_i soll nun durch eine Collineation in das System der entsprechenden Functionen Π_i' übergehen, wobei jedoch nicht nöthig ist, dass jede Function Π_i einzeln in die entsprechende Π_i' übergeführt wird. Wir wenden dazu insbesondere diese specielle lineare Transformation an:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1 x_3, & u_1 &= \xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \xi_3 U_3,\\
X_2 &= \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2 x_3, & u_2 &= \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2 + \eta_3 U_3,\\
X_3 &= \xi_2 x_1 + \eta_3 x_2 + \zeta_3 x_3, & u_3 &= \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3,
\end{aligned}$$

wo die ξ_i, η_i, ζ_i Coordinaten beliebiger fester Punkte bedeuten, oder aufgelöst, wenn v, w, t bez. die Coordinaten der Verbindungslinien $\overline{\eta\xi}$, $\overline{\zeta\xi}$, $\overline{\xi\eta}$ sind (z. B. $v_1 = \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2$) und $r = (\xi\eta\zeta)$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
r x_1 &= v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3, & r U_1 &= v_1 u_1 + w_1 u_2 + t_1 u_3,\\
r x_2 &= w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3, & r U_2 &= v_2 u_1 + w_2 u_2 + t_2 u_3,\\
r x_3 &= t_1 X_1 + t_2 Y_2 + t_3 X_3, & r U_3 &= v_3 u_1 + w_3 u_2 + t_3 u_3.
\end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass sich die Symbole a_i bei der Transformation verhalten wie die u_i, also die zweigliedrigen Determinanten aus den a und b, wie die entsprechenden Determinanten aus zwei Reihen Liniencoordinaten, d. h. wie Punktcoordinaten. Bezeichnen wir also mit a', b' ... die Symbole der aus f durch unsere Transformation entstehenden Form, so wird z. B.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \xi_1 a_1' + \xi_2 a_2' + \xi_3 a_3' = a_\xi'\\
(ab)_2 &= (a_3 b_1 - b_3 a_1)\\
&= \frac{1}{r}\left[w_1 (a'b')_1 + w_2 (a'b')_2 + w_3 (a'b')_3\right] = \frac{1}{r}(a'b'w).
\end{aligned}$$

Die Function Π_i' enthält also nur noch symbolische Factoren, deren Invarianteneigenschaft evident ist, und welche noch von den *völlig willkürlichen* Grössen ξ, η, ζ, v, w, t abhängen; und Π_i' muss *unabhängig* von den Werthen der letzteren verschwinden, sobald alle Π_i Null sind. Wir können also insbesondere setzen:

$$\begin{aligned}
\xi_i = \eta_i = \zeta_i = X_i,\\
v_i = w_i = t_i = U_i,
\end{aligned}$$

und dann ist Π_i' von der Form

$$\Pi\left\{(a'b'c')^{\varrho} \ldots a_X'^{\lambda} b_X'^{\mu} \ldots (a'b'U)^{\nu} \ldots\right\},$$

also eine *Zwischenform;* und man muss das System der Gleichungen $\Pi_i' = 0$ erhalten, welches dem Systeme der Π_i (oder einem Theile desselben) entspricht, wenn man die einzelnen Coëfficienten dieser Zwischenform gleich Null setzt. Dann folgt aber, dass sich auch die

Functionen Π_i als Coëfficienten einer Zwischenform auffassen lassen; und wir haben das folgende Theorem (wodurch dann gleichzeitig der entsprechende Satz für binäre Formen bewiesen ist, vgl. p. 174):

*Alle invarianten Eigenschaften einer ternären Form können durch Verschwinden von Invarianten oder durch identisches Verschwinden von Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen derselben dargestellt werden.**) —

An die symbolische Darstellung der Formen knüpfen sich ferner die folgenden Erörterungen. Wir hoben schon früher hervor, dass auf derselben bei den binären Formen hauptsächlich der Beweis des Gordan'schen Satzes von der Endlichkeit der Formensysteme beruht. Einen entsprechenden Satz für ternäre Formen aufzustellen, ist jedoch im Allgemeinen nicht gelungen; nur für die quadratischen und cubischen Formen**) ist der Beweis eines solchen geliefert. Ferner liefert uns die Symbolik hier ein Princip, auf das wir bereits oben hinwiesen, und nach welchem es möglich ist, alle für binäre Formen bekannten Sätze sofort für ternäre Bildungen zu verwerthen, und so eine gewisse Klasse von Invarianten auch geometrisch leicht zu interpretiren, sobald dies für die entsprechenden binären Formen geschehen ist.

Man wird zu diesem *Uebertragungsprincipe* naturgemäss durch das Studium des Schnittpunktsystems einer Geraden mit einer gegebenen Curve geführt. Bekanntlich wird eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Geraden in n Punkten geschnitten (vgl. p. 53). Dieselben werden im Allgemeinen keine besondere Eigenschaft haben, d. h. keine, welche durch das Verschwinden einer bestimmten Invariante der das Schnittpunktsystem auf der Geraden repräsentirenden binären Form gegeben ist. Dies kann jedoch sehr wohl bei besonderen Lagen der betrachteten Geraden eintreten. So wird z. B. für eine Tangente der Curve, die ja dadurch definirt ist, dass zwei ihrer n Schnittpunkte in den Berührungspunkt zusammenfallen, die Discriminante der betreffenden binären Form n^{ter} Ordnung verschwinden; und so kann man bei

*) Betrachtet man alle ternären Formen als identisch, welche aus einander durch lineare Transformationen hervorgehen, so ist nach diesem Satze eine ternäre Form durch das Verschwinden gewisser Functionalinvarianten völlig definirt, d. h. bestimmt bis auf solche Formen, die aus ihr eben durch lineare Transformationen hervorgehen; und hieraus folgt sofort der Satz: *Zwei ternäre Formen können linear in einander transformirt werden, sobald für beide dieselben Relationen zwischen den Functionalinvarianten bestehen;* (die Gleichheit der absoluten Invarianten ist in dieser Bedingung mit eingeschlossen).

**) Vgl. hierüber Gordan: Ueber ternäre Formen dritten Grades, Math. Annalen, Bd. 1, p. 90. Zufolge einer Mittheilung an den Herausgeber hat Gordan die Endlichkeit des Systems auch für ternäre Formen 4. Ordnung bewiesen und das vollständige System einer solchen Form aufgestellt.

einer Curve vierter Ordnung nach denjenigen Geraden fragen, deren vier Schnittpunkte mit der Curve ein Doppelverhältniss von gegebenem Werthe bestimmen. Es kommt also bei derartigen Fragen nur darauf an, die zugehörigen binären Formen für die Schnittpunktsysteme herzustellen; und dies geschieht einfach, indem wir den beweglichen Punkt x der Geraden in bekannter Weise mittelst eines Parameters $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ als Function zweier Punkte y und z derselben darstellen. Wir setzen also (unter Vernachlässigung des das Folgende nicht beeinflussenden Proportionalitätsfactors):

$$x_1 = \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1$$
$$x_2 = \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2$$
$$x_3 = \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3,$$

wo dann $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die binären Coordinaten des Punktes x auf der Verbindungslinie von y und z vorstellen; und zwar sind die letzteren Punkte die Grundpunkte dieser Coordinatenbestimmung (vgl. p. 171).

Führen wir diese Ausdrücke von x in die Gleichung der Curve ein, welche durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = b_x^n = 0$$

gegeben sein mag, so sind die Schnittpunkte der Linie $\overline{yz}$ bestimmt durch die n Wurzeln $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ der Gleichung:

$$f = [\varkappa_1 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \varkappa_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n$$
$$= (\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^n = 0.$$

Bezeichnen wir daher die symbolischen Ausdrücke a_y, a_z kurz bez. durch α_1, α_2, so erhalten wir eine binäre Form

$$\varphi = (\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2)^n = \alpha_\varkappa^n = \beta_\varkappa^n = \ldots$$

welche geometrisch auf der Linie $\overline{yz}$ durch die n Schnittpunkte mit der gegebenen Curve $f = 0$ repräsentirt ist. Eine einzelne projectivische Eigenschaft dieses Punktsystems ist nun durch das Verschwinden einer Invariante der binären Form φ bedingt.*) Eine solche Inva-

*) Es gibt zweifach unendlich viele Linien in der Ebene. Stellen wir also *eine* Bedingung für das Schnittpunktsystem, so wird es noch einfach unendlich viele Gerade geben, die ihr genügen. Dagegen gibt es nur eine endliche Anzahl von Geraden, welche gleichzeitig zwei Bedingungen genügen. *Eine* Bedingung wird nun im binären Gebiete immer durch das Verschwinden einer Invariante dargestellt, und die entsprechenden Geraden der Ebene umhüllen dann nach den Entwicklungen des Textes eine Curve (Contravariante). Fügt man nun als zweite Bedingung das Verschwinden einer zweiten binären Invariante hinzu, so werden die *beiden* Bedingungen genügenden Geraden der Ebene durch die *Gesammtheit* der gemeinsamen Tangenten zweier Curven gegeben. Werden dagegen die bei-

riante besteht nach den Sätzen über binäre Formen aus einem Aggregate von Producten, deren einzelne Factoren durch symbolische Determinanten von der Form $(\alpha\beta) = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ gegeben sind. Stellen wir sie demnach dar durch

$$I = \Sigma c \Pi (\alpha\beta),$$

wo die c die etwa hinzutretenden Zahlenfactoren bezeichnen mögen, so wird, wenn wir die α, β wieder durch ihre Ausdrücke in y, z ersetzen, eine Invarianteneigenschaft des Schnittpunktsystems gegeben durch eine Gleichung von der Form:

$$I = \Sigma c \Pi (a_y b_z - b_y a_z) = 0.$$

Hier können wir schliesslich die Liniencoordinaten u leicht einführen; denn es ist:

$$\begin{aligned} a_y b_z - b_y a_z &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_2 y_3)(b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3) \\ &\quad - (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3) \\ &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3)(y_2 z_3 - z_2 y_3) \\ &\quad + (a_3 b_1 - b_3 a_1)(y_3 z_1 - z_3 y_1), \end{aligned}$$

oder da die Unterdeterminanten der y, z zu den Coordinaten u ihrer Verbindungslinie proportional sind, wenn wir den Proportionalitätsfactor vernachlässigen:

$$a_y b_z - b_y a_z = (abu).$$

Die Bedingung dafür, dass das Schnittpunktsystem einer Linie u mit der Curve $f = 0$ die Invarianteneigenschaft

$$\Sigma c \Pi (\alpha\beta) = 0$$

habe, ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\Sigma c \Pi (abu) = 0;$$

dieselbe stellt dann eine von den betreffenden Linien u umhüllte Curve dar, deren Klasse gleich der Anzahl der symbolischen Determinantenfactoren in einem Gliede der binären Invariante Π ist. Wir können den durch diese Entwicklungen gefundenen einfachen und äusserst fruchtbaren Satz in folgender Weise aussprechen:

Soll eine Gerade eine Curve n^{ter} Ordnung in einer Punktgruppe schneiden, welche eine besondere projectivische Eigenschaft besitzt, so erhält man

---

den binären Bedingungen durch das identische Verschwinden einer Covariante dargestellt, so sind die entsprechenden Geraden durch die gemeinsamen Tangenten eines Systems von Curven gegeben, wo dann je *zwei* Curven des Systems ausserdem noch andere Tangenten gemein haben. Ein Beispiel wird sogleich unten angeführt werden. Es sei hier nur bemerkt, dass sich z. B. drei Gerade der Ebene am einfachsten als die gemeinsamen Tangenten eines zweifach unendlichen Systems von Kegelschnitten darstellen, in dem je zwei Curven noch eine bewegliche Tangente gemein haben.

die Gleichung der von der Geraden umhüllten Curve in folgender Weise: Man stelle die Invariante der binären Form n^{ter} Ordnung, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussagt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende zweigliedrige Determinante (ab) *durch eine dreigliedrige* (abu), *wo die* u *Liniencoordinaten und die* a, b ... *Symbole der gegebenen ternären Form bedeuten.**)

Einige Beispiele mögen dazu dienen, die Fruchtbarkeit dieses Satzes zu erweisen, sowie die Art von Problemen zu kennzeichnen, deren Lösung durch denselben im Principe geleistet ist.

Stellen wir uns zunächst die schon anderweitig behandelte Aufgabe, einen Kegelschnitt:

$$a_x^2 = b_x^2 = 0$$

in Liniencoordinnten darzustellen. Derselbe wird von einer Geraden u, wenn wir uns der obigen Bezeichnungen bedienen, in einem Punktepaare getroffen, das durch die Gleichung

$$\alpha_x^2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1)^2 = 0$$

gegeben ist. Für eine Tangente müssen die beiden Punkte zusammenfallen, d. h. die Discriminante der Form α_x^2:

$$(\alpha\beta)^2$$

verschwinden. *Die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ist daher symbolisch* dargestellt durch:

$$(abu)^2 = 0.$$

Man kann leicht die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der früher gegebenen nachweisen. Ist nämlich entsprechend unserer sonstigen Bezeichnung:

$$a_x^2 = b_x^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1,$$

so haben wir in $(abu)^2$ zu setzen:

$$a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}.$$

Die Entwicklung der symbolischen Determinante ergibt dann:

$$\begin{aligned}(abu)^2 = u_1^2\,(a_2b_3 - b_2a_3)^2 + u_2^2\,(a_3b_1 - b_3a_1)^2 + u_3^2\,(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ + 2u_2u_3\,(a_3b_1 - b_3a_1)(a_1b_2 - b_1a_2) + 2u_3u_1\,(a_1b_2 - b_1a_2)(a_2b_3 - b_2a_3) \\ + 2u_1u_2\,(a_2b_3 - b_2a_3)\,(a_3b_1 - b_3a_1), \\ = 2u_1^2\,(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + \dots + 4\,u_2u_3\,(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) + \dots,\end{aligned}$$

oder wie man leicht übersieht:

*) Dieser Satz lässt sich auf beliebig viele Veränderliche ausdehnen und wurde in dieser Form von Clebsch gegeben in der erwähnten Abhandlung im 59. Bd. von Crelle's Journal.

$$(abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich allgemein die Gleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve in Liniencoordinaten darstellen, wenn man von der Discriminante der entsprechenden binären Form ausgeht, worauf wir sogleich zurückkommen werden. Wir erwähnen hier zuvor noch die folgenden Beispiele:

Die Discriminante einer binären cubischen Form

$$a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3$$

war gegeben durch

$$(ab)^2 (cd)^2 (ac) (bd),$$

und es ist daher die Bedingung dafür, dass eine Linie u eine Curve dritter Ordnung

$$a_x^3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = 0$$

in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, oder *die Gleichung der Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten:*

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = 0,$$

wo b, c, d mit a gleichwerthige Symbole sind.

Die allgemeine Curve dritter Ordnung ist also von der sechsten Klasse.

Die Discriminante der binären biquadratischen Form

$$a_x^4 = b_x^4 = \dots$$

war dargestellt durch

$$i^3 - 6j^2,$$

wo $i = (ab)^4$, $j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$; es ist daher *die Gleichung der Curve vierter Ordnung*

$$a_x^4 = 0$$

in Liniencoordinaten:

$$I^3 - 6J^2 = 0,$$

wenn man setzt:

$$I = (abu)^4$$
$$J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2.$$

Die allgemeine Curve vierter Ordnung ist somit von der zwölften Klasse.

Da man nun allgemeine Methoden hat, um die Discriminante einer binären Form zu bilden (vgl. p. 192), so kann man auch die Liniencoordinatengleichung einer jeden in Punktcoordinaten gegebenen Curve aufstellen. Insbesondere kann man also auch die Klasse einer

Curve n^{ter} Ordnung sowie den Grad der Liniengleichung in den Coëfficienten allgemein angeben.*) Die Discriminante einer binären Form n^{ter} Ordnung nämlich ist vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten derselben, enthält also $2(n-1)$ verschiedene, einander gleichwerthige Symbole, von denen jedes zur n^{ten} Dimension vorkommt. Diese Verhältnisse werden aber nicht geändert, wenn man eine binäre Determinante (ab) durch die ternäre (abu) ersetzt; also:

Die Liniencoordinatengleichung einer Curve n^{ter} Ordnung ist vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten ihrer Punktcoordinaten-Gleichung.

Ferner wissen wir (vgl. p. 195), dass eine binäre Invariante vom Grade r in den Coëfficienten einer Form s^{ter} Ordnung immer $\frac{1}{2}rs$ symbolische Determinantenfactoren enthält. In unserer Discriminante kommen daher $n(n-1)$ Factoren vom Typus (ab) vor; und da bei Anwendung des Uebertragungsprincips aus jedem solchen Factor ein in den u linearer Ausdruck wird, so folgt:

Eine Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse $n(n-1)$. —

Wir kehren zu dem zuletzt von uns behandelten Beispiele zurück. Das Verschwinden der Discriminante einer binären biquadratischen Form ist nur ein specieller Fall davon, dass die absolute Invariante derselben $\frac{i^3}{j^2}$ einen gegebenen Werth hat, d. h. dass die vier Punkte ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Dem entsprechend ist nach unserem Uebertragungsprincipe durch die Gleichung

$$I^3 - kJ^2 = 0,$$

wenn man k als Parameter auffasst, ein System von einfach unendlich vielen Curven zwölfter Klasse gegeben, deren jede die Eigenschaft hat, dass alle ihre Tangenten die gegebene Curve vierter Ordnung in einem Punktquadrupel mit gewissem Doppelverhältnisse trifft; und zwar bestimmt sich letzteres (α) mittelst der Gleichung (vgl. p. 239)

$$k = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2\,(1-2\alpha)^2\,(2-\alpha)^2}$$

in bekannter Weise durch den Parameter k. Geben wir demselben insbesondere die Werthe 0 und ∞, so erhalten wir bez. die folgenden Sätze:

Die geraden Linien, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung

$$a_x^4 = 0$$

nach äquianharmonischem Doppelverhältnisse schneiden, umhüllen eine Curve vierter Klasse:

---

*) Die folgende Abzählung bezieht sich zunächst nur auf den Fall, dass die Curve keine sogenannte „mehrfachen Punkte" besitzt; vgl. hierüber die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$I = (abu)^4 = 0.$$

*Die Linien, welche jene Curve nach harmonischem Doppelverhältnisse schneiden, umhüllen eine Curve sechster Klasse:**)

$$J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0.$$

---

*) Indem wir der Entwicklung des Textes vorgreifen und die Begriffe einer Wende- und Doppeltangente voraussetzen (vgl. die folgende Abtheilung), knüpfen wir hier im Anschlusse an die Anmerkung auf p. 275 folgende Bemerkungen an. — Die Curve $a_x^4 = 0$ hat eine endliche Anzahl von Wendetangenten, d. h. Tangenten, welche die Curve in drei successiven Punkten treffen. Für eine solche muss die ihrem Schnittpunktsysteme entsprechende binäre Form eine dreifache Wurzel haben, d. h. es muss gleichzeitig $i = 0$ und $j = 0$ sein (vgl. p. 240). Das Uebertragungsprincip gibt also den Satz:

Die Wendetangenten der Curve 4ter Ordnung sind die gemeinsamen Tangenten der Curven

$$I = (abu)^4 = 0, \qquad J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0;$$

ihre Zahl ist also 24.

Stellt man das entsprechende Problem bei Curven dritter Ordnung, so müsste die entsprechende binäre cubische Form a_x^3 ein vollständiger Cubus sein, d. h. ihre Hesse'sche Form $\Delta = (ab)^2 a_x b_x$ *identisch* verschwinden. Sind nun allgemein zwei Bedingungen für das Schnittpunktsystem durch das identische Verschwinden einer binären Coonvariante:

$$\Pi\,(ab)\, a_x b_x = 0$$

gegeben, so geht diese Gleichung bei Anwendung des Uebertragungsprincips, wenn man wieder $x_1 y_i + x_2 z_i$ durch x_i ersetzt, über in:

$$\Pi\,(abu)\, a_x b_x = 0,$$

wo nun x *irgend* ein Punkt auf der Linie u ist. Der letzteren Bedingung geben wir Ausdruck durch die Substitution:

$$x_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3, \quad x_2 = u_3 v_1 - v_3 u_1, \quad x_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2,$$

wo die v_i ganz willkürliche Grössen sind. Dann erhalten wir den Satz:

Soll für das Schnittpunktsystem einer Linie u mit einer Curve $a_x^n = 0$ eine binäre Covariante $\Pi\,(ab)\, a_x b_x$ identisch verschwinden, so wird u von allen Curven des zweifach unendlichen Systems (mit den Parametern $v_1 : v_2 : v_3$):

$$\Pi\,(abu)\,(auv)\,(buv) = 0$$

berührt.

Insbesondere folgt für das beregte Beispiel:

Die Wendetangenten einer Curve 3ter Ordnung $a_x^3 = 0$ sind die gemeinsamen Tangenten des Systems von Curven 4ter Klasse:

$$(abu)^2 (auv)\,(buv) = 0.$$

Da ferner für eine binäre biquadratische Form f die Bedingung für das Auftreten zweier Doppelwurzeln durch das identische Verschwinden der Covariante $iH - jf$ gegeben ist, so haben wir:

Die Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $a_x^4 = 0$ sind die gemeinsamen Tangenten des Systems von Curven 10ter Klasse:

$$(abu)^4 (cdu)^2 (cuv)^2 (duv)^2 - (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 (duv)^4 = 0.$$

— Vgl. hierüber: Gundelfinger, Math. Annalen, Bd. 6, p. 16.

Ganz dasselbe Princip findet auch auf die simultanen Invarianten mehrerer binärer Formen Anwendung. Sind z. B. zwei quadratische Formen gegeben:

$$a_x^2 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2,$$

so werden dieselben durch zwei Punktepaare repräsentirt, deren Doppelverhältniss α sich durch die Gleichung

$$D'^2 (\alpha - 1)^2 - DD'' (\alpha + 1)^2 = 0$$

bestimmt (vgl. p. 217), wo D' die simultane Invariante $(a\alpha)^2$, D und D'' bez. die Invarianten $(ab)^2$, $(\alpha\beta)^2$ bedeuten. Hieraus ergibt unser Uebertragungsprincip sofort den Satz:

Die geraden Linien, deren Schnittpunkte mit zwei Kegelschnitten:

$$a_x^2 = 0 \quad \textit{und} \quad \alpha_x^2 = 0$$

ein bestimmtes Doppelverhältniss α bilden, umhüllen eine Curve vierter Klasse, gegeben durch die Gleichung

$$D'^2 (\alpha - 1)^2 - DD'' (\alpha + 1)^2 = 0,$$

wenn man setzt:

$$D' = (a\alpha u)^2, \quad D = (abu)^2, \quad D'' = (\alpha\beta u)^2.$$

Diese Curve besteht insbesondere aus dem doppelt zählenden Kegelschnitte

$$(a\alpha u)^2 = 0,$$

wenn das erwähnte Doppelverhältniss harmonisch sein soll.

Ebenso können wir auch *die Gleichung des Productes der vier Schnittpunkte beider Kegelschnitte* in symbolischer Form unmittelbar hinschreiben. Soll die Linie u durch einen dieser Punkte gehen, so müssen die beiden binären Formen a_x^2 und α_x^2 einen linearen Factor gemein haben, und die Bedingung dafür ist, unter D, D', D'' die bekannten binären Invarianten verstanden, nach Früherem:

$$D'^2 - DD'' = 0.$$

Dieselbe Gleichung stellt daher auch das Product der vier Schnittpunkte dar, wenn wir unter D, D', D'' die erwähnten, eine Reihe u enthaltenden dreigliedrigen Determinanten verstehen.

In derselben Weise lässt sich allgemein die Gleichung der Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung

$$a_x^m = 0, \quad \alpha_x^n = 0$$

angeben. Man hat die Resultante der binären Formen a_x^m, α_x^n symbolisch zu bilden und durch Hinzufügen von u die einzelnen symbolischen Determinanten zu dreigliedrigen zu ergänzen. Wir können aus diesem Bildungsgesetze der Gleichung die Klasse derselben und also die Zahl der Schnittpunkte beider Curven ableiten. Die binäre

Resultante nämlich ist vom n^{ten} Grade in den Coëfficienten von a_x^m, enthält also n verschiedene Symbole $a, b, c \ldots$, von denen jedes m-mal vorkommt; im Ganzen enthält sie also mn linear vorkommende Grössen $a, b, c \ldots$ und ebensoviele Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Von diesen $2mn$ Grössen werden je zwei in einen Determinantenfactor vereinigt: die Resultante besteht also aus $m \cdot n$ symbolischen Determinantenfactoren (vgl. p. 195); und somit wird die Gleichung der Schnittpunkte von der Klasse mn. Es folgt also der unter dem Namen des Bézout'schen Theorems*) bekannte Satz:

Zwei Curven von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung schneiden sich in mn Punkten. Dieselben sind natürlich nicht nothwendig alle reell.

Die besprochenen Beispiele werden genügen, um die ausserordentliche Fruchtbarkeit des aufgestellten Uebertragungsprincipes vorläufig darzulegen;**) wir werden dasselbe überdies in unseren weiteren Betrachtungen wiederholt anzuwenden haben. Gleichzeitig zeigen sie uns aber die grossen Vortheile, welche unsere symbolische Darstellung mit sich führt; in der That braucht man nur einen Blick auf die entsprechenden wirklich ausgerechneten Bildungen zu werfen, um sich von der unübersichtlichen Weitläufigkeit derselben zu überzeugen. Auch bei unseren weiteren geometrischen Untersuchungen wird uns diese Symbolik wesentliche Erleichterungen bieten; wir stellen daher hier einige identische Gleichungen zusammen, die oft zur Umformung symbolischer Ausdrücke von grossem Nutzen sind.

---

*) Vgl. Bézout: Théorie générale des équations algébriques, 1769. Es werden hier die Gleichungen der beiden Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung in der Form

$$f(\overset{p}{x}, \overset{q}{y}) = 0, \qquad \varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0$$

angenommen, wo f, φ bez. vom p^{ten}, r^{ten} Grade in x und vom q^{ten}, s^{ten} Grade in y sind; alsdann wird für die Schnittpunkte die Zahl angegeben:

$$m \cdot n - (m-p)(n-r) - (m-q)(n-s).$$

Die an der Zahl des Textes angebrachte Reduction rührt daher, dass die Curven $f = 0$, $\varphi = 0$ in der angenommenen Form auf der X-Axe einen $(m-p)$-, bez. $(n-r)$-fachen, auf der Y-Axe einen $(m-q)$-, bez. $(n-s)$-fachen Punkt haben, und dass die in diese Punkte fallenden Schnittpunkte nicht mitgezählt sind. Will man nur die Zahl der im Endlichen liegenden Schnittpunkte haben, so hat man von obiger Zahl noch die der sonst etwa auf der unendlich fernen Geraden gelegenen abzuziehen. — Es sei bemerkt, dass sich das Bézout'sche Theorem auch sehr einfach mittelst des Chasles'schen Correspondenzprincips (p. 210) beweisen lässt; vgl. Chasles: Comptes rendus, t. 75, 1872.

**) Vgl. noch besonders die Anwendungen dieses Princips auf die Theorie der binären Formen fünfter Ordnung in der Arbeit von Clebsch: Das Fünfseit und die Gleichung fünften Grades; Math. Annalen, Bd. 4, p. 284. In Betreff der oben erwähnten Curven $I^3 - kJ^2 = 0$ wird hier beiläufig gezeigt, dass sie in sechs Kegelschnitte zerfallen, wenn die gegebene Curve 4. Ordnung aus vier geraden Linien besteht.

Offenbar verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_x \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_x \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_x \end{vmatrix}$$

identisch, denn indem man die ersten drei Verticalreihen bez. mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt und von der letzten abzieht, verschwinden alle Glieder dieser Reihe. Die Entwicklung der Determinante gibt uns daher die Identität:

(I) $$(abc)\,d_x - (abd)\,c_x + (acd)\,b_x - (bcd)\,a_x = 0.$$

Man kann dieselbe leicht dem Gedächtnisse einprägen, wenn man bemerkt, dass die drei Buchstaben in den einzelnen Determinanten immer auf einander nach dem Alphabete folgen, und das Vorzeichen abwechselnd positiv und negativ ist. Aus dieser Gleichung leiten wir eine andere ab, indem wir die x durch die zweigliedrigen Determinanten der Grössen

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix}$$

ersetzen. Es ist dann identisch

(II) $$(abc)(def) - (abd)(cef) + (acd)(bef) - (bcd)(aef) = 0.$$

Vertauschen wir ferner die Buchstaben d in (I) mit u, so kommt die gleich bedeutende Identität:

(III) $$(abu)\,c_x - (acu)\,b_x = (abc)\,u_x - (bcu)\,a_x\,;$$

und hieraus folgt durch Quadriren:

(IV) $$(abu)^2\,c_x^2 - 2\,(abu)\,(acu)\,b_x c_x + (acu)^2\,b_x^2$$
$$= (abc)^2\,u_x^2 - 2\,(abc)\,(bcu)\,u_x a_x + (bcu)^2\,a_x^2\,.$$

Schliesslich fügen wir noch die schon oben bewiesene und benutzte Identität hinzu (vgl. p. 276):

(V) $$(abu) = a_x b_y - b_x a_y\,,$$

welche besteht, sobald $u_x = 0$ und $u_y = 0$ ist, und $u_i = (xy)_i$.

Die Verwerthung dieser Formeln bei symbolischen Rechnungen geschieht ganz ebenso, wie die der entsprechenden Identitäten bei den binären Formen (p. 193). Es sei noch besonders hervorgehoben, dass dabei die Vertauschung gleichbedeutender Symbole und Addition der so erhaltenen, unter einander identischen Ausdrücke ein oft benutztes Hülfsmittel bildet, und dass daher insbesondere der folgende Satz gilt:

Wenn ein symbolischer Ausdruck durch Vertauschung zweier gleichwerthiger Symbole sein Vorzeichen ändert, so verschwindet derselbe identisch.

VIII. Die ternären quadratischen Formen.

Wir wollen die für die ternären Formen im Vorstehenden gewonnenen Anschauungen zunächst insbesondere für die quadratischen Formen,*) d. h. für die Theorie der Kegelschnitte verwerthen. Wir haben letztere schon früher, wenn auch in ganz anderer Weise behandelt und können uns daher in Betreff der geometrischen Resultate kurz fassen. Gemäss den Forderungen der Invariantentheorie haben wir hier nur nach solchen Eigenschaften der Kegelschnitte zu fragen, welche bei beliebigen linearen Transformationen ungeändert bleiben, d. h. welche allen perspectivischen Projectionen eines solchen gemeinsam sind. Es fallen demnach für unsere jetzige Fragestellung alle Unterschiede zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel fort; denn dieselben beruhen allein auf den Beziehungen der Curven zu der unendlich fernen Geraden. Da wir nun durch eine Collineation die letztere stets in eine im Endlichen gelegene Gerade überführen, und umgekehrt jede beliebige Gerade der Ebene in die unendlich ferne projiciren können, so ist diese hier nicht weiter ausgezeichnet. Neben Ellipse und Hyperbel stellen wir ferner den als *imaginäre Ellipse* bezeichneten Kegelschnitt, welcher dadurch charakterisirt ist, dass alle seine Punkte imaginär, die Coëfficienten seiner Gleichung jedoch reell sind. Wir können nun aber, wie schon früher (p. 173) bemerkt, auch die Coëfficienten als complexe Grössen annehmen, ohne dass dadurch die Gültigkeit der algebraischen Entwicklungen beeinflusst würde. Damit hätten wir dann eine neue Klasse von Kegelschnitten bezeichnet. Es ist aber klar, dass auch letztere in reelle Curven, und umgekehrt diese in jene linear transformirt werden können, wenn wir auch den Transformationscoëfficienten complexe Werthe beilegen. In diesem Sinne können wir ganz allgemein folgenden Satz aussprechen: *Ein eigentlicher Kegelschnitt hat keine projectivischen Besonderheiten; ein jeder kann in jeden anderen durch Collineation übergeführt werden.* Insbesondere kann eine ternäre quadratische Form keine absolute Invariante haben; denn eine solche würde nur erlauben, diejenigen Kegelschnitte in einander zu transformiren, für welche der Zahlenwerth dieser Invariante derselbe wäre. Wir werden uns von diesen Resultaten im Folgenden auch direct durch Betrachtung der überhaupt möglichen invarianten Bildungen überzeugen.

Die Gleichung des Kegelschnittes

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{1}$$

---

*) Vgl. für diese Theorie neben Cayley's mehrfach erwähnten Memoirs upon quantics, besonders Salmon: Lessons introductory to the modern higher algebra, sodann dessen Kegelschnitttheorie (Cap. XXXI der Fiedler'schen Bearbeitung).

in Liniencoordinaten haben wir in ihrer symbolischen Gestalt schon früher bei Besprechung des Uebertragungsprincipes aufgestellt; sie ist dargestellt durch das Verschwinden der zugehörigen Form:

$$(2) \qquad F = (abu)^2 = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir in F die Coordinaten u proportional zu den Unterdeterminanten aus den Coordinaten x, y, so erhalten wir wegen der Identität

$$(abu) = a_x b_y - b_x a_y$$

die Gleichung des Productes der beiden vom Punkte y an den Kegelschnitt gelegten Tangenten, in der bekannten Form (vgl. p. 107)

$$0 = (a_x b_y - b_x a_y)^2 = a_x^2 b_y^2 + b_x^2 a_y^2 - 2\, a_x a_y b_x b_y$$
$$= 2 \left\{ f(x) \cdot f(y) - \left(\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i \right)^2 \right\}.$$

Die Gleichung der Berührungspunkte dieser beiden Tangenten ergibt sich leicht, da dieselben die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Polare von y sind, deren Coordinaten durch

$$v_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} = a_y a_i = b_y b_i = c_y c_i$$

gegeben werden. Diese Werthe haben wir nur in die Gleichung der Schnittpunkte der Linie v mit der Curve $f = 0$:

$$(avu)^2 = 0$$

einzusetzen, um das Product der Berührungspunkte zu erhalten. Dabei müssen wir, weil die Coordinaten v in $(avu)^2$ quadratisch vorkommen, einmal durch den bekannten Differentiationsprocess (Polarenbildung) andere, gleichbedeutende Coordinaten w einführen, und dann die v_i durch $b_i b_y$, die w_i durch $c_i c_y$ ersetzen; die gesuchte Gleichung wird also:

$$(avu)\,(awu) \doteq (abu)\,(acu)\, b_y c_y = 0.$$

Wir sind hier zu dem ersten Beispiele für eine Zwischenform geführt; nehmen wir in ihr y constant, so gibt sie, gleich Null gesetzt, das Product jener beiden Berührungspunkte, nehmen wir u constant, so stellt sie die Gleichung der beiden in den Schnittpunkten der Linie u mit f an diese Curve gezogenen Tangenten dar. Diese Zwischenform lässt sich jedoch unter Anwendung der für ternäre Formen geltenden Identitäten (p. 283) als rationale und ganze Function einfacherer Bildungen darstellen. Zunächst ergibt die identische Gleichung IV wegen

$$F = (abu)^2 = (acu)^2 = (bcu)^2$$
$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2,$$

wenn wir x statt y schreiben und

$$A = (abc)^2$$

setzen:

$$2\,(abu)\,(acu)\,b_x c_x = f F - A\,.\,u_x^2 + (abc)\,(bcu)\,u_x a_x.$$

Vertauschen wir ferner in dem letzten Gliede dieser Gleichung die gleichwerthigen Symbole a, b, c, so können wir dasselbe durch ein Drittel der Summe der so erhaltenen Ausdrücke ersetzen; es wird:

$$(abc)\,(bcu)\,u_x a_x = \tfrac{1}{3}\,(abc)\,\{(bcu)\,a_x - (acu)\,b_x + (abu)\,c_x\}.$$

Wenden wir hierauf endlich die Identität III an, so erhalten wir:

$$(abc)\,(bcu)\,u_x a_x = \tfrac{1}{3}\,A\,.\,u_x^2;$$

und somit haben wir für unsere Zwischenform:

$$2\,(abu)\,(acu)\,b_x c_x = f F - \tfrac{1}{3}\,A\,u_x^2. \tag{3}$$

Die hierin auftretende Invariante A muss nach dem Obigen mit der Determinante von f, deren Verschwinden die Bedingung für das Zerfallen in ein Linienpaar ist, bis auf einen Zahlenfactor identisch sein. In der That finden wir, wie schon früher ausgeführt wurde (vgl. p. 268):

$$A = (abc)^2 = 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Mit den Formen f, F, A ist nun der Kreis der hier möglichen Bildungen abgeschlossen. Der Beweis hierfür gründet sich auf die folgenden beiden Sätze:*)

Jedes symbolische Product, welches den symbolischen Factor (abc) *hat, enthält den wirklichen Factor* A.

Jedes symbolische Product, welches einen symbolischen Factor (abu), *aber keinen symbolischen Factor des Typus* (abc) *mehr enthält, zerfällt in Glieder, welche theils den wirklichen Factor* F, *theils den wirklichen Factor* $A\,.\,u_x$ *haben.*

Zum Beweise des ersten Satzes braucht man nur zu bemerken, dass man einen Ausdruck mit dem Factor (abc) jedenfalls als eine Summe einzelner Glieder darstellen kann, deren jedes von der Form $(abc)\;a_i b_k c_l\,.\,M$ ist, wo M die Symbole a, b, c nicht mehr enthält. Von diesen verschwinden alle diejenigen, bei denen zwei der Indices i, k, l gleich sind, da sie durch Vertauschung der betreffenden Sym-

*) Vgl. Clebsch: Zur Theorie der Charakteristiken, Math. Annalen, Bd. 6, p. 1.

bole ihr Zeichen ändern würden; und jedes der anderen Glieder ist wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c gleich $\frac{1}{6}(abc)^2$, hat also in der That den wirklichen Factor A.

Enthält dagegen ein symbolisches Product den Factor (abu), ohne dass darin gleichzeitig ein Factor (abc) vorkommt, so müssen die Symbole a, b noch einmal in einer der folgenden vier Verbindungen auftreten

in einer Determinante (abu), wo dann der Factor F unmittelbar hervortritt,
oder in zwei Determinanten: $(acu)(bdu)$,
oder in einer Determinante und einer linearen Form: $(acu)\,b_x$,
oder in zwei linearen Formen: $a_x b_x$.

Im letzten Falle verschwindet der Ausdruck identisch, denn der Factor $(abc)\,a_x b_x$ ändert bei Vertauschung von a und b sein Vorzeichen. Im zweiten Falle haben wir wegen der Vertauschbarkeit von c, d und wegen der Identität II (p. 283), wenn wir darin d und f durch u, e durch d ersetzen, und wenn wir den von a, b freien Factor mit M bezeichnen:

$$\begin{aligned} M(abu)(acu)(bdu) &= \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(acu)(bdu) - (adu)(bcu)\right\} M \\ &= \tfrac{1}{2}(abu)^2(cdu)\,M = \tfrac{1}{2}F(cdu)\,.\,M. \end{aligned}$$

Im dritten Falle erhalten wir nach der Identität III:

$$\begin{aligned} (abu)(acu)\,b_x\,.\,M &= \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(acu)\,b_x - (bcu)\,a_x\right\} M \\ &= \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(abu)\,c_x - (abc)\,u_x\right\} M \\ &= \tfrac{1}{2}Fc_x\,.\,M - (abu)(abc)\,u_x M. \end{aligned}$$

Hier enthält der zweite Term den wirklichen Factor A nach dem ersten Satze; und somit ist auch der zweite Satz wegen der Theilbarkeit aller anderen Glieder durch F bewiesen.

Jede zu f gehörige invariante Bildung mit nur einer Reihe von Punkt- und einer Reihe von Liniencoordinaten setzt sich nun aus symbolischen Factoren der Form (abc), (abu), a_x, u_x, zusammen. Wir können daher von einer solchen durch obigen Zerlegungsprocess Theile mit den Factoren A, F oder $A\,.\,u_x$ absondern, bis symbolische Factoren vom Typus (abc) oder (abu) nicht mehr vorkommen. Das übrig bleibende Product kann dann nur noch eine Summe von Termen der Form $a_x^2\,.\,b_x^2\,\ldots\,u_x^\alpha$ sein, also nur noch aus einer Potenz von f und einer Potenz von u_x bestehen. Somit ist der folgende Satz bewiesen:

Jede Invariante, Covariante, zugehörige Form und Zwischenform einer ternären quadratischen Form mit höchstens einer Reihe von x und u ist eine ganze Function der Formen

$$u_x, \quad f, \quad F, \quad A.$$

— Ungleich grösser wird die Zahl der invarianten Bildungen, wenn man *das simultane System zweier quadratischer Formen* betrachtet, d. h. die gegenseitigen Beziehungen zweier Kegelschnitte untersucht. Wir wollen für dieselben zunächst das vollständige System aufstellen, d. h. diejenigen simultanen Functionalinvarianten angeben, durch welche sich alle andern rational und ganz ausdrücken lassen; und zwar gehen wir auf die betreffenden Erörterungen um so lieber ein, als wir auf derartige Fragen weiterhin nicht zurückkommen werden. Das Folgende mag daher als ein einfachstes Beispiel für solche Untersuchungen überhaupt gelten.

Die beiden gegebenen Formen seien:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} f &= a_x^2 = b_x^2 \ldots = \Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k \\ f' &= a_x'^2 = b_x'^2 \ldots = \Sigma a_{ik}'\, x_i\, x_k . \end{aligned}
$$

Alsdann haben wir nach dem Früheren zunächst die zugehörigen Formen:

$$
(6) \qquad F_{11} = (a\,b\,u)^2 = u_\alpha^2, \quad F_{22} = (a'\,b'\,u)^2 = u_{\alpha'}^2.
$$

und die Invarianten:

$$
(7) \qquad A_{111} = (a\,b\,c)^2 = a_\alpha^2, \quad A_{222} = (a'\,b'\,c')^2 = a'_{\alpha'}{}^2.
$$

Durch principielle Einführung der in diesen Formen benutzten Symbole

$$
\begin{aligned} \alpha_1 &= a_2\,b_3 - b_2\,a_3, \quad & \alpha_2 &= a_3\,b_1 - b_3\,a_1, \quad & \alpha_3 &= a_1\,b_2 - b_1\,a_2, \\ \alpha_1' &= a_2'b_3' - b_2'a_3', \quad & \alpha_2' &= a_3'b_1' - b_3'a_1', \quad & \alpha_3' &= a_1'b_2' - b_1'a_2' \end{aligned}
$$

werden nun die folgenden Betrachtungen wesentlich vereinfacht. Zunächst gilt der Satz:

Hat ein symbolisches Product Π den Factor $(a\,b\,v) = v_\alpha$, so kann dasselbe so umgeformt werden, dass in ihm auch ein Factor $(a\,b\,w) = w_\alpha$ auftritt, wo v, w Liniencoordinaten oder Symbole irgend welcher Formen, also überhaupt beliebige Grössen sind.

Alsdann ist nämlich:

$$
\Pi = (a\,b\,v)\, a_y\, b_z\,.\, M,
$$

wo M die Symbole a, b nicht mehr enthält, und wo y, z irgend welche Bedeutung haben. Nach der Identität V, p. 283 wird also:

$$
\begin{aligned} 2\,\Pi &= (a\,b\,v)\,(a_y\,b_z - b_y\,a_z)\,.\, M \\ &= (a\,b\,v)\,(a\,b\,w)\,.\, M, \end{aligned}
$$

wenn $w_i = (y\,z)_i$ gesetzt wird, q. e. d.

Wir denken uns nun immer die Symbole a, b etc., so weit es möglich ist, zu Symbolen α zusammengefasst; und wenn wir von

Symbolen a sprechen, so verstehen wir darunter nur diejenigen, welche nicht mit andern Symbolen b zu Symbolen α vereinigt werden können. Entsprechendes gilt für a', b' und α'. Nach dieser Festsetzung können in einem symbolischen Producte Factoren vom Typus (abv) oder $(a'b'v)$ nicht mehr vorkommen; denn, wie soeben bewiesen ist, lässt sich dieses Product alsdann so umformen, dass noch ein Factor (abw), bez. $(a'b'w)$ auftritt; dann können wir aber $(ab) = \alpha$ setzen, wodurch Factoren vom Typus $v_\alpha w_\alpha$ bez. $v_{\alpha'} w_{\alpha'}$ entstehen. Ganz dasselbe gilt auch für die Symbole α, α': Jeder Factor $(\alpha\beta y)$ bedingt einen weiteren Factor $(\alpha\beta z)$, und nach dem Satze von den adjungirten Determinanten ist dann (vgl. p. 114):

$$3(\alpha\beta y)(\alpha\beta z) = A_{111}\, a_y\, a_z .$$

Aus diesen Ueberlegungen folgt, dass in einem symbolischen Producte der von uns betrachteten Art *nur Factoren der folgenden Typen* vorauszusetzen sind:

$$(8)\qquad \begin{cases} a_x, & a_x', & u_\alpha, & u_{\alpha'}, \\ a_\alpha, & a_\alpha', & a_{\alpha'}, & a'_{\alpha'}, \\ (a a' u), & & (\alpha\alpha' x). & \end{cases}$$

Das Einfachste ist nun, dass wir eine simultane Form aus zwei *gleichen* Factoren dieses Schemas bilden; dadurch entstehen neben den in (6) und (7) gegebenen Formen noch die folgenden*):

$$A_{112} = a_\alpha'^2, \quad A_{122} = a_{\alpha'}^2, \quad F_{12} = (aa'u)^2, \quad \Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)^2.$$

Für eine aus verschiedenen Factoren zusammengesetzte Form können wir nun zeigen, dass *von den in* (8) *aufgeführten Typen niemals zwei v e r s c h i e d e n e Factoren von g l e i c h e m Typus in ein symbolisches Product eingehen können, d. h. dass sich jede Form*

$$a_x a_y b_z b_t \quad \textit{oder} \quad a_x' a_y' b_z' b_t'$$

als Aggregat anderer Formen darstellen lässt, die entweder direct in niederere Bildungen zerfallen, oder in denen sich die Symbole a, b (*bez.* a', b') *zu* α (*bez.* α') *zusammenziehen lassen.*

Wenn die Form $a_x a_y b_z b_t$ nicht direct in zwei Factoren zerfallen soll, so haben wir, damit zwei Factoren des gleichen Typus vorkommen, nach dem Schema (8) folgende 3 Möglichkeiten

$$1)\ y = z = \alpha$$
$$2)\ y = z = \alpha'$$
$$3)\ y = z = (a'u),$$

wo man statt y auch x und statt z auch t schreiben kann.

*) Nach der hier befolgten Bezeichnungsweise würden Φ_{11} und Φ_{22} bez. die Formen $(\alpha\beta x)^2$, $(\alpha'\beta'x)^2$ darstellen; es ist aber (vgl. p. 114):

$$3\,\Phi_{11} = A_{111}\cdot f, \qquad 3\,\Phi_{22} = A_{222}\cdot f'.$$

Im ersten Falle ist für $\beta = (ab)$ identisch nach V (p. 283):

$$a_\alpha b_\alpha a_x b_t = a_\alpha b_t (b_\alpha a_x - a_\alpha b_x) + a_\alpha^2 \,.\, b_x b_t$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_\alpha b_t - b_\alpha a_t)(b_\alpha a_x - a_\alpha b_x) + a_\alpha^2 \,.\, b_x b_t$$
$$= \tfrac{1}{2}(\beta \alpha x)(\beta \alpha t) + A_{111} \,.\, b_x b_t, \text{ q. e. d.}$$

Im zweiten Falle ist ebenso für $\alpha = (ab)$:

$$a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_t = a_{\alpha'} b_t (\alpha \alpha' x) + a_{\alpha'}^2 \,.\, b_x b_t = \tfrac{1}{2}(\alpha \alpha' t)(\alpha \alpha' x) + A_{122} \,.\, b_x b_t \,.$$

Im dritten Falle endlich wenden wir die Identität an:

$$(a a' u)\, b_t = (a b u)\, a_t' - (a b a')\, u_t + (b a' u) a_t \,,$$

und es wird:

$$a_x a_y b_z b_t = a_x (b a' u)(u_\alpha a_t' - a_\alpha' u_t) + (b a' u)^2 a_x a_t$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_\alpha' u_x - u_\alpha a_x')(u_\alpha a_t' - a_\alpha' u_t) + F_{12} \,.\, a_x a_t \,;$$

und hier zerfallen die Terme rechts in der That in getrennte Factoren. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; denn es ist klar, dass sich ein Product $a_x' a_y' b_z' b_t'$ ganz ebenso behandeln lässt; mit Hülfe des Satzes über adjungirte Determinanten *formt man ferner auch Ausdrücke der Form $u_\alpha v_\alpha w_\beta s_\beta$ oder $u_{\alpha'} v_{\alpha'} w_{\beta'} s_{\beta'}$ in entsprechender Weise um. — Aber auch die beiden Factoren a_α, a'_α oder $a_{\alpha'}$, a_α dürfen niemals zusammen vorkommen;* denn nach Vorstehendem könnten aus (8) nur noch zwei Factoren a_α, a'_α (oder $a_{\alpha'}$, $a'_{\alpha'}$) oder ein Factor $(a a' u)$ z. B. zu $a_\alpha a'_\alpha$ hinzutreten. Es ist aber für $\alpha = (bc)$:

$$a_\alpha a'_\alpha (a a' u) = \tfrac{1}{2}(abc)\left\{(a' b c)(a a' u) - (a' a c)(b a' u)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(abc)(a' b a)(c a' u) = -\tfrac{1}{2} c_\alpha a'_\alpha (c a' u) \,,$$

also gleich Null; und aus den Gleichungen (17) folgt:

$$a_\alpha a'_\alpha a_x a'_x = P_{12} = \tfrac{1}{3} A_{111} \,.\, f' ; \text{ q. e. d.}$$

Auch für die Combination zweier Factoren von verschiedenem Typus aus unserem Schema können wir endlich noch eine Einschränkung hinzufügen. *Es dürfen nämlich niemals die beiden Determinantenfactoren $(a a' u)$, $(\alpha \alpha' x)$ vereinigt vorkommen.* Der Beweis hierfür ist unmittelbar durch die Identität gegeben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1' & u_1 \\ a_2 & a_2' & u_2 \\ a_3 & a_3' & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & x_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2' & x_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3' & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\alpha' & u_\alpha \\ a_{\alpha'} & a_{\alpha'}' & u_{\alpha'} \\ a_x & a_x' & u_x \end{vmatrix} .$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir *das vollständige System der ternären quadratischen Formen f und f'* sofort hinschreiben; denn wir brauchen nur alle Combinationen aus den in (8) zusammengestellten Factoren zu bilden, die durch vorstehende Erörterungen nicht ausgeschlossen sind. Wir erhalten so die 20 Formen*):

---

*) Aufstellung und Ableitung des Systems verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Gordan.

(9)

1) Formen ohne Determinantenfactor:

$$\begin{array}{llll} f & = a_x^2\,, & f' & = a_x'^2\,, \\ F_{11} & = u_\alpha^2\,, & F_{22} & = u_{\alpha'}^2\,, \\ A_{111} & = a_\alpha^2\,, & A_{222} & = a'_{\alpha'}{}^2\,, \\ A_{112} & = a_\alpha'^2\,, & A_{122} & = a_{\alpha'}^2\,, \\ B_1 & = a_\alpha' a_x' u_\alpha\,, & B_2 & = a'_{\alpha'} a_x u_{\alpha'}\,. \end{array}$$

2) Formen mit einem Determinantenfactor:

$$\begin{array}{llll} N & = (a a' u)\, a_x a_x'\,, & \mathsf{N} & = (\alpha \alpha' x)\, u_\alpha u_{\alpha'}\,, \\ C_1 & = (a a' u)\, a_\alpha' a_x u_\alpha\,, & \Gamma_1 & = (\alpha \alpha' x)\, a_{\alpha'} u_\alpha a_x\,, \\ C_2 & = (a a' u)\, a_{\alpha'} a_x' u_{\alpha'}\,, & \Gamma_2 & = (\alpha \alpha' x)\, a_\alpha' u_{\alpha'} a_x'\,, \\ D & = (a a' u)\, a_{\alpha'} a_\alpha' u_\alpha u_{\alpha'}\,, & \Delta & = (\alpha \alpha' x)\, a_{\alpha'} a_\alpha' a_x' a_x\,. \end{array}$$

3) Formen mit zwei Determinantenfactoren:

$$F_{12} = (a a' u)^2\,, \qquad \Phi_{12} = (\alpha \alpha' x)^2\,.$$

— Wenn wir nun im Folgenden mehr geometrische Fragen mittelst der Formentheorie behandeln wollen, so wird es unsere Hauptaufgabe sein, alle dabei auftretenden Bildungen auf die Formen des Systems (9) zurückzuführen. Gleichzeitig werden wir dann die durch Nullsetzen der letzteren dargestellten Gebilde kennen lernen, sowie die Bedeutung der durch das Verschwinden der simultanen Invarianten gegebenen Bedingungen.

Für unsere frühere Untersuchung des Kegelschnittbüschels

$$\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0 \tag{10}$$

war die Determinante von $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f'$ und die Gleichung in Liniencoordinaten besonders wichtig. Die Determinante, welche mit $A_\varkappa$ bezeichnet sei, entsteht, wenn man in $(abc)^2$ die a_{ik} durch $\varkappa_1 a_{ik} + \varkappa_2 a_{ik}'$ ersetzt und nach dem Taylor'schen Satze entwickelt; also wird:

$$A_\varkappa = 6 \begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' \end{vmatrix}$$

$$= (abc)^2 \varkappa_1^3 + 3\,(aba')^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2 + 3\,(ab'a')^2 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + (a'b'c')^2 \varkappa_2^3$$

oder nach unserer obigen Bezeichnungsweise*):

*) In ausgerechneter Form ist also, wenn für den Augenblick A_{ik} die Unterdeterminanten von A_{111}, A_{ik}' die von A_{222} bezeichnen:

$$3 A_{112} = \Sigma \frac{\partial A_{111}}{\partial a_{ik}} a_{ik}' = 6 \left\{ A_{11} a_{11}' + A_{22} a_{22}' + A_{33} a_{33}' + 2 A_{12} a_{12}' + 2 A_{23} a_{23}' + 2 A_{31} a_{31}' \right\}$$

$$3 A_{122} = \Sigma \frac{\partial A_{222}}{\partial a_{ik}} a_{ik} = 6 \left\{ A_{11}' a_{11} + A_{22}' a_{22} + A_{33}' a_{33} + 2 A_{12}' a_{12} + 2 A_{23}' a_{23} + 2 A_{31}' a_{31} \right\}.$$

(11) $$A_\varkappa = A_{111}\varkappa_1^3 + 3\,A_{112}\varkappa_1^2\varkappa_2 + 3\,A_{122}\varkappa_1\varkappa_2^2 + A_{222}\varkappa_2^3.$$

In derselben Weise findet man für die linke Seite der Liniencoordinatengleichung:

$$F_\varkappa = -2\begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & u_1 \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & u_2 \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (abu)^2\varkappa_1^2 + \left\{(ab'u)^2 + (ba'u)^2\right\}\varkappa_1\varkappa_2 + (a'b'u)^2\varkappa_2^2,$$

oder wegen der Vertauschbarkeit von a und b, a' und b':

(12) $$F_\varkappa = F_{11}\varkappa_1^2 + 2\,F_{12}\varkappa_1\varkappa_2 + F_{22}\varkappa_2^2.$$

Die Coëfficienten von $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ sind also die zugehörigen Formen der gegebenen Kegelschnitte; und der Coëfficient von $\varkappa_1\varkappa_2$ gibt bekanntlich, gleich Null gesetzt, den Kegelschnitt, dessen Tangenten die Curven $f = 0$ und $f' = 0$ in harmonischen Punktpaaren treffen (vgl. p. 281). Das quadratische Vorkommen des Parameters $\varkappa$ in (12) sagt aus, dass jede Gerade der Ebene von zwei Curven des Büschels berührt wird (vgl. p. 134). Nur wenn die Gerade durch einen der vier Grundpunkte des Büschels geht, fallen die beiden Berührungspunkte zusammen; es ist daher, wie auch aus dem Uebertragungsprincipe sofort folgt (p. 281), *das Product der vier Schnittpunkte von f und f'* gegeben durch das Verschwinden der Discriminante von $F_\varkappa$:

$$F_{11}F_{22} - F_{12}^2 = 0.$$

Ersetzt man in der Determinante $F_\varkappa$ die u_i des einen Randes durch v_i, so stellt $F_\varkappa = 0$ die Gleichung des Poles der Geraden v in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$ dar. Nimmt man ferner

$$v_i = \tfrac{1}{2}\left(\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_2\frac{\partial f'}{\partial x_i}\right) = \lambda_1 a_i a_x + \lambda_2 a_i' a_x',$$

d. h. betrachtet man die Gerade v als Polare von x in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda_1 f + \lambda_2 f' = 0$, so wird der Pol dieser Geraden in Bezug auf $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$ dargestellt durch das Verschwinden der Bildung $\left(f_i = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i},\ f_i' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial x_i}\right)$:

$$B_{\varkappa\lambda} = -2\begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & u_1 \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & u_2 \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & u_3 \\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1' & \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_2' & \lambda_1 f_3 + \lambda_2 f_3' & 0 \end{vmatrix},$$

oder symbolisch aus (12):

$$
(13)\quad \begin{aligned}
B_{\varkappa\lambda} = \varkappa_1^2 \quad & u_\alpha \quad \{\lambda_1 c_\alpha c_x + \lambda_2 c_\alpha' c_x'\} \\
+ 2\varkappa_1\varkappa_2 (a a' u) & \{\lambda_1 (a a' c) c_x + \lambda_2 (a a' c') c_x'\} \\
+ \varkappa_2^2 \quad & u_{\alpha'} \quad \{\lambda_1 c_{\alpha'} c_x + \lambda_2 c'_{\alpha'} c_x'\}\,.
\end{aligned}
$$

Das erste und letzte Glied hängen nur von den Coëfficienten je einer Form ab und haben bez. den Factor c_α, $c'_{\alpha'}$; also enthalten sie bez. den wirklichen Factor A_{111}, A_{222}. Der Coëfficient von $\varkappa_1^2\lambda_2$ ist die Form B_1 der von $\varkappa_2^2\lambda_1$ die Form B_2. Um auch die andern Glieder auf einfache Bildungen zurückzuführen setzen wir $\varkappa_i = \lambda_i$. Alsdann ist $B_{\varkappa\varkappa} = 0$ die Gleichung des Poles der Polare von x in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$, d. h. die Gleichung des Punktes x, und somit muss $B_{\varkappa\varkappa}$ den Factor u_x enthalten. In der That multipliciren wir die ersten drei Horizontalreihen der Determinante $B_{\varkappa\varkappa}$ bez. mit x_1, x_2, x_3 und subtrahiren sie dann von der dritten, so verschwinden in dieser sämmtliche Glieder bis auf das letzte, wo an Selle von 0 der Term $-u_x$ auftritt. Wir erhalten also nach (11):

$$B_{\varkappa\varkappa} = \tfrac{1}{3}\, u_x \,.\, A_\varkappa\,.$$

Setzen wir andererseits in (13) $\varkappa_i = \lambda_i$; so findet man durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Potenzen der λ die folgenden Relationen, welche sich übrigens auch leicht direct durch symbolische Rechnung in obiger Weise ableiten lassen:

$$
\begin{aligned}
(abu)(abc)\,c_x = u_\alpha c_\alpha c_x \quad &= \tfrac{1}{3} A_{111} \,.\, u_x \\
B_1 + 2(aa'u)(aa'c)\,c_x &= A_{112} \,.\, u_x \\
2(aa'u)(aa'c')\,c_x' + B_2 \quad &= A_{122} \,.\, u_x \\
(a'b'u)(a'b'c')\,c_x' = u_{\alpha'} c'_{\alpha'} c_x' &= \tfrac{1}{3} A_{222} \,.\, u_x.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Zurückführung auf die Formen unseres Systemes gegeben. Ueber die geometrische Bedeutung der Gleichungen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ braucht wohl nach dem über $B_{\varkappa\lambda} = 0$ Gesagten kaum etwas hinzugefügt zu werden: B_1 entsteht ja aus $B_{\varkappa\lambda}$ für $\lambda_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$; B_2 ebenso für $\lambda_2 = 0$, $\varkappa_1 = 0$.

Aus $B_{\varkappa\lambda}$ entsteht nun sofort eine Reihe von quadratischen Covarianten, wenn wir die u_i durch $\mu_1 f_i + \mu_2 f_i'$ ersetzen; und wir werden zeigen, wie sich dieselben alle auf f, f' und Φ_{12} zurückführen lassen. Die so aus $B_{\varkappa\lambda}$ hervorgehende Bildung:

$$
H_{\varkappa\lambda\mu} = -2 \begin{vmatrix}
\varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & \mu_1 f_1 + \mu_2 f_1' \\
\varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & \mu_1 f_2 + \mu_2 f_2' \\
\varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & \mu_1 f_3 + \mu_2 f_3' \\
\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1' & \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_2' & \lambda_1 f_3 + \lambda_2 f_3' & 0
\end{vmatrix}
$$

gibt, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, dass die Polare eines Punktes x in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda_1 f + \lambda_2 f' = 0$ und die

desselben Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt $\mu_1 f + \mu_2 f' = 0$ einander conjugirt sein in Bezug auf die Curve $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$. In symbolischer Gestalt haben wir aus (13):

$$(14)\quad \begin{aligned} H_{\varkappa\lambda\mu} = \quad & \varkappa_1^2 \{\mu_1 d_\alpha d_x + \mu_2 d_\alpha' d_x'\} \{\lambda_1 c_\alpha c_x + \lambda_2 c_\alpha' c_x'\} \\ + 2 & \varkappa_1 \varkappa_2 \{\mu_1 (a a' d) d_x + \mu_2 (a a' d') d_x'\} \{\lambda_1 (a a' c) c_x + \lambda_2 (a a' c') c_x'\} \\ + \quad & \varkappa_2^2 \{\mu_1 d_{\alpha'} d_x + \mu_2 d'_{\alpha'} d_x'\} \{\lambda_1 c_{\alpha'} c_x + \lambda_2 c'_{\alpha'} c_x'\}. \end{aligned}$$

oder, wenn wir die hier auftretenden Covarianten mit P bezeichnen und durch entsprechende Indices unterscheiden:

$$(15)\quad \begin{aligned} H_{\varkappa\lambda\mu} = \quad & \varkappa_1^2 \{\lambda_1\mu_1 P_{11} + \lambda_1\mu_2 P_{12} + \lambda_2\mu_1 P_{21} + \lambda_2\mu_2 P_{22}\} \\ + 2 & \varkappa_1\varkappa_2 \{\lambda_1\mu_1 P_{11}' + \lambda_1\mu_2 P_{12}' + \lambda_2\mu_1 P_{21}' + \lambda_2\mu_2 P_{22}'\} \\ + \quad & \varkappa_2^2 \{\lambda_1\mu_1 P_{11}'' + \lambda_1\mu_2 P_{12}'' + \lambda_2\mu_1 P_{21}'' + \lambda_2\mu_2 P_{22}''\}, \end{aligned}$$

woraus die Bedeutung der einzelnen $P_{ik}^{(h)}$ unmittelbar ersichtlich ist. Um dieselben auf die Formen unseres Systemes (9) zurückzuführen, setzen wir in der Determinante $H_{\varkappa\lambda\mu}$ zuerst $\varkappa_i = \lambda_i$. Ziehen wir dann, wie bei $B_{\varkappa\varkappa}$, in (14) die bez. mit x_1, x_2, x_3 multiplicirten ersten drei Horizontalreihen von der vierten ab, so wird:

$$(16)\qquad H_{\varkappa\varkappa\mu} = \tfrac{1}{3} A_\varkappa (\mu_1 f + \mu_2 f').$$

Macht man andererseits dieselbe Substitution in (15), so erhält man durch Coëfficientenvergleichung die Relationen:

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{rlrl} P_{11} &= \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, & P_{12} &= \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f' \\ 2 P_{11}' + P_{21} &= A_{112} \cdot f, & 2 P_{12}' + P_{22} &= A_{112} \cdot f' \\ P_{11}'' + 2 P_{21}' &= A_{122} \cdot f, & P_{12}'' + 2 P_{22}' &= A_{122} \cdot f' \\ P_{21}'' &= A_{222} \cdot f, & P_{22}'' &= \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f'. \end{array} \right.$$

Damit sind die fraglichen Covarianten zunächst auf vier reducirt; zwischen letzteren bestehen aber noch weitere Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man in (15) $\varkappa = \mu$, setzt. Dann wird entsprechend der Gleichung (16):

$$H_{\varkappa\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{3} A_\varkappa (\lambda_1 f + \lambda_2 f');$$

und durch Coëfficientenvergleichung findet man:

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{rlrl} P_{11} &= \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, & P_{21} &= \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, \\ 2 P_{11}' + P_{12} &= A_{112} \cdot f, & 2 P_{21}' + P_{22} &= A_{112} \cdot f' \\ P_{11}'' + 2 P_{12}' &= A_{122} \cdot f, & P_{21}'' + 2 P_{22}' &= A_{122} \cdot f' \\ P_{12}'' &= \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f, & P_{22}'' &= \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f'. \end{array} \right.$$

Die Formen P_{11}, $P_{21} = P_{12}$, $P_{12}'' = P_{21}''$, P_{22}'' zerfallen also direct in zwei Factoren, und die andern lassen sich alle durch eine mit Hülfe der Invarianten und der Grundformen f, f', ausdrücken. Wir haben

nur noch die Zurückführung dieser einen, etwa P_{11}'', auf Φ_{12} zu geben. Nun ist aber:

$$\Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)^2 = (a_{\alpha'} b_x - b_{\alpha'} a_x)^2$$
$$= a_{\alpha'}^2 . b_x^2 + b_{\alpha'}^2 a_x^2 - 2\, a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x \,,$$

und hier ist der letzte Term eben unsere Form P_{11}''. Es folgt also:

$$P_{11}'' = A_{122} . f - \tfrac{1}{2} \Phi_{12}. \tag{19}$$

Wir haben somit in der That die zwölf Covarianten, welche in $H_{\varkappa\lambda\mu}$ vorkommen, auf die Formen unseres Systems zurückgeführt.

Mit Hülfe der Gleichung (19) können wir ohne Schwierigkeit die durch $A_{112} = 0$ oder $A_{122} = 0$ gegebenen Lagenbeziehungen von f und f' geometrisch charakterisiren. Die Form Φ_{12} entspricht dualistisch der Form F_{12}; $\Phi_{12} = 0$ *stellt daher den Ort der Punkte dar, von welchen zwei Paare zu einander harmonischer Tangenten an f und f' gehen.* Ferner entsteht P_{11}'' aus $F_{22} = u_{\alpha'}^2$, wenn man $u_i = f_i$ setzt; $P_{11}'' = 0$ *ist also der Kegelschnitt, welcher von den Polen der Tangenten von $f' = 0$ in Bezug auf $f = 0$ gebildet wird.* Die Bedingung $A_{122} = 0$ sagt nun wegen (19) aus, dass *diese beiden Curven identisch sind.* Nehmen wir unter dieser Voraussetzung eine Tangente u von $f' = 0$, so entspricht ihr vermöge $f = 0$ ein auf P_{11}'' gelegener Pol, und die beiden von letzterem an $f' = 0$ gezogenen Tangenten v, w sind harmonisch zu den beiden an $f = 0$ gezogenen, d. h. sie sind in Bezug auf $f = 0$ conjugirte Gerade. Somit bilden die Tangenten u, v, w von $f' = 0$ ein Polardreieck von $f = 0$; und ein solches Dreieck kann man für *jede* Tangente u von f construiren. Da aber $A_{122} = a_{\alpha}'^2$ symmetrisch in den Coëfficienten von a_x^2 und $u_{\alpha'}^2$ ist, so kann man auch dualistisch entsprechend, von einem beliebigen Punkte von $f = 0$ ausgehend, ein Dreieck construiren, dessen Ecken auf $f = 0$ liegen, und welches Polardreieck von $f' = 0$ ist. Wir haben daher folgenden Satz:

*Wenn die simultane Invariante $A_{122} = a_{\alpha'}^2$ der Kegelschnitte $a_x^2 = 0$ und $u_{\alpha'}^2 = 0$ verschwindet, so gibt es in Bezug auf $a_x^2 = 0$ einfach unendlich viele Polardreiecke, welche der Curve $u_{\alpha'}^2 = 0$ umgeschrieben, und in Bezug auf $u_{\alpha'}^2 = 0$ einfach unendlich viele Polardreiecke, welche der Curve $a_x^2 = 0$ eingeschrieben sind.**)

Der entsprechende Satz gilt selbstverständlich, wenn A_{112} verschwindet; man hat dann nur die Curven $f = 0$ und $f' = 0$ zu vertauschen.

Es ist leicht auch den durch $N = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ dargestellten Gebilden geometrische Deutungen unterzulegen; dasselbe gilt für N,

*) Ueber Kegelschnitte, welche in dieser Beziehung stehen, vgl. Smith: Proceedings of the London math. Society, vol. 2, p. 94; Rosanes: Math. Annalen, Bd. 6; Darboux: Bulletin des sciences math., t. 1, p. 348.

Γ_1 und Γ_2. Man sieht z. B. sofort, dass $N = 0$ *die Gleichung des Schnittpunktes der Polaren von x in Bezug auf $f = 0$ und $f' = 0$ ist.* Wir betrachten hier nur noch die Form C_1; sie ist die Functionaldeterminante von B_1, f und u_x:

$$C_1 = (a\,a'\,u)\,a_\alpha'\,a_x\,u_\alpha = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix}.$$

Nun ist $B_1 = 0$ die Gleichung einer Geraden v, für deren Punkte die Polaren in Bezug auf $f' = 0$ zu der Linie u in Bezug auf $f = 0$ conjugirt sind; die Differentialquotienten $\frac{\partial B_1}{\partial x_i}$ sind also die Coordinaten dieser Geraden, und $C_1 = 0$ *ist die Bedingung, dass die Polare von x in Bezug auf f durch den Schnittpunkt von u und v geht.*

Von grösserem Interesse für die Geometrie sind die Formen D und Δ. Sie haben zunächst die Eigenschaft, dass *die eine die reciproke Bildung der andern, sowohl in Bezug auf f, als in Bezug auf f' ist.* Zum Beweise dessen gehen wir von D aus und setzen:

$$u_i = f_i = b_x b_i = c_x c_i = d_x d_i.$$

Bezeichnen wir die dadurch aus D entstehende Bildung mit D', so wird:

$$\begin{aligned} D' &= \quad (a\,a'\,b)\,a_{\alpha'}\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,b_x\,c_x\,d_x \\ &= \quad \tfrac{1}{2}\,(a\,a'\,b)\,(a_{\alpha'}\,b_x - b_{\alpha'}\,a_x)\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,c_x\,d_x \\ &= -\tfrac{1}{2}\,a_\beta'\,(\beta\,\alpha'\,x)\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,c_x\,d_x. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Identität ($\alpha = (a\,b)$)

$$a_\alpha'\,c_x = (a'\,a\,b)\,c_x = (a\,b\,c)\,a_x' - (a'\,b\,c)\,a_x + (a'\,a\,c)\,b_x$$

finden wir nun:

$$a_\alpha'\,c_x\,a_\beta'\,c_\alpha = c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x' + 2\,(a\,b\,c)\,(a'\,a\,c)\,b_x\,a_\beta'$$

oder für $(a\,c)_i = \alpha_i$:

$$a_\alpha'\,a_\beta'\,c_\alpha\,c_x = c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x' - 2\,b_\alpha\,a_\alpha'\,b_x\,a_\beta'.$$

Das letzte Glied rechts unterscheidet sich aber von dem Ausdrucke links nur durch den Zahlenfactor und durch Vertauschung von b und c; also wird:

$$a_\alpha'\,a_\beta'\,c_\alpha\,c_x = \tfrac{1}{3}\,c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x'.$$

Setzen wir dies in D' ein, so kommt:

$$D' = -\tfrac{1}{3}\,A_{111}\,.\,\Delta, \text{ q. e. d.}$$

Ebenso ist natürlich für $u_i = f_i'$:

$$D'' = -\tfrac{1}{3} A_{222} \cdot \Delta;$$

und dualistisch entsprechende Gleichungen gelten zur Ueberführung von Δ in D. Wir wissen aber, dass nur den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' die Eigenschaft zukommt, dass die Polaren ihrer Punkte in Bezug auf f und f' dieselbe Curve dritter Klasse umhüllen; und zwar besteht letztere aus den Ecken jenes Dreiecks. Hieraus folgt:

*Die Gleichung $D = 0$ stellt das Product der drei Seiten, $\Delta = 0$ das der drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' dar.**)

Dies Resultat war übrigens vorauszusehen, da nur die eine Covariante D von der dritten Ordnung in unserm Systeme enthalten ist, und das Polardreieck jedenfalls durch eine Covariante dargestellt wird. Aus diesem Grunde muss D auch das gemeinsame Polardreieck von F_{12} und Φ_{12} darstellen, und somit ergibt sich:

Alle covarianten Kegelschnitte von f und f' haben mit letzteren Curven dasselbe Polardreieck $D = 0$, $\Delta = 0$ gemeinsam; oder mit andern Worten: Die Formen D und Δ sind Combinanten für alle Formen des Systemes

$$\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' + \varkappa_3 \varphi,$$

wenn φ irgend eine zu f und f' covariante quadratische Form, also am einfachsten Φ_{12}, bedeutet. Sie dürfen daher alle, wenn dies Dreieck als Coordinatendreieck eingeführt wird, in ihren Gleichungen nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten. In der That setzen wir:

$$f' = \lambda' \xi_1^2 + \lambda'' \xi_2^2 + \lambda''' \xi_3^2$$
$$f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

so wird für $\varkappa_1 = \varkappa$, $\varkappa_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 1$:

$$H_{\varkappa\lambda\mu} = -2 \begin{vmatrix} \varkappa + \lambda' & 0 & 0 & (\mu + \lambda')\,\xi_1 \\ 0 & \varkappa + \lambda'' & 0 & (\mu + \lambda'')\,\xi_2 \\ 0 & 0 & \varkappa + \lambda''' & (\mu + \lambda''')\,\xi_3 \\ (\lambda + \lambda')\,\xi_1 & (\lambda + \lambda'')\,\xi_2 & (\lambda + \lambda''')\,\xi_3 & 0 \end{vmatrix},$$

und bei der Entwicklung der Determinante treten nur die Quadrate der ξ auf. —

Die bei der kanonischen Form in f' auftretenden Coëfficienten sind bekanntlich die Wurzeln der cubischen Gleichung $A_\varkappa = 0$. Wir haben ferner gesehen (p. 135 ff.), dass die Transformation auf diese Form nicht mehr unbedingt möglich ist, wenn jene Wurzeln zum

---

*) Durch Zerfällung von D bez. Δ in die drei linearen Factoren würde man somit eine neue Lösung für die gleichzeitige Transformation von f und f' auf die kanonische Form (p. 127) erhalten. Mittel zur Ausführung der Zerfällung werden wir in der Theorie der Curven 3. Ordnung kennen lernen.

Theil einander gleich werden. In diesem Falle berühren sich die Curven f und f' in gewisser Weise, und die Art dieser Berührung wurde durch das Verhalten der Unterdeterminanten von A_x gegenüber der mehrfachen Wurzel besagter Gleichung bestimmt. Diese Berührungsbedingungen müssen sich aber nach einem früheren Satze auch durch das Verschwinden von Functionalinvarianten der Formen f und f' darstellen lassen (vgl. p. 274). Es führen dazu die folgenden Ueberlegungen.

Wir wissen, dass f und f' sich berühren, wenn zwei Wurzeln von $A_x = 0$ gleich sind, d. h. wenn die Discriminante der cubischen Form A_x verschwindet (vgl. p. 136). *Die Bedingung für die einfache Berührung ist also:*

$$(20)\quad 4\,(A_{111}A_{122}-A_{112}^2)\,(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)-(A_{111}A_{222}-A_{112}A_{122})^2=0.$$

Hat dagegen $A_x = 0$ drei gleiche Wurzeln, so osculiren sich f und f'; andererseits muss dann die Hesse'sche Form der binären cubischen Form A_x identisch Null sein (vgl. p. 228). *Die Bedingungen für die zweipunktige Berührung sind also*):*

$$(21)\qquad \frac{A_{111}}{A_{112}}=\frac{A_{112}}{A_{122}}=\frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Berühren sich f und f' in zwei verschiedenen Punkten, so steht der Büschel $x_1 f + x_2 f' = 0$ sich selbst dualistisch gegenüber: Durch jeden Punkt geht eine Curve desselben, jede Gerade wird von einer Curve berührt. Letzteres wird dadurch möglich, dass $F_x = 0$ eine von den u_i unabhängige Wurzel für $\frac{x_1}{x_2}$ zulässt, und zwar ist dies die Doppelwurzel von $A_x = 0$. In der That enthält der Büschel $x_1 f + x_2 f'$ eine Doppelgerade, die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, welche von jeder Geraden der Ebene berührt wird (p. 106); und diese ist eben durch die Doppelwurzel von $A_x = 0$ bestimmt. Die letztere aber wird durch die Gleichung $\Delta_A = 0$ doppelt zählend gegeben, wenn Δ_A die Hesse'sche Form von A_x ist. Es muss daher die Resultante der beiden quadratischen Formen F_x und Δ_A Null sein. Diese Resultante reducirt sich hier aber, da Δ_A ein vollständiges Quadrat ist, auf die Invariante $(\Delta F)^2$, wenn für den Augenblick

$$\Delta_A = (\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2)^2,\quad F_x = (F_1 x_1 + F_2 x_2)^2$$

gesetzt wird. Nach Ausrechnung der Invariante $(\Delta F)^2$ haben wir also den Satz:

Wenn f und f' sich in zwei getrennten Punkten berühren, so besteht neben (20) *unabhängig von den u_i die Bedingung:*

$$(22)\quad (A_{111}A_{122}-A_{112}^2)F_{22}-(A_{111}A_{222}-A_{122}A_{112})F_{12}+(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)F_{11}=0.$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler: Kegelschnitttheorie.

Den Fall der dreipunktigen Berührung von f und f' können wir endlich als eine Combination der beiden letzten Fälle auffassen: A_x hat einen dreifachen linearen Factor und F_x enthält denselben Factor einfach. Da $A_x = (A_1 x_1 + A_2 x_2)^3$ nun ein vollständiger Cubus ist, so ist die gestellte Bedingung erfüllt, sobald die binäre lineare Covariante $(AF)^2 A_x$ unabhängig von den x verschwindet. Tragen wir also die wirklichen Werthe der Coëfficienten von x_1, x_2 ein, so haben wir den Satz:

Wenn sich f und f' dreipunktig berühren, so bestehen neben (21) *unabhängig von den u_i die Bedingungen:*

$$(23) \qquad \begin{aligned} A_{111} F_{22} - 2 A_{112} F_{12} + A_{122} F_{11} &= 0 \\ A_{112} F_{22} - 2 A_{122} F_{12} + A_{222} F_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Die hier besprochenen ausgezeichneten Lagen zweier Kegelschnitte beziehen sich jedoch nur auf die geometrisch besonders hervortretenden Fälle. Vom Standpunkte der Invariantentheorie aus müssen wir dagegen jedes System zweier Kegelschnitte von jedem anderen Systeme zweier solcher Curven streng unterscheiden, sobald es nicht möglich ist, die beiden Systeme linear in einander zu transformiren. Diese Möglichkeit hängt aber von dem Werthe der simultanen absoluten Invarianten beider Kegelschnitte ab*), und durch diese Werthe ist daher die Lage der Kegelschnitte gegen einander charakterisirt. Die Zahl der absoluten Invarianten ist leicht zu bestimmen. Die beiden Kegelschnitte nämlich hängen zusammen von 10 Constanten ab; die 8 Constanten einer linearen Transformation können wir nun so bestimmen, dass 8 jener 10 Constanten beliebige Werthe annehmen; die beiden übrigen sind dann aber absolut fest gelegt; d. h. *zwei Kegelschnitte haben zwei absolute Invarianten*. Die letzteren haben wir aus den vier Invarianten A_{111}, A_{112}, A_{122}, A_{222} so zu bilden, dass die Coëfficienten von f und f' in ihnen in Zähler und Nenner zu gleichen Dimensionen vorkommen; und zwar legt man am einfachsten die folgenden beiden zu Grunde

$$(24) \qquad \mathsf{A}_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111} \cdot A_{122}}, \quad \mathsf{A}_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112} \cdot A_{222}}.$$

Es ist nun weiter unsere Aufgabe, den Zusammenhang dieser absoluten Invarianten mit den in der Figur der beiden Kegelschnitte auftretenden Doppelverhältnissen darzulegen. Wir bemerken zunächst, dass die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes von $f = 0$ mit den

*) Und zwar ist die Transformation *immer* möglich, wenn die absoluten Invarianten in beiden Systemen dieselben Werthe haben, und wenn in beiden dieselben Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen identisch Null sind, also überhaupt, wenn in beiden Systemen dieselben Functionalinvarianten verschwinden; vgl. die Anmerkung auf p. 274.

vier Schnittpunkten von f und f' ein für alle Punkte von f constantes Doppelverhältniss bilden (vgl. p. 49). Ein anderes constantes Doppelverhältniss ist ebenso durch die Verbindungslinien eines Punktes von f' mit jenen vier Punkten gegeben: Wir wollen beide Doppelverhältnisse durch A_1, bez. A_2 ausdrücken. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass in jedem der vier Schnittpunkte (y) von f und f' durch die Tangenten der Curven des Büschels:

$$\varkappa_1 a_y a_x + \varkappa_2 a_y' a_x' = 0$$

ein Strahlbüschel gegeben ist, in welchem jeder Strahl durch die entsprechenden binären Coordinaten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bestimmt wird; insbesondere ist also durch $\varkappa_1 = 0$ die Tangente von f', durch $\varkappa_2 = 0$ die von f im Punkte y gegeben. Demgemäss stellt uns $A_\varkappa$ eine binäre cubische Form dar, deren entsprechende Strahlen des Büschels die Tangenten der drei Linienpaare in y sind, d. h. die Verbindungslinien von y mit den drei anderen Schnittpunkten. Diese drei Linien bilden dann mit der Tangente von f in y, d. i. mit der Linie $\varkappa_2 = 0$, jenes für alle Punkte von f constante Doppelverhältniss. Wir haben somit die Aufgabe, das Doppelverhältniss einer binären biquadratischen Form zu bestimmen, welche in die cubische Form $A_\varkappa$ und in eine lineare Form $\varkappa_2$ zerfällt, und dies geschieht in bekannter Weise mit Hülfe der Invarianten i und j der biquadratischen Form (vgl. p. 239). Ist letztere nun durch

$$\alpha_\varkappa^4 = \alpha_0 \varkappa_1^4 + 4\alpha_1 \varkappa_1^3 \varkappa_2 + 6\alpha_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 + 4\alpha_3 \varkappa_1 \varkappa_2^3 + \alpha_4 \varkappa_2^4$$

gegeben, und setzen wir

$$\begin{aligned}\alpha_\varkappa^4 &= a_\varkappa^3 \cdot a_\varkappa' \\ &= (a_0 \varkappa_1^3 + 3 a_1 \varkappa_1^2 \varkappa_2 + 3 a_2 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + a_3 \varkappa_2^3) \cdot (a_1' \varkappa_1 + a_2' \varkappa_2),\end{aligned}$$

so müssen wir in

$$i = 2(\alpha_0 \alpha_4 - 4\alpha_1 \alpha_3 + 3\alpha_2^2)$$

und

$$j = 6 \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$$

substituiren:

$$\alpha_0 = a_0 a_1', \qquad \alpha_4 = a_3 a_2',$$
$$4\alpha_1 = a_0 a_2' + 3 a_1 a_1', \quad 2\alpha_2 = a_1 a_2' + a_2 a_1', \quad 4\alpha_3 = 3 a_2 a_2' + a_3 a_1'.$$

Für unsern Zweck haben wir insbesondere $a_1' = 0$, $a_2' = 1$ zu wählen, und dadurch erhalten wir für $a_\varkappa^3 = A_\varkappa$:

$$\begin{aligned}2i &= A_{112}^2 - 3 A_{122} A_{111} \\ \tfrac{8}{3} j &= 3 A_{111} A_{112} A_{122} - A_{111}^2 A_{222} - 2 A_{112}^3\end{aligned}$$

und somit für das gesuchte Doppelverhältniss α:

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2} = \frac{8}{9} \frac{(A_{112}{}^2 - 3 A_{122} A_{111})^3}{(3 A_{111} A_{112} A_{122} - A_{111}{}^2 A_{222} - 2 A_{112}{}^3)^2},$$

oder nach einer einfachen Umformung der rechten Seite:

$$(25) \qquad \frac{(\mathsf{A}_1 - 3)^3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2{}^2}{(3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 - 2 \mathsf{A}_1{}^2 \mathsf{A}_2 - 1)^2} = 27 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Das Doppelverhältniss α der Verbindungslinien eines Punktes von f mit den vier Schnittpunkten von f und f' ist also durch Gleichung (25) *gegeben; und ebenso das Doppelverhältniss β der Verbindungslinien eines Punktes von f' mit jenen vier Punkten durch die Gleichung:*

$$(26) \qquad \frac{(\mathsf{A}_2 - 3)^3 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_1{}^2}{(3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 - 2 \mathsf{A}_2{}^2 \mathsf{A}_1 - 1)} = 27 \frac{(1-\beta+\beta^2)^3}{(1+\beta)^2(2-\beta)^2(1-2\beta)^2}.$$

In Folge dieser Gleichungen können wir unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2{}^2 = \frac{A_{122}{}^3}{A_{111} A_{222}{}^2}, \quad \mathsf{A}_1{}^2 \mathsf{A}_2 = \frac{A_{112}{}^3}{A_{111}{}^2 A_{222}}$$

insbesondere den folgenden Satz aussprechen;

Wenn gleichzeitig die Invarianten A_{112} und A_{122} verschwinden, so ist das Doppelverhältniss jener vier Schnittpunkte auf b e i d e n Kegelschnitten äquianharmonisch.

Es liegt ferner nahe nach den drei Doppelverhältnissen zu fragen, welche auf den Seiten des Polardreiecks durch ihre Schnittpunkte mit den Kegelschnitten f und f' bestimmt werden. Um die entsprechende cubische Gleichung aufzustellen, nehmen wir f und f' in der kanonischen Form an:

$$f = \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2,$$
$$f' = \lambda' \xi_1{}^2 + \lambda'' \xi_2{}^2 + \lambda''' \xi_3{}^2.$$

Auf der Seite $\xi_1 = 0$ liegen dann die beiden Schnittpunktepaare:

$$\xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda'' \xi_2{}^2 + \lambda''' \xi_3{}^2 = 0;$$

und zu dem Systeme dieser beiden binären quadratischen Formen gehören die Invarianten (vgl. p. 215):

$$D = 2, \quad D' = \lambda'' + \lambda''', \quad D'' = 2 \lambda'' \lambda'''.$$

Aus letzteren berechnet man das Doppelverhältniss α_1 der entsprechenden vier Punkte mittelst der Gleichung (vgl. p. 217):

$$\frac{D'^2}{D D''} = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4 \lambda'' \lambda'''} = \frac{(\alpha_1 + 1)^2}{(\alpha_1 - 1)^2}.$$

Um also α_1 zu finden, brauchen wir nur die absolute Invariante

$$\gamma_1 = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4 \lambda'' \lambda'''} = \frac{D'^2}{D D''}$$

zu kennen, d. h. wir müssen eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln die drei Grössen:

$$(27) \qquad \gamma_1 = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4\,\lambda''\lambda'''}, \quad \gamma_2 = \frac{(\lambda''' + \lambda')^2}{4\,\lambda'''\lambda'}, \quad \gamma_3 = \frac{(\lambda' + \lambda'')^2}{4\,\lambda'\lambda''}$$

sind; aus ihnen finden wir dann die drei gesuchten Doppelverhältnisse mittelst der Relationen:

$$(28) \qquad \gamma_1 = \frac{(\alpha_1 + 1)^2}{(\alpha_1 - 1)^2}, \quad \gamma_2 = \frac{(\alpha_2 + 1)^2}{(\alpha_2 - 1)^2}, \quad \gamma_3 = \frac{(\alpha_3 + 1)^2}{(\alpha_3 - 1)^2}.$$

Wir kennen aber die symmetrischen Functionen dieser drei Wurzeln γ, da die der Wurzeln λ', λ'', λ''' bestimmt sind; und zwar findet man aus den Gleichungen:

$$3\,\frac{A_{112}}{A_{111}} = -\,(\lambda' + \lambda'' + \lambda''')$$

$$3\,\frac{A_{122}}{A_{111}} = \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda'$$

$$\frac{A_{222}}{A_{111}} = -\,\lambda'\lambda''\lambda''' \qquad .$$

unter Berücksichtigung von (27) die folgenden Relationen:

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{(A_{111}A_{222} - 9\,A_{112}A_{122})^2}{64\,A_{111}^2 A_{222}^2} = \tfrac{1}{64}\,(1 - 9\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^2$$

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 = \frac{3\,A_{222}^2 A_{111}^2 - 9\,A_{112}A_{122}A_{222}A_{111} + 27\,(A_{112}^3 A_{222} + A_{122}^3 A_{111})}{16\,A_{111}^2 A_{222}^2}$$

$$= \tfrac{3}{16}\,\{1 - 3\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\,(1 - 9\,\mathsf{A}_1 - 9\,\mathsf{A}_2)\}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -\,3\,\frac{3\,A_{112}A_{122} + A_{111}A_{222}}{A_{111}A_{222}} = -\,3\,(1 + 3\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)\,.$$

Die absoluten Invarianten der drei Paare von binären quadratischen Formen, welche auf den Seiten des Polardreiecks durch ihre Schnittpunkte mit f und f' dargestellt werden, sind also die Wurzeln der Gleichung:

$$(29) \quad \gamma^3 + 3(1 + 3\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)\gamma^2 + \tfrac{3}{16}\{1 - 3\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2(1 - 9\mathsf{A}_1 - 9\mathsf{A}_2)\}\gamma - \tfrac{1}{64}(1 - 9\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2) = 0;$$

und aus den Wurzeln dieser Gleichung findet man die Doppelverhältnisse α der drei Punktquadrupel mittelst der Gleichungen (28)*).

---

*) Benutzt man einen der beiden vorliegenden Kegelschnitte zur Begründung einer *allgemeinen projectivischen Massbestimmung* (vgl. die Anmerkung auf p. 150), so wird man entsprechend den 2 absoluten Invarianten, welche ein beliebiger Kegelschnitt mit ersterem bestimmt, zweifach unendlich viele, in metrischer Hinsicht von einander verschiedene Kegelschnitte in der Ebene unterscheiden müssen. Eine weitere Eintheilung der letzteren ist dann nach den etwaigen Berührungen mit dem Fundamentalkegelschnitte durchzuführen, d. h. nach dem Verhalten der im Texte erwähnten Functionalinvarianten. Es würde dies der Eintheilung in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln bei gewöhnlicher Metrik entsprechen, denn die Realität der vier Schnittpunkte mit dem Fundamentalkegelschnitte wird von den Werthen der absoluten Invarianten abhängen. Die von den beiden Kegelschnitten auf den Seiten des Polardreiecks bestimmten Doppelverhältnisse entsprechen dann gewissermassen den Längen der Hauptaxen bei gewöhnlicher Metrik.

Wir fügen noch einige Bemerkungen über das *System von drei Kegelschnitten* hinzu. Es seien die drei quadratischen Formen gegeben:

$$f = a_x^2, \quad \varphi = a_x'^2, \quad \psi = a_x''^2;$$

dann bietet sich zunächst als einfachste simultane Covariante die *Functional- oder* Jakobi'*sche Determinante* derselben, d. h. die Determinante der ersten Differentialquotienten:

$$I = \tfrac{1}{8} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a a' a'')\, a_x a_x' a_x''.$$

Gleich Null gesetzt ergibt sie eine Gleichung, welche als das Resultat der Elimination der y oder x aus den drei Gleichungen

$$a_x a_y = 0, \quad a_x' a_y' = 0, \quad a_x'' a_y'' = 0$$

angesehen werden kann. *Die durch das Verschwinden der Functionaldeterminante dargestellte Curve dritter Ordnung ist daher der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Kegelschnitte sich in einem Punkte schneiden; und gleichzeitig der Ort dieser Schnittpunkte selbst.* Diese Curve steht, wie man sofort erkennt, in derselben Beziehung zu irgend drei anderen Kegelschnitten des zweifach unendlichen Systems:

$$\varkappa f + \lambda \varphi + \mu \psi = 0,$$

deren Gesammtheit man als *Kegelschnittnetz**) zu bezeichnen pflegt, d. h. *sie ist eine Combinante des Netzes* (vgl. p. 208). Auf die Untersuchung der so erhaltenen Curve dritter Ordnung concentrirt sich weiterhin wesentlich das Interesse bei Betrachtung der Kegelschnittnetze. Wir erwähnen hier nur noch einige besondere Fälle.

Zunächst können die drei Curven z. B. so liegen, dass ihnen ein Polardreieck gemeinsam ist, ein Fall, der schon gelegentlich erwähnt wurde (p. 297). Alsdann können wir die Gleichungen der drei Grundkegelschnitte in der Form:

$$\begin{aligned} f &= \alpha\, \xi_1^2 + \beta\, \xi_2^2 + \gamma\, \xi_3^2 = 0 \\ \varphi &= \alpha'\, \xi_1^2 + \beta'\, \xi_2^2 + \gamma'\, \xi_3^2 = 0 \\ \psi &= \alpha''\, \xi_1^2 + \beta''\, \xi_2^2 + \gamma''\, \xi_3^2 = 0 \end{aligned}$$

voraussetzen; und die Functionaldeterminante wird daher:

---

*) Vgl. über diese Netze Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2. Bd. bearbeitet von Schröter, Leipzig 1867; und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

$$8\,I = \begin{vmatrix} \alpha\,\xi_1 & \beta\,\xi_2 & \gamma\,\xi_3 \\ \alpha'\,\xi_1 & \beta'\,\xi_2 & \gamma'\,\xi_3 \\ \alpha''\,\xi_1 & \beta''\,\xi_2 & \gamma''\,\xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \cdot \xi_1 \xi_2 \xi_3 \,.$$

Die Jakobi'*sche Curve des Netzes zerfällt also in die drei Seiten des Polardreiecks*, vorausgesetzt, dass die Determinante der α, β, γ nicht verschwindet, wo dann $I \equiv 0$. Tritt dies jedoch ein, so können wir in unserem Falle setzen:

$$\alpha = \varkappa\alpha' + \lambda\alpha'', \quad \beta = \varkappa\beta' + \lambda\beta'', \quad \gamma = \varkappa\gamma' + \lambda\gamma'';$$

d. h. die drei Kegelschnitte gehören demselben Büschel an. Es gilt aber auch allgemein der Satz:

Wenn die Combinante I der drei quadratischen Formen f, φ, ψ identisch verschwindet, so gehören die entsprechenden drei Kegelschnitte demselben Büschel an.

Um dies zu beweisen, multipliciren wir die Form I mit u_x, wo die u_i ganz beliebige Grössen sind; nur darf u_x nicht Null sein. Benutzen wir dann die Identität III, p. 283, so wird:

$$(a\,a'\,a'')\,u_x = (a'\,a''\,u)\,a_x - (a\,a''\,u)\,a_x' + (a\,a'\,u)\,a_x'',$$

und wenn wir unserer früheren Bezeichnung entsprechend

$$N_{f\varphi} = (a\,a'\,u)\,a_x a_x', \quad N_{\varphi\psi} = (a'\,a''\,u)\,a_x' a_x'', \quad N_{\psi f} = (a''\,a\,u)\,a_x'' a_x$$

setzen, so geht die Bedingung $I \equiv 0$ über in:

$$N_{\varphi f} \cdot \psi = N_{\varphi\psi} \cdot f + N_{\psi f} \cdot \varphi, \text{ q. e. d.}$$

Ein anderes Kegelschnittnetz von speciellem Charakter haben wir schon früher bei Gelegenheit der Kreistheorie erwähnt (vgl. p. 155, f). Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass alle Curven zwei feste Punkte gemein haben. Man zeigt in diesem Falle an einer speciellen Gleichungsform leicht, dass die Jacobi'sche Curve in die Verbindungslinie der beiden Punkte und in einen durch letztere gehenden Kegelschnitt zerfällt, wie sich übrigens auch aus später abzuleitenden allgemeineren Sätzen über Functionaldeterminanten ergibt. Fallen insbesondere die beiden ausgezeichneten Punkte in die Kreispunkte der Ebene, so besteht die Jacobi'sche Curve aus der unendlich fernen Geraden und dem Orthogonalkreise der drei gegebenen Kreise $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, was sich ebenfalls unschwer nachweisen lässt.

Wir verlassen hiermit diesen Gegenstand, da eine vollständigere Theorie dieser Netze ein genaueres Studium der Curven dritter Ordnung voraussetzt; wir werden deshalb erst bei Betrachtung der letzteren auf jene zurückkommen.

Vierte Abtheilung.

Allgemeine Theorie der algebraischen Curven.

I. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve.

An die Theorie der Kegelschnitte würde sich naturgemäss die der Curven dritter Ordnung bez. Klasse anschliessen und in Verbindung mit ihr die Theorie der ternären cubischen Formen. Es lässt sich jedoch eine grosse Zahl der bei denselben hervortretenden Fragen ohne grössere Schwierigkeiten sofort allgemein für Curven beliebiger Ordnung beantworten; und gleichzeitig wird durch diese allgemeineren Betrachtungen von vornherein grössere Uebersichtlichkeit für die mannigfachen invarianten Eigenschaften und covarianten Gebilde gewonnen, denen wir bereits bei Curven dritter Ordnung begegnen. Wenn wir es daher im Folgenden unternehmen, eine allgemeine Theorie der algebraischen Curven in ihren Grundzügen zu entwerfen, so geschieht dies wenigstens zunächst in der Absicht, um Gesichtspunkte zu gewinnen, nach denen die Bearbeitung der Theorie specieller Curven in Angriff zu nehmen ist; und zwar wird uns hauptsächlich die Bestimmung gewisser für eine Curve charakteristischer Zahlen beschäftigen. Selbstverständlich beschränken wir uns dabei auf die Betrachtung projectivischer Eigenschaften der Curven, d. h. solcher Eigenschaften, welche bei beliebigen linearen Transformationen (deren Determinante nur nicht verschwindet) erhalten bleiben. Weiterhin werden sich jedoch hieran Untersuchungen knüpfen, bei denen andere, in gewissem Sinn, allgemeinere Vorstellungen massgebend sind, als wie sie durch die Invariantentheorie der *linearen* Transformationen gegeben werden: Dieselben beziehen sich auf die Frage nach solchen Eigenschaften einer Curve, die bei beliebig *eindeutiger* (nicht linearer) Umformung ungeändert bleiben, und eröffnen somit unserer Forschung ein wesentlich weiteres Gebiet. —

Eine Curve n^{ter} Ordnung ist durch eine Gleichung gegeben, in der die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 zur n^{ten} Dimension vorkommen. Ordnen wir die Glieder derselben etwa nach Potenzen von x_3, so erkennen wir, dass sie im Allgemeinen

$$1 + 2 + 3 \ldots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Coëfficienten enthält. Von diesen kann immer einer gleich der Einheit angenommen werden; die Curve ist daher von $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Constanten abhängig. Da nun die Forderung, dass die Curve durch $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebene Punkte gehe, ebenso viele *lineare* Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten gibt*), so können wir den Satz aussprechen: *sie ist im Allgemeinen durch* $\frac{n(n+3)}{2}$ *ihrer Punkte bestimmt.* Wir erwähnen dies hier vorläufig, um erst später auf die sich hier anknüpfenden Fragen näher einzugehen. Zunächst wenden wir uns dem Studium des Schnittpunktsystems einer Geraden mit der Curve zu. Die Gleichung der letzteren sei:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = 0.$$

Ihre Schnittpunkte mit der Verbindungslinie zweier Punkte y und z ergeben sich, wenn wir setzen (vgl. p. 70):

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1 \\ x_2 &= \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2 \\ x_3 &= \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3 . \end{aligned}$$

Entwickeln wir alsdann f nach Potenzen von $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, so kommt (vgl. das Entsprechende für binäre Formen auf p. 203):

$$(2) \quad 0 = \varkappa_1^n a_y^n + n \varkappa_1^{n-1} \varkappa_2 a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varkappa_1^{n-2} \varkappa_2^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \varkappa_2^n a_z^n.$$

Das Bildungsgesetz der Coëfficienten dieser Entwicklung in nicht symbolischer Form ist unmittelbar durch den Taylor'schen Satz gegeben. Setzen wir

$$\begin{aligned} D^0 f &= f(y_1, y_2, y_3) = a_y^n \\ D^1 f &= a_y^{n-1} a_z \\ D^2 f &= a_y^{n-2} a_z^2 \\ &\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ D^k f &= a_y^{n-k} a_z^k , \end{aligned}$$

so haben wir die recurrirende Formel:

$$(3) \quad (n-k)\, a_y^{n-k-1} a_z^{k+1} = z_1 \frac{\partial D^k f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial D^k f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial D^k f}{\partial y_3} = (n-k)\, D^{k+1} f .$$

Ganz in derselben Weise können wir auch umgekehrt jeden Coëfficienten in (2) aus dem nächst folgenden finden, denn es ist

---

*) Vgl. das Entsprechende für Kegelschnitte auf p. 48.

(4) $(k+1)\,a_y^{n-k}a_z^k = y_1\frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_3} = (k+1)\,D^k f$.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen

$$Df = 0, \quad D^2 f = 0, \ldots D^k f = 0, \ldots D^n f = 0$$

ist nach dem über binäre Formen Gesagten (vgl. p. 204) bekannt. Durch die Substitution (1) haben wir auf der Verbindungslinie von y und z eine binäre Coordinatenbestimmung (x_1, x_2) eingeführt. Die den n Wurzeln von (2) entsprechenden Schnittpunkte der Geraden $\overline{yz}$ mit der Curve, geben die n Grundpunkte einer binären Form. Die Gleichungen $D^k f = 0$ stellen daher auf der Linie $\overline{yz}$ die verschiedenen Polarsysteme des Punktes z in Bezug auf die Grundpunkte dar. So ist $Df = 0$ die Bedingung dafür, dass y der ersten Polargruppe von z, oder z der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polargruppe von y in Bezug auf jenes Schnittpunktsystem angehöre. Lassen wir daher in (2) y constant und z variabel sein, *so gibt die Gleichung*

$$D^k f = 0$$

eine Curve k^{ter} Ordnung, deren k Schnittpunkte mit einer durch y gehenden Geraden das $(n-k)^{\text{te}}$ Polarsystem des Punktes y in Bezug auf die n Schnittpunkte der Geraden mit der Grundcurve $f = 0$ bilden. Die Curve selbst wird daher als *die $(n-k)^{\text{te}}$ Polarcurve* oder *Polare* von y in Bezug auf die Grundcurve bezeichnet.*) Von besonderer Bedeutung sind jedoch die Schnittpunkte einer jeden Polaren $D^k f = 0$ mit der nächst höheren $D^{k+1} f = 0$. Es ergibt sich dies, wenn man die Gleichung der Tangente eines Curvenpunktes näher betrachtet.

Es möge nämlich der Punkt y auf der Gurve $f = 0$ liegen, also

$$D^0 f = a_y^n = 0$$

sein. Alsdann fällt in (2) das erste Glied fort, und es sondert sich ein Factor $\frac{x_1}{x_2}$ ab; die Gleichung hat eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2} = 0$, wie es sein muss. Stellen wir nun die Forderung, dass ein weiterer Schnittpunkt der Geraden $\overline{yz}$ mit y zusammenfalle, d. h. dass sich in (2) noch ein Factor $\frac{x_1}{x_2}$ absondere, so muss ausser $D^0 f$ auch noch Df verschwinden, was eine lineare Gleichung für z gibt. Eine gerade Linie, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, haben wir aber als Tangente bezeichnet (vgl. p. 27). *Es ist daher die Gleichung der Tangente von $f = 0$ im Punkte y* (in den Veränderlichen z):

$$Df = a_y^{n-1}a_z = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}z_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}z_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}z_3\right) = 0\,,$$

*) Für die Entstehung und Entwicklung dieser Theorie vgl. die Anmerkung auf p. 203 und 204.

und die *Coordinaten der Tangente* sind:

$$\varrho u_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}$$
(5)
$$\varrho u_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}$$
$$\varrho u_3 = \frac{\partial f}{\partial y_3}.$$

Es bietet sich uns hier die Aufgabe, mittelst dieser Gleichungen den Uebergang von der Gleichung der Curve in Punktcoordinaten zu der in Liniencoordinaten zu bewerkstelligen. Letztere Gleichung würde sich durch Elimination von ϱ, y_1, y_2, y_3 aus den drei Gleichungen (5) und aus

$$nf(x_1, x_2, x_3) = \varrho\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = 0$$

ergeben; und so sind wir in der That bei den Kegelschnitten zum Ziele gelangt (p. 78). Dies Eliminationsproblem ist jedoch im Allgemeinen ein sehr hohes, und die directe Auflösung desselben bietet nicht geringe Schwierigkeiten. Um so wichtiger ist es, dass wir durch die symbolischen Methoden der Invariantentheorie in der Lage waren, mittelst des Uebertragungsprincipes, die ganze Frage in das binäre Gebiet zu verweisen, so dass es nur nöthig ist, die Discriminantenbildung für eine binäre Form zu leisten (vgl. p. 279); und hierfür hat man allgemeine, mehr übersichtliche Methoden. Zugleich ergab dieses Verfahren für die Klasse der Curve n^{ter} Ordnung die Zahl $n\,(n-1)$, während der Grad in den Coëfficienten gleich $2\,(n-1)$ gefunden wurde. Zu ersterem Resultate gelangt man auch durch folgende Ueberlegung, die uns gleichzeitig zu den Polaren zurückführt.

Nehmen wir in der Gleichung der Tangente

$$a_y^{\,n-1} a_z = 0$$

den Punkt z constant und y variabel, so bestimmt dieselbe zusammen mit

$$a_y^{\,n} = 0$$

auf der Grundcurve diejenigen Punkte y, deren Tangenten durch z gehen, d. h. die Berührungspunkte dieser Tangenten. Diese beiden Curven von der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten; ebensoviele Tangenten kann man also von z an die Curve legen, und somit *ist die Klasse einer Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen gleich $n\,(n-1)$*.*) Ganz dualistisch entsprechend muss auch *die Ordnung einer Curve k^{ter} Klasse gleich $k\,(k-1)$* sein. Indem man so von der gegebenen Curve $n\,(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse dieselbe Ueberlegung rückwärts anstellt, würde man zu dem Widerspruche kommen, dass die

*) Die Bestimmung dieser Zahl gab Poncelet: Annales de Gergonne, t. 8, p. 214.

gegebene Curve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $n(n-1)(n^2-n-1)$ sei. Dieser Widerspruch löst sich jedoch bei genauerer Ueberlegung; denn eine Curve, welche als Punktgebilde von der allgemeinsten Art ist, hat, als Liniengebilde aufgefasst, immer sehr specielle Eigenschaften. Bei den Kegelschnitten, welche von der zweiten Ordnung und Klasse sind, tritt diese Eigenthümlichkeit noch nicht in der Weise hervor. Doch kann uns eine in ein Linienpaar ausartende Curve zweiter Ordnung immerhin schon als Beispiel für solche Vorkommnisse dienen: es war uns nicht mehr möglich, die ganze Curve in Liniencoordinaten darzustellen, sondern die betreffende Gleichung ergab nur doppelt zählend den Scheitel des Linienpaares; der Rückgang von dieser Liniencoordinatengleichung zur Punktgleichung verlor dagegen überhaupt jede Bedeutung. Eben deshalb kann dieses Beispiel noch keine Anschauung für die allgemeinen Fälle geben: Ein Linienpaar ist eben als Punktgebilde eine Curve *zweiter* Ordnung, *nullter* Klasse. Auf die Gestaltung ähnlicher Verhältnisse bei höheren Curven können wir erst später eingehen.

Der hier befolgte Weg zur Bestimmung der $n(n-1)$ von z ausgehenden Tangenten gibt unmittelbar den Satz:

Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der von einem Punkte an eine Curve n^{ter} Ordnung gelegten Tangenten bilden das vollständige Schnittpunktsystem der Curve mit einer Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, der ersten Polare von z.

Für $n=1$ sagt dieser Satz noch nichts Besonderes aus, denn 2 Punkte liegen immer auf einer Geraden; wohl aber für höhere Curven. So haben wir nach ihm bei Curven dritter Ordnung 6 Berührungspunkte, welche auf einem Kegelschnitte liegen, während letzterer doch schon durch 5 Punkte bestimmt ist. Ueberhaupt ist eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung nach Obigem durch $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt; und unser Satz sagt aus, dass von jenen $n(n-1)$ Berührungspunkten die übrigen

$$n(n-1)-\frac{(n-1)(n+2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

auf derselben Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung liegen.

In ähnlicher Weise sind $D^2f=0$, $D^3f=0\ldots$ Curven der Ordnungen $n-2$, $n-3\ldots$, welche in ganz bestimmter Weise zu einem Punkte z gehören. Nach dem für dieselben angegebenen Bildungsgesetze lässt sich der geometrische Zusammenhang derselben dahin aussprechen, dass wie $Df=0$ die erste Polare von z in Bezug auf $f=0$, so $D^2f=0$ die erste Polare von z in Bezug auf $Df=0$, $D^3f=0$ die in Bezug auf $D^2f=0$ u. s. w. Man kann demnach überhaupt allgemein den folgenden Satz aussprechen:

Die k^{te} Polare von z in Bezug auf die i^{te} Polare von z nach $f = 0$ ist die $(i + k)^{te}$ Polare von z nach $f = 0$.

Betrachtet man gleichzeitig mehrere Punkte und bildet immer die k^{te} Polare des einen in Bezug auf die i^{te} des andern, so kann man eine Reihe ähnlicher Sätze aussprechen, wie wir dieselben bei den Punktsystemen auf einer Geraden erhalten haben (vgl. p. 204). Es ist daher unnöthig auf dieselben noch näher wieder einzugehen; man kann sie vielmehr von den dort gegebenen unmittelbar ablesen. Wir erwähnen als Beispiel nur einen Satz, welcher als Verallgemeinerung der bei den Kegelschnitten auftretenden Polarenbeziehung erscheint. Aus der Gleichung

$$a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

folgt nämlich: *Liegt y auf der k^{ten} Polare von z, so liegt z auf der $(n - k)^{ten}$ Polare von y.*

Die $(n - 1)^{te}$ Polare eines Punktes y endlich ist stets eine gerade Linie. Liegt der Punkt insbesondere auf der Grundcurve, so wird dieselbe nach (5) zur Tangente. Diese Gerade ist aber immer gleichzeitig lineare Polare von y in Bezug auf alle höheren Polarcurven, also etwa die $(n - i - 1)^{te}$ Polare in Bezug auf die i^{te} Polare von y.

Liegt also der Pol auf der Grundcurve, so gehen alle seine Polaren durch ihn hindurch und berühren in ihm die Grundcurve.

Da hiernach die erste Polare eines Punktes der Curve in diesem berührt, so fallen von den $n(n - 1)$ Tangenten, die man von ihm an die Curve ziehen kann, zwei in seine eigene Tangente zusammen. *Von einem Punkte der Curve kann man also nur noch $n(n - 1) - 2$ Tangenten an dieselbe legen.*

Die Tangenten hatten wir dadurch bestimmt, dass wir eine Gerade die Curve in *zwei* zusammenfallenden Punkten schneiden liessen. Wir können nun weiter nach solchen Geraden fragen, welche die Curve in *drei* consecutiven Punkten treffen. Diese Tangenten werden *Wende-* (oder *Inflexions-*) *Tangenten* genannt; ihre Berührungspunkte *Wende-* oder *Inflexions-Punkte.* Die Bezeichnung rührt daher, dass in einem solchen Punkte die Curve ihre Krümmung ändert, wie in den Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie in der Regel gezeigt wird (vgl. Fig. 35). Wir können uns von der Gestalt der Curve in der Nähe eines Wendepunktes auch durch folgende Ueberlegung ein Bild machen.*) Im Allgemeinen wird sich die Tangente continuirlich um die Curve drehen, während ihr Berührungspunkt in gleichem Sinne fortschreitet. In einem Wendepunkte fallen nun zwei successive

Fig. 35.

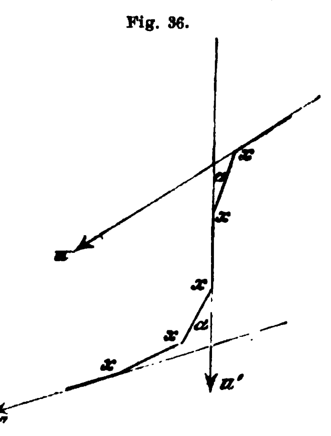
a

x

*) Vgl. Plücker: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, 2. Abschnitt, §. 3.

Tangenten zusammen: während also der Punkt gleichmässig fortschreitet, wird die Drehung seiner Tangente im Wendepunkte gleich Null; letztere steht einen Augenblick still, um sodann ihre Drehung gemäss den Gesetzen der Continuität in entgegengesetztem Sinne fortzusetzen. Es wird dies recht deutlich, wenn wir uns die Curve für den Augenblick, wie in Fig. 36 durch ein Polygon ersetzt denken. Der beschreibende Punkt (x) rückt auf der umhüllenden Geraden (u) immer nach derselben Richtung fort; diese Linie aber hat sich von der Lage u bis zur Lage u' in demselben Sinne, dann aber von u' bis u'' in entgegengesetztem Sinne gedreht. Wird die Bewegung nun continuirlich, lassen wir also das Polygon in eine Curve übergehen, so ist die Grösse der Tangentendrehung bei der Lage u' Null. Während also die Elementarseiten der Curve mit den früheren und späteren vergleichbar bleiben, werden an u' die Contingenzwinkel α gegen die früheren und späteren unendlich klein; und *so geht in der That Fig. 36 in Fig. 35 über.*

Fig. 36.



Die analytische Bedingung für einen Wendepunkt erhalten wir durch die Forderung, dass von den Schnittpunkten der Geraden $\overline{yz}$ mit der Curve drei Punkte in y zusammenfallen. Es muss sich dann in der Gleichung (2) ein Factor $\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^3$ absondern, d. h. es müssen gleichzeitig die drei Bedingungen bestehen:

$$D^0 f = a_y{}^n \qquad = 0$$
$$D\ f = a_y{}^{n-1} a_z = 0$$
$$D^2 f = a_y{}^{n-2} a_z{}^2 = 0.$$

Ist y ein Wendepunkt, so müssen dieser Ableitung zufolge die letzten beiden Gleichungen zusammen bestehen, sobald z auf der Tangente von y liegt. Die Gleichung $D^2 f = 0$ kann aber nur für jeden Punkt dieser Tangente erfüllt sein, wenn $D^2 f$ den Ausdruck Df als Factor enthält. Der Kegelschnitt

$$D^2 f = \Sigma f_{ik} z_i z_k = 0,$$

wo f_{ik} für $\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt ist, muss daher in ein Linienpaar zerfallen. Die Bedingung dafür wird durch das Verschwinden seiner Determinante, d. h. der aus den zweiten Differentialquotien von f gebildeten, gegeben, nämlich*):

*) Der Zahlenfactor $\frac{1}{6}$ ist hinzugefügt, damit Δ in der symbolischen Form ohne einen solchen definirt ist.

$$\tfrac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0\,.$$

In der symbolischen Form wird diese, analog wie bei den binären Formen, als Hesse'*sche Determinante* bezeichnete Form wegen

$$f_{ik} = a_y{}^{n-2} a_i a_k = b_y{}^{n-2} b_i b_k = c_y{}^{n-2} c_i c_k$$

gegeben durch:

$$a_y{}^{n-2} b_y{}^{n-2} c_y{}^{n-2} \begin{vmatrix} a_1{}^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_2 b_1 & b_2{}^2 & b_2 b_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3{}^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3\,(abc)\; a_y{}^{n-2} b_y{}^{n-2} c_y{}^{n-2}\,,$$

oder, wenn wir a, b, c in jeder Weise vertauschen und die Summe aller so entstehenden Ausdrücke nehmen (vgl. p. 268):

$$\Delta = (abc)^2\, a_y{}^{n-2} b_y{}^{n-2} c_y{}^{n-2}\,. \tag{6}$$

Die Wendepunkte werden also auf der Grundcurve durch eine Curve $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Delta = 0$, ausgeschnitten. Es ist nämlich auch leicht zu zeigen, dass *jeder* dieser Schnittpunkte einen Wendepunkt von $f = 0$ liefert. Setzt man, entsprechend der Bedingung $\Delta = 0$:

$$f_{ik} = u_i v_k + v_i u_k\,,$$

so wird

$$D^2 f = 2\, u_z v_z\,, \quad Df = u_y v_z + v_y u_z\,, \quad D^0 f = 2\, u_y v_y\,.$$

Ist nun $D^0 f = 0$, so muss u_y oder v_y verschwinden. Sei $u_y = 0$; dann ist $Df = u_z v_y$, also von u_z nur um eine Constante verschieden und mithin ein Factor von $D^2 f$, w. z. b. w. Wir haben also den Satz:

Die Wendepunkte sind die Schnittpunkte der Grundcurve $f = 0$ mit der Hesse'*schen Curve $\Delta = 0$; ihre Anzahl ist daher gleich* $3n(n-2)$.*)

Es ist jedoch keineswegs umgekehrt die Curve $\Delta = 0$ durch die Wendepunkte allein bestimmt; sondern man kann dieselbe durch irgend eine Curve des Systems

$$\Delta + Mf = 0$$

ersetzen, wo M ein beliebiger Ausdruck von der Ordnung $3(n-2) - n = 2n - 6$ ist. Diese Bemerkung ist für Curven dritter Ordnung besonders wichtig; denn durch passende Bestimmung des Factors M gelingt es bei diesen die Coordinaten der Wendepunkte durch blosses Wurzelziehen wirklich anzugeben. —

Mehr als drei Schnittpunkte der Tangente mit der Curve können

---

*) Vgl. Hesse: Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung; Crelle's Journal, Bd. 28. Die Zahl der Wendepunkte wurde von Plücker gegeben: ib. Bd. 12.

niemals in den Berührungspunkt zusammenfallen, es sei denn, dass die Coëfficienten von f besonderen Bedingungen genügen.*) Wir haben nämlich an $f=0$ einfach unendlich viele Tangenten und können denselben also nur *eine* Bedingung auferlegen, um eine bestimmte Zahl zu erhalten.

Die obige Bestimmungsweise der Wendepunkte wird jedoch illusorisch, wenn es Punkte auf der Curve gibt, deren Tangente überhaupt unbestimmt ist, was dann ebenfalls nach sich zieht, dass die $(n-2)^{te}$ Polare in ein Linienpaar zerfällt. Es wird dies immer eintreten, wenn die Curve sich in einem Punkte selbst durchsetzt (vgl. Fig. 37), wo dann in der That zwei verschiedene Tangenten möglich sind. In einem solchen „*Doppelpunkte der Curve*“ kann daher die Gleichung der Tangente nichts mehr aussagen, ihre Coordinaten (5) müssen sämmtlich verschwinden. *Wir haben somit für einen Doppelpunkt y die Gleichungen* $\left(f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$:

Fig. 37.

$$(7)\quad f_1 = a_y^{n-1}a_1 = 0, \quad f_2 = a_y^{n-1}a_2 = 0, \quad f_3 = a_y^{n-1}a_3 = 0.$$

Damit dieselben erfüllt sind, muss nicht nur y eine besondere Lage haben, sondern es muss eine Relation zwischen den Coëfficienten der Curve bestehen; denn wir können die y aus den drei Gleichungen (7) eliminiren. Die Curvengleichung $f=0$ braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden, da sie wegen

$$f = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3$$

von selbst erfüllt ist. Die Ausführung dieser Elimination wird zu einer Gleichung

$$R = 0$$

führen, deren Bildungsgesetz in übersichtlicher Weise anzugeben jedoch bisher nicht möglich ist.**) Den Ausdruck R nennt man alsdann *die Discriminante der Curve;* sie ist natürlich eine Invariante der Form f; für Kegelschnitte ist sie z. B. mit der Determinante $A=(abc)^2$ identisch. Wir können auch leicht den Grad der Discriminante in den Coëfficienten von f angeben. Es gilt nämlich überhaupt der Satz:

Die Resultante dreier Gleichungen, bez. von der m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Ordnung in drei homogenen Veränderlichen, ist vom Grade np in den

*) Vgl. über solche höhere Ausnahmspunkte: Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genève 1750, p. 403, und Cayley: Crelle's Journal, Bd. 34.

**) Allerdings hat Sylvester ein Verfahren angegeben, welches die Resultante aus drei Gleichungen von gleicher Ordnung in Determinantenform gibt. Es tritt dabei jedoch der Invariantencharakter der Resultante nicht deutlich hervor. Vgl. Salmon: Lessons introductory etc. (p. 82 in Fiedler's Uebersetzung).

Coëfficienten der ersten, vom Grade mp in denen der zweiten, vom Grade mn in denen der dritten Gleichung. Zum Beweise dieses Satzes denke man sich etwa die Coordinaten der np gemeinsamen Punkte der beiden letzten Curven berechnet. Sollen dann alle drei Curven einen gemeinsamen Punkt haben, so müssen die Coordinaten eines dieser np Punkte die erste Gleichung identisch befriedigen. Man wird daher die Resultante erhalten, wenn man das Product der np Ausdrücke bildet, welche aus der ersten Gleichung entstehen, wenn man darin bez. die Coordinaten der erwähnten np Punkte einsetzt. Die letzteren hängen nur von den Coëfficienten der zweiten und dritten Gleichung ab; das Product ist daher vom Grade np in den Coëfficienten der ersten Gleichung; und also, weil bei der Resultantenbildung alle drei Gleichungen symmetrisch benutzt werden müssen, vom Grade mp in denen der zweiten, vom Grade mn in denen der dritten Gleichung.

Die Anwendung dieses Satzes auf die Gleichungen (7) ergibt nun unmittelbar:

Die Discriminante einer ternären Form n^{ter} Ordnung, d. h. die Invariante, deren Verschwinden die Bedingung für die Existenz eines Doppelpunktes der entsprechenden Curve n^{ter} Ordnung gibt, ist vom Grade $3(n-1)^2$.

Eine jede durch einen Doppelpunkt y gehende Gerade hat in demselben zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve; in der That gibt die Gleichung (2) dann immer zwei Wurzeln $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = 0$. Wir können nun, wie bei einem beliebigen Punkte der Curve nach seiner Tangente, so hier nach *solchen Strahlen* fragen, *welche in y die Curve dreimal schneiden.* Alsdann muss z so liegen, dass auch

$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2 = \Sigma f_{ik} z_i z_k = 0.$$

Da aber y ein Doppelpunkt ist, so haben wir nach (7)

$$0 = f_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3, \quad (i = 1, 2, 3),$$

also die Determinante der f_{ik} gleich Null. *Daher gibt die $(n-2)^{te}$ Polare des Doppelpunktes*

$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2 = 0$$

ein Linienpaar: das Product seiner beiden Tangenten; wo das Wort *Tangente* insofern berechtigt ist, als von den drei in y zusammenfallenden Schnittpunkten einer solchen Geraden, zwei einander consecutiv auf dem einen durch y gehenden Curvenzweige liegen, während der dritte als einfacher Schnittpunkt mit dem andern Zweige anzusehen ist (vgl. Fig. 37). Durch das Verschwinden der Determinante Δ ist gleichzeitig angezeigt, dass das Vorkommen von Doppelpunkten bei einer Curve auf die Anzahl der Wendepunkte von Einfluss ist, indem

durch den Doppelpunkt eine gewisse Zahl von Schnittpunkten beider Curven absorbirt wird; die genaue Bestimmung dieses Einflusses werden wir später geben.

Um die Coordinaten u_i, v_i der Tangenten im Doppelpunkte zu finden, haben wir also zu setzen:

$$\begin{aligned} f_{11} &= u_1 v_1 & 2 f_{12} &= u_1 v_2 + v_1 u_2 \\ f_{22} &= u_2 v_2 & 2 f_{23} &= u_2 v_3 + v_2 u_3 \\ f_{33} &= u_3 v_3 & 2 f_{31} &= u_3 v_1 + v_3 u_1, \end{aligned}$$

und für die Auflösung dieser Gleichungen sind in der Kegelschnitttheorie allgemeine Methoden gegeben (vgl. p. 103). Insbesondere kann es jedoch eintreten, dass die beiden Linien u, v in eine einzige zusammenfallen (vgl. Fig. 38); alsdann wird:

Fig. 38.

$$\begin{aligned} f_{11} &= u_1^2 & f_{12} &= u_1 u_2 \\ f_{22} &= u_2^2 & f_{23} &= u_2 u_3 \\ f_{33} &= u_3^2 & f_{31} &= u_3 u_1 . \end{aligned}$$

Ein solcher Punkt der Curve wird als Rückkehrpunkt bezeichnet; er ist also dadurch charakterisirt, dass für ihn die zweiten Differentialquotienten von f gleich den Quadraten und Producten dreier Grössen werden.

In derselben Weise, wie wir das identische Verschwinden von Df als Kennzeichen eines Doppelpunktes benutzten, kann man nun weiter gehen: Ist $D^2 f = 0$, so entsteht zunächst ein dreifacher Punkt, u. s. f.; *ist für einen Punkt $D^{k-1} f$ identisch Null, so hat die Curve in ihm einen k-fachen Punkt.* Es ist dabei unter einem r-fachen Punkte ein solcher verstanden, durch den r verschiedene Zweige der Curve hindurchgehen, d. h. *in welchem eine jede durch ihn gehende Gerade r vereinigt gelegene Punkte mit der Curve gemein hat.* Es verschwinden alsdann nach dem in Gleichung (4) ausgesprochenen Bildungsgesetze auch alle anderen Polaren Df, $D^2 f \ldots D^{k-2} f$ identisch; und *die Gleichung*

$$D^k f = a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

gibt dann das Product der k verschiedenen Tangenten des Punktes. Zunächst nämlich hat diese Curve in y ebenfalls einen k-fachen Punkt, denn die $(k-1)^{te}$ Polare von y in Bezug auf sie ist mit $D^{k-1} f$ identisch, und verschwindet also ebenfalls unabhängig von z. Eine Curve k^{ter} Ordnung mit k-fachem Punkte muss aber immer in k gerade Linien zerfallen; denn sonst würde eine durch den k-fachen Punkt gehende Gerade noch in einem oder mehreren Punkten schneiden können, und somit mehr als k Punkte mit der Curve gemein haben, was nicht möglich ist. Diese Linien müssen die verschiedenen Zweige der Grundcurve in y berühren: denn betrachten wir einen zu y be-

nachbarten Punkt von $D^k f$, setzen also $z_i = y_i + dy_i$, so haben wir zur Bestimmung der k Fortschreitungsrichtungen auf der Curve $D^k f = 0$ dieselbe Gleichung:

$$a_y^{n-k} a_{dy}^k = 0,$$

wie zur Bestimmung der Fortschreitungsrichtungen auf der Grundcurve; womit obige Behauptung bewiesen ist. Näher werden wir weiterhin noch auf die Natur der vielfachen Punkte eingehen; wir werden dabei in erhöhtem Maasse die Bedeutung der Polarentheorie für die Untersuchung solcher Punkte und für die Bestimmung ihres Einflusses auf die Zahl der Wendepunkte, die Klasse der Curve etc. erkennen.

Von nicht geringerer Wichtigkeit wird jedoch die Polarentheorie, wenn man sich die Aufgabe stellt, symbolische Bildungen geometrisch zu deuten. Das Uebertragungsprincip gab uns ein Mittel, dies für die zugehörigen Formen zu leisten, vorausgesetzt, dass dieselben keine Factoren vom Typus (abc) enthalten*); der Begriff der Polarenbildung erlaubt nun dasselbe für alle Zwischenformen, welche nur aus symbolischen Factoren vom Typus (abu) und a_x zusammengesetzt sind. Lassen wir nämlich zunächst alle in einer solchen Form vorkommenden Factoren a_x^α, $b_x^\beta \ldots$ fort, so können wir die Symbole $a, b \ldots$ in dem übrig bleibenden Ausdrucke bez. als Symbole für die α^{te}, $\beta^{\text{te}} \ldots$ Polare des Punktes x ansehen, wie sogleich an einem Beispiele näher erläutert werden soll. Der geometrische Satz, welcher durch Nullsetzen des so umgeformten Ausdrucks dargestellt wird, ist dann aber nach dem Uebertragungsprincipe gegeben. Auf Zwischenformen der hier gemeinten Art kommt man z. B., wenn man nicht das Product der $n(n-1)$ von einem Punkte x an eine Curve gehenden Tangenten aufstellt, sondern das Product der Gleichungen ihrer Berührungspunkte in Liniencoordinaten. Dieselben sind als Schnittpunkte der Grundcurve $a_z^n = 0$ und der ersten Polare von x $a_z^{n-1} a_x = 0$ gegeben. Man hat also nur die Resultante zweier binären Formen a_z^n, α_z^{n-1} von der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu bilden, auf dieselbe das Uebertragungsprincip anzuwenden, alle n Symbole von α_z^{n-1}, welche in der Resultante vorkommen, durch solche von a_z^n zu ersetzen und n Factoren $b_x, c_x \ldots$ hinzuzufügen. So ist z. B. das Product der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte x an einen Kegelschnitt $a_z^2 = 0$ gegeben durch (vgl. p. 285)

$$(abu)(acu)\, b_x c_x = 0.$$

Wir haben hier eine quadratische Form a_z^2 und eine lineare Form $\alpha_z = \beta_z = a_x a_z$; deren Resultante gleich $(a\alpha)(a\beta)$ ist. Ergänzt man in ihr die Determinanten durch Hinzufügen von u zu dreiglie-

*) Vgl. jedoch eine Anmerkung zu der letzten Abtheilung dieses Bandes bei Gelegenheit der Theorie der lineo-linearen Zwischenformen (Connexe).

drigen, ersetzt α, β bez. durch b, c und fügt die Factoren b_x, c_x hinzu, so entsteht die genannte Bildung. Ein anderes Beispiel gibt die Gleichung:

$$(8) \qquad (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Nehmen wir x constant, so stellt dieselbe die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare von x in Liniencoordinaten dar. Nehmen wir u constant, so gibt sie also eine Curve der Ordnung $2(n-2)$ als Ort der Punkte, deren $(n-2)^{\text{te}}$ Polaren die gegebene Gerade u berühren. *Auf jeder Geraden gibt es daher $2(n-2)$ Punkte, deren $(n-2)^{\text{te}}$ Polaren von derselben Geraden berührt werden.*

Auf dieselbe Gleichung (8) werden wir auch durch die folgende Ueberlegung geführt. Wir fragen nach solchen Punkten y auf einer Geraden u, deren erste Polare von eben dieser Geraden in einem Punkte x berührt wird. Die Coordinaten der Tangente dieser Polare im Punkte x sind nun:

$$= a_x^{n-2} a_y a_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3.$$

Diese müssen mit den Coordinaten der gegebenen Geraden proportional werden; also haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f_{11} y_1 + f_{12} y_2 + f_{13} y_3 &= \varrho u_1 \\
f_{21} y_1 + f_{22} y_2 + f_{23} y_3 &= \varrho u_2 \\
f_{31} y_1 + f_{32} y_2 + f_{33} y_3 &= \varrho u_3 \\
u_1 \; y_1 + u_2 \; y_2 + u_3 \; y_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Elimination von ϱ und y_1, y_2, y_3 ergibt dann neben $u_x = 0$ wieder die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2} (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Aus diesen Beziehungen folgern wir die Sätze:

Auf jeder Geraden gibt es $2(n-2)$ solcher Punkte, deren erste Polare von eben dieser Geraden berührt wird. Die $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren der $2(n-2)$ Berührungspunkte werden dann von derselben Geraden berührt.

Durch jeden Punkt lassen sich zwei solche Gerade ziehen, in deren jeder ein Punkt die Gerade selbst der Art zur Tangente seiner ersten Polare hat, dass der Berührungspunkt in dem gegebenen Punkte liegt. Es sind dies die beiden von dem Punkte an seine $(n-2)^{\text{te}}$ Polare zu legenden Tangenten.

Die Hesse'*sche Curve ist der Ort der Punkte, für welche diese*

beiden Linien zusammenfallen. *) Soll nämlich letzteres eintreten, so muss entweder der Pol auf seiner conischen (d. i. $(n-2)^{\text{ten}}$) Polare liegen, was nur für die Punkte der Grundcurve eintritt, oder die conische Polare muss zerfallen, wo dann die beiden Tangenten in die Verbindungslinie des Poles mit dem Scheitel des Linienpaares zusammenfallen.

Durch eine ähnliche Reciprocität zwischen der $(n-2)^{\text{ten}}$ und 1ten Polare eines Punktes, wie sie uns in diesen Sätzen entgegentritt, können wir auch die Bedeutung der Hesse'schen Curve in anderer Form als bisher aussprechen. Stellen wir nämlich die Forderung, dass die erste Polare einen Doppelpunkt x habe, so müssen für denselben nach (7) die drei Gleichungen bestehen:

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial Df}{\partial x_i} = a_x^{n-2} a_y a_i = 0 .$$

Eliminiren wir aus diesen die y, so kommen wir wieder auf die Bedingung:

$$a_1 b_2 c_3 (abc)\, a_x b_x c_x = 0 ,$$

wo der links stehende Ausdruck sich wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c nur um einen Zahlenfactor von Δ unterscheidet.

Die Hesse'*sche Curve ist daher gleichzeitig der Ort der Punkte, deren $(n-2)^{te}$ Polare einen Doppelpunkt hat, und der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren.*

Als Beispiel für die Fälle der aus der Polarentheorie fliessenden geometrischen Sätze sei endlich noch das Folgende erwähnt. Es ist die Gleichung der zur ersten Polare von y:

$$Df = a_x^{n-1} a_y = 0$$

als Grundcurve gehörigen Hesse'schen Curve, welche auf jener die Wendepunkte ausschneidet, gegeben durch:

$$\Delta_{Df} = (abc)^2\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} a_y b_y c_y = 0. \tag{9}$$

Nehmen wir hierin die x als gegeben an, so ergibt sich in Verbindung mit $Df = 0$ der Satz:

Es gibt auf der $(n-1)^{ten}$ Polare eines Punktes x immer drei verschiedene Pole, deren erste Polaren in dem Punkte x einen Wendepunkt haben.

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber eine Klasse von Eliminationsproblemen und über einige Sätze aus der Theorie der Polaren; Borchardt's Journal, Bd. 58. Die zahlreichen Sätze, welche hier über Polaren aufgestellt werden, gründen sich auf eine allgemeine Methode, aus m Gleichungen mit m homogen vorkommenden Veränderlichen, von denen eine von beliebiger Ordnung, eine quadratisch ist, und $m-2$ linear sind, die Veränderlichen zu eliminiren. Mittelst dieser Methode wird z. B. die Curve untersucht, welche die Berührungspunkte x durchlaufen, wenn die Linie u eine gegebene Curve umhüllt.

Rückt nun der Pol y auf einer Curve $\varphi(y) = 0$ fort, so beschreiben die Wendepunkte seiner ersten Polare eine Curve, welche aus $Df = 0$, $\Delta_{Df} = 0$, $\varphi = 0$ durch Elimination der y erhalten wird. Ist die Curve φ insbesondere eine Gerade

$$u_y = 0,$$

so kann man wegen $Df = a_x^{n-1} a_y = 0$ in Δ_{Df} setzen:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_2 f_3 - u_3 f_2 = (u_2 a_3 - u_3 a_2)\, a_x^{n-1} \\ y_2 &= u_3 f_1 - u_1 f_3 = (u_3 a_1 - u_1 a_3)\, a_x^{n-1} \\ y_3 &= u_1 f_2 - u_2 f_1 = (u_1 a_2 - u_2 a_1)\, a_x^{n-1}. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man als Gleichung der gesuchten Curve, wenn man in diesen drei Gleichungen die Symbole a bez. durch d, e, f ersetzt denkt:

$$(10)\qquad (abc)^2 (adu)(beu)(cfu)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-1} e_x^{n-1} f_x^{n-1} = 0.$$

Wenn also der Pol eine Gerade beschreibt, so durchlaufen die Wendepunkte der ersten Polare eine Curve von der Ordnung $6(n-2)$. *Sämmtliche Polaren, deren Pole auf der Geraden liegen, schneiden sich in* $(n-1)^2$ *Punkten, den Lösungen der Gleichungen:*

$$(11)\qquad \varrho u_1 = f_1, \quad \varrho u_2 = f_2, \quad \varrho u_3 = f_3.$$

Diese $(n-1)^2$ *Punkte sind dreifache Punkte der Curve* (10). Letzteres folgt daraus, dass für $\varrho u_i = f_i = d_x^{n-1} d_i = \dots$ jeder der drei Factoren $(adu)\, d_x^{n-1}$, $(beu)\, e_x^{n-1}$, $(cfu)\, f_x^{n-1}$ identisch verschwindet, und somit auch jeder zweite Differentialquotient des Ausdrucks (10) nach den x_i.

Betrachtet man dagegen in der Gleichung (10) *die x als constant, die u als veränderlich, so gibt dieselbe das Product dreier linearer Factoren; es sind dies die Gleichungen der vorhin erwähnten drei Pole, deren erste Polaren in x einen Wendepunkt haben.**)

Aus (11) folgt weiter:

Wenn die Gerade u eine Curve $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ *von der* m^{ten} *Klasse umhüllt, so beschreiben die* $(n-1)$ *Schnittpunkte der ersten Polaren die Curve* $m(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung* $\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0$. *Dreht sich insbesondere die Gerade um einen Punkt ξ, so ist die beschriebene Curve die erste Polare von ξ.*

II. Die singulären Punkte.

Wir kehren zum Studium der vielfachen Punkte zurück; wir beginnen mit dem Doppelpunkte. Die Natur eines solchen hängt davon

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber Curven vierter Ordnung; Borchardt's Journal, Bd. 59.

ab, ob die linearen Factoren von $D^2 f$ reell *(eigentlicher Doppelpunkt)*, imaginär *(isolirter Punkt)* oder zusammenfallend *(Rückkehrpunkt)* sind. Wir wollen nun das Verhalten der Curve in der Nähe des betreffenden Punktes eingehend untersuchen. Zu dem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Doppelpunkt, so dass die Coordinaten des letzteren werden:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Ziehen wir dann durch ihn eine beliebige Gerade, so können wir die Coordinaten x_1, x_2 eines Punktes der Geraden auffassen als Coordinaten ihres Schnittpunktes mit der dritten Seite $x_3 = 0$, die dritte Coordinate eines solchen Punktes dagegen als einen für die einzelnen Punkte der gezogenen Geraden variirenden Parameter. Wir fragen nach den Schnittpunkten einer solchen Linie mit der Curve und müssen die Gleichung derselben daher nach Potenzen des Parameters x_3 entwickeln. Setzen wir also

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$

so wird

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = f^{(0)} z^n + f^{(1)} z^{n-1} + f^{(2)} z^{n-2} + \dots + f^{(n)},$$

wo die Functionen $f^{(i)}$ homogen in x, y und von so hoher Ordnung sind, als ihr oberer Index angibt. Soll der Punkt $x = 0$, $y = 0$ auf der Curve liegen, wie wir es annehmen, so muss der von x, y unabhängige Factor $f^{(0)}$ verschwinden. Für einen Doppelpunkt muss aber auch der zweite Term identisch Null sein, damit ein Factor z^2 vortritt, d. h. zwei Schnittpunkte der betrachteten Linie in den Anfangspunkt zusammenfallen. Im Allgemeinen dagegen gibt die Gleichung

$$(2) \qquad f^{(1)} = ax + by = 0$$

die *Tangente im Anfangspunkte;* denn für einen Punkt in unmittelbarer Nähe des Anfangspunktes werden x, y unendlich klein, und die Coëfficienten der niederern Potenzen von z verschwinden im Vergleiche zu dem Coëfficienten $f^{(1)}$ von z^{n-1}. Die Gleichung (1) reducirt sich also auf das erste Glied, d. h. die Curve $f = 0$ kann in der Nähe des Anfangspunktes durch die gerade Linie $f^{(1)} = 0$ ersetzt werden, oder mit andern Worten: Diese Gerade ist Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte $x = 0$, $y = 0$, q. e. d.

Bei einem Doppelpunkte verschwindet also $f^{(1)}$ identisch. Der Verlauf der Curve in der Nähe des Doppelpunktes ist daher bei Vernachlässigung höherer Potenzen von x, y dargestellt durch

$$(3) \qquad f^{(2)} = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0,$$

oder mit anderen Worten: *Es ist dies die Gleichung des Productes der*

beiden Tangenten im Doppelpunkte. Wir haben hier, wenn die Coëfficienten α, β, γ als reell vorausgesetzt werden, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$\beta^2 > \alpha\gamma$, *eigentlicher Doppelpunkt*, zwei reelle Tangenten (vgl. Fig. 37).

$\beta^2 = \alpha\gamma$, *Rückkehrpunkt*, eine doppelt zählende Tangente (vgl. Fig. 38).

$\beta^2 < \alpha\gamma$, *isolirter Doppelpunkt*, zwei imaginäre Tangenten (vgl. Fig. 39).

Fig. 39.

Im letzteren Falle ist der Schnittpunkt beider Tangenten reell: die Curve hat einen reellen Punkt, durch den kein reeller Zweig hindurchgeht.

Führen wir die beiden Tangenten des *Doppelpunktes* als Coordinatenaxen $x = 0$, $y = 0$ ein, so können wir also die Curvengleichung auf die Form bringen:

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = xy \, . \, z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Für einen *Rückkehrpunkt* dagegen wird die Gleichung, indem beide Tangenten (etwa in die Axe $x = 0$) zusammenfallen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 \, . \, z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0 \, .$$

Die Form der letztern Gleichung können wir noch weiter vereinfachen. Es sei die Function $f^{(3)}$ gegeben durch

$$f^{(3)} = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Die Linie $y = 0$ ist zunächst nur insoweit bestimmt, als sie durch den Rückkehrpunkt gehen soll; wir können daher, während x fest bleibt, über y und z noch derartig verfügen, dass die Terme dritter Dimension in einen vollständigen Cubus übergehen. Setzen wir nämlich:

$$\begin{aligned} y &= y' + \lambda x \\ z &= z' + \mu y' + \nu x, \end{aligned}$$

so möge f übergehen in:

$$f = x^2 z'^{n-2} + \varphi^{(3)} z'^{n-3} + \varphi^{(4)} z'^{n-4} + \ldots,$$

wo die φ Functionen von der Ordnung ihres oberen Index in x, y sind. Wir können nun λ, μ, ν so wählen, dass der Coëfficient

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)} = (n-2)\, x^2 (\mu y' + \nu x) + ax^3 + 3bx^2 (y' + \lambda x) \\ + 3cx (y' + \lambda x)^2 + d (y' + \lambda x)^3 \end{aligned}$$

sich auf den einen nur y'^3 enthaltenden Term reducirt; es ist dabei natürlich vorausgesetzt, dass d nicht verschwindet, was eine höhere Singularität bedingen würde. Wir haben dann zur Bestimmung von λ, μ, ν die folgenden Gleichungen:

$$(n-2)\nu + a + 3b\lambda + 3c\lambda^2 + d\lambda^3 = 0$$
$$(n-2)\mu + 3b + 6c\lambda + 3d\lambda^2 = 0$$
$$c + d\lambda = 0.$$

Schreiben wir nun wieder y, z statt y', z' und $f^{(i)}$ für $\varphi^{(i)}$, *so kann also für einen Rückkehrpunkt die Curvengleichung immer in die Form gebracht werden:*

(5) $$f = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

Wir knüpfen an die Gleichungen (4) und (5) sogleich einige Bemerkungen über das Verhalten der Polaren und der Hesse'schen Curve in den Doppel- und Rückkehrpunkten der Grundcurve*), welche in der Folge für uns von grosser Wichtigkeit sein werden. Wir wissen bereits (vgl. p. 313), dass alle ersten Polarcurven durch den Doppelpunkt gehen. Bilden wir nun die Gleichung der Polare $\varphi = 0$ des Punktes ξ, η, ζ unter Zugrundelegung von (4), so wird

$$\varphi = (\xi y + \eta x) z^{n-2} + \left((n-2) xy\zeta + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x}\xi + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y}\eta\right) z^{n-3} + \ldots$$

Die Tangente derselben im Anfangspunkt ist durch den Term niedrigster Ordnung, d. h. durch

$$\xi y + \eta x = 0$$

gegeben. Dagegen ist die Gleichung der Verbindungslinie des Poles ξ, η, ζ mit dem Anfangspunkte

$$\xi y - \eta x = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt, weil $x = 0$, $y = 0$ die Tangenten des Doppelpunktes sind, unmittelbar der Satz:

Die erste Polare eines beliebigen Punktes geht durch den Doppelpunkt; und ihre Tangente in demselben ist harmonisch zu den Tangenten der Grundcurve im Doppelpunkte und der Verbindungslinie desselben mit dem Pole.

Bilden wir ebenso, ausgehend von der Gleichung (5), die Polare des Punktes ξ, η, ζ für eine Curve mit Rückkehrpunkt, so kommt, wenn wir nach z ordnen:

$$\varphi = 2x\xi z^{n-2} + (3d\eta y^2 + (n-2)\zeta x^2) z^{n-3} + \varphi'^{(4)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

Die Linie $x = 0$ ist also auch Tangente einer jeden ersten Polare: *Im Rückkehrpunkte berührt die erste Polare eines jeden Punktes die Rückkehrtangente.* Es ist von Wichtigkeit ein Urtheil über die Zahl der Schnittpunkte beider Curven zu gewinnen, welche man sich im Rückkehrpunkte vereinigt gelegen denken muss. Man gelangt dazu,

*) Dieselben Sätze werden im folgenden Abschnitte (über die Plücker'schen Formeln) ohne Benutzung eines speciellen Coordinatensystems bewiesen werden.

soweit es sich um reelle Punkte handelt, etwa durch folgende Ueberlegung. Ein eigentlicher Doppelpunkt y einer Curve kann insbesondere dadurch entstehen, dass die Curve eine Schleife besitzt, wie es in Fig. 40 veranschaulicht ist; und von einem derartigen Doppelpunkte *müssen* wir ausgehen, wenn aus ihm durch Grenzübergang ein Rückkehrpunkt entstehen soll. Alsdann muss nämlich beim allmählichen Zusammenrücken der Tangenten im Doppelpunkte der von diesen in dem einen Winkelraume eingeschlossene Curventheil völlig zerstört werden; denn beim Rückkehrpunkte finden sich über diesen Punkt hinaus keine rellen Punkte der Curve. Aus (5) ergibt sich nämlich für einen unmittelbar benachbarten Punkt ($z = 1$):

$$x = \sqrt{- dy^3},$$

und dies ist, für $d > 0$ imaginär, sobald $y > 0$ wird. Ein solches Zerstören eines Curvenzuges ist aber nur beim Auftreten einer Schleife durch allmähliches Zusammenziehen derselben möglich; denn andernfalls würde durch das Zusammenfallen der beiden Tangenten ein sogenannter *„Selbstberührungspunkt"* entstehen (vgl. unten Fig. 48).

Eine beliebige durch den Doppelpunkt gehende Gerade, die wir uns auch durch irgend einen anderen Curvenzweig (φ in Fig. 40) ersetzt denken können, trifft diese Schleife dann noch in einem Punkte z, und die Entfernung des letzteren vom Doppelpunkte wird an einer gewissen Stelle ein Maximum erreichen, von dem wir die Ausdehnung der Schleife überhaupt abhängig denken können. Aus dem Doppelpunkte lassen wir nun einen Rückkehrpunkt entstehen, indem wir die Schleife immer mehr zusammenziehen und so jenes Maximum immer kleiner werden lassen, bis sie auf einen einzelnen Punkt reducirt ist (indem also $\alpha\gamma - \beta^2$ in Gleichung (3) sich immer mehr der Null nähert). In diesem Momente fallen die beiden Tangenten des Doppelpunktes mit jener Geraden zusammen, und in den entstandenen Rückkehrpunkt fällt auch der weitere Schnittpunkt z des betrachteten Curvenzweiges hinein. Im Ganzen liegen also insbesondere bei der ersten Polare *drei* Schnittpunkte im Rückkehrpunkte der Grundcurve vereinigt; denn ein Doppelpunkt würde offenbar zwei über einander liegende Schnittpunkte ergeben. Zu demselben Resultate gelangen wir auf analytischem Wege: Durch die Schnittpunkte von f und φ geht auch jede Curve $\varkappa f + \lambda \varphi = 0$ hindurch, insbesondere also auch die Curve

Fig. 40.

$$2\xi f - x\varphi = (2\xi dy^3 - 3\eta dxy^2 - (n-2)\zeta x^3)\, z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Wir können daher, so lange es nur auf die Schnittpunkte von f und φ ankommt, f auch durch diese Curve ersetzen. Dieselbe enthält aber

keinen Term erster oder zweiter Dimension in x, y, d. h. sie hat im Anfangspunkte einen dreifachen Punkt (vgl. p. 329), dessen 3 Tangenten gegeben sind durch

$$2\,\xi\,d y^3 - 3\,\eta\,d x y^2 - (n-2)\,\xi x^3 = 0\,.$$

Diese Linien sind also sämmtlich von der Tangente der Grundcurve verschieden, und somit haben wir drei Schnittpunkte von f und $2\,\xi f - x\varphi = 0$.

Eine Curve mit Rückkehrpunkt wird in diesem von jeder ihrer ersten Polarcurven in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten, d. h. die Gleichung, von welcher die Schnittpunkte beider Curven abhängen, hat entsprechend dem Rückkehrpunkte drei gleiche Wurzeln.

Eine ganz ähnliche Anwendung gestatten die hier gegebenen Methoden zur Charakterisirung der Schnittpunkte, welche die Hesse'sche Curve in einem Doppel- oder Rückkehrpunkte mit der Grundcurve bestimmt. Dass diese Curve durch die singulären Punkte überhaupt hindurch geht, haben wir schon früher gesehen (p. 314).

Wir beginnen mit der Betrachtung eines *Doppelpunktes*, nehmen also die Grundcurve in der Form (4) an:

$$f = xy\,.\,z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0\,.$$

Setzen wir nun

$$\frac{\partial f^{(3)}}{\partial x} = f^{(3)}_x, \quad \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y} = f^{(3)}_y, \quad \frac{\partial f^{(3)}}{\partial z} = f^{(3)}_z,$$

$$\frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x^2} = f^{(3)}_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial y^2} = f^{(3)}_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial z^2} = f^{(3)}_{zz},$$

$$\frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial y\,\partial z} = f^{(3)}_{yz}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial z\,\partial x} = f^{(3)}_{zx}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x\,\partial y} = f^{(3)}_{xy},$$

so findet man die Covariante $\Delta\,.\,\frac{1}{6}\,(n\,(n-1))^3$ gleich einer Determinante, deren erste beiden Verticalreihen folgende Elemente enthalten:

$$f^{(3)}_{xx} z^{n-3} + \ldots, \qquad z^{n-2} + f^{(3)}_{xy} z^{n-3} + \ldots,$$

$$z^{n-2} + f^{(3)}_{yx} z^{n-3} + \ldots, \qquad f^{(3)}_{yy} z^{n-3} + \ldots,$$

$$(n-2)\,y z^{n-3} + (n-3) f^{(3)}_x z^{n-4} + \ldots, \quad (n-2)\,x z^{n-3} + (n-3) f^{(3)}_y z^{n-4} + \ldots,$$

während in die dritte Reihe folgende Elemente zu stellen sind:

$$(n-2)\,y z^{n-3} + (n-3)\,f^{(3)}_x z^{n-4} + \ldots,$$

$$(n-2)\,x z^{n-3} + (n-3)\,f^{(3)}_y z^{n-4} + \ldots,$$

$$(n-2)\,(n-3)\,x y z^{n-4} + (n-3)\,(n-4)\,f^{(3)} z^{n-5} + \ldots.$$

Man übersieht leicht, dass bei der Entwicklung dieser Determinante die Terme niedrigster Ordnung in x, y sind:

$$2(n-2)^2 xyz^{3n-8} - (n-2)(n-3)xyz^{3n-8} = (n-1)(n-2)xyz^{3n-8};$$

und es folgt daraus der Satz:

Die Hesse'*sche Curve hat in einem Doppelpunkte der Grundcurve ebenfalls einen Doppelpunkt; und zwar sind die Tangenten beider Curven im Doppelpunkte dieselben* (nämlich $x = 0$, $y = 0$).

Jeder Zweig der Grundcurve wird also im Doppelpunkte von einem Zweige der Hesse'schen Curve in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten (d. h. berührt) und von dem andern Zweige in einem einzelnen Punkte getroffen*), was zusammen drei Schnittpunkte beider Curven ergibt (vgl. Fig. 41). *Die Anzahl der Schnittpunkte, welche überhaupt im Doppelpunkte vereinigt gedacht werden müssen, ist also gleich sechs.* Dasselbe erkennt man auch direct aus den Formeln; denn bei Untersuchung der Schnittpunkte können wir die Curve $\Delta = 0$ durch irgend eine des Systems

Fig. 41.

$$\Delta + Mf = 0$$

ersetzen, wo M eine Function von der Ordnung $2(n-3)$ ist, insbesondere auch durch:

$$\tfrac{1}{6}(n(n-1))^3 \Delta - (n-1)(n-2) f z^{2n-6} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Glieder zweiter Ordnung in x, y ganz fortgefallen; sie stellt daher eine Curve mit dreifachem Punkte im Anfangspunkte dar, dessen drei Tangenten nicht weiter ausgezeichnete Beziehungen zu den Tangenten des Doppelpunktes haben. Jeder Ast derselben wird von jedem Aste der Grundcurve in einem Punkte getroffen, was wieder 6 Schnittpunkte gibt.

---

*) Mittelst der sogleich im Texte zu entwickelnden Methoden beweist man, dass *die beiden sich im Doppelpunkte berührenden Zweige der Grundcurve und* Hesse-*schen Curve sich gegenseitig die convexe Seite zukehren*, wie es Fig. 41 zeigt. Betrachten wir nämlich die Zweige, welche die Seite $x = 0$ berühren, dann ist für benachbarte Punkte x von höherer Ordnung der Kleinheit, als y, und daher der betreffende Zweig der Grundcurve annähernd dargestellt durch die Parabel

$$x + dy^2 = 0,$$

wenn d der (reelle) Coëfficient von y^3 in $f^{(3)}$ ist. Lassen wir ebenso in $\frac{1}{6} n(n-1)^3 \Delta$ die in x multiplicirten Terme aus, so finden wir als Coëfficienten von z^{3n-9} den Ausdruck:

$$2(n-2)(n-3) f y^{(3)} - (n-3)(n-4) f^{(3)} - (n-2)^2 y^2 f y y^{(3)}.$$

Vernachlässigt man hierin wieder die mit x multiplicirten Terme, sucht also den Factor von y^3, so erkennt man, dass der entsprechende Zweig der Hesse'schen Curve dargestellt wird durch die Parabel:

$$(n-2)x - n \,.\, d \,.\, y^2 = 0;$$

und diese kehrt in der That ihre convexe Seite der convexen Seite jener ersten Parabel zu.

Für einen *Rückkehrpunkt* haben wir (die obige Constante $d = 1$ gesetzt):

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \dots;$$

und es wird also:

$$\frac{(n(n-1))^3}{6}\Delta = \begin{vmatrix} 2z^{n-2}+\dots, & 0+\dots, & 2(n-2)xz^{n-3}+\dots \\ 0+\dots, & 6yz^{n-3}+\dots, & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\dots \\ 2(n-2)xz^{n-3}+\dots, & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\dots, & (n-2)(n-3)x^2z^{n-4}+\dots \end{vmatrix}$$
$$= -12(n-1)(n-2)\,yx^2z^{3n-9} + \Delta^{(4)}z^{3n-10} + \dots$$

Man findet also in Δ die niedrigsten Terme in x, y von der dritten Dimension; und das Auftreten des Factors x^2 gibt den Satz:

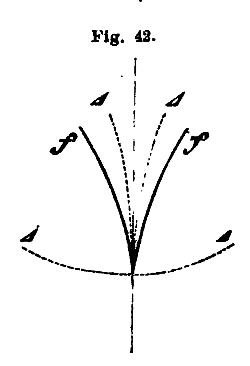


Fig. 42.

In einem Rückkehrpunkte der Grundcurve hat die Hesse'sche Curve einen dreifachen Punkt; und zwar berühren zwei Zweige desselben die Rückkehrtangente), während der dritte von diesen getrennt verläuft* (vgl. Fig. 42).

Die Zahl der hier vereinigt liegenden Schnittpunkte erkennen wir durch Betrachtung der Curve (für $2n > 7$):

$$\tfrac{1}{6}(n(n-1))^3\Delta + \mu y z^{2n-7} f = 0,$$

wo μ für den Zahlenfactor $12(n-2)(n-1)$ gesetzt ist.

Diese Gleichung enthält auch keine Terme dritter Ordnung mehr: das Merkmal eines vierfachen Punktes. Die vier Tangenten desselben haben keine besondere Lage gegen die Rückkehrtangente, werden also von den beiden Zweigen der Grundcurve zusammen in 8 Punkten geschnitten: *Von den Schnittpunkten einer Curve mit Rückkehrpunkt und ihrer* Hesse'*schen Curve liegen acht im Rückkehrpunkte vereinigt.* Dies

*) Dass diese beiden Zweige von Δ in der That, wie in Fig. 42, eine Spitze bilden, folgt aus der sogleich zu erörternden Newton-Cramer'schen Regel. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass der Ausdruck $\Delta^{(4)}$ in obiger Gleichung ein Glied mit y^4 enthält, während die andern noch in x^2 multiplicirt sind. Diese andern Glieder können aber für einen Punkt in der Nähe des Rückkehrpunktes vernachlässigt werden; denn x ist von höherer Ordnung der Kleinheit als y. Die Curve $\Delta = 0$ kann also ersetzt werden durch:

$$yx^2 + \delta y^4 = 0,$$

wo δ eine Constante ist; d. h. sie besteht aus zwei Zweigen, von denen der eine die Linie $y = 0$ berührt, der andere dagegen vom Typus des Rückkehrpunktes ist; wie es sein soll. Die in Fig. 42 angegebene Lage der Spitze von Δ gegen die von f folgt daraus, dass $\delta = \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-2}\cdot d$, wenn d den Coëfficienten von $_{8}{}^{n}$ in f angibt, also jedenfalls kleiner, als d, so dass einem gegebenen Werthe von y für Δ immer ein kleineres x entspricht, als für f.

ist durch unsere analytische Betrachtung zunächst nur für $2n > 7$ bewiesen, gilt aber auch noch für $n = 3$. In letzterem Falle gibt es im Allgemeinen 9 Wendepunkte; man sieht aber leicht, dass beim Auftreten eines Rückkehrpunktes nur einer übrig bleibt. Es ist nämlich dann, wie wir gesehen haben, f in der Form darstellbar:

$$f = x^2 z + y^3,$$

und also

$$6^2 \Delta = \begin{vmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24 x^2 y.$$

Für $f = 0$, $\Delta = 0$ ist daher entweder $x^2 = 0$ und $y^3 = 0$, was 6 im Rückkehrpunkte vereinigte Schnittpunkte gibt, oder $y = 0$ und $x^2 z = 0$, was noch 2 im Rückkehrpunkte liegende Punkte gibt und ausserdem den einzigen Wendepunkt $x = 0$, $z = 0$.

Diese für das Folgende sehr wichtigen Beispiele werden hinreichen, um das Wesen und die Anwendbarkeit der angeführten Methoden darzulegen. Wir gehen nunmehr zu der allgemeineren Aufgabe über, *die Gestalt einer Curve in der Nähe eines k-fachen Punktes aus der gegebenen Gleichungsform abzuleiten.**) Durch einen solchen Punkt gehen immer k Zweige der Curve hindurch; es kann jedoch eintreten, dass mehrere dieser Zweige unter einander in ihm eine einfache oder höhere Berührung eingehen, während andere Zweige von diesen getrennt verlaufen, wie wir soeben z. B. an dem Verhalten der Hesseschen Curve in einem Rückkehrpunkte der Grundcurve gesehen haben. Die folgenden Untersuchungen sollen nun dazu dienen, diese verschiedenen Zweige der Curve von einander zu trennen und in ihrem gegenseitigen Verhältnisse zu einander zu charakterisiren; und zwar werden wir sämmtliche Vorkommnisse *in erster Annäherung* als Combinationen von drei Grundtypen erkennen, welche für den Verlauf einer Curve in der Nähe eines Punktes möglich sind. Diese Grundtypen sind dann namentlich für die *Gestalt* der Curvenzweige in der Nähe des Punktes wichtig, soweit dieselben reell sind.

Wir nehmen den betreffenden Punkt wieder zu einem Eckpunkte des Coordinatendreiecks, oder, indem wir $z = 1$ setzen, zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems; ferner setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die Y-Axe eine Tangente der Curve im Anfangspunkte sei. Die Gleichung der Curve ist dann nach (2) von der Form:

$$f = x + f^{(2)} + f^{(3)} + \ldots = 0.$$

---

*) Eine andere, von Nöther angegebene Methode zur Auflösung eines vielfachen Punktes in seine Bestandtheile werden wir am Schlusse dieser Abtheilung kennen lernen.

Gehen wir nun in Richtung der Tangente $x = 0$ auf der Curve weiter, so wird für einen dem Anfangspunkte unmittelbar benachbarten Punkt die Coordinate x unendlich klein gegen die Coordinate y: Man muss sich in diesem Falle, da wir es nur mit *algebraischen* Functionen zu thun haben, gemäss den für solche Functionen gültigen Elementarbegriffen die Vorstellung bilden, dass es eine gewisse Potenz von y gibt, welche mit x von derselben Ordnung unendlich klein wird; oder wie wir uns ausdrücken wollen: *Es wird x mit einer gewissen Potenz von y vergleichbar;* und diese Potenz ist dann eine für die Natur des Anfangspunktes charakteristische Zahl. — Da wir nun die Y-Axe als Tangente der Curve annehmen, so werden in

$$f = x + ax^2 + 2bxy + cy^2 + f^{(3)} + \dots$$

jedenfalls die Terme ax^2 und $2bxy$, wenn x und y unendlich klein sind, gegen x verschwinden, dagegen nicht nothwendig y^2. *Setzen wir also voraus, dass $c \gtrless 0$,* so haben wir als einfachsten Fall, *dass x mit y^2 vergleichbar wird.*

Alsdann können wir die Curve in der Nähe des Anfangspunktes ersetzen durch die *Parabel*

$$0 = x + c \cdot y^2. \tag{6}$$

Dies ist also charakteristisch für eine einfache Berührung mit der Y-Axe. Ist dagegen der Anfangspunkt ein *Wendepunkt*, so muss seine quadratische Polare die Wendetangente $x = 0$ als Factor enthalten, d. h. in $f^{(2)} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *muss c gleich Null sein.* Wir haben dann, wenn wir für einen Augenblick wieder die dritte Variable z einführen:

$$f = xz^{n-1} + (ax + 2by)xz^{n-2} + (\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3) z^{n-3} + \dots$$

Hierin können wir durch Aenderung der Lage von $z = 0$ die Glieder zweiter Ordnung ganz fortschaffen, indem wir setzen:

$$z = z' - \frac{ax + 2by}{n-1}.$$

Die Terme zweiter Ordnung heben sich dann in der That direct fort, und es bleibt ein Ausdruck von der Form:

$$f = xz'^{n-1} + (\alpha' x^3 + 3\beta' xy^2 + 3\gamma' xy^2 + \delta' y^3) z'^{n-3} + \dots$$

In der Nähe des Anfangspunktes ist jedenfalls x wieder von höherer Ordnung unendlich klein, als y; die Terme $\alpha' x^3$, $3\beta' x^2 y$, $3\gamma' xy^2$ können wir daher vernachlässigen, und es wird *x mit y^3 vergleichbar. Die Curve kann also in der Nähe eines Wendepunktes ersetzt werden durch eine Curve*

$$x + \delta y^3 = 0. \tag{7}$$

Ein Doppelpunkt gibt hier nichts Besonderes, denn einen solchen können wir durch zwei Curven von der Form (6) ersetzen; anders ist es mit einem *Rückkehrpunkte.* Für einen solchen haben wir:

$$f = x^2 + dy^3 + \dots;$$

es wird x^2 mit y^3 oder x *mit* $y^{\frac{3}{2}}$ *vergleichbar,* und *die Curve kann ersetzt werden durch:*

$$x^2 + dy^3 = 0. \tag{8}$$

Die Gleichungen (6), (7), (8) stellen uns die erwähnten drei Grundtypen dar. Die erste Curve (Fig. 43) verläuft auf einer Seite der Y-Axe und ist symmetrisch gegen die X-Axe. Die zweite liegt

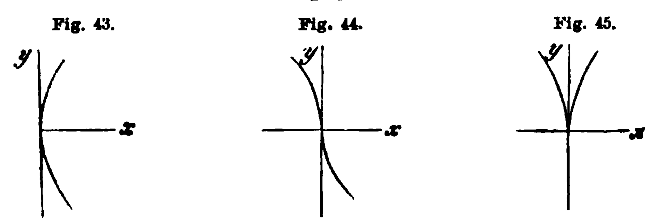


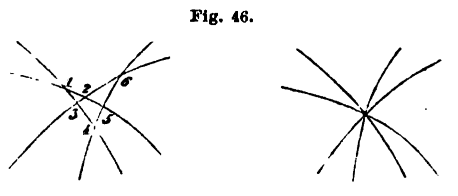
Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

gleichzeitig symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen (Fig. 44), während die dritte auf einer Seite der X-Axe verläuft und sich symmetrisch gegen die Y-Axe verhält (Fig. 45, wo d negativ angenommen).

Kehren wir nunmehr zu der gestellten Aufgabe zurück, eine Curve in der Nähe eines k-fachen Punktes zu untersuchen. In diesem Falle beginnt die Entwicklung von f mit dem Gliede $f^{(k)}$. Die Gleichung

$$f^{(k)} = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots + a_k y^k = 0 \tag{9}$$

gibt die k Tangenten des Punktes, die wir zuerst bestimmen müssen. Der einfachste Fall ist der, dass die Gleichung k^{ten} Grades lauter verschiedene Wurzeln hat, wo dann die Singularität des vielfachen Punktes durch Aufsuchung dieser Wurzeln erschöpft ist, es sei denn, dass die einzelnen Zweige in ihm noch Wendepunkte besitzen, was einer näheren Untersuchung bedarf. *Alsdann können wir uns den Punkt durch Vereinigung von* $\frac{k(k-1)}{2}$ *Doppelpunkten entstanden denken.* Man erkennt dies sofort, indem man die verschiedenen Zweige der Curve so zeichnet, dass sie noch nicht genau durch einen Punkt gehen, wie es in beistehenden Figuren für einen 4-fachen Punkt geschehen ist. Die Zahl $\frac{k(k-1)}{2}$ gibt eben die Zahl der Schnittpunkte dieser k verschiedenen Zweige (vgl. Fig. 46).

Fig. 46.


Setzen wir dagegen voraus, dass etwa r Wurzeln der Gleichung (9) zusammenfallen, so haben wir das gegenseitige Verhalten der r Zweige, welche dann eine gemeinsame Tangente haben, näher festzustellen. Wir verlegen zu dem Zwecke die Y-Achse in diese r-fach zählende Tangente; die Gleichung der Curve wird dadurch:

$$(10) \qquad f = x^r \varphi^{(k-r)} + f^{(k+1)} + f^{(k+2)} + \ldots = 0.$$

Unter dieser Annahme ist wieder x in der Nähe des betrachteten Punktes von höherer Ordnung der Kleinheit als y; und es ist unsere Aufgabe, in f alle diejenigen Glieder aufzusuchen, welche mit $x^r y^{k-r}$ vergleichbar sind. *Die Summe derselben, gleich Null gesetzt, stellt alsdann eine Curve dar, durch welche f in der Nähe des Anfangspunktes ersetzt werden kann, insofern es nur auf diejenigen r Zweige von f ankommt, welche die Y-Axe berühren.* Die Function φ nämlich ist von der Form

$$\varphi^{(k-r)} = \alpha_0 y^{k-r} + \alpha_1 y^{k-r-1} x + \ldots + \alpha_{k-r} x^{k-r};$$

und zwar kann in φ das Glied mit y^{k-r} nicht fehlen, denn sonst würde φ noch einen Factor x enthalten, während wir voraussetzen, dass dieser Factor nur r-mal in $f^{(k)}$ vorkommt. Alle weiteren Glieder von φ enthalten noch Factoren x, sind also gegen das erste zu vernachlässigen. Die mit $x^r y^{k-r}$ vergleichbaren Glieder sind daher in den Functionen $f^{(k+1)}$, $f^{(k+2)} \ldots$ zu suchen; und zwar sind nur Glieder der Form $x^p y^q$ zu berücksichtigen, für die $p \leqq r$ ist. Die Summe dieser Terme gleich Null gesetzt stellt unsere Curve in erster Annäherung dar. Diese neue Curve wird wieder aus verschiedenen Zweigen bestehen; und für jeden dieser Zweige werden x und y in ganz bestimmtem Verhältnisse zu einander in Bezug auf das Unendlichkleine stehen; für jeden Zweig wird x mit einer bestimmten Potenz von y, etwa $y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, vergleichbar sein, oder x^α mit y^β. Wir werden nun eine Regel angeben, nach welcher man diese Zahlen α, β finden kann, um so die Curve in verschiedene Zweige aufzulösen. Es führt dazu die folgende Ueberlegung. Setzen wir zunächst voraus, es sei das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ für einen gewissen Zweig bekannt. Führen wir dann eine Grösse ε als Maass der Kleinheit ein, so können wir setzen:

$$\begin{array}{l} \lim x = \varepsilon^\beta \\ \lim y = \varepsilon^\alpha \end{array} (\beta > \alpha);$$

denn dann wird in der Grenze $\varepsilon = x^{\frac{1}{\beta}}$, also $y = \varepsilon^\alpha = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, d. h. y^β mit x^α vergleichbar, wie es angenommen wurde. Für ein beliebiges Glied von f ist somit

$$x^p y^q = \varepsilon^{p\beta + q\alpha}.$$

Verlangen wir nun, dass $x^p y^q$ von einer bestimmten Ordnung unendlich klein werde, so muss die Zahl $p\beta + q\alpha$ einen bestimmten constanten Werth haben, also etwa

$$p\beta + q\alpha = \mu$$

sein. Wir haben somit den Satz:

Sind x^α und y^β von gleicher Ordnung der Kleinheit, so werden alle Glieder $x^p y^q$, welche von der Ordnung μ unendlich klein werden, durch die Bedingung

$$p\beta + q\alpha = \mu \tag{11}$$

bestimmt.

Die betreffenden Zahlen p, q wirklich anzugeben, lehrt die Zahlentheorie; es kommt dies auf die Lösung der Congruenz

$$p\beta \equiv \mu \pmod{\alpha}$$

heraus, welche in unserem Falle immer möglich ist, weil α und β, auf deren Quotienten es allein ankommt, als zu einander relativ prim vorausgesetzt werden können. Für unsern Zweck sind natürlich nur die Werthe brauchbar, für welche $p + q < n$ ist, wenn n die Ordnung der untersuchten Curve bedeutet. *Wir haben nun μ möglichst klein zu wählen;* denn es kommt uns darauf an, diejenigen Glieder herauszufinden, gegen welche alle anderen von höherer Ordnung der Kleinheit sind. Wir können uns hiervon eine deutliche Vorstellung durch ein geometrisches Hülfsmittel machen.*) Betrachten wir nämlich die ganzen Zahlen p, q bez. als Abscisse und Ordinate eines Punktes der Ebene, so können wir jedes Glied $x^p y^q$ durch einen Punkt mit den Coordinaten p, q vorgestellt annehmen. Die Gleichung (11) stellt dann eine gerade Linie dar, und die Zahl μ können wir als Maass ihres Abstandes vom Anfangspunkte betrachten, denn dieser Abstand ist bekanntlich

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Bei dieser geometrischen Repräsentation liegen also alle Punkte, deren entsprechende Terme in f von der μ^{ten} Ordnung unendlich klein werden,

---

*) Dies Verfahren wurde von Newton angegeben, zunächst um aus einer gegebenen algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ y in Function von x angenähert darzustellen; vgl. dessen Methodus functionum et serierum infinitarum, London 1736 (Opuscula ed. Castillion, tom. 1, p. 37 ff.); für die Curventheorie verwerthet von Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750. Vgl. im Folgenden auch Puiseux: Recherches sur les fonctions algébriques; Liouville's Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 15, 1850 (Deutsch von Fischer, Halle 1861, p. 24 ff.).

wenn x^α *mit* y^β *vergleichbar ist, auf einer Geraden in der Entfernung* $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ *vom Anfangspunkte.*

Jedes Glied, welches von höherer Ordnung der Kleinheit ist, dem also ein Werth $\mu' > \mu$ entspricht, liegt dann auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Linie (11). Um die Glieder *niedrigster* Ordnung zu finden, haben wir demnach das folgende Verfahren einzuschlagen. Es sei y^s das Glied niedrigsten Grades in f, welches von x frei ist. Ihm entspricht ein Punkt in der Entfernung s auf der Ordinatenaxe; durch diesen Punkt und einen anderen, dessen zugehörige Zahlen $p = \pi$, $q = \varkappa$ möglichst klein sind, legen wir eine gerade Linie, deren Abstand vom Anfangspunkte μ sei (vgl. unten Fig. 47). Diese Linie wird noch durch eine Reihe weiterer Punkte gehen, welche zwischen π, $\varkappa$, und o, s liegen und denen Terme in f entsprechen; die Summe aller solcher Terme:

$$K_1 = \Sigma a_{pq} x^p y^q = 0 \tag{12}$$

gibt uns dann eine Curve, für deren durch den vielfachen Punkt gehende Zweige x^α mit y^β vergleichbar ist, wo α und β bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} \alpha\varkappa + \beta\pi &= \mu \\ \alpha s &= \mu . \end{aligned}$$

Setzen wir ferner $x = x'^\beta$, $y = y'^\alpha$, so geht (12) in eine homogene Gleichung vom Grade μ in x', y' über (binäre Form), denn es wird dann $x^p y^q = x'^{\beta p} y'^{\alpha q}$. Sind alle Wurzeln $\frac{x'}{y'}$ derselben verschieden, so stellt $K_1 = 0$ eine Reihe von Zweigen dar, welche sich nur einfach im Anfangspunkte berühren, und von denen jeder durch den Typus der Parabel dargestellt wird. Sind dagegen mehrere Gruppen von Wurzeln einander gleich, so werden diese Zweige sich wieder in weitere Klassen auflösen, die durch Wiederholung ganz ähnlicher Betrachtungen bestimmt werden. Wir wollen darauf aber erst später eingehen.

Von dem Punkte π, $\varkappa$ gehen wir nun weiter zu einem Punkte π', $\varkappa'$, welcher jenseit der Linie $\alpha q + \beta p = \mu$, ihr aber möglichst nahe liegt. Die Verbindungslinie beider Punkte wird eine zweite Reihe von Gliedern enthalten, und die entsprechende Gleichung

$$K_2 = 0 \tag{13}$$

stellt wieder ein System von Zweigen dar, für welche in der Nähe des Anfangspunktes $x^{\alpha'}$ mit $y^{\beta'}$ vergleichbar ist, wo nun

$$\begin{aligned} \pi\beta' + \varkappa\alpha' &= \mu' \\ \pi'\beta' + \varkappa'\alpha' &= \mu' , \end{aligned}$$

wenn μ' den Abstand der neuen Linie vom Anfangspunkte bedeutet; und zwar gibt es zufolge unserer Construction keine Glieder, für welche das Verhältniss $\frac{\alpha'}{\beta'}$ dasselbe wäre, während μ' einen kleineren Werth hätte. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir eine Reihe von Linien, die sich zu einem Polygone vereinigen. Dasselbe kehrt seine convexe Seite den beiden Coordinatenaxen zu, und zwar derartig, dass alle Punkte, welche Gliedern von f entsprechen, durch das Polygon von diesen Axen getrennt werden oder selbst auf den Seiten des Polygons liegen. Diesen Seiten entspricht eine Reihe von Curven

$$K_1 = 0$$
$$K_2 = 0$$
$$K_3 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

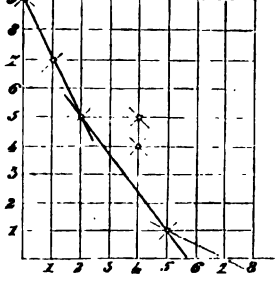
Jede derselben vereinigt die Terme, welche bei einem bestimmten Werthe von $\frac{\alpha}{\beta}$ von der möglichst niedrigen Ordnung der Kleinheit sind. Die letzte der Geraden geht durch den Punkt $p = r$, $q = k - r$, denn alle Glieder, für die $p > r$ ist, brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Damit ist dann das Polygon gegen die Abscissenaxe abgeschlossen. Eine weitere Fortsetzung des Verfahrens würde wenigstens nicht mehr zu Curvenzweigen führen, welche die Axe $x = 0$ berühren.

*Ein Beispiel**) wird dazu dienen, dies Verfahren völlig klar zu stellen. Wir betrachten die Curve:

$$(14) \qquad f(x, y) \equiv x^5y + ax^7 + bx^2y^5 + cx^8 + dx^4y^4 + exy^7 + fx^4y^5 + gy^9 + hy^{10} = 0,$$

also eine Curve 10. Ordnung mit 6-fachem Punkte im Anfangspunkte. Zunächst können wir alle Glieder fortlassen, in denen der Exponent von x grösser, als 5 ist, denn diese verschwinden jedenfalls gegen x^5y; ebenso das Glied mit y^{10}, denn wir beginnen unsere Construction mit y^9. Wir behalten dann eine Curve 9. Ordnung:

Fig. 47.



$$(15) \qquad x^5y + bx^2y^5 + dx^4y^4 + exy^7 + fx^4y^5 + gy^9 = 0.$$

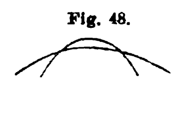
Die Terme dieser Gleichung sind in beistehender Figur markirt. Wir haben zunächst den Punkt 0, 9 mit 2, 5 zu verbinden; diese Linie geht auch durch 1, 7. Daher stellt uns nach Absonderung des Factors y^5 die Gleichung:

*) Vgl. auch die in den Anmerkungen auf p. 325 und p. 326 behandelten Beispiele.

(16) $$K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = 0$$

eine Curve 4ter Ordnung dar, welche 2 Zweige von (14) in der Nähe des Anfangspunktes ersetzt. In letzterem hat sie einen sogenannten *Selbstberührungspunkt*. Sie wird in ihm von der X-Axe in 2, von der Y-Axe in 4 zusammenfallenden Punkten getroffen, ein Punkt, wie er durch das Zusammenrücken von 2 Doppelpunkten (Fig. 48) entsteht. Noch genauer erhalten wir den Verlauf der beiden Zweige, wenn wir nach dem oben angegebenen Verfahren $x = x'^2$, $y = y'$ in (16) setzen, oder $x = x'$, $y^2 = y'$, und die quadratische Gleichung auflösen. Dadurch zerfällt dann K_1 in zwei Factoren

Fig. 48.



$$x' - m_1 y', \quad x' - m_2 y';$$

und wir können daher $K_1 = 0$ ersetzen durch zwei Gleichungen vom Typus der Parabel (6):

$$x - m_1 y^2 = 0, \quad x - m_2 y^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass m_1 und m_2 von einander verschieden sind.

Unserer Regel zufolge haben wir nun weiter den Punkt 2, 5 mit dem Punkte 5, 1 durch eine Gerade zu verbinden. Diese Linie enthält keinen markirten Punkt weiter. Wir haben daher nach Absonderung des Factors $x^2 y$ die Curve:

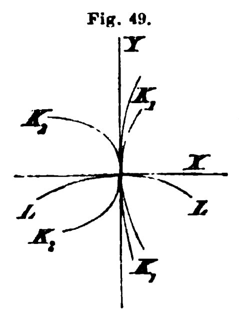
(17) $$K_2 = x^3 + by^4 = 0.$$

Für die hierdurch annähernd dargestellten Zweige der Curve (14) wird also x^3 mit y^4 vergleichbar. Die Curve hat im Anfangspunkte einen dreifachen Punkt mit 3 in $x = 0$ zusammenfallenden Tangenten; die drei Zweige legen sich nach Art einer Parabel einfach an die Y-Axe an. Es wird

$$x = \sqrt[3]{-by^4};$$

also sind zwei der Zweige imaginär und einer reell.

Fig. 49.



Damit sind alle Zweige der vorgelegten Curve, welche die Y-Axe berühren, völlig bestimmt. Setzen wir unser Verfahren noch weiter fort, so erhalten wir eine Näherungsgleichung für den die X-Axe berührenden Zweig des sechsfachen Punktes. Wir müssen dann zu (15) aus (14) den Term ax^7 hinzunehmen und noch die Linie 5, 1 — 7, 0 ziehen. Diese enthält keinen markirten Punkt mehr, und der gesuchte Zweig ist daher nach Absonderung eines Factors x^5:

$$L = y + ax^2 = 0,$$

also vom Typus der Parabel. Die verschiedenen reellen Zweige des sechsfachen Punktes verlaufen demnach, wie es Fig. 49 zeigt.*)

Es kann jedoch insbesondere eintreten, dass der Ausdruck K_1 in unserm Beispiele ein vollständiges Quadrat wird. Alsdann reicht dies erste Näherungsverfahren nicht aus, um die beiden Zweige der Curve zu trennen: dieselben haben eine höhere Berührung mit einander. Allgemein kann es vorkommen, dass aus einer der Gleichungen $K = 0$ ((12) und (13)) durch Einführung der Variabeln x', y' eine Gleichung

$$\varphi(x', y') = 0$$

entsteht, welche einen vielfachen linearen Factor (oder mehrere solche)

$$x' - my'$$

enthält. Um die entsprechenden Zweige der Curve zu trennen, führen wir wieder x, y ein, und haben dann annähernd

$$x^\alpha - m^\beta y^\beta = 0.$$

Setzen wir ferner

$$y = \eta^\alpha,$$

so wird also

$$x = m^{\frac{\beta}{\alpha}} \eta^\beta + \xi, \tag{18}$$

wo ξ eine Grösse ist, welche von höherer Ordnung unendlich klein wird, als η^β. Diese Substitution haben wir in $f(x, y)$ zu machen, um ξ in Function von η annähernd zu bestimmen. Und zwar hat man bei dieser annähernden Berechnung von η wieder die Glieder höherer Ordnung nach der Cramer'schen Regel auszuscheiden. Sollten in den verschiedenen dadurch entstehenden Klassen wieder Gleichungen vorkommen, welche einen vielfachen linearen Factor $\xi^{\alpha'} - m'^{\beta'} \eta^{\beta'}$ enthalten, so hat man diesen Factor wieder in derselben Weise zu behandeln. Schliesslich wird man so immer durch Einsetzen der Werthe ξ, η in (18) *für x eine Entwicklung nach steigenden, gebrochenen Potenzen von y* erhalten, welche das Verhalten der verschiedenen Zweige charakterisirt. Wir erläutern dies zunächst wieder an einem Beispiele. Setzen wir voraus, dass bei obiger Curve $f(x, y) = 0$ der Ausdruck K_1 (16) ein vollständiges Quadrat werde, dass wir also haben:

$$K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = (ux + vy^2)^2.$$

Nach der eben angegebenen Regel müssen wir dann setzen ($\alpha = 1$, $\beta = 2$):

$$x = -\frac{v}{u}\eta^2 + \xi, \quad y = \eta;$$

und dadurch wird, wenn wir alle höheren Terme vernachlässigen:

*) In Fig. 49 ist vorausgesetzt, dass a, b, m_1, m_2 positive Grössen sind.

$$f(x, y) = -\frac{v^5}{u^5}\eta^{11} + \dots + a\left(-\frac{v^7}{u^7}\eta^{14} + \dots\right) + c\left(\frac{v^8}{u^8}\eta^{16} + \dots\right)$$
$$+ d\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{12} + \dots\right) + f\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{13} + \dots\right) + h\,\eta^{10}$$
$$+ \eta^5\left(-v\eta^2 + u\xi + v\eta^2\right)^2.$$

Wenn wir den Factor η^5 fortlassen und anders ordnen, so haben wir also die Gleichung:

$$(19)\quad u^2\xi^2 + h\eta^5 - \frac{v^5}{u^5}\eta^6 + d\frac{v^4}{u^4}\eta^7 + f\frac{v^4}{u^4}\eta^8 - a\frac{v^7}{u^7}\eta^9 + c\frac{v^8}{u^8}\eta^{11} = 0.$$

Wenden wir hierauf unsere schematische Regel an, so haben wir nur die eine Verbindungslinie der Punkte 2, 0 und 0, 5 zu berücksichtigen, und daher nur die eine Klasse

$$K' = u^2\xi^2 + h\eta^5 = 0,$$

woraus sich für ξ die beiden Werthe

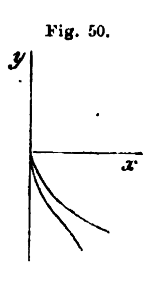
$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{h}{u^2}\eta^5}$$

ergeben; und damit ist die Trennung der beiden parabolischen Zweige der Klasse K_1 vollendet. Für einen Punkt derselben in der Nähe des Anfangspunktes erhalten wir die Entwicklung:

$$(20)\qquad x = -\frac{v}{u}y^2 \pm \frac{1}{u}\sqrt{-hy^5}.$$

In Betreff der Gestalt der so getrennten Zweige gilt das Folgende. Nehmen wir an, es sei h eine positive Grösse, so wird $\sqrt{-hy^5}$ nur reell für negative Werthe von y. Wir erhalten also auch für x, wenn u, v ebenfalls reell sind, nur für negative Werthe von y reelle Werthe; d. h. die beiden sich im Anfangspunkte berührenden Zweige der Klasse K_1 legen sich an die negative Seite der Y-Axe, ohne die X-Axe zu überschreiten. Und zwar geschieht dies nach dem Typus des Rückkehrpunktes, wenn der eine Werth von x positiv, der andere negativ wird. Ist aber das Grössenverhältniss von v und h derartig, dass *beide* Werthe von x dasselbe Zeichen haben, so liegen beide Curvenzweige auf derselben Seite der Y-Axe: *Sie bilden eine „Spitze zweiter Art“* (Fig. 50), wie man eine solche Singularität gegenüber dem Rückkehrpunkte, der Spitze erster Art, bezeichnet.

Fig. 50.



Setzen wir dagegen voraus, dass in $f(x, y)$ das Glied mit y^{10} fehle ($h = 0$), dass also eine Curve 9. Ordnung zur Untersuchung vorliegt, so gibt die Anwendung der Cramer'schen Regel auf (19) die eine Klasse:

$$K' = u^2\xi^2 - \frac{v^5}{u^5}\eta^6 = 0,$$

also

$$\xi = \pm \frac{\eta^3}{u}\sqrt{\frac{v^5}{u^5}},$$

und somit:

$$x = -\frac{y^2}{u}\left(v \mp \eta\sqrt{\frac{v^5}{u^5}}\right). \tag{21}$$

In diesem Falle verlaufen daher beide Zweige symmetrisch zur X-Axe, nach dem Typus der Parabel.

Im Allgemeinen wird ganz ebenso, nachdem die Trennung sämmtlicher Curvenzweige durchgeführt ist, schliesslich *für x eine Reihenentwicklung nach steigenden gebrochenen Potenzen von y* erhalten von der Form:

$$x = cy^{\frac{\alpha}{\beta}} + c_1 y^{\frac{\alpha'}{\beta\beta'}} + c_2 y^{\frac{\alpha''}{\beta\beta'\beta''}} + \dots \tag{22}$$

Ein jedes Glied der Entwicklung hat so viele verschiedene Werthe, als der Nenner des Exponenten angibt; den zugehörigen verschiedenen Werthen von x entsprechen dann ebenso viele getrennte Zweige der Curve $f = 0$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass der Exponent eines Gliedes eine ganze Zahl wird, denn in diesem Falle ist der Coëfficient desselben noch immer irrational und gibt also eine Reihe verschiedener Werthe, wie z. B. in Gleichung (21). Zur Charakterisirung der Gestalt eines Zweiges in der Nähe des Anfangspunktes wird im Allgemeinen das erste Glied der Entwicklung schon einen Massstab geben; und zwar wird die Gestalt in erster Annäherung davon abhängen, ob die Zahlen α, β in Bezug auf Gerade oder Ungerade sich beide gleich oder ungleich verhalten. *Wir haben darnach, indem wir unsere früheren Benennungen verallgemeinern, die folgenden 3 Haupttypen:*

(I) $x^{2h+1} = y^{2k}$ *Typus der Parabel* (Fig. 43),

(II) $x^{2h+1} = y^{2k+1}$ *Typus des Wendepunktes* (Fig. 44),

(III) $x^{2h} = y^{2k+1}$ *Typus des Rückkehrpunktes* (Fig. 45).

Insofern man besonders auf das Reelle achtet, könnte man endlich noch *einen vierten Typus, den der Spitze zweiter Art*, hinzufügen, für welchen uns Gleichung (20) ein Beispiel gab. Derselbe würde allgemein dadurch charakterisirt sein, dass in der Reihenentwicklung für x einmal eine gerade Wurzel aus einer ungeraden Potenz zu ziehen ist, und dass in Folge besonderer Werthe der eingehenden Constanten das Vorzeichen dieser Wurzel ohne Einfluss auf das Vorzeichen von x bleibt. In diesem Falle werden die betreffenden Zweige an einer Seite der X-Axe in der besprochenen Weise imaginär. Es ist jedoch hervorzuheben, dass die von uns entwickelte Methode letzteren Fall

nur wegen des Verhaltens im Reellen (p. 336) vor anderen Fällen auszeichnet, die algebraisch durch ganz analoge Reihenentwicklungen gekennzeichnet sind. — Um auch die imaginären Vorkommnisse geometrisch anschaulich darzustellen, muss man sich, wie es in der Functionentheorie geschieht, der sogenannten Riemann'schen Fläche bedienen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Es sei besonders als ein Ergebniss der hier durchgeführten Untersuchung hervorgehoben, dass ein reeller Zweig einer algebraischen Curve an keiner Stelle aufhören kann, oder was dasselbe ist:

Von jedem Punkte einer algebraischen Curve aus gibt es auf der Curve eine gerade Anzahl von verschiedenen Fortschreitungsrichtungen: von denselben können nur mehrere einander unendlich nahe liegen (wie beim Rückkehrpunkte). —

Wir wollen die im Vorstehenden benutzte Methode zur Behandlung eines singulären Punktes, nach welcher wir den Punkt in den Anfangspunkt verlegen und nach Potenzen von x, y entwickeln, noch zur Ableitung eines vielfach angewandten, von Nöther*) streng bewiesenen, wichtigen Satzes benutzen.

Wir haben schon wiederholt von dem Satze Gebrauch gemacht, dass sich die Gleichung einer Curve $f = 0$, die durch die Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchgeht, in die Form:

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

bringen lässt, wo $A = 0$, $B = 0$ ebenfalls Gleichungen von Curven sind. Dies ist aber nur unbeschränkt gültig, so lange in den Schnittpunkten von φ und ψ keine dieser Curven vielfache Punkte besitzt. Andernfalls sind gewisse Bedingungen zu erfüllen, wenn obige Darstellung von f möglich sein soll; und diese Bedingungen wollen wir im Folgenden aufstellen. Wir untersuchen zu dem Zwecke das Verhalten einer Curve

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

in der Nähe eines Schnittpunktes P der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, in dem die erstere einen q-fachen, die andere einen r-fachen Punkt haben möge, in dem also rq Schnittpunkte beider Curven vereinigt liegen; und zwar sei $r \geq q$ vorausgesetzt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die verschiedenen Zweige der Curve φ, bez. ψ sich nicht unter einander berühren. Nehmen wir den Punkt P zum Anfangspunkte, so müssen jedenfalls alle Glieder 0ter, 1ter, 2ter, ..., $(q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von f verschwinden, also jedenfalls f einen q-fachen Punkt haben. Dies gibt zunächst das Verschwinden von

---

*) Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen: Göttinger Nachrichten, 1872, p. 490, oder Math. Annalen, Bd. 6, p. 352.

$$1 + 2 + 3 \ldots + q = \frac{q(q+1)}{2}$$

Constanten, was uns beiläufig zu dem Satze führt:

Soll ein bestimmter Punkt q-facher Punkt einer algebraischen Curve sein, so ist diese Forderung $\frac{q(q+1)}{2}$ linearen Bedingungen äquivalent, d. h. man kann für eine Curve n^{ter} Ordnung dann nur noch $\frac{n(n+3)-q(q+1)}{2}$ weitere Punkte willkürlich wählen.

In unserem Falle treten jedoch für $r > q$ noch weitere Bedingungen hinzu. Es verschwinden die Glieder q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}}, \ldots, (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von ψ. Die $(q+i+1)$ Coëfficienten der Terme $(q+i)^{\text{ter}}$ Ordnung in f $(i = 0, 1, \ldots, r-q-1)$ sind daher nur abhängig von den Coëfficienten der Terme gleicher Dimension in dem Producte $A\varphi$. Letztere entstehen durch Multiplication

der Glieder	q^{ter}	Ord. von φ	mit den Gliedern	i^{ter}	Ord. von A,
„ „	$(q+1)^{\text{ter}}$	„ „ φ	„ „ „	$(i-1)^{\text{ter}}$	„ „ A,
. .	. .	. . .	. . .	. .	. . .
„ „	$(q+i)^{\text{ter}}$	„ „ φ	„ „ „	0ter	„ „ A.

Es müssen sich also die $(q+i+1)$ Coëfficienten von f linear durch

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (i+1) = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

willkürliche Grössen (Coëfficienten von A) ausdrücken lassen. Im Ganzen enthalten nun die Termen q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}} \ldots (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von f

$$(q+1) + (q+2) + \ldots + r = \frac{(q+r+1)(r-q)}{2}$$

Coëfficienten, und diese sind demnach lineare homogene Functionen der

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (r-q) = \frac{(r-q+1)(r-q)}{2}$$

willkürlichen Coëfficienten der Glieder 0ter, $1^{\text{ter}}, \ldots, (r-q-1)^{\text{ter}}$ Dimension von A; d. h. es sind nur ebensoviele Coëfficienten von f willkürlich zu wählen; oder, was dasselbe ist, es müssen zwischen den Coëfficienten der Glieder q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}} \ldots (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von f noch

$$(23) \qquad \frac{(r-q)(r+q+1)}{2} - \frac{(r-q)(r-q+1)}{2} = (r-q)\,q$$

lineare homogene Gleichungen bestehen.

Aber auch eine Reihe von Gliedern höherer Ordnung in f wird noch durch die vielfachen Punkte von φ und ψ beeinflusst. Allgemein entstehen die Coëfficienten der Terme k^{ter} Ordnung von f durch Multiplication

von Gliedern		q^{ter}	Ord.	von	φ	in Glieder	$(k-q)^{\text{ter}}$	Ord.	von	A,
„	„	$(q+1)^{\text{ter}}$	„	„	φ	„ „	$(k-q-1)^{\text{ter}}$	„	„	A,
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
„	„	k^{ter}	„	„	φ	„ „	0ter	„	„	A,
„	„	r^{ter}	„	„	ψ	„ „	$(k-r)^{\text{ter}}$	„	„	B,
„	„	$(r+1)^{\text{ter}}$	„	„	ψ	„ „	$(k-r-1)^{\text{ter}}$	„	„	B,
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
„	„	k^{ter}	„	„	ψ	„ „	0ter	„	„	B.

Wir können hieraus die Zahl der willkürlichen Coëfficienten von A, B bestimmen, welche in den Gliedern der Function $A\varphi + B\psi$ bis inclusive zur k^{ten} Dimension vorkommen. Es sind dies

$$1+2+\ldots+(k-q+1)=\tfrac{1}{2}(k-q+2)(k-q+1) \text{ Coëff. von } A$$

und $$1+2+\ldots+(k-r+1)=\tfrac{1}{2}(k-r+2)(k-r+1) \quad „ \quad „ \quad B.$$

Im Ganzen enthält also $A\varphi + B\psi$ in den Termen bis zur k^{ten} Dimension inclusive

$$Q = \tfrac{1}{2}\left\{(k-q+2)(k-q+1) + (k-r+2)(k-r+1)\right\}$$

Parameter, während die Zahl der Parameter in den Termen gleicher Dimension von f, d. h. von der q^{ten} Dimension bis zur k^{ten}, ist

$$P = \tfrac{1}{2}(k+q+2)(k-q+1).$$

Vermehren wir nun k um 1, so wächst Q um

$$k-q+2+k-r+2$$

und zu P treten die $k+2$ Coëfficienten der binären Form $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung hinzu, d. h. P wächst um

$$k+2.$$

Sollen aber von der k'^{ten} Dimension ab alle Terme von f vollkommen willkürlich gewählt werden können, so muss der Zuwachs von Q bei wachsendem k mindestens eben so gross sein, als der von P; wir haben also die Bedingung:

$$k+2 \leqq k-q+2+k-r+2$$

oder $$k \geqq q+r-2.$$

Sobald k dieser Bedingung genügt, sind die Coëfficienten $(k+1)^{\text{ter}}$ Dimension in f von einander unabhängig; wir haben also

$$k' = k + 1 = q + r - 2$$

für k in P und Q einzusetzen. Alsdann müssen die P Coëfficienten von f, wo nun

$$P = \tfrac{1}{2}(r+2q)(r-1)$$

lineare Functionen der Q Coëfficienten von $A\varphi + B\psi$ sein, wo

$$Q = \tfrac{1}{2}\left\{r(r + 1) + q(q + 1)\right\},$$

d. h. zwischen den Coëfficienten von f müssen

$$P - Q = rq - \tfrac{1}{2}q(q+1)$$

lineare Gleichungen bestehen, unter denen dann die in (23) angegebenen $q(r-q)$ Gleichungen enthalten sind. Da nun ausserdem $\frac{1}{2}q(q+1)$ Bedingungen durch den q-fachen Punkt von f in P gefordert sind, so haben wir folgenden Satz bewiesen:

Wenn zwei Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in einem ihrer Schnittpunkte P bez. einen q-fachen und r-fachen Punkt haben $(r > q)$, und wenn eine andere durch die Schnittpunkte von φ und ψ gehende Curve in der Form

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

darstellbar sein soll, so muss diese Curve in P einen q-fachen Punkt haben, und, wenn letzterer Anfangspunkt ist, müssen ausserdem die Coëfficienten der Glieder von f bis exclusive zur $(r+q-1)^{\text{ten}}$ Dimension $rq - \frac{1}{2}q(q+1)$ linearen homogenen Bedingungsgleichungen genügen.

Ein Theil dieser Bedingungen ist jedenfalls identisch erfüllt, wenn f einen m-fachen Punkt $(m > q)$, gleichzeitig A einen $(m-q)$-fachen und für $m > r$ auch B einen $(m-r)$-fachen Punkt in P hat; d. h. wenn die betreffenden Glieder niederster Dimension in A und B selbst fehlen; für die Terme m^{ter} bis $(r+q-2)^{\text{ter}}$ Dimension bleiben dagegen die übrigen Relationen bestehen. Man kann dieselben auffassen als Bedingungen für die Lage der verschiedenen durch P gehenden Zweige von f zu denen von φ und ψ. Ist also $m = r + q - 1$, so bestehen für die Gruppirung dieser Zweige keine Bedingungen weiter Es ergibt sich dann der wegen späterer Anwendungen wichtige Satz:

Eine Curve $f = 0$, welche in einem Punkte P einen $(r+q-1)$-fachen Punkt hat, und welche durch die Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ geht, wo φ einen q-fachen, ψ einen r-fachen Punkt in P hat, kann immer *in der Form*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

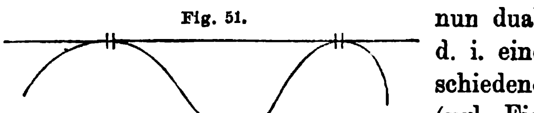
dargestellt werden, wo $A = 0$ in P einen $(r-1)$-fachen, $B = 0$ daselbst einen $(q-1)$-fachen Punkt hat.

III. Dualistisches. — Die Plücker'schen Formeln.

Neben den singulären Punkten müssen wir, entsprechend dem Dualitätsprincipe, auch singuläre Tangenten berücksichtigen. Nach dem genannten Principe nämlich müssen wir uns jede Curve auf zwei verschiedene Arten entstanden denken: durch einen sich bewegenden

Punkt beschrieben und durch eine sich bewegende Gerade umhüllt.*) Der beschreibende Punkt bestimmt in jedem Intervalle eine Richtung, und diese einem unendlich kleinen Fortrücken entsprechende Richtung ist die Tangente der beschriebenen Curve in dem Punkte. Ebenso bestimmt die umhüllende Gerade durch jede unendlich kleine Lagenänderung einen Punkt, denn eine solche kann immer als Drehung um einen bestimmten Punkt aufgefasst werden; und dies ist der Berührungspunkt der betrachteten Geraden. Wir erhalten also dieselbe Curve, wenn wir die Drehung der Geraden immer als eine Function des Fortschreitens eines ihrer Punkte ansehen. In dieser gegenseitigen Abhängigkeit beider Bewegungen können aber Besonderheiten vorkommen, und diese sind es, welche zu den *singulären* Punkten und Tangenten Veranlassung geben. Es tritt dies ein entweder, wenn das beschreibende oder umhüllende Element ein und dieselbe Lage zweimal erreicht, oder wenn das eine der beiden Elemente den Sinn seiner Bewegung ändert, während das andere continuirlich weitergeht. Für den ersten Fall haben wir im *Doppelpunkte* ein bekanntes Beispiel, für den zweiten im *Wendepunkte.***) Dem Doppelpunkte entspricht nun dualistisch die *Doppeltangente*, d. i. eine Tangente mit zwei verschiedenen Berührungspunkten (vgl. Fig. 51); und entsprechend den verschiedenen Arten *vielfacher Punkte* unterscheidet man ebenso viele verschiedene Arten *vielfacher Tangenten.* Es ist aber wohl zu beachten, dass eine Doppeltangente nicht als Singularität aufgefasst werden darf, insofern man sich die Curve nur als Ort von Punkten denkt, und ebensowenig darf ein Doppelpunkt als Singularität gelten, wenn man die Curve als Liniengebilde betrachtet. Wenn nun bei einem Doppelelemente zunächst eine Unbestimmtheit für die Fortschreitungsrichtung, d. h. für die Wahl des benachbarten Elements, vorliegt, so tritt doch keine Discontinuität in der Bewegung des Punktes oder der Tangente ein, insofern man sich dem Doppelelemente auf einem bestimmten Zweige nähert und so die Curve in ihrer Entstehung auffasst. Anders ist dies beim Wendepunkte, indem hier die Singularität in der Beziehung zwischen Punkt und Tangente besteht, während es sich nur um einen einzigen Curvenzweig handelt; und dualistisch entsprechend ist es beim Rückkehrpunkte. Denn man sieht sofort an einer Zeichnung, dass hier der Punkt seine Fortschreitungsrichtung ändert, während die Tangente mit demselben Drehsinne weiter fortrückt. Wir werden Letzteres übrigens auch noch

Fig. 51.



---

*) Vgl. im Folgenden Plücker: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 200 ff.

**) Vgl. die ausführlichere Erörterung auf p. 310.

algebraisch nachweisen, und diese Entwicklung gilt dann ebenfalls für imaginäre Singularitäten.

Durch *gleichzeitige* Untersuchung dieser beiderlei Singularitäten gelingt es nun leicht den scheinbaren Widerspruch zu lösen, welchem wir früher begegneten, als es galt, von der Liniencoordinatengleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve zu dieser ursprünglichen Punktgleichung zurückzukehren. Wir werden nämlich erkennen, dass es eine Curve von höherer als der zweiten Ordnung, welche weder vielfache Punkte noch vielfache Tangenten besitzt, überall nicht gibt, *dass vielmehr jede Curve höherer Ordnung ohne vielfache Punkte eine bestimmte Zahl von Doppel- oder vielfachen Tangenten haben muss, sowie jede Curve ohne vielfache Tangenten eine bestimmte Zahl von Doppel- oder vielfachen Punkten.* Fügen wir dann die Bemerkung hinzu, dass die Zahl $n(n-1)$ für die Klasse einer Curve beim Auftreten vielfacher Punkte gewisse Reductionen erleidet, so wird klar, dass dualistisch entsprechend die Ordnung einer mit Doppeltangenten versehenen Curve aus ihrer Klasse k nicht unmittelbar durch die Zahl $k(k-1)$ zu bestimmen ist; und damit ist dann jener scheinbare Widerspruch beseitigt. Aehnliches gilt für Wendetangenten und Rückkehrpunkte.

Die letzterwähnte Bemerkung über die Abhängigkeit der Klasse von der Zahl der Doppel- und Rückkehrpunkte folgt aus den oben bewiesenen Sätzen über das Verhalten der ersten Polaren in diesen Punkten (vgl. p. 322), von denen wir zunächst nur einfache Doppel- und Rückkehrpunkte als vorhanden annehmen wollen.

Die Klasse einer Curve war bestimmt durch die Zahl der Schnittpunkte der ersten Polare eines beliebigen Punktes mit ihr. In einen Doppelpunkt fallen aber für jeden Pol zwei, in einen Rückkehrpunkt drei dieser Schnittpunkte zusammen; und diese sind nicht mehr als *eigentliche* Berührungspunkte der vom Pole ausgehenden Tangenten zu zählen. *Jeder Doppelpunkt reducirt daher die Klasse um* 2, *jeder Rückkehrpunkt um* 3 *Einheiten, d. h. es ist:*

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \tag{1}$$

wenn d die Zahl der Doppel-, r die der Rückkehrpunkte der vorliegenden Curve angibt. So weit es sich um reelle Punkte handelt, kann man die Nothwendigkeit dieser Reductionen auch in folgender Weise einsehen. Man betrachte eine Curve, die zwar keinen Doppelpunkt besitzt, von der zwei Zweige aber nahe an einander vorbeigehen, so dass aus ihr mittelst einer kleinen Deformation eine Curve mit Doppelpunkt entsteht. Es ist dann klar, wie die beiden von einem Punkte y an diese Zweige gelegten Tangenten (u und v in Fig. 52), in die Verbindungslinie von y mit dem

Fig. 52.

Doppelpunkte zusammenfallen, sobald besagte Deformation ausgeführt wird, so dass diese Verbindungslinie als uneigentliche Tangente in der That zweifach zählt. Dass dann letztere beim Rückkehrpunkt dreifach zu rechnen ist, erkennt man unmittelbar aus unseren früheren Betrachtungen über die Entstehung des Rückkehrpunktes aus einem Doppelpunkte mit Schleife (p. 323).

Die Gleichung (1) ist die erste einer Reihe von Relationen, denen die für die Curve charakteristischen Zahlen genügen, und welche nach ihrem Entdecker*) die Plücker'*schen Formeln* genannt werden.

Eine zweite Gleichung der Art bestimmt die Zahl der Wendepunkte in ihrer Abhängigkeit von d und r. Dieselbe ist bekanntlich gleich der Zahl der Schnittpunkte der Grundcurve mit ihrer Hesse'schen. Wir wissen aber (vgl. p. 325), dass in einem Doppelpunkte der Grundcurve 6, in einem Rückkehrpunkte 8 dieser Schnittpunkte vereinigt liegen. *Jeder Doppelpunkt einer Curve reducirt daher die Zahl w ihrer Wendepunkte um 6, jeder Rückkehrpunkt um 8 Einheiten, d. h. es ist:***)

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r \tag{2}$$

Es ist jedoch sehr wohl möglich, dass die Curve in einem Doppelpunkte ausserdem noch Wendepunkte hat, wie dies z. B. bei der bekannten Figur der Lemniscate eintritt. Solche Vorkommnisse geben zwar zu weiteren Schnittpunkten der Hesse'schen mit der Grundcurve im Doppelpunkte, aber nicht zu weiteren Reductionen Veranlassung.

Aus den Formeln (1) und (2) ergeben sich andere durch das Princip der Dualität. Nach demselben entsprechen sich wechselseitig Ordnung und Klasse; ferner Doppelpunkt und Doppeltangente; wir haben also n durch k, d durch t zu ersetzen, wenn t die Zahl der Doppeltangenten bedeutet. Einer Wendetangente, d. h. einer die Curve in drei successiven Punkten treffenden Geraden entspricht dualistisch ein Punkt, in welchem sich drei successive Tangenten schneiden; und zwar ist dies ein Rückkehrpunkt; d. h. die Zahlen w und r entsprechen sich in obigen Formeln dualistisch. Zum Beweise vergleichen wir das Verhalten der Tangenten in der Nähe einer Wendetangente mit dem der Punkte in der Nähe eines Rückkehrpunktes. Beginnen wir mit dem

---

*) Plücker: Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes. Crelle's Journal, Bd. 12, 1834; vgl. ferner dessen System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 289 und: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 207 ff.

**) Aus Fig. 52 erkennt man leicht, dass ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten immer *zwei* reelle Wendepunkte absorbirt; dieselben sind in der Figur bezeichnet. Ebenso werden nach Fig. 53 durch eine Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten *zwei* reelle Spitzen absorbirt.

letzteren und verlegen denselben in den Anfangspunkt, so ist die Gleichung der Curve von der Form (p. 322):

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente eines dem Anfangspunkte unendlich benachbarten Punktes x, y, z sind daher unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung der Kleinheit:

$$\varrho u = \frac{\partial f}{\partial x} = 2\, x z^{n-2}$$

$$\varrho v = \frac{\partial f}{\partial y} = 3\, y^2 z^{n-3}$$

$$\varrho w = \frac{\partial f}{\partial z} = (n-2)\, x^2 z^{n-3} + (n-3)\, y^3 z^{n-4}.$$

Mit Hülfe der Gleichung $x^2 z + y^3 = 0$ folgt hieraus die Bedingung:

$$4\, v^3 - 27\, u^2 w = 0,$$

der die Tangenten der Curve in der Nähe des Rückkehrpunktes genügen: eine Curve dritter Klasse, welche die Aufeinanderfolge der Tangenten in der Nähe dieses Punktes darstellt. Sehen wir von dem Zahlenfactor $\frac{4}{27}$ ab, so *ist also die Curve in der Nähe des Rückkehrpunktes,*

aufgefasst als Punktgebilde von dem Typus: $x^2 z + y^3 = 0,$
„ „ *Liniengebilde* „ „ „ : $u^2 w + v^3 = 0,$

wo nun $x = 0$, $y = 0$ die Coordinaten des Rückkehrpunktes, $v = 0$, $w = 0$ die seiner Tangente sind. Die letztere Gleichung ist aber das dualistische Gegenstück der für den Wendepunkt charakteristischen Form (vgl. p. 328):

$$x z^2 + y^3 = 0.$$

Denn wir haben w durch x, u durch z zu ersetzen, weil die Coordinaten der Rückkehrtangente in der ersten Gleichung $v = 0$, $w = 0$, in der zweiten die des Wendepunktes $x = 0$, $y = 0$ sind. Zu demselben Resultate gelangt man natürlich, vom Wendepunkte ausgehend. Es ist dann die Gleichung der Curve in der Nähe des Wendepunktes:

$$x z^2 + y^3 = 0;$$

und also sind die Coordinaten der Wendetangente:

$$\varrho u = z^2, \quad \varrho v = 3\, y^2, \quad \varrho w = 2\, x z.$$

Dieselben genügen der Bedingung:

$$4\, v^3 - 27\, u w^2;$$

und ersetzen wir wieder u durch z, w durch x, so haben wir den Typus des Rückkehrpunktes: *Die Gleichung der Curve in der Nähe des Wendepunktes ist daher,*

aufgefasst als Punktgebilde, von dem Typus $xz^2 + y^3 = 0$,
„ „ *Liniengebilde*, „ „ „ $uw^2 + v^3 = 0$.

In Bezug auf das Unendlichkleine verhält sich daher der Rückkehrpunkt ($w = 0$), *wie die Wendetangente* ($x = 0$), *und der Wendepunkt wie die Rückkehrtangente.*

Wir fassen diese Resultate in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammen, in welcher zwei neben einander stehende Singularitäten sich dualistisch entsprechen:

Punktcoordinaten.	*Liniencoordinaten.*
Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten.	Doppeltangente mit zwei reellen Berührungspunkten.
Rückkehrpunkt.	Wendetangente.
Doppelpunkt mit zwei imaginären Tangenten (isolirter Punkt).	Doppeltangente mit zwei imaginären Berührungspunkten (isolirte Tangente).
Wendepunkt.	Rückkehrtangente.

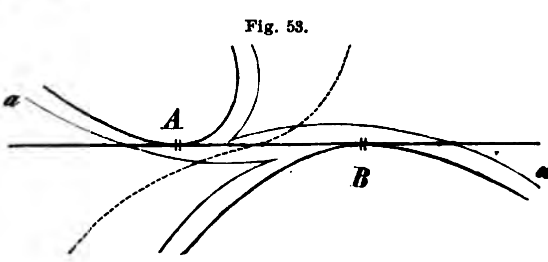
Zufolge dieser Ueberlegung gibt nun die dualistische Uebertragung der Gleichungen (1) und (2) die folgenden beiden Relationen:

$$n = k(k-1) - 2t - 3w \tag{3}$$

$$r = 3k(k-2) - 6t - 8w. \tag{4}$$

Den Inhalt der Gleichung (3) kann man sich, wie bei Gleichung (1), auch direct geometrisch veranschaulichen, wenigstens soweit es auf das Reelle ankommt; und zwar geschieht dies, indem man von einer Curve ausgeht, die nur noch ein Wenig deformirt zu werden braucht, um eine Doppeltangente zu erhalten. Es laufen dann zwei Zweige der Curve eine Strecke AB dicht neben einander her, wie in Fig. 53, um dann bei Ausführung der Deformation in die Doppeltangente zusammenzufallen. Die beiden Schnittpunkte einer beliebigen Geraden (u) mit erwähnten Curvenzweigen werden dabei auf die Doppeltangente verlegt, und sind somit als uneigentliche Schnittpunkte von der Zahl $k(k-1)$ abzuziehen. In der That ist ja ein Schnittpunkt von u mit der Curve dadurch definirt, dass von ihm aus zwei zusammenfallende Tangenten an die Curve gehen; Letzteres ist aber für jeden Punkt einer Doppeltangente der Fall. Lässt man ferner bei der Curve mit Doppeltangente in Fig. 53 die beiden Berührungspunkte derselben allmählich

Fig. 53.



zusammenrücken, so erkennt man, dass noch ein dritter Schnittpunkt von u in die Doppeltangente fällt, während diese selbst zur Wendetangente wird. (Man kann dabei etwa die mit a bezeichneten Zweige ganz in die Doppeltangente fallen lassen, so dass die in Fig. 53 punktirte Curve entsteht.)

Die 4 Plücker'schen Formeln (1), (2), (3), (4) zeigen, dass wirklich jede Curve gewisse der behandelten Singularitäten besitzt, wie es oben behauptet wurde. Ferner gibt uns die Gleichung (3) die Ordnung der Curve in Function ihrer Klasse; die verlangte Reduction ist also durch das Auftreten von Doppeltangenten und Wendetangenten bei jeder allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung bedingt und geleistet. Wende- und Rückkehrpunkte können nur gleichzeitig fortfallen für

$$k = n, \quad d = t = \frac{n(n-2)}{2},$$

also für eine sehr specielle Art von Curven gerader Ordnung; Doppel-Punkte und -Tangenten nur für

$$k = n, \quad r = w = \frac{k(k-2)}{3},$$

also, abgesehen von Curven zweiter Ordnung bei einer besondern Art von Curven der Ordnung $3h$ oder $3h + 2$. Beides zugleich dagegen kann für $n > 2$ nicht eintreten.

Die vier Gleichungen, welche zwischen *den drei Paaren regelmässiger Singularitäten*, d. i. den Zahlen nk, dt, rw bestehen, sind jedoch nicht von einander unabhängig. Vielmehr ist eine die Folge der drei übrigen; denn aus (1) und (2) folgt ebenso, wie aus (3) und (4) die dualistisch nicht mehr zu verändernde Gleichung:

$$(5) \qquad 3(k - n) = w - r.$$

Durch drei der sechs Singularitäten sind daher die drei übrigen völlig bestimmt. Ist z. B. eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte gegeben, so hat man:

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) \\ w &= 3n(n-2) \\ t &= \tfrac{1}{2} n (n-2)(n^2-9). \end{aligned}$$

Die $3n(n-2)$ Wendepunkte haben wir früher durch eine sie ausschneidende Curve von der Ordnung $3n(n-2)$ bestimmt. Ganz ähnlich können wir auch die Zahl t direct ableiten, indem wir eine Curve von der Ordnung $(n-2)(n^2-9)$ angeben, welche durch die $n(n-2)(n^2-9)$ Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. Die Möglichkeit dieser Bestimmungsweise ist keineswegs selbstverständlich; denn wir werden später sehen, dass von den Schnittpunkten zweier Curven immer eine gewisse Anzahl durch die übrigen

bestimmt wird, so dass es nicht möglich ist, ein jedes Punktsystem auf einer algebraischen Curve ohne Auftreten weiterer Schnittpunkte mittelst einer andern Curve auszuschneiden.*)

Sei y der Berührungspunkt einer Tangente und x ein beliebiger Punkt derselben, so ist:

$$a_y^n = 0 \quad \text{und} \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

Aus der Gleichung n^{ten} Grades

$$(\mu a_y + \lambda a_x)^n = 0,$$

welche die übrigen $n - 2$ Schnittpunkte der Tangente bestimmt, sondert sich dann ein Factor λ^2 ab. Die übrig bleibende Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades muss eine Doppelwurzel haben, wenn die Linie $\overline{xy}$ Doppeltangente sein soll. Den Punkt x können wir nun insbesondere als Schnittpunkt der Tangente von y mit einer willkürlichen Geraden u_1, u_2, u_3 definiren, so dass wir die x durch die Unterdeterminanten aus den u_i und den Grössen $a_y^{n-1} a_i = b_y^{n-1} b_i$ zu ersetzen haben. Die Forderung, dass y Berührungspunkt einer Doppeltangente sei, ist dann gegeben durch das Verschwinden der Discriminante der Gleichung:

$$[\mu a_y + \lambda (abu)\, b_y^{n-1}]^n = 0. \tag{6}$$

Wenn es gelingt, die Discriminante unabhängig von den u_i darzustellen, so gibt ihr Verschwinden eine Curve der verlangten Art. Dies ist aber in der That immer möglich, denn aus der Discriminante $F(y, u)$ lässt sich ein Factor u_y^a immer absondern. Setzen wir nämlich:

$$\lambda = \varrho v_y,$$

so folgt wegen der Identität

$$(abu)\, v_y = (avu)\, b_y + (abv)\, u_y - (bvu)\, a_y$$

und wegen $b_y^n = 0$ aus (6):

$$[(\mu - \varrho (bvu)\, b_y^{n-1})\, a_y + \varrho u_y (abv)\, b_y^{n-1}]^n = 0$$

oder

$$[\mu' a_y + \lambda' (abv)\, b_y^{n-1}]^n = 0, \tag{7}$$

wenn man setzt:

$$\mu' = \mu - \varrho (bvu)\, b_y^{n-1} = \mu - \lambda \frac{(bvu)\, b_y^{n-1}}{v_y}$$

$$\lambda' = \qquad \varrho u_y \qquad = \qquad \lambda \frac{u_y}{v_y}.$$

---

*) Man kann auch mittelst des Uebertragungsprincips immer ein System von Curven angeben, das die Doppeltangenten zu gemeinsamen Tangenten hat, sobald man die Bedingung für das Auftreten zweier Doppelwurzeln in einer binären Form n^{ter} Ordnung hat. Vgl. die Anmerk. auf p. 280.

Die letzteren Gleichungen geben eine lineare Substitution für die binäre Veränderliche $\frac{\lambda}{\mu}$ mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{(vbu)\, b_y^{n-1}}{v_y} \\ 0 & \frac{u_y}{v_y} \end{vmatrix} = \frac{u_y}{v_y}.$$

Bei der linearen Substitution kann sich die fragliche Discriminante nur um eine Potenz dieser Determinante ändern; ferner ist der Ausdruck (7) von derselben Form, wie (6): es sind nur die u durch die v ersetzt. Wir haben daher

$$F(y, u) = \left(\frac{u_y}{v_y}\right)^{\alpha} . F(y, v)$$

oder

$$\frac{F(y, u)}{u_y^{\alpha}} = \frac{F(y, v)}{v_y^{\alpha}},$$

d. h. *die Discriminante ist von den willkürlichen Grössen u_i völlig unabhängig.* Sondert man daher den Factor u_y so oft ab, dass der Rest die u_i nicht mehr enthält, so wird letzterer eine Curve darstellen, deren Ordnung zu bestimmen ist. Dies geschieht mittelst der Regel:

Wenn in einer Gleichung

$$a_0 \mu^m + m a_1 \mu^{m-1} \lambda + \ldots + m\, a_{m-1} \mu \lambda^{m-1} + a_m \lambda^m = 0$$

die Coëfficienten a_i homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, und die Zahlen für den Grad dieser Functionen α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ eine arithmetische Reihe bilden: so ist die Discriminante vom Grade $(m-1)(\alpha_0 + \alpha_m)$ in x_1, x_2, x_3.

Wir beweisen dies in folgender Weise. Der Grad der Discriminante $F(a_0, a_1 \ldots a_m)$ ist derselbe in Bezug auf die x, wie der Grad, auf welchen der Ausdruck

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m})$$

in Bezug auf t ansteigt. Bilden nun die Zahlen α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ eine arithmetische Reihe mit der Differenz β, so dass

$$\alpha_i = \alpha_0 + i\beta,$$

so hat man, da F vom Grade $2(m-1)$ in den a_i ist:

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}) = t^{2(m-1)\alpha_0} F(a_0, a_1 t^{\beta}, a_2 t^{2\beta}, \ldots a_m t^{m\beta}).$$

Hier steht aber rechts die Discriminante einer Gleichung m^{ten} Grades in den Veränderlichen λ', μ', aus welcher die gegebene Gleichung in λ, μ durch die lineare Substitution:

$$\lambda' = t^{\beta} \lambda$$
$$\mu' = \mu$$

hervorgeht. Durch die Substitution ändert sich die Discriminante um die $m(m-1)^{\text{te}}$ Potenz der Substitutionsdeterminante t^β (vgl. p. 195), d. h. wir haben:

$$F(a_0,\ a_1 t^\beta,\ a_2 t^{2\beta}, \ldots, a_m t^{m\beta}) = t^{m(m-1)\beta} \,.\, F(a_0,\ a_1, \ldots a_m),$$

und daraus:

$$F\left(a_0 t^{\alpha_0},\ a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}\right) = t^{(m-1)(2\alpha_0+m\beta)} \,.\, F\left(a_0,\ a_1, \ldots a_m\right),$$

oder da $2\alpha_0 + m\beta = \alpha_0 + \alpha_m$ ist:

$$F\left(a_0 t^{\alpha_0},\ a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}\right) = t^{(m-1)(\alpha_0+\alpha_m)} \,.\, F\left(a_0,\ a_1, \ldots a_m\right).$$

Hier enthält $F(a_0, a_1 \ldots a_m)$ die Grösse t gar nicht; der links stehende Ausdruck ist daher vom Grade $(m-1)(\alpha_0+\alpha_m)$ in t; und also auch unsere Discriminante von ebenso hohem Grade in x_1, x_2, x_3 w. z. b. w.

In unserem Falle nun ist $m = n - 2$ zu setzen, und die Coëfficienten der gegebenen Gleichung sind bez.

vom Grade $(n-2), (n-3), \ldots$ 1, 0 in den y_i

„ „ 2, $3, \ldots (n-1), n$ „ „ x_i.

Ferner sind die x_i wieder vom Grade $n-1$ in den y_i und linear in den u_i; im Ganzen ist daher nach dem eben bewiesenen Satze $F(y, u)$ vom Grade

$$(n-3)(n-2) + (n-3)(n+2)(n-1) = (n-3)(n^2+2n-4)$$

in den y_i und vom Grade $(n-3)(n+2)$ in den u_i. Es muss sich daher aus $F(y, u)$ ein Factor $u_y^{(n-3)(n+2)}$ absondern lassen, so dass der Rest vom Grade

$$(n-3)(n^2+2n-4) - (n-3)(n+2) = (n-2)(n^2-9)$$

in den y ist. Die Gleichung $F(y, u) = 0$ stellt dann eine Curve dar, welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung in den Berührungspunkten der Doppeltangenten schneidet. Da nun auf jeder dieser Tangenten zwei Berührungspunkte liegen, so haben wir den zu erweisenden Satz: *Die Zahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen gleich $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$.**)

*) Eine die Berührungspunkte der Doppeltangenten ausschneidende Curve wurde zuerst von Cayley angegeben: Crelle's Journal, Bd. 34, p. 37. Für die Darstellung im Texte vgl. einen Aufsatz von Jakobi ib. Bd. 40, p. 37 und von Clebsch ib. Bd. 63, p. 186. Die wirkliche Absonderung der überflüssigen Factoren bei Curven 4. Ordnung gab Hesse, ib. Bd. 36, p. 156, Bd. 40, p. 260 und Bd. 41, p. 292. — Eine andere Methode zur Bestimmung dieser Curven rührt von Salmon her (Quaterly Journal of mathematics, vol. 3 und Higher plane curves, chap. IX); dieselbe wurde bewiesen von Cayley: Philosophical Transactions, 1859, p. 193 und 1861, p. 357. — Vgl. auch die auf den Principien der symbolischen Rechnung beruhende Darstellung von Dersch: Math. Annalen, Bd. 7, p. 497.

Die Reduction, welche diese Zahl zufolge der Plücker'schen Formeln durch das Auftreten von Doppel- und Rückkehrpunkten erleidet, können wir leicht aus unsern obigen Gleichungen bestimmen; man findet die folgende Formel:*)

$$t = \tfrac{1}{2} n (n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] + 2d(d-1) + \tfrac{9}{2} r(r-1) + 6dr. \tag{8}$$

Die Plücker'schen Formeln lassen sich in besonders einfacher Gestalt schreiben, wenn wir neben n, k, d, r, t, w noch eine siebente, sich selbst dualistisch entsprechende Singularität einführen: das *Geschlecht der Curve.***) Dasselbe (p) ist definirt durch

$$\begin{aligned} p &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w. \end{aligned} \tag{9}$$

Auf die eigentliche Bedeutung dieser Zahl werden wir erst später bei der Theorie der eindeutigen Transformationen geführt werden; wir benutzen dieselben hier nur, um *die vier Plückerschen Formeln in der folgenden einfachsten Form* darzustellen, welche sich auch dem Gedächtnisse am leichtesten einprägen dürfte:

$$\begin{aligned} 2p - 2 &= k + r - 2n \\ &= n + w - 2k \\ &= n(n-3) - 2(d+r) \\ &= k(k-3) - 2(t+w). \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Gleichungen geben nur die nothwendigen Relationen, welchen die Singularitäten einer algebraischen Curve unter allen Umständen genügen müssen. *Es ist jedoch bisher nicht bewiesen worden, dass umgekehrt jedes System ganzer Zahlen, das den* Plücker*'schen Formeln genügt, wirklich bei einer Curve auftreten kann.* Man ist im Allgemeinen nur in der Lage, gewisse obere Grenzen für d, r, t, w anzugeben, welche diese Zahlen nicht überschreiten dürfen; und zwar gilt der Satz:

Es muss immer $p \geq 0$ *sein, wenn die Curve nicht in niedrigere Curven zerfallen soll,* d. h.

---

*) Man kann sich die Bedeutung dieser einzelnen Reductionen auch direct geometrisch veranschaulichen; vgl. darüber Plücker: Theorie der algebraischen Curven, p. 210.

**) Der Begriff des Geschlechts einer algebraischen Function wurde von Riemann eingeführt: Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54, für die Curventheorie verwerthet besonders von Clebsch (zuerst ib. Bd. 63, p. 189 und Bd. 64,). Vgl. die sechste Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geqq d + r$$

und

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqq t + w.$$

Wäre nämlich $p < 0$, also etwa

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

(oder grösser), so könnte man eine (eigentliche oder zerfallende) Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch diese Doppel- und Rückkehrpunkte und durch

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = 2n - 3$$

andere Punkte der Curve n^{ter} Ordnung legen. Diese Curve würde mit der gegebenen

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) + 2n - 3 = n(n-1) + 1$$

Schnittpunkte haben, also einen mehr, als möglich ist, wenn nicht Theile der Curven zusammenfallen, und also die Curve n^{ter} Ordnung zerfallen soll; damit ist obiger Satz bewiesen. Für den Fall $p = 0$, d. h. für

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

haben wir insbesondere

$$w = 3(n-2) - 2r,$$

und somit auch eine obere Grenze für die Zahl der Rückkehrpunkte, denn w darf niemals negativ werden: *Unter den* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Doppel- und Rückkehrpunkten einer Curve vom Geschlechte Null können höchstens* $\frac{3}{2}(n-2)$ *Rückkehrpunkte vorhanden sein.*

Wenden wir nunmehr die gewonnenen Resultate auf die einfachsten Curven an, so erhalten wir für Kegelschnitte zunächst nichts Neues. Es ist hier

$$d = r = w = t = 0,$$

und

$$k = n = 2;$$

dagegen $k = 0$, für $n = 2$, $d = 1$, d. h. das Linienpaar ist von der Klasse Null, wie es sein muss (p. 309). Entsprechend hat man beim Punktepaare $k = 2$, $t = 1$, $n = 0$.

Bei Curven dritter Ordnung oder dritter Klasse ist im Allgemeinen $p = 1$, und daher im Besonderen nur *ein* Doppel- oder Rückkehrpunkt, bez. *eine* Doppel- oder Wendetangente möglich. Für die möglichen

Singularitäten bei *Curven dritter Ordnung* erhalten wir somit aus den Plücker'schen Formeln die folgende Tabelle:

$n = 3$

d	r	k	w	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

und entsprechend für *Curven dritter Klasse:*

$k = 3$

t	w	n	r	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0.

Bei *Curven vierter Ordnung* treten noch Doppeltangenten hinzu. Ferner ist im Allgemeinen $p = 3$; es können also drei Doppelpunkte vorkommen, und da $\frac{3}{2}(n - 2) = 3$ ist, auch drei Rückkehrpunkte. Wir haben demnach die folgende Tabelle:

$n = 4$

d	r	k	w	t	p
0	0	12	24	28	3
1	0	10	18	16	2
0	1	9	16	10	2
2	0	8	12	8	1
1	1	7	10	4	1
0	2	6	8	1	1
3	0	6	6	4	0
2	1	5	4	2	0
1	2	4	2	1	0
0	3	3	0	1	0.

Die vorletzte Curve dieser Tabelle entspricht sich selbst dualistisch; die letzte Curve ist identisch mit der vorletzten in der Tabelle für $k = 3$. Die letzte Curve dieser Tabelle entspricht sich ebenfalls selbst dualistisch. Wie die Erfahrung gelehrt hat, existiren die hier aufgezählten Curven dritter und vierter Ordnung auch sämmtlich.

Wir haben bisher uns auf die Berücksichtigung einzelner Doppelpunkte etc. beschränkt. Die aufgestellten Formeln haben aber allgemeine Gültigkeit, denn man kann höhere vielfache Punkte in ihrem Einflusse auf Klasse der Curve und Zahl der Wendepunkte

immer durch eine gewisse Anzahl niederer Singularitäten ersetzen. Dies ist zunächst evident bei einem r-fachen Punkte mit lauter getrennt verlaufenden Zweigen. Denn in einem solchen hat jede erste Polare einen $(r-1)$-fachen Punkt, dessen Zweige die der Grundcurve nicht berühren, und es fallen daher $r(r-1)$ der vom Pole ausgehenden Tangenten in seine Verbindungslinie mit dem r-fachen Punkte zusammen. Ebenso viel beträgt die Erniedrigung der Klasse k, d. h. wir haben $d = \frac{r(r-1)}{2}$ zu setzen: *Der r-fache Punkt ist äquivalent mit $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkten*, wie wir es früher schon in anderer Weise gezeigt haben (p. 329). Dasselbe gilt auch für die Zahl der Wendepunkte; denn man überzeugt sich leicht, dass die Hesse'sche Curve in dem r-fachen Punkte ebenfalls einen r-fachen Punkt hat und die Zweige der Grundcurve sämmtlich berührt.

In ähnlicher Weise hat man auch complicirtere Singularitäten aufzulösen; man wird zu dem Zwecke den betreffenden Punkt in einen Eckpunkt des Coordinatendreiecks legen und dann die Cramer'sche Regel auf denselben anwenden (vgl. p. 330 ff.). Es ist dabei jedoch zu beachten, dass eine Singularität durch gleichzeitiges Auftreten vielfacher Tangenten in einem vielfachen Punkte entstehen kann; und dadurch wird dann ihre Untersuchung erschwert. Cayley hat zur Behandlung solcher Fälle Regeln angegeben*), nach denen es gelingt, mittelst Reihenentwicklungen den Einfluss der Singularität auf die Klasse zu bestimmen; es fehlt jedoch bisher an einer vollständigen Darstellung dieser Verhältnisse.

Die Beweise für die Plücker'schen Formeln beruhen wesentlich auf den Sätzen über das Verhalten der Polaren und der Hesse'schen Curve in den Doppel- und Rückkehrpunkten der Grundcurve. Diese Sätze haben wir gelegentlich bewiesen und beim Beweise eine specielle Lage des Coordinatendreiecks benutzt. Die symbolischen Methoden geben jedoch ein Mittel, um diese Hülfssätze auch leicht direct ohne Verlegung des Coordinatensystems abzuleiten, so dass ihr projectivischer Charakter auch äusserlich hervortritt; und wir wollen hierauf um so lieber eingehen, als uns darin ein passendes Beispiel für solche symbolische Rechnungen vorliegt.

Es sei die Gleichung der Grundcurve:

$$(1) \qquad 0 = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots,$$

und y ein Doppelpunkt derselben, so dass:

---

*) Cayley: On the higher singularities of plane curves, Quaterly Journal, vol. 7; und: Note sur les singularités des courbes planes, Crelle's Journal, Bd. 64, p. 369. — Vgl. auch den Schluss dieser Abtheilung der Vorlesungen.

(2) $$a_y^{n-1}a_1 = 0, \quad a_y^{n-1}a_2 = 0, \quad a_y^{n-1}a_3 = 0.$$

Durch diese Gleichungen ist unmittelbar ausgesprochen, dass die erste Polare eines *jeden* Punktes durch den Doppelpunkt geht. Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare des letzteren:

(3) $$a_y^{n-2}a_x^2 = 0$$

stellt dann das Product der beiden Tangenten in y dar. In Liniencoordinaten gibt dieselbe daher doppelt zählend die Gleichung ihres Schnittpunktes (vgl. p. 106), d. h. wir können setzen:

(4) $$(abu)^2\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} = \varrho \,.\, u_y^2.$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen (2) jedenfalls, wenn man setzt:

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-3} c_x,$$

und zwar unabhängig von den Werthen der x_i. Wir haben daher die drei Gleichungen:

(5) $$\varrho c_y^{n-1} c_i = (abc)^2\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} c_i = 0,$$

und diese sagen aus, dass *die* Hesse'*sche Curve im Punkte* y *einen Doppelpunkt hat.*

Das Tangentenpaar der Hesse'schen Curve im Doppelpunkte ist gegeben durch:

$$(n-3)\,.\,(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-4} c_x^2 + 2\,(n-2)\,.\,(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x = 0.$$

Das erste Glied des links stehenden Ausdrucks entsteht (bis auf den Factor $n-3$) aus der linken Seite der Gleichung (4), wenn man darin

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-4} c_x^2$$

setzt. Durch diese Substitution wird aber auf der rechten Seite von (4):

$$u_y^2 = c_y^{n-2} c_x^2;$$

und also gibt das erste Glied unseres Ausdrucks, gleich Null gesetzt, das Tangentenpaar der Grundcurve: wir werden zeigen, dass dies auch mit dem zweiten Gliede der Fall ist, nämlich mit:

$$U = (abc)^2\, a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x.$$

Multipliciren wir diesen Term mit u_y, wo die u_i ganz willkürliche Grössen sind, so ist identisch (nach III, p. 283):

$$U\,.\,u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x\, (abc) \left\{(bcu)\, a_y - (acu)\, b_y + (abu)\, c_y\right\}.$$

Hier verschwindet das erste Glied wegen (2); die beiden andern sind identisch, da das eine aus dem andern durch Vertauschung von b und c hervorgeht; mithin ist:

$$U \,.\, u_y = 2\, a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x c_x \,(abc)\,(abu),$$
$$= a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x \,(abc) \left\{(abu)\, c_x - (bcu)\, a_x\right\}$$

oder nach der Identität III, p. 283:

$$U \,.\, u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x \,(abc) \left\{(acu)\, b_x - (abc)\, u_x\right\}.$$

Der zweite Term verschwindet nach (5), und der erste hat nach (4) den Werth:

$$U \,.\, u_y = -\varrho\, b_y^{n-2} b_x^2 \,.\, u_y\,,$$

denn er entsteht bis auf das Vorzeichen aus

$$(abu)\,(abv)\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} = (acu)\,(acv)\, a_y^{n-2} c_y^{n-2} = \varrho\, u_y \,.\, v_y\,,$$

wenn man $v_i = b_y^{n-3} b_x^2 b_i$ setzt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen: *die* Hesse'*sche Curve berührt die beiden Zweige der Grundcurve im Doppelpunkte.* Dass die Tangente einer beliebigen ersten Polarcurve harmonisch zu dem Tangentenpaare des Doppelpunktes und zu der Verbindungslinie des letzteren mit dem betreffenden Pole (z) ist (p. 322), folgt daraus, dass diese Tangente:

$$(6) \qquad a_y^{n-2} a_z a_x = 0$$

zufolge der Form ihrer Gleichung mit der Polare des Punktes z in Bezug auf das Linienpaar $a_y^{n-2} a_x^2 = 0$ zusammenfällt.

Hat die Grundcurve im Punkte y einen Rückkehrpunkt, so wird die quadratische Polare von y das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks, d. h. es ist:

$$(7) \qquad a_y^{n-2} a_x^2 = v_x^2\,,$$

wo v_i die Coordinaten der Rückkehrtangente bedeuten. Die Gleichung der Tangente der ersten Polare eines Punktes z in y (6) ist dann identisch mit

$$v_x \,.\, v_z = 0\,;$$

also: *die erste Polare eines beliebigen Punktes berührt die Rückkehrtangente im Rückkehrpunkte.*

Aber in letzterem hat auch die $(n-3)^{te}$ Polare von y:

$$a_y^{n-3} a_x^3 = 0$$

Rückkehrpunkt und Rückkehrtangente mit der gegebenen Curve gemein. Nach dem eben bewiesenen Satze berührt also die Polare eines Punktes in Bezug auf diese Curve dritter Ordnung:

$$a_y^{n-3} a_z a_x^2 = 0$$

die Rückkehrtangente v im Rückkehrpunkte. Folglich wird die Gleichung dieses Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

$$a_y^{n-3} b_y^{n-3} (abu)^2\, a_z b_z = 0$$

erfüllt, wenn man setzt:

$$u_i u_k = v_i v_k = c_y^{n-2} c_i c_k,$$

und zwar unabhängig von den z_i. Es ist daher die Gleichung:

$$(8) \qquad (abc)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-2} a_z b_z = 0 \text{*)}$$

identisch erfüllt. Dies ist aber die Gleichung der quadratischen Polare von y in Bezug auf die Hesse'sche Curve; denn das in derselben sonst noch auftretende Glied

$$a_y^{n-4} b_y^{n-2} c_y^{n-2} (abc)^2 a_z^2$$

geht aus dem wegen (7) verschwindenden Ausdrucke $(bcu)^2 b_y^{n-2} c_y^{n-2}$ für $u_i u_k = a_i a_k a_y^{n-4} a_x^2$ hervor, und ist demnach ebenfalls identisch Null. Aus (8) folgt also: *Die* Hesse'*sche Curve hat im Rückkehrpunkte der Grundcurve einen dreifachen Punkt.*

Die Bestimmung der 3 Tangenten im dreifachen Punkte werden wir leicht erledigen, wenn wir zuvor die entsprechenden Verhältnisse bei Curven dritter Ordnung betrachtet haben. Hat eine solche einen Rückkehrpunkt y mit der Rückkehrtangente v, und ist ξ ein Punkt der letzteren, so geht die Gleichung (7) über in:

$$a_y a_x^2 = v_x^2 = (xy\xi)^2.$$

Es sei nun

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x,$$

so wird, wenn die u_i beliebige Grössen bedeuten:

$$\begin{aligned}\Delta u_y &= (abc)\, a_x b_x c_x \left\{(abu)\, c_y - (acu)\, b_y + (bcu)\, a_y\right\} \\ &= 3\,(abc)\,(abu)\, a_x b_x c_x c_y = 3\,(abv)\,(abu)\, a_x b_x \,.\, v_x \\ &= 3\,(a_y b_\xi - b_y a_\xi)\,(abu)\, a_x b_x \,.\, v_x \\ &= 6\, a_y b_\xi\, (abu)\, a_x b_x \,.\, v_x = 6\,(vbu)\, b_x b_\xi \,.\, v_x^2.\end{aligned}$$

Da wir nun die u_i so gewählt annehmen können, dass der Factor $(vbu)\, b_x b_\xi$ nicht identisch Null ist, so folgt: *Die* Hesse'*sche Curve einer Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt besteht aus drei geraden Linien, von welchen zwei mit der Rückkehrtangente zusammenfallen* (vgl. p. 327).

Bei Curven n^{ter} Ordnung sind uns die drei Tangenten der

---

*) Das Verschwinden dieses Ausdruckes, der mit P bezeichnet sei, erkennt man auch in folgender Weise. Es sei ξ ein Punkt der Rückkehrtangente ($v_\xi = 0$), dann ist nach (7):

$$a_y^{n-2} a_x^2 = (x\xi y)^2,$$

und ferner:

$$a_y^{n-2} a_x a_\xi = v_x v_\xi = 0; \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

Hieraus folgt wieder, dass identisch:

$$P = (a_\xi b_y - b_\xi a_y)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z = a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z (a_y^2 b_\xi^2 - 2 a_\xi b_\xi a_y b_y + b_y^2 a_\xi^2) = 0.$$

Hesse'schen Curve dargestellt durch die cubische Polare von y in Bezug auf letztere, d. h. durch die Gleichung:

$$(9)\quad (n-2)\,a_y^{n-3}b_y^{n-3}c_y^{n-3}(abc)^2\,a_x b_x c_x + 2(n-3)\,a_y^{n-4}b_y^{n-3}c_y^{n-2}(abc)^2 a_x^2 b_x = 0;$$

denn das Glied

$$(abc)^2\,a_y^{n-3}b_y^{n-2}c_y^{n-2}a_x^3$$

verschwindet wegen (7) identisch. Wir untersuchen nun die beiden Glieder in (9) einzeln: Das erste, für sich gleich Null gesetzt, gibt die Hesse'sche Curve der Curve dritter Ordnung

$$a_y^{n-3}a_x^3 = 0,$$

welche in y auch einen Rückkehrpunkt mit der Rückkehrtangente v hat; es enthält daher nach dem soeben bewiesenen Satze den Factor v_x^2. Dasselbe gilt aber auch für das zweite Glied auf der linken Seite von (9). Bezeichnen wir dasselbe nämlich, abgesehen von dem Factor $2(n-3)$ durch Q, so ist nach (7):

$$Q = a_y^{n-4}b_y^{n-3}c_y^{n-2}\,(abc)^2\,a_x^2 b_x = a_y^{n-4}b_y^{n-3}\,(abv)^2\,a_x^2 b_x.$$

Ist nun wieder ξ ein Punkt der Rückkehrtangente, also $v_\xi = 0$, so wird ferner:

$$\begin{aligned} Q &= a_y^{n-4}b_y^{n-3}\,(a_y b_\xi - b_y a_\xi)^2\,a_x^2 b_x \\ &= a_y^{n-2}a_x^2\,.\,b_y^{n-3}b_\xi^2 b_x + a_y^{n-4}a_x^2 a_\xi^2\,.\,b_y^{n-1}b_x \\ &\quad - 2\,a_y^{n-3}a_x^2 a_\xi\,.\,b_y^{n-2}b_x b_\xi, \end{aligned}$$

oder wegen (2) und (7):

$$Q = v_x^2\,.\,b_y^{n-3}b_\xi^2 b_x - 2\,v_x v_\xi\,.\,a_y^{n-3}a_x^2 a_\xi$$

und endlich wegen $v_\xi = 0$:

$$Q = v_x^2\,.\,b_y^{n-3}b_\xi^2 b_x.$$

Es enthält also in der That der Ausdruck (9) den Factor v_x^2, und somit haben wir den Satz: *Hat eine Curve einen Rückkehrpunkt, so hat in ihm die* Hesse'*sche Curve derartig einen dreifachen Punkt, dass zwei Tangenten derselben in ihm mit der Rückkehrtangente der gegebenen Curve zusammenfallen.*

In der Umformung, welche wir mit Q vorgenommen haben, liegt ein geometrischer Satz. Es ist nämlich

$$Q \equiv a_y^{n-4}b_y^{n-3}\,(abv)^2\,a_x^2 b_x = 0$$

die Gleichung der ersten Polare von y in Bezug auf die Curve:

$$(10)\qquad a_y^{n-4}b_y^{n-4}\,(abv)^2\,a_x^2 b_x^2 = 0.$$

Die letztere hat daher ebenso wie Q in y einen dreifachen Punkt. In (10) haben wir aber gleichzeitig die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_y^{n-4}a_x^2 a_z^2 = 0$$

in Liniencoordinaten, d. h. der quadratischen Polare von x in Bezug auf die Curve:

$$a_y^{n-4} a_z^4 = 0, \tag{11}$$

eine Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt in y. Die Gleichung (10) gibt also den Ort der Punkte x, deren quadratische Polaren in Bezug auf (11) eine Linie mit den Coordinaten v_i berühren. *Hat also eine Curve vierter Ordnung einen Rückkehrpunkt, so liegen die Punkte, deren zweite Polaren die Rückkehrtangente berühren, auf einer andern Curve vierter Ordnung. Die letztere hat im Rückkehrpunkte einen dreifachen Punkt, und zwei ihrer Tangenten in diesem fallen mit der Rückkehrtangente der gegebenen Curve zusammen.*

IV. Ueber einige covariante Curven.

Es wurde schon früher bemerkt (p. 316), dass man in symbolischer Form sofort unbegrenzt viele Covarianten hinschreiben kann, deren Bedeutung dann eben mittelst der Polarentheorie zu erschliessen ist. Von solchen Covarianten sind jedoch allgemein bisher nur wenige untersucht, nämlich diejenigen, welche durch die einfachsten geometrischen Forderungen bedingt werden; und das Studium der entsprechenden Curven soll uns zunächst beschäftigen. Wir werden dabei ein erstes Beispiel für eine *eindeutige, nicht lineare Beziehung zwischen zwei Curven* kennen lernen; und die erst später hervortretende ausserordentliche Wichtigkeit solcher Beziehungen wird ein längeres Verweilen bei diesem Gegenstande rechtfertigen. Wir werden ferner Gelegenheit haben, von den soeben entwickelten Plücker'schen Formeln wiederholt Gebrauch zu machen.

Wenn beregte Gattung von Covarianten allgemein durch die Forderung charakterisirt war, dass die r^{te} Polare eines Punktes eine bestimmte Invarianteneigenschaft habe, so stellen wir insbesondere die Bedingung, dass die erste Polare eines Punktes x in Bezug auf die Grundcurve

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0$$

einen Doppelpunkt besitze. Wir erhalten bekanntlich (p. 318) als Ort dieser Doppelpunkte die Hesse'sche Curve von der Ordnung $3(n-2)$ durch Elimination der y_i (Coordinaten des Poles) aus den 3 Gleichungen $\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k}\right)$:

$$\begin{aligned} a_x^{n-2} a_y a_1 &= \Sigma f_{1k} y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y a_2 &= \Sigma f_{2k} y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y a_3 &= \Sigma f_{3k} y_k = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Eine zweite Curve wird alsdann von dem Pole y durchlaufen: *die*

Steiner'*sche Curve der Grundcurve;* eine dritte von den Verbindungslinien eines Poles y (Punktes der Steiner'schen Curve) mit dem Doppelpunkte seiner ersten Polare (Punktes der Hesse'schen Curve) umhüllt: *die* Cayley'*sche Curve der Grundcurve.**) Eine vierte Curve endlich wird von den Tangenten der ersten Polaren in ihren Doppelpunkten umhüllt.**) Wir werden unsere Betrachtungen jedoch auf die drei zuerst erwähnten Curven beschränken. Ferner wollen wir voraussetzen, dass die Coëfficienten der Grundcurve sämmtlich von einander unabhängig sind.

Die Hesse'sche Curve besitzt — so nimmt man an — im Allgemeinen weder Doppel- noch Rückkehrpunkte. Ihre Gleichung nämlich ist:

$$\Delta = (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

und für einen Doppelpunkt y derselben müssen also die 3 Gleichungen (vgl. (7) p. 313) bestehen:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_i} = 3\,(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} c_i = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen würde man durch Elimination der y die Discriminante von Δ erhalten. Dieselbe enthält jedenfalls die Discriminante von f als Factor; denn die Hesse'sche Curve hat immer gleichzeitig mit der Grundcurve einen Doppelpunkt (p. 355). Ihr zweiter Factor wird durch eine andere Invariante von f, bez. durch das Product mehrerer solcher, gebildet werden. In Folge des Verschwindens von Invarianten der Grundcurve kann daher die Hesse'sche Curve vielfache Punkte erhalten. So werden wir z. B. sehen, dass dieselbe für eine Curve 3[ter] Ordnung in drei Gerade zerfällt, sobald eine bestimmte (in der Regel mit S bezeichnete) Invariante der letzteren verschwindet. Es könnte jedoch auch sein, dass

---

*) Von Cayley zuerst für Curven 3. Ordnung untersucht: A memoir on curves of the third order, Philosophical Transactions, vol. 147, part. 2, 1857. — Die Singularitäten derselben gab Steiner ohne Beweis in Crelle's Journal, Bd. 47. Für die Steiner'sche Curve leitete Cremona die betreffenden Zahlen ab (Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven). Die unten folgenden analytischen Beweise erbrachte Clebsch: Ueber einige von Steiner behandelte Curven; Crelle's Journal, Bd. 64. Steiner bezeichnet die später nach ihm benannte Curve als *Kerncurve.*

**) Aus später zu erwähnenden allgemeineren Untersuchungen von Zeuthen über einfach unendliche Curvensysteme (vgl. Abschnitt VI dieser Abtheilung) ergibt sich für die Ordnung p dieser Curve:

$$2\,p = 2\,.\,3\,(n-2) + 12\,(n-2)\,(n-3) = 6\,(n-2)\,(2\,n-5).$$

die Discriminante der Hesse'schen Curve für $n > 3$ einen identisch verschwindenden Factor erhält, wenngleich dies erfahrungsmässig für $n = 3$ noch nicht der Fall ist; und dann würde sie Doppelpunkte besitzen, ohne dass für die Grundcurve eine Invariantenrelation besteht. Wir wollen jedoch im Folgenden, wenngleich dafür bisher ein Beweis nicht erbracht ist, wie es gewöhnlich geschieht, annehmen, dass *die* Hesse*'sche Curve keinen Doppelpunkt hat, wenn die Coëfficienten der Gleichung der Grundcurve von einander unabhängig sind.*

Für die Singularitäten der Hesse'schen Curve (die durch gestrichene Buchstaben bezeichnet seien) ergeben sich sonach aus den Plücker-schen Formeln die folgenden Zahlen:

$$
\begin{aligned}
n' &= 3(n-2), \quad d' = 0, \quad r' = 0, \\
k' &= n'(n'-1) &&= 3(n-2)(3n-7), \\
w' &= 3n'(n'-2) &&= 9(n-2)(3n-8), \\
t' &= \tfrac{1}{2}n'(n'-2)(n'^2-9) &&= \tfrac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8) \\
p' &= \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) &&= \tfrac{1}{2}(3n-7)(3n-8).
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Steiner'schen Curve wird durch Elimination der x aus den Gleichungen (1) erhalten; sie ist daher nach dem Satze (p. 313), dass der Grad der Resultante in den Coëfficienten einer jeden Gleichung gleich dem Producte der Ordnungen ist, zu welchen die Variabeln in den beiden andern Gleichungen vorkommen (also hier gleich $(n-2)^2$), vom Grade $3(n-2)^2$ in den y, d. h. *die Ordnung der* Steiner*'schen Curve ist gleich* $3(n-2)^2$.

Um ihre Klasse zu bestimmen, bemerken wir, dass die Coordinaten u_i einer Tangente derselben aus den Formeln

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0 \\
u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3 &= 0
\end{aligned}
$$

gefunden werden; denn die Tangente ist die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Curve mit den Coordinaten y_i und $y_i + dy_i$. Der Punkt $y + dy$ muss ebenso wie y den Gleichungen (1) genügen, wenn man in denselben $x_i + dx_i$ statt x_i schreibt. Wir haben also noch die drei Gleichungen:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
f_{11}dy_1 + f_{12}dy_2 + f_{13}dy_3 + df_{11}y_1 + df_{12}y_2 + df_{13}y_3 &= 0 \\
f_{21}dy_1 + f_{22}dy_2 + f_{23}dy_3 + df_{21}y_1 + df_{22}y_2 + df_{23}y_3 &= 0 \\
f_{31}dy_1 + f_{32}dy_2 + f_{33}dy_3 + df_{31}y_1 + df_{32}y_2 + df_{33}y_3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir nun die Gleichungen (1) einmal mit x_1, x_2, x_3, das andere Mal mit dx_1, dx_2, dx_3, und addiren jedes Mal, so kommt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \\ df_1 y_1 + df_2 y_2 + df_3 y_3 = 0. \end{aligned}$$

Ferner geben die Gleichungen (3), mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt und addirt, unter Berücksichtigung von (4) das Resultat:

$$(5) \qquad f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + f_3 dy_3 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (2), so findet man:

$$(6) \qquad \mu u_1 = f_1, \quad \mu u_2 = f_2, \quad \mu u_3 = f_3;$$

und dadurch ist jedem Punkte der Hesse'schen eine Tangente der Steiner'schen Curve zugeordnet. Eliminiren wir hieraus und aus der Gleichung

$$\Delta = 0$$

die x, so resultirt eine Gleichung in den u: die Gleichung der Steiner'schen Curve in Liniencoordinaten. Die Klasse derselben ist durch die Zahl der Tangenten bestimmt, welche durch einen beliebigen Punkt ξ gehen, d. h. der Gleichung $u_\xi = 0$ oder:

$$f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + f_3 \xi_3 = 0$$

genügen. Diese Gleichung stellt aber eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, welche mit der Hesse'schen Curve zusammen diejenigen $3(n-2)(n-1)$ Punkte bestimmt, deren entsprechende Tangenten der Steiner'schen Curve durch den Punkt ξ gehen. Damit ist auch die Zahl der letzteren gegeben: *Die* Steiner'*sche Curve ist von der Klasse* $3(n-1)(n-2)$.

Wir wenden uns zunächst zur Bestimmung von Ordnung und Klasse der Cayley'schen Curve. Ein Punkt derselben ist definirt als Schnittpunkt von zwei benachbarten Tangenten; um die Ordnung zu finden, müssen wir also fragen: wie oft kommt es vor, dass sich zwei unendlich benachbarte Tangenten auf einer beliebigen Geraden v schneiden? Es seien z_i die Coordinaten eines Punktes der Curve; dann ist die Tangente in ihm Verbindungslinie eines Poles y mit dem Doppelpunkte x seiner ersten Polare, und also die benachbarte Tangente Verbindungslinie zweier Punkte $x + dx$, $y + dy$, wenn x und $x + dx$ benachbarte Punkte der Hesse'schen Curve sind. Wir haben somit:

$$(7) \qquad z_i = \mu x_i + \lambda y_i$$

und auch:

$$z_i = (\mu + d\mu)(x_i + dx_i) + (\lambda + d\lambda)(y_i + dy_i);$$

und daraus folgt:

$$(8) \qquad x_i d\mu + \mu dx_i + y_i d\lambda + \lambda dy_i = 0.$$

Soll z ferner auf einer bestimmten Geraden v liegen ($v_z = 0$), so ist nach (7):

$$\mu v_x + \lambda v_y = 0.$$

Daher kann mam setzen:

$$\lambda = \varrho v_x, \quad \mu = - \varrho v_y,$$

und dadurch geht (8) über in:

$$x_i d\mu + y_i d\lambda + \varrho\,(v_x dy_i - v_y dx_i) = 0. \tag{9}$$

Setzen wir aus diesen Gleichungen die Werthe der dy_i in die auch hier bestehenden Gleichungen (3) ein, so finden wir unter Berücksichtigung von (1):

$$\varrho v_x (y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3}) + \varrho v_y \Sigma f_{ik} dx_k - f_i d\mu = 0. \tag{10}$$

Aus diesen Gleichungen können wir die Differentiale der x_i nach einer passenden Umformung derselben elimiuiren und erhalten dann eine Gleichung, welche zwischen je zwei entsprechenden Punkten x und y der Hesse'schen und Steiner'schen Curve bestehen muss, damit der Berührungspunkt ihrer Verbindungslinie mit der Cayley'schen Curve auf der Geraden v liege. Bezeichnen wir nämlich durch f_{ikh} die dritten Differentialquotienten von f:

$$f_{ikh} = \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = a_x^{n-3} a_i a_k a_h,$$

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = (n-2)\, \Sigma\Sigma f_{ikh} y_k\, dx_h,$$

und setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\varphi_{ik} = (n-2) \left\{ y_1 f_{1ik} + y_2 f_{2ik} + y_3 f_{3ik} \right\},$$

so geht der Ausdruck links über in:

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = \varphi_{i1} dx_1 + \varphi_{i2} dx_2 + \varphi_{i3} dx_3.$$

Substitutiren wir dies in die Gleichung (10), so kommt:

$$\varrho\, v_x\, \Sigma \varphi_{ik} dx_k + \Sigma(\varrho v_y dx_k - x_k d\mu) f_{ik} = 0.$$

Diese Gleichungen multipliciren wir nun mit v_y und fügen Glieder $- d\mu\, \Sigma \varphi_{ik} x_k$ hinzu. Die letztere Operation ist ohne Einfluss, denn wir haben nach dem Euler'schen Satze und nach (1):

$$\begin{aligned} \varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 &= (n-2) \left\{ f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3 \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Unsere Gleichungen werden dadurch endlich:

$$v_y \,.\, \Sigma p_k f_{ik} + v_x \Sigma p_k \varphi_{ik} = 0,$$

wo $p_k = \varrho\, dx_k - x_k\, d\mu$ gesetzt ist; und die Elimination der p_k, und somit auch die der dx_k gibt das Resultat:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} v_y f_{11} + v_x \varphi_{11} & v_y f_{21} + v_x \varphi_{21} & v_y f_{31} + v_x \varphi_{31} \\ v_y f_{21} + v_x \varphi_{21} & v_y f_{22} + v_x \varphi_{22} & v_y f_{32} + v_x \varphi_{32} \\ v_y f_{31} + v_x \varphi_{31} & v_y f_{32} + v_x \varphi_{32} & v_y f_{33} + v_x \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Determinante ist homogen vom dritten Grade in v_x und v_y, also von der Form:

$$v_x^3 P + v_x^2 v_y Q + v_x v_y^2 R + v_y^3 S .$$

Hier ist aber S die aus den f_{ik} gebildete Determinante, und also gleich Null wegen $\Delta = 0$; ferner bedeutet P die Determinante der φ_{ik}, und diese verschwindet ebenfalls wegen

$$\varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 = 0 .$$

Daher ist der Ausdruck (11) durch $v_x v_y$ theilbar, und nach Fortlassung dieses Factors bleibt eine Gleichung von der Form

$$\Sigma \Sigma A_{ik} y_i y_k = 0 ,$$

wo die A_{ik} Functionen von der Ordnung $3n - 7$ in den x bedeuten. Inzwischen werden in Folge von (1) die Producte $y_i y_k$ den Unterdeterminanten F_{ik} von Δ proportional*), und man kann also (11) schliesslich ersetzen durch die Gleichung

$$\Sigma \Sigma A_{ik} F_{ik} = 0 ,$$

welche nur noch von den x abhängt. Sie stellt, da die F_{ik} die x in der $(2n - 4)^{\text{ten}}$ Dimension enthalten, eine Curve von der Ordnung $3n - 7 + 2n - 4 = 5n - 11$ dar, welche auf der Hesse'schen Curve diejenigen Punkte x ausschneidet, deren Verbindungslinien mit den entsprechenden Polen y die Cayley'sche Curve in ihren Schnittpunkten mit der Linie v berühren, d. h. *die Ordnung der* Cayley'*schen Curve ist gleich* $3(n-2)(5n-11)$.

Einfacher gestaltet sich hier die Bestimmung der Klasse. Soll die als Verbindungslinie zweier einander zugehörigen Punkte x und y definirte Tangente der Curve durch einen bestimmten Punkt ξ gehen, so muss man haben:

$$y_i = \mu x_i + \lambda \xi_i .$$

Dies in die Gleichungen (1) eingesetzt, gibt:

$$(12) \qquad \mu f_i + \lambda \varphi_i = 0 ,$$

wenn:

$$\varphi_i = f_{i1} \xi_1 + f_{i2} \xi_2 + f_{i3} \xi_3 .$$

Man findet also die entsprechenden Werthe der x aus den Gleichungen:

---

*) Man hat nämlich aus (1) nach Sätzen der Kegelschnitttheorie:

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = \varrho \cdot u_y^2 .$$

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 &= 0, \\
f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 &= 0, \\
f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Zahl der gemeinsamen Lösungen der ersten beiden Gleichungen ist gleich $(2n-3)^2$. Aber davon sind die $(n-1)(n-2)$ Lösungen der Gleichungen $f_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$ auszuschliessen, für welche nur die ersten beiden Gleichungen erfüllt sind, nicht aber die letzte; und ferner haben wir die offenbar unbrauchbare Lösung $x_i = \xi_i$ abzusondern. Es bleiben also nur $(2n-3)^2 - (n-1)(n-2) - 1 = 3(n-1)(n-2)$ gemeinsame Punkte der Curven (13). Einem jeden derselben entspricht eine Tangente der Cayley'schen Curve durch den Punkt ξ; *also ist die Klasse der* Cayley'*schen Curve gleich* $3(n-1)(n-2)$.

Die Bestimmung der weiteren charakteristischen Zahlen für die Steiner'sche Curve, insbesondere der Zahl ihrer Wendetangenten kann man an die Gleichungen (6) anknüpfen, vermöge deren eine Tangente u derselben einem Punkte x der Hesse'schen Curve durch die Relationen

$$\mu u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

zugeordnet ist. Hieraus folgt nämlich zunächst: *Die* Steiner'*sche Curve wird von den linearen Polaren der Punkte der* Hesse'*schen Curve umhüllt; und zwar ist der Berührungspunkt einer solchen Polare immer der dem Pole x der* Hesse'*schen Curve entsprechende Punkt y der Steinerschen Curve.* Letzteres folgt daraus, dass wegen (1) für y immer die Gleichungen (4) bestehen:

$$
\begin{aligned}
f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 &= 0, \\
df_1 y_1 + df_2 y_2 + df_3 y_3 &= 0
\end{aligned}
$$

und also y immer Schnittpunkt von zwei successiven Tangenten u und $u + du$ ist. Man kann nun überhaupt nach Ordnung und Klasse einer Curve $\Phi = 0$ fragen, die von den linearen Polaren der Punkte einer Curve m^{ter} Ordnung

$$(14) \qquad \varphi = 0$$

in Bezug auf die Grundcurve $f = 0$ (n^{ter} Ordnung) umhüllt wird, wobei dann die Curve m^{ter} Ordnung an Stelle der Hesse'schen Curve in den bisherigen Untersuchungen tritt. Die Klasse ist bestimmt durch die Anzahl der Tangenten durch einen festen Punkt ξ, also durch die Zahl der Schnittpunkte der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(15) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

mit $\varphi = 0$, und somit ist dieselbe gleich $m(n-1)$. Zur Bestimmung der Ordnung müssen wir den Punkt ξ auf einer beliebigen Geraden v

so wählen, dass zwei der durch ihn gehenden Tangenten, und somit zwei Schnittpunkte der Curven (14) und (15) einander unendlich nahe rücken; entspricht doch jedem dieser Schnittpunkte eine jener Tangenten. Hieraus folgt zunächst:

Die ersten Polaren der Punkte einer Curve, welche von den linearen Polaren einer anderen Curve φ umhüllt wird, berühren die letztere Curve.

Zur Erreichung unseres Zweckes haben wir sonach die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Curven (14) und (15) sich berühren, oder wenigstens den Grad dieser Bedingung in den Coëfficienten von (15), und somit in den ξ anzugeben. Wir erweitern diese Aufgabe dahin, dass *überhaupt der Grad der „Tactinvariante" (d. i. der Berührungsbedingung) zweier Curven m^{ter} und μ^{ter} Ordnung in den Coëfficienten ihrer Gleichungen bestimmt werden soll.* — Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bez. diese Curven, und dieselben berühren sich im Punkte x, so müssen, wenn v eine beliebige Gerade und ξ ihr Schnittpunkt mit der gemeinsamen Tangente von φ und ψ in x ist, folgende Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0.$$

Eliminirt man aus ihnen die ξ_i, so folgt:

$$V = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

eine Gleichung von der Ordnung $m + \mu - 2$, welche im Allgemeinen den Ort der Punkte darstellt, deren lineare Polaren sich auf der Linie v schneiden; und diese Curve geht also unabhängig von den v durch den Berührungspunkt. Nehmen wir dagegen die x constant, die v veränderlich, so gibt (16) die Gleichung des Schnittpunktes der beiden linearen Polaren von x. Dieser Schnittpunkt fällt aber mit dem Pole x zusammen, wenn letzterer ein gemeinsamer Punkt von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ist. Die Elimination der x aus den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und aus (16) gibt also das Product der Schnittpunkte von φ und ψ. Doch ist dasselbe noch mit einem Factor behaftet, denn die Gleichung würde hier vom Grade $m\mu$ in den Coëfficienten von V, vom Grade $\mu(m + \mu - 2)$ in denen von φ und vom Grade $m(m + \mu - 2)$ in denen von ψ, also im Ganzen bez. vom Grade $\mu(2m + \mu - 2)$ und $m(2\mu + m - 2)$ in den Coëfficienten von φ und ψ werden, während diese Zahlen doch nach früheren Ueber-

legungen (vgl. p. 282) nur bez. gleich μ und m sein dürfen. Der hinzutretende Factor ist demnach vom Grade $\mu(2m+\mu-3)$ und $m(2\mu+m-3)$ in den Coëfficienten von φ und ψ. Da nun die Gleichung (16) und also auch unsere Resultante unabhängig von den v verschwindet, wenn x ein Berührungspunkt von φ und ψ ist, so gibt der besprochene Factor, gleich Null gesetzt, eben die Bedingung der Berührung und wir haben den Satz:

*Die Bedingung der Berührung (Tactinvariante) zweier Curven von der m^{ten} und μ^{ten} Ordnung ist von dem Grade $\mu(2m+\mu-3)$ in den Coëfficienten der ersten und vom Grade $m(2\mu+m-3)$ in denen der zweiten Curve.**)

In unserm Falle haben wir eine Curve m^{ter} Ordnung (14) und eine $(n-1)^{ter}$ Ordnung (15); ihre Tactinvariante ist daher in den Coëfficienten der letzteren, und somit auch in den ξ (worauf es uns hier allein ankommt) vom Grade $m(2n+m-5)$. Die Invariante gleich Null gesetzt gibt aber unmittelbar den Ort der Punkte ξ, deren erste Polaren die Curve φ berühren, d. h. die Curve $\Phi=0$ in Punktcoordinaten, d. h. *die Ordnung der von den linearen Polaren der Punkte von $\varphi=0$ umhüllten Curve ist gleich $m(2n+m-5)$.*

Ersetzen wir nun wieder $\varphi=0$ durch die Hesse'sche Curve und also m durch $3(n-2)$, so würden wir die Ordnung der Steiner'schen Curve gleich $3(n-2)(5n-11)$ finden, während dieselbe doch thatsächlich gleich $3(n-2)^2$ ist. Dies rührt daher, dass von den Tangenten, die von ξ an $\Phi=0$ zu legen sind, auch für jeden Punkt einer Wendetangente von Φ zwei *successive***) zusammenfallen. Bei der Steiner'schen Curve treten daher Wendetangenten auf, (was im Allgemeinen bei einer als Liniengebilde gegebenen Curve $\Phi=0$ nicht der Fall sein wird); und sonach folgt:

Der Ort der Punkte, deren erste Polaren die Hesse'*sche Curve berühren, zerfällt in die* Steiner'*sche Curve von der Ordnung* $3(n-2)^2$ *und in eine andere Curve von der Ordnung* $3(n-2)(5n-11)-3(n-2)^2=3(n-2)(4n-9)$, *das Product der Wendetangenten der* Steiner'*schen Curve.* Für die ersten Polaren der Punkte dieser Wendetangenten ist die Berührung eine eigentliche, für die der Punkte der Steiner'schen Curve hingegen eine uneigentliche, insofern die letzteren auf der Hesse'schen Curve einen Doppelpunkt haben. Der zuletzt ausgesprochene Satz gibt uns die Zahl der Wendetangenten der Steiner'schen Curve, nämlich:

$$3(n-2)(4n-9),$$

*) Vgl. Salmon: Higher plane curves, chap. III. — Als Beispiel vgl. die Tactinvariante zweier Kegelschnitte auf p. 298 dieses Bandes.

**) Für den Punkt einer Doppeltangente fallen zwar auch zwei dieser Tangenten zusammen; dieselben sind aber nicht successiv.

und somit können wir die übrigen Singularitäten vermöge der Plücker'schen Formeln berechnen.

Diese Bestimmung gelingt jedoch auch auf anderem Wege, wenn wir einen erst später zu beweisenden Satz benutzen wollen, welcher uns zugleich die Wichtigkeit der Zahl p, des Geschlechtes der Grundcurve, erkennen lässt. Es ist dies der folgende:

Wenn zwei algebraische Curven so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte der einen Curve nur ein Punkt der andern entspricht, so ist das Geschlecht für beide Curven dasselbe.

Zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve besteht nämlich eine Beziehung der Art: einem beliebigen Punkte der letzteren entspricht *ein* Punkt der ersteren: der Doppelpunkt seiner ersten Polare, und ebenso ist die umgekehrte Beziehung eindeutig. Ebenso sind aber auch die Hesse'sche und die Steiner'sche Curve eindeutig auf die Cayley'sche Curve bezogen: Einem beliebigen Punkte der ersteren entspricht *eine* Tangente und somit *ein* Punkt der letzteren, und umgekehrt. Das Geschlecht der Cayley'schen und Steiner'schen Curve ist daher gleich dem Geschlechte der Hesse'schen Curve*), gleich $\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$; und aus Geschlecht, Ordnung und Klasse können wir für jede der Curven die übrigen Singularitäten nach den Plücker'schen Formeln berechnen. Die Ausführung der Rechnung liefert uns folgende Tabelle, in der wir die Zahlen für die Hesse'sche Curve zum Vergleiche noch einmal mittheilen:

	Hesse'sche Curve	Steiner'sche Curve	Cayley'sche Curve
p	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$
n	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$	$3(n-2)(5n-11)$
k	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$	$3(n-1)(n-2)$
d	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
r	0	$12(n-2)(n-3)$	$18(n-2)(2n-5)$
t	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
w	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$	0

Die Doppelpunkte der Curve von Steiner bat man sich, wie später bei Behandlung der allgemeinen eindeutigen Transformationen**) noch eingehend gezeigt werden wird, dadurch entstanden zu denken, dass

---

*) Dieser Satz, und somit auch die folgenden Zahlen, sind für die Cayley'sche Curve bei $n = 3$ nicht gültig; denn hier fällt die Steiner'sche Curve mit der Hesse'schen zusammen, und einer Tangente der Cayley'schen Curve entsprechen dann zwei Punkte der Hesse'schen.

**) Die dort gegebenen Formeln lassen auch leicht erkennen, wie sich vorstehende Tabelle modificirt, wenn die Grundcurve Doppel- und Rückkehr-Punkte besitzt.

zwei getrennt liegenden Punkten x der Hesse'schen Curve ein und derselbe Punkt y der Steiner'schen Curve entspricht, der dann eben ein Doppelpunkt der letzteren wird; und umgekehrt entsprechen einem solchen Doppelpunkte zwei getrennt liegende Punkte der Hesse'schen Curve. *Es gibt daher* $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ *erste Polaren mit zwei Doppelpunkten, und die zugehörigen Pole sind die Doppelpunkte der Steiner'schen Curve.* Die beiden Tangenten in den letzteren sind nach Früherem die linearen Polaren der beiden zugehörigen Punkte der Hesse'schen Curve.

Hat dagegen die erste Polare von y in x eine Spitze, was ebenfalls die Erfüllung von zwei Bedingungen erfordert und also für eine bestimmte Zahl von Punkten möglich ist, so haben wir, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Coordinaten der Rückkehrtangente sind, die sechs Gleichungen:

$$f_{1ik}y_1 + f_{2ik}y_2 + f_{3ik}y_3 = \alpha_i\alpha_k,$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung:

$$(17)\qquad \varphi_{ik} = (n-2)\,.\,\alpha_i\alpha_k,$$

wo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\,.$$

Wir werden nun zeigen, dass in diesem Falle die Steiner'sche Curve im zugehörigen Pole y ebenfalls eine Spitze hat, d. h. (vgl. p. 344) dass drei successive Tangenten derselben durch den Punkt y gehen. Aus den Gleichungen nämlich:

$$\mu u_i = f_i$$
$$d\mu u_i + \mu du_i = (n-1)\,\Sigma f_{ik}dx_k$$

finden wir weiter:

$$d^2\mu u_i + 2\,d\mu du_i + \mu d^2 u_i = (n-1)(n-2)\,\Sigma\Sigma f_{ikh}dx_k dx_h + (n-1)\,\Sigma f_{ik}d^2x_k,$$

und wenn wir die letzten drei Gleichungen bez. mit y_1, y_2, y_3 multipliciren und addiren, so erhalten wir, da immer (vgl. (4))

$$(18)\qquad \Sigma u_i y_i = 0 \quad\text{und}\quad \Sigma du_i y_i = 0,$$

unter Berücksichtigung von (1):

$$\mu\,.\,\Sigma d^2u_i y_i = (n-1)(n-2)\,\Sigma\Sigma\Sigma f_{ikh}y_i dx_k dx_h$$
$$= (n-1)\,\Sigma\Sigma\varphi_{kh}\,dx_k\,dx_h\,.$$

Im Falle einer Spitze ist daher wegen (17):

$$(19)\qquad \mu\,\Sigma d^2u_i y_i = (n-1)(n-2)(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3)^2;$$

und dieser Ausdruck verschwindet. Multipliciren wir nämlich die drei Gleichungen (10) bez. mit y_1, y_2, y_3 und addiren, so erhalten wir:

$$\varrho v_x \,.\, \Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k = \Sigma f_i y_i d\mu - \varrho v_y \Sigma\Sigma f_{ik} d x_k y_i ,$$

wo y, $y + dy$ zwei Punkte der Steiner'schen, x und $x + dx$ die entsprechenden Punkte der Hesse'schen Curve sind, deren bez. Verbindungslinien sich auf der Linie v schneiden. Hier verschwinden aber die rechts stehenden Ausdrücke wegen (18), und es folgt, da v_y im Allgemeinen nicht Null ist:

(20) $$\Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k \equiv a_y^2 a_y^{n-3} a_{dx} = 0 ,$$

wo $a_{dx} = a_1 d x_1 + a_2 d x_2 + a_3 d x_3$. Diese Gleichung gibt zunächst den Satz:

Hat die erste Polare von y in x einen Doppelpunkt, so berührt die Tangente der zweiten Polare von y in x die Hesse'*sche Curve;* oder nach einem früheren Satze aus der Polarentheorie: *Die Tangente der* Hesse'*schen Curve in einem Punkte x ist die vierte harmonische Gerade zu der Verbindungslinie von x mit dem zugehörigen Pole y und zu den Tangenten der ersten Polare von y im Doppelpunkte x.*

Im Falle der Spitze ist nun aber wegen (17):

$$y_1 d f_{i1} + y_2 d f_{i2} + y_3 d f_{i3} = \alpha_i \alpha_{dx} ,$$

und daher:

$$\Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k = \alpha_y \alpha_{dx} ,$$

also wegen (20) $\alpha_{dx} = 0$ oder $\alpha_y = 0$. Letzteres kann aber nicht eintreten; denn nach (17) ist

$$\alpha_y \alpha_z = a_y^2 a_x^{n-3} a_z ,$$

und dieser Ausdruck würde dann auch Null, und zwar unabhängig von den z, d. h. es müsste die zweite Polare von y in x einen Doppelpunkt haben, während sie doch als erste Polare von y in Bezug auf $a_y a_x^{n-1} = 0$ nur einfach durch den Rückkehrpunkt dieser Curve (in ihm die Rückkehrtangente berührend) hindurchgehen darf (vgl. p. 322). Es bestehen somit für den Pol y nach (19) in der That gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$\Sigma u_i y_i = 0, \quad \Sigma d u_i y_i = 0, \quad \Sigma d^2 u_i y_i = 0 .$$

Die Gleichung $\alpha_{dx} = 0$ sagt zugleich aus, dass auch der Punkt $x + dx$ gleichzeitig auf der Hesse'schen Curve und auf der Rückkehrtangente α liegt, wir haben also mit Rücksicht auf die Zahlen der Tabelle den Satz:

Es gibt 12 $(n-2)(n-3)$ *erste Polaren, welche einen Rückkehrpunkt haben; die zugehörigen Pole sind die Spitzen der* Steiner'*schen Curve**), *und die Rückkehrtangenten der Polaren berühren die* Hesse'*sche Curve im zugehörigen Rückkehrpunkte.* Das Letztere folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung.

---

*) Dieser Satz wurde von Clebsch für Curven 4. Ordnung (Borchardt's Journal, Bd. 59) und von Cremona (a. a. O.) allgemein bewiesen.

Wir erwähnen ferner noch die folgenden von Steiner angegebenen Beziehungen zwischen den hier betrachteten Curven:

Wie die Hesse'*sche Curve durch die Wendepunkte der Grundcurve geht, so berührt die* Steiner'*sche Curve sämmtliche Wendetangenten derselben.*

Dies folgt unmittelbar daraus, dass die letztere Curve überhaupt von den linearen Polaren der ersteren umhüllt wird, denn für die Wendepunkte sind dies eben die Wendetangenten.

Ferner: *Zwei Pole, deren Polaren einander berühren, liegen immer auf einer Tangente der* Steiner'*schen Curve; und zwar berühren sich die Polaren aller auf einer solchen Tangente gelegenen Pole in einem Punkte, dem Doppelpunkte x, welchen die Polare des Berührungspunktes y der Tangente enthält; die gemeinsame Tangente aller Polaren ist aber die Verbindungslinie von x und y, also Tangente der* Cayley'*schen Curve.*

Sollen nämlich z, t zwei Punkte sein, deren Polaren

$$\Sigma f_i z_i = 0, \quad \Sigma f_i t_i = 0$$

sich in x berühren, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$z_1 f_{1k} + z_2 f_{2k} + z_3 f_{3k} = \mu\, (t_1 f_{1k} + t_2 f_{2k} + t_3 f_{3k})_i. \tag{21}$$

Setzt man also

$$y_i = z_i - \mu t_i,$$

so hat man die Gleichungen (1) vor sich; die Verbingungslinie von z und t enthält aber den Punkt y der Steiner'schen Curve und ist Tangente in diesem Punkte, da die Gleichung der Tangente in y (vgl. (6)):

$$f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 = 0$$

für $X = z$ und $X = t$ erfüllt ist. Endlich ist die Gleichung der gemeinsamen Tangente der Polaren im Berührungspunkte x:

$$X_1 \Sigma f_{1k} z_k + X_2 \Sigma f_{2k} z_k + X_3 \Sigma f_{3k} z_k = 0.$$

Da diese Gleichung für $X = x$ und $X = y$ erfüllt ist, so stellt sie die Verbindungslinie des Poles mit dem zugehörigen Doppelpunkte der Polare dar. —

In ähnlicher Weise, wie wir hier durch die Forderung, dass die ersten Polaren gewisse Singularitäten haben, auf covariante Curven geführt werden, kann man auch von Polaren beliebiger Ordnung ausgehen und covariante Gebilde erzeugen, die dann ebenso wie die hier behandelten Curven gewisse Singularitäten zeigen werden; doch sind die so entstehenden Curven noch nicht eingehender untersucht. — Wir wollen schliesslich nicht unerwähnt lassen, dass die von uns auf analytischem Wege gefundenen Resultate sich auch mit Hülfe des

Chasles'schen Correspondenzprincips (p. 204) ableiten lassen, ein Princip, für dessen Anwendbarkeit wir sogleich noch mehrere Beispiele kennen lernen werden; aber durch die algebraische Untersuchung sind wir gleichzeitig in das Wesen derartiger Beziehungen zwischen Curven tiefer eingedrungen.

V. Ueber Systeme von Curven.

Nachdem wir gewisse allgemeine, an eine einzelne algebraische Curve sich anknüpfende Betrachtungen, soweit es die bisherige Ausbildung der Theorie erlaubt, näher verfolgt haben, entsteht zunächst die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zweier Curven, die im Allgemeinen von verschiedener Ordnung sein mögen, d. h. nach den *simultanen* Functionalinvarianten von zwei ternären algebraischen Formen. Es lassen sich hier jedoch bisher nur wenige Fragen allgemein erörtern.

Eine simultane Invariante zweier Curven der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ist jedenfalls durch die schon früher erwähnte (p. 366) *Tactinvariante* gegeben, deren Verschwinden aussagt, dass sich die beiden Curven berühren: sie ist vom Grade $n(2m + n - 3)$ in den Coëfficienten der Curve m^{ter} und vom Grade $m(2n + m - 3)$ in denen der Curve n^{ter} Ordnung; auch haben wir diese Invariante für zwei Kegelschnitte wirklich aufgestellt (p. 298).

Zu simultanen Covarianten wird man z. B. durch die Forderung geführt, dass die Polaren einer gewissen Ordnung der einen Curve zu der andern Curve in einer bestimmten Invariantenrelation stehen, also etwa wieder in der Relation der Berührung. Nimmt man z. B. eine Curve n^{ter} und eine 1ter Ordnung:

$$a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad u_x = 0,$$

so gibt die Forderung, dass die konischen (d. i. $(n-2)^{\text{ten}}$) Polaren eines Punktes die Linie u berühren, die schon früher erwähnte (p. 317) Curve von der Ordnung $2(n-2)$:

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Ebenso erhält man, wenn die cubischen Polaren die Linie u berühren sollen, die Gleichung $4(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (vgl. p. 278):

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-3} = 0.$$

Ist ferner eine Curve n^{ter} Ordnung und ein Kegelschnitt gegeben:

$$a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2 = 0,$$

so kann man die Bedingung stellen, dass für die beiden Kegelschnitte

$$a_y^{n-2} a_x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2 = 0$$

eine der beiden simultanen Invarianten (A_{112} oder A_{122} nach unserer früheren Bezeichnung) verschwinde; man erhält dann bez. die beiden Curven:

$$(a\alpha\beta)^2 a_y^{n-2} = 0$$

und

$$(ab\alpha)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0;$$

und daraus folgen wegen der geometrischen Bedeutung der Gleichungen $A_{112} = 0$, $A_{122} = 0$ (vgl. p. 295) die beiden Sätze:

Der Ort eines Punktes, dessen konische Polare unendlich viele Polardreiecke besitzt, die einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben sind, ist eine Curve der Ordnung $(n - 2)$; und:

Der Ort eines Punktes, dessen konische Polare in ein einem gegebenen Kegelschnitte zugehöriges Polardreieck (und somit in unendlich viele) eingeschrieben ist, ist eine Curve der Ordnung $2(n - 2)$.

Wenn man nun weiter den in solcher Weise entstandenen covarianten Curven bestimmte Invarianteneigenschaften auferlegt, wird man wieder zu simultanen Invarianten der beiden gegebenen Curven geführt. So ist z. B. für $n = 4$ die eben aufgestellte Curve $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ein Kegelschnitt:

$$(a\alpha\beta)^2 a_x^2 = 0,$$

und jenachdem, dass derselbe zerfallen, oder zu dem gegebenen Kegelschnitte in den angeführten Invariantenrelationen stehen soll, erhält man bez. die folgenden invarianten Bedingungen:

$$A = (a\alpha\beta)^2 (b\gamma\delta)^3 (c\varepsilon\zeta)^2 (abc)^2 = 0$$
$$B = (a\alpha\beta)^2 (a\gamma\delta)^2 = 0,$$
$$C = (a\alpha\beta)^2 (b\gamma\delta)^2 (ab\varepsilon)^2 = 0,$$

wo die Symbole β, γ, δ, ε, ζ sämmtlich mit α gleichbedeutend sind. Diese sehr willkürlich gewählten Beispiele werden hinreichen, um eine Vorstellung von der Mannigfaltigkeit der auftretenden Bildungen zu geben.

Sind die beiden betrachteten Curven ($f = 0$, $\varphi = 0$) von gleicher Ordnung, welche dann durch n bezeichnet sei, so gibt es unendlich viele Curven n^{ter} Ordnung, welche durch ihre n^2 Schnittpunkte*) hindurchgehen und den „*Büschel*"

$$f + \lambda\varphi = 0$$

bilden; und zwar geht durch jeden Punkt der Ebene noch eine Curve

*) Es steht dies nicht im Widerspruche damit, dass eine Curve n^{ter} Ordnung schon durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte bestimmt ist, indem die n^2 Punkte nicht von einander unabhängig sind; vgl. den Abschnitt VII dieser Abtheilung.

des Büschels. Wie in einem Kegelschnittbüschel im Allgemeinen drei Linienpaare, d. h. drei Curven mit Doppelpunkt vorkommen, so werden sich unter den Curven des Büschels $f + \lambda \varphi = 0$ eine bestimmte Anzahl mit Doppelpunkten befinden; denn diese Forderung gibt eine Bedingung für die Coëfficienten der Curve $f + \lambda \varphi$, also eine Gleichung für λ: das Verschwinden der Discriminante. Letztere ist aber für eine Curve n^{ter} Ordnung vom Grade $3(n-1)^2$ in den Coëfficienten, und also in unserm Falle in λ: *Es gibt daher in einem Büschel von Curven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $3(n-1)^2$ Curven mit Doppelpunkt.* Diese Zahl kann jedoch dadurch verringert werden, dass die Curven f und φ sich berühren, dass in dem Büschel eine Curve mit Rückkehrpunkt vorkommt, dass alle Curven einen gemeinsamen Doppelpunkt haben und durch ähnliche Vorkommnisse.*) In solchen Fällen bezeichnet $3(n-1)^2$ die Zahl der eigentlichen Lösungen zusammen mit den uneigentlichen, wenn von letzteren jede in richtiger Vielfachheit gezählt wird.

In derselben Weise kann man überhaupt verlangen, dass für eine Curve des Büschels eine bestimmte Invariante verschwinde; *es wird dann immer μ Curven des Büschels der Art geben, wenn die Invariante vom μ^{ten} Grade in den Coëfficienten der Curve n^{ter} Ordnung ist.* Man kann weiter auch den Büschel zu einer beliebig gegebenen Curve m^{ter} Ordnung in Beziehung setzen; es wird dann eine bestimmte Zahl von Curven geben, für welche eine simultane Invariante mit der Curve m^{ter} Ordnung verschwindet. Wegen der oben für den Grad der Tactinvariante angegebenen Zahlen *gibt es z. B. in einem Büschel n^{ter} Ordnung $m(2n+m-3)$ Curven, welche eine gegebene Curve m^{ter} Ordnung berühren.* Hat letztere Curve jedoch Doppelpunkte, so sind unter diesen $m(2n+m-3)$ berührenden Curven des Büschels auch diejenigen mit enthalten, welche durch diese Doppelpunkte hindurchgehen; denn dann liegen im Doppelpunkte ebenfalls zwei Schnittpunkte vereinigt. Jede solche Curve absorbirt aber *zwei* eigentlich berührende Curven des Büschels. Man erkennt dies geometrisch genau ebenso, wie bei den Plücker'schen Formeln den Satz, dass jeder Doppelpunkt einer Curve die Klasse derselben um zwei Einheiten erniedrigt; d. h. indem man die feste Curve m^{ter} Ordnung erst allmählich in eine Curve mit Doppelpunkt degeneriren lässt, und dann beachtet, dass an den beiden kurz zuvor entstehenden Wölbungen jedenfalls zwei Berührungspunkte liegen, welche nachher in den Doppelpunkt zusammenfallen (vgl. Fig. 52 auf p. 343). Lässt man schliesslich die Schleife eines Doppelpunktes sich immer mehr zusammenziehen, so wird in der Grenze, ebenso wie bei der Bestimmung der Klasse (p. 323), noch

*) Vgl. hierüber Cremona's Einleitung in die Theorie ebener Curven.

ein weiterer Berührungspunkt mit dem entstehenden Rückkehrpunkte sich vereinigen. *Die Zahl der Curven n^{ter} Ordnung eines Büschels, welche eine Curve m^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten „eigentlich" berühren, ist daher*

$$= m(2n + m - 3) - 2d - 3r,$$

oder wenn wir das Geschlecht $p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d - r$ einführen (p. 351):

$$= 2(mn + p - 1) - r;$$

eine Zahl, welche wir später auf anderem Wege durch allgemeinere Betrachtungen ableiten werden.*)

An die Betrachtung der Curvenbüschel knüpft sich eine einfache geometrische Erzeugungsweise einer algebraischen Curve mittelst Curven niedrigerer Ordnung, die als Verallgemeinerung der Erzeugungsweise eines Kegelschnittes aus zwei projectivischen Strahlbüscheln angesehen werden kann. Statt der letzteren nehmen wir nämlich zwei beliebige Curvenbüschel, bez. von der Ordnung m und n:

$$F + \lambda \Phi = 0 \quad \text{und} \quad f + \mu \varphi = 0 \tag{1}$$

und beziehen dieselben so auf einander, dass jeder Curve des einen Büschels *eine* des andern entspricht, und umgekehrt, dass also zwischen ihren Parametern λ, μ eine lineare Gleichung:

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 \tag{2}$$

besteht; der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Curven der beiden „projectivisch auf einander bezogenen" Büschel ist dann eine Curve der $(m+n)^{ten}$ Ordnung, deren Gleichung sich durch Elimination von λ, μ aus den drei Gleichungen (1) und (2) ergibt. Nimmt man die projectivische Beziehung — was immer erlaubt ist — insbesondere in der einfachen Form an, dass sich je zwei Curven mit demselben Parameter λ in den Büscheln (1) entsprechen, so ist die resultirende Curve gegeben durch:

$$F\varphi - \Phi f = 0,$$

also in der That von der Ordnung $m + n$; und man erkennt, dass diese Curve durch sämmtliche Basispunkte der beiden Büschel hindurchgeht. Die projectivische Beziehung der Büschel auf einander kann man sich geometrisch in folgender Weise vermittelt denken. Setzen wir

$$F = a_x^m, \quad \Phi = a_x'^m,$$
$$f = \alpha_x^n, \quad \varphi = \alpha_x'^n,$$

*) Vgl. den unten folgenden Abschnitt VIII über das erweiterte Correspondenzprincip.

und sei y ein Basispunkt des ersteren, z ein solcher des andern Büschels, so bilden die Tangenten aller Curven der beiden Büschel in diesen Grundpunkten zwei Strahlbüschel, gegeben durch:

$$a_y^{m-1} a_x + \lambda a'_y{}^{m-1} a'_x = 0,$$
$$\alpha_z^{n-1} \alpha_x + \lambda \alpha'_z{}^{n-1} \alpha'_x = 0,$$

Diese Strahlbüschel sind dann auch einander projectivisch; und man kann nun umgekehrt die verlangte Zuordnung der Curvenbüschel herstellen, indem man zwei solche Tangentenbüschel projectivisch auf einander bezieht, denn jeder Tangente entspricht nur eine Curve des betreffenden Büschels.

Es liegt hier zunächst die Frage nahe, ob die so erzeugte Curve die allgemeinste ihrer Art ist, und ob jede algebraische Curve in der Weise erzeugt werden kann. Wir werden später in der Lage sein, diese Frage in der That bejahend zu beantworten, indem wir zeigen, dass man auf jeder Curve zwei Systeme von Punkten bestimmen kann, die als Grundpunkte zweier projectivischen Curvenbüschel zur Erzeugung der gegebenen Curve benutzt werden können. Dies vorausgesetzt, haben wir den Satz:

Jede algebraische Curve n^{ter} Ordnung kann durch die Schnittpunkte entsprechender Curven zweier projectivischen Büschel der m^{ten} und $(n - m)^{ten}$ Ordnung erzeugt werden, deren Basispunkte auf der Curve n^{ter} Ordnung liegen)*; und zwar wird diese Curve die allgemeinste ihrer Art sein, wenn zwischen den beiden erzeugenden Curvenbüscheln keine Relationen bestehen. Fällt dagegen z. B. ein Grundpunkt des einen Büschels mit einem des andern zusammen, so wird die erzeugte Curve in ihm einen Doppelpunkt haben; und zwar ist sofort ersichtlich, dass die Tangenten im Doppelpunkte eben die beiden Doppelstrahlen der in ihm vereinigt liegenden projectivischen Tangentenbüschel sind. So entsteht eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt aus einem Kegelschnittbüschel und einem ihm projectivischen Strahlbüschel, dessen Scheitel in einem der vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels liegt, und eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten aus zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln mit drei gemeinsamen Basispunkten. —

Wir gehen zur gleichzeitigen Betrachtung *dreier Curven* über. Von den simultanen Functionalinvarianten, zu denen dieselben Ver-

---

*) Der Satz wurde für Curven 3. Ordnung gegeben von Chasles: Comptes rendus, t. XLI, 1853; allgemein von Jonquières: Essai sur la génération des courbes géométriques, Mémoires presentées par divers savants à l'académie des sciences, t. XVI, 1858. Es sind in diesem Aufsatze besonders viele sich an den Satz knüpfende Constructionsaufgaben behandelt. — Für Curven 3. Ordnung vgl. die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

anlassung geben, ist bisher besonders eine untersucht, welche wir hier allein berücksichtigen: die Jakobi'sche Curve der drei vorliegenden Curven. Sind letztere gegeben durch die Gleichungen:

$$\varphi = a_x^m = 0\,, \quad \psi = a_x'^{m'} = 0\,, \quad \chi = a_x''^{m''} = 0\,,$$

so ist sie dargestellt durch das Verschwinden der Functionaldeterminante, d. h. durch:

$$\frac{1}{m\,m'\,m''}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x_1} & \frac{\partial\chi}{\partial x_2} & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a\,a'\,a'')\; a_x^{m-1} a_x'^{m'-1} a''^{m''-1}_x = 0\,.$$

Die Jakobi'*sche Curve ist also von der Ordnung* $m + m' + m'' - 3$ *und ist, wie man sofort übersieht, der Ort der Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Curven sich in einem Punkte schneiden.* *)

Für diese Curve gilt insbesondere der Satz, *dass sie durch einen gemeinsamen Punkt der drei Curven ebenfalls hindurchgeht.* Multiplicirt man nämlich die ersten beiden Verticalreihen der Functionaldeterminante bez. mit x_1, x_2 und addirt sie zu der mit x_3 multiplicirten dritten Verticalreihe, so treten in letzterer die Terme $m\varphi$, $m'\psi$, $m''\chi$ auf; und die Determinante verschwindet also gleichzeitig mit ihnen. In diesem Falle tritt ferner noch eine Besonderheit ein — und dieselbe ist für spätere Anwendungen wichtig — wenn zwei der vorliegenden Curven von gleicher Ordnung sind; alsdann gilt der Satz:

Die Jacobi'*sche Curve dreier Curven* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ *berührt in einem gemeinsamen Punkte derselben die Curve* $\chi = 0$, *sobald* φ, ψ *von gleicher Ordnung sind, und hat, wenn* χ *einen solchen gemeinsamen Punkt zum Doppelpunkte hat, diesen ebenfalls zum Doppelpunkte, und zwar der Art, dass ihre Tangenten in ihm mit denen von* $\chi = 0$ *übereinstimmen.* **)

Zum Beweise vergleichen wir die Differentialquotienten von χ nach den Coordinaten des betrachteten Punktes mit denen der Functionaldeterminante ($m = m'$, $m'' + 2m' - 3 = \mu$):

$$\Delta_x^\mu = (a\,a'\,a'')\; a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1} a_x''^{m''-1}\,.$$

---

*) Es sei bemerkt, dass wie bei den Kegelschnitten der Satz gilt: *Wenn die Functionaldeterminante dreier Formen gleicher Ordnung identisch verschwindet, so gehören die entsprechenden drei Curven demselben Büschel an.* Der Beweis ist ebenso wie bei den quadratischen Formen zu führen; man hat nur auf p. 304 die betreffenden Gleichungen alle mit den symbolischen Factoren $a_x^{m-2} a_x'^{m-2} a_x''^{m-2}$ zu multipliciren.

**) Vgl. Hesse, Crelle's Journal, Bd. 41, p. 286 und Clebsch: Curven, deren Coordinaten ellipt. Funct. eines Parameters sind, ib. Bd. 64.

Nun ist

$$\mu\,\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z = (a a' a'')\, a_x^{m'-2} a_x'^{m'-2} a_x''^{m''-2} \left\{(m''-1)\, a_x a_x' a_z'' \right.$$
$$\left. + (m'-1)\, a_x'' a_x a_z' + (m'-1)\, a_x' a_x'' a_z \right\},$$

oder, wenn wir mit u_x multipliciren, wo die u_i vollkommen willkürlich sind (nur $u_x >$ oder < 0), und die Identität

$$(3) \qquad (a a' a'')\, u_x = (a a' u)\, a_x'' - (a a'' u)\, a_x' + (a' a'' u)\, a_x$$

benutzen, indem die in φ, ψ, χ multiplicirten Terme ausfallen:

$$(4) \quad \mu\,\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z \,.\, u_x = (m''-1)\, a_x''^{m''-1} a_z'' \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1}$$
$$+ (m'-1)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1} a_x''^{m''-1} \left\{ (a'' a u)\, a_z' + (a' a'' u)\, a_z \right\}.$$

Hier reducirt sich aber der letzte Term wegen $\Delta = 0$ auf den ersten, denn es ist identisch:

$$(5) \qquad (a'' a u)\, a_z' + (a' a'' u)\, a_z = (a a' a'')\, u_z - (a a' u)\, a_z'';$$

und also wird:

$$\mu\,\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z \,.\, u_x = (m''-m')\, a_x''^{m''-1} a_z'' \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1},$$

d. h., da der Factor $(a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1}$ wegen der Willkürlichkeit der u immer als von Null verschieden angenommen werden darf: die Tangente von Δ in x fällt mit der von χ zusammen, w. z. b. w.

Ist aber x ein Doppelpunkt von $\chi = 0$, so verschwindet die rechte Seite unabhängig von z, also auch die linke, d. h. $\Delta = 0$ hat in x gleichfalls einen Doppelpunkt. Die Tangenten desselben werden wegen des Verschwindens von $a_x''^{m''-1} a_z''$ durch Nullsetzen des folgenden Ausdrucks gegeben, wo C ein Zahlenfactor ist:

$$\mu\,(\mu-1)\,\Delta_x^{\mu-2}\Delta_z^2 \,.\, u_x = C a_x''^{m''-2} a_z''^2 \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1},$$

d. h. die Tangenten des Doppelpunktes von Δ fallen mit denen des Doppelpunktes von χ zusammen.

Der somit bewiesene Satz lässt sich für den Fall verallgemeinern, dass der gemeinsame Punkt x für die Curven φ und ψ ein $(r-1)$-facher, für χ dagegen ein r-facher ist; wobei wir zunächst voraussetzen, dass die Tangenten der verschiedenen Curven in x von einander getrennt verlaufen. In dem Falle verschwinden die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ im Punkte x $(r-2)$-fach, $\frac{\partial \chi}{\partial x_i}$ aber $(r-1)$-fach. Die aus ihnen zusammengesetzte Determinante Δ wird daher Null von der Ordnung

$$2(r-2) + r - 1 = 3r - 5.$$

Die Curve $\Delta = 0$ hat also mindestens einen $(3r-5)$-fachen Punkt in x. Zur weiteren Untersuchung des letzteren bemerken wir, dass

die $(\mu - s)^{\text{te}}$ Polare von x in Bezug auf $\Delta = 0$ durch das Verschwinden des folgenden Ausdrucks gegeben ist:

$$(6)\qquad \mu(\mu-1)\ldots(\mu-s+1)\,.\,\Delta_x^{\mu-s}\Delta_z^s$$
$$= (a a' a'') \sum_{i=0}^{i=s}\sum_{k=0}^{k=s}\sum_{l=0}^{l=s}{}_{i+k+l=s}\; m_i' m_k' m_l'' a_x^{m'-i-1} a_x'^{m'-k-1} a_x''^{m'-l-1} a_z^i a_z'^k a_z''^l,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$m_i' = (m'-1)(m'-2)\ldots(m'-i)$$

und m_l'' entsprechend definirt sein soll. Wenn nun zufolge unserer obigen Annahmen unabhängig von den z die Gleichungen bestehen:

$$(7)\quad a_x^{m'-r+2} a_z^{r-2} = 0,\quad a_x'^{m'-r+2} a_z'^{r-2} = 0,\quad a_x''^{m''-r+1} a_z''^{r-1} = 0,$$

so fallen in obiger dreifachen Summe alle Glieder fort, welche einen der symbolischen Factoren $a_x^{m'-r+2}$, $a_x'^{m'-r+2}$, $a_x''^{m''-r+1}$ oder, was dasselbe ist, einen der Factoren a_z^{r-3}, $a_z'^{r-3}$, $a_z''^{r-2}$ enthalten; es bleiben also nur Glieder, die in Factoren

$$a_z^{r-2},\quad a_z'^{r-2},\quad a_z''^{r-1}$$

oder in höhere Potenzen von a_z, a_z', a_z'' multiplicirt sind. Für $s = 3r - 5$ ist aber wegen der Relation $i + k + l = s$ die höchste Potenz von a_z'', welche vorkommen kann, eben die $(r-1)^{\text{te}}$, indem:

$$r - 1 = 3r - 5 - 2(r-2).$$

Unsere Summe reducirt sich also abgesehen von einem Zahlenfactor auf das eine Glied

$$(a a' a'')\,.\,a_x^{m'-r+1} a_x'^{m'-r+1} a_x''^{m''-r} a_z^{r-2} a_z'^{r-2} a_z''^{r-1}.$$

Multipliciren wir dieses mit u_x und wenden wieder die Identität (3) an, so wird es eine lineare Combination der verschwindenden Ausdrücke (7), also ebenfalls Null: *$\Delta = 0$ hat in x einen $(3r-4)$-fachen Punkt.*

Wir untersuchen weiter die Tangenten von Δ in diesem Punkte; d. h. wir bilden die Summe (6) für $s = 3r - 4$. Es fallen in ihr wieder alle in a_z^{r-3}, $a_z'^{r-3}$, $a_z''^{r-2}$ multiplicirten Glieder fort, und wegen $i + k + l = 3r - 4$ ist die höchste Potenz, zu welcher a_z'' vorkommen darf, gleich

$$3r - 4 - 2(r-2) = r,$$

während die niedrigste gleich $r - 1$ ist. Sonach bleiben in jener Summe ein Glied

$$(8)\qquad (a a' a'')\, a_x^{m'-r+1} a_x'^{m'-r+1} a_x''^{m''-r-1} a_z^{r-2} a_z'^{r-2} a_z''^{r}$$

und zwei Glieder, deren Summe die symbolischen Factoren enthält:

(9) $$(a a' a'')\, a_z''^{\,r-1} a_z^{\,r-2} a_z'^{\,r-2} (a_z a_x' + a_x a_z').$$

Multipliciren wir diese Factoren mit u_x und wenden wieder die Identität (3) an, so werden sie gleich

$$a_x a_x' \left\{(a' a'' u)\, a_z - (a a'' u)\, a_z'\right\} a_z''^{\,r-1} a_z^{\,r-2} a_z'^{\,r-2},$$

und dies ist nach der Identität (5) gleich

$$a_x a_x' \left\{(a a' a'')\,.\,u_z - (a a' u)\, a_z''\right\} a_z''^{\,r-1} a_z^{\,r-2} a_z'^{\,r-2}.$$

Hier ist aber der erste Term das Glied, welches in der Entwicklung von $\Delta_x^{\mu-3r+5} \Delta_z^{3r-5}$ vorkommt, und daher Null; während der zweite Term den Factor $a_z''^{\,r}$ hat, wie das erste oben erwähnte Glied (8). Die Symbole a'' kommen aber in dem Klammerfactor $(a a' u)$ desselben nicht mehr vor, es enthält also auch den Factor $a_x''^{\,m''-r}$. Letzteren Factor können wir auch in dem Gliede (8) erkennen, wenn wir ebenfalls mit u_x multipliciren und die Identität (3) anwenden. Es bleibt dann wegen (7) gerade dasselbe Glied, auf welches wir die Summe (9) soeben reducirten; und demnach wird, wenn C einen Zahlenfactor bedeutet:

$$\Delta_x^{\mu-3r+4} \Delta_z^{3r-4} = C\,.\,a_x''^{\,m''-r} a_z''^{\,r}\,.\,(a a' u)\, a_x^{m'-r+1} a_x'^{\,m'-r+1} a_z^{r-2} a_z'^{\,r-2}.$$

Der Ausdruck links enthält also den Factor $a_x''^{\,m''-r} a_z''^{\,r}$, welcher das Product der r Tangenten von $\chi = 0$ in x bestimmt. Dies gibt den Satz:

Wenn zwei Curven gleicher Ordnung in einem gemeinsamen Punkte je einen $(r-1)$-fachen Punkt haben, und in demselben eine dritte Curve einen r-fachen Punkt besitzt (alle mit getrennten Tangenten), so hat die Jakobi*'sche Curve daselbst einen $(3r-4)$-fachen Punkt, von dessen Tangenten r mit den Tangenten jener dritten Curve in ihm zusammenfallen.*

Dieser Satz wird nicht modificirt, wenn von den Tangenten der Curve χ in x mehrere gruppenweise zusammenfallen. Haben dagegen etwa die Curven φ und ψ in x die $(r-1)$ Tangenten ihres vielfachen Punktes gemeinsam, so wird

$$a_x^{m'-r+1} a_z^{r-1} \text{ zu } a_x'^{\,m'-r+1} a_z'^{\,r-1}$$

proportional; und man erkennt, dass Δ einen $3(r-1)$-fachen Punkt erhält. Noch weitere Besonderheiten treten ein, wenn einzelne dieser gemeinsamen Tangenten von φ und ψ oder alle zugleich Tangenten des vielfachen Punktes von χ sind. —

Sind endlich alle drei Curven von gleicher Ordnung $(m = m' = m'')$, so kann man eine jede von ihnen durch irgend eine Curve des Systems

(10) $$\varkappa\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0$$

ersetzen, ohne die Jakobi'sche Curve zu ändern. Man nennt letztere in diesem Falle auch die Hesse'sche Curve des Systems und dieses selbst ein *Curvennetz. Die* Jakobi'*sche Curve ist also eine Combinante desselben* (vgl. p. 303). Ein Netz ist analytisch dadurch charakterisirt, dass eine seiner Curven von zwei Parametern linear abhängt, also geometrisch dadurch, dass alle Curven desselben, welche durch einen bestimmten Punkt gehen, einen Büschel bilden; denn setzt man die Coordinaten dieses Punktes in (4) ein, so kann man einen der Parameter $\frac{\varkappa}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ durch den andern linear ausdrücken. Das einfachste Beispiel eines Netzes bilden somit alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ feste Punkte gehen. Ein anderes Beispiel liefert uns die Gesammtheit der zu einer gegebenen Curve ($a_x^n = 0$) gehörenden ersten Polaren:

$$a_x^{n-1} a_y = 0,$$

wo dann $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ als die beiden linear vorkommenden Parameter aufzufassen sind. Für dieses Netz fällt die Hesse'sche Curve mit der Hesse'schen Curve der Grundcurve zusammen, denn wir können erstere überhaupt auch durch folgenden Satz definiren:

Es gibt in einem Curvennetze unendlich viele Curven mit einem Doppelpunkte; der Ort der letzteren ist die Hesse'*sche oder* Jakobi'*sche Curve des Netzes.* Die Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus den drei Gleichungen, welche die Bedingungen für einen Doppelpunkt darstellen:

$$\varkappa a_x^{m-1} a_i + \lambda a_x'^{m-1} a_i' + \mu a_x''^{m-1} a_i'' = 0,$$

führt nämlich in der That auf die Functionaldeterminante von φ, ψ, χ.

Wir können für diese Curve endlich noch eine dritte Definition geben. Es wird unendlich oft vorkommen, dass sich zwei und somit unendlich viele Curven des Netzes in einem Punkte berühren; denn dies erfordert die Erfüllung *einer* Bedingung für die beiden willkürlichen Parameter. Seien nun $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei solche sich berührende Curven des Netzes, so geht, wie wir früher zeigten (vgl. p. 366), jede Curve

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die v beliebige Werthe haben können, durch ihren Berührungspunkt. Dies ist aber, wenn wir

$$v_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$$

setzen, die Gleichung der Hesse'schen Curve unseres Netzes; und sonach folgt:

Die Hesse*'sche Curve eines Netzes ist der Ort der Punkte, in denen sich zwei Curven des Netzes berühren können.*

Für diese Curve gelten nun in Bezug auf ihr Verhalten gegen ausgezeichnete Punkte des Netzes ganz ähnliche Sätze, wie bei dem Netze der ersten Polaren für die singulären Punkte der Grundcurve. Wir erwähnen nur den folgenden: *In einem gemeinsamen Punkte aller Curven des Netzes hat die* Hesse*'sche Curve einen Doppelpunkt.**) Für $m' = m'' = m$ geht nämlich die Gleichung (4) über in

$$\mu \Delta_x^{\mu-1} \Delta_z . u_x = (m-1) \left\{ (a a' u) a_z'' + (a' a'' u) a_z + (a'' a u) a_z' \right\} a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1}$$
$$= (m-1)(a a' a'') a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1} . u_z = (m-1) \Delta_x^{\mu} . u_z ;$$

der Ausdruck $\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z$ verschwindet also unabhängig von den z, da nach dem Früheren für den gemeinsamen Punkt $\Delta = 0$ ist, w. z. b. w.

Bestehen dagegen für den Punkt x die Gleichungen:

$$(10) \quad a_x^{m-r+1} a_z^{r-1} = 0, \quad a_x'^{m-r+1} a_z'^{r-1} = 0, \quad a_x''^{m-r+1} a_z''^{r-1} = 0,$$

so hat die Jakobi'sche Curve in x jedenfalls einen $3(r-1)$-fachen Punkt, da die ersten Differentialquotienten von φ, ψ, χ jetzt noch je $(r-1)$-fach verschwinden, d. h. es ist

$$\Delta_x^{\mu-3r+4} \Delta_z^{3r-4} = 0 .$$

Bildet man aber weiter den Ausdruck $\Delta_x^{\mu-3r+3}\Delta_z^{3r-3}$ nach Gleichung (6), so dürfen in den Gliedern der Summe die Factoren a_z, a_z', a_z'' wegen (10) nur je zur $(r-1)^{\text{ten}}$ oder höheren Potenz vorkommen; denn z. B. zu dem Factor von a_z^{r-2} würde noch a_x^{m-r+1} hinzutreten müssen. Die Summe enthält daher nur das eine Glied

$$(a a' a'') a_x^{m-r} a_x'^{m-r} a_x''^{m-r} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1} .$$

Multiplicirt man dieses aber mit u_x und benutzt die Identität (3), so sieht man, dass es verschwinden muss. Aus ganz denselben Gründen reducirt sich der Ausdruck $\Delta_x^{\mu-3r+2}\Delta_z^{3r-2}$, abgesehen von einem Zahlenfactor auf die Terme:

$$(a a' a'') a_x^{m-r-1} a_x'^{m-r-1} a_x''^{m-r-1} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1} .$$
$$. \left\{ a_z a_x' a_x'' + a_x a_z' a_x'' + a_x a_x' a_z'' \right\} ;$$

und wenn man wieder nach Multiplication mit u_x auf jedes Glied die Identitäten (3) und (5) anwendet, so kommt:

---

*) Vgl. weitere Sätze dieser Art, sowie überhaupt für die Theorie der Netze Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven, besonders den Anhang in der deutschen Ausgabe. Ueber die Zahl der Curven mit Rückkehrpunkt und mit 2 Doppelpunkten in einem allgemeinen Netze vgl. de Jonquières: Math. Annalen, Bd. 1, p. 424.

$$(a a' a'') \left\{a_z a_x' a_x'' + a_x a_z' a_x'' + a_x a_x' a_z''\right\} . u_x$$
$$= a_x a_x' a_x'' \left\{(a a' u) a_z'' - (a a'' u) a_z' + (a' a'' u) a_z\right\}$$
$$= a_x a_x' a_x'' (a a' a'') . u_z .$$

Fügen wir endlich rechts wieder die anderen symbolischen Factoren hinzu, so erhalten wir das Glied der Entwicklung des verschwindenden Ausdrucks $\Delta_x^{\mu-3r+3}\Delta_z^{3r-3}$, d. h. es ist auch $\Delta_x^{\mu-3r+2}\Delta_z^{3r-2} = 0$.

Haben also alle Curven eines Netzes in einem festen Punkte einen r-fachen Punkt, so hat die Jakobi'*sche Curve daselbst einen* $(3r - 1)$-*fachen Punkt.*

Unserer ersten Auffassung zufolge erschien die Hesse'sche Curve als Ort der Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf alle Curven des Netzes sich in einem Punkte schneiden; diese Schnittpunkte werden eine andere Curve, *die* Steiner'*sche Curve des Netzes*, beschreiben, deren Gleichung sich durch Elimination der x aus den 3 Gleichungen

$$a_x^{m-1} a_z = 0, \quad a_x'^{m-1} a_z' = 0, \quad a_x''^{m-1} a_z'' = 0$$

ergibt; *die* Steiner'*sche Curve ist daher von der Ordnung* $3(m-1)^2$; sie ist ihrer Definition zufolge eindeutig auf die Hesse'sche Curve bezogen.

Eine dritte Curve endlich, *die* Cayley'*sche Curve des Netzes*, wird von den Verbindungslinien entsprechender Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve umhüllt; *sie ist von der Klasse* $3m(m-1)$. Es gilt nämlich überhaupt der Satz*):

Wenn zwei Curven der Ordnung m *und* m' *eindeutig auf einander bezogen sind, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve von der Klasse* $m + m'$.

Zum Beweise betrachten wir einen beliebigen Strahlbüschel. Jeder Strahl u desselben schneidet die eine Curve in m Punkten; einem jeden von diesen entspricht ein Punkt der andern Curve; die letzteren Punkte verbinden wir durch Linien v mit dem Scheitel des Büschels. Alsdann haben wir in diesem eine Correspondenz (vgl. p. 210) zwischen den Strahlen u und v der Art, dass jedem Strahle u m Strahlen v, und ebenso jedem Strahle v m' Strahlen u entsprechen. Nach dem Correspondenzprincipe von Chasles kommt es daher $(m + m')$-mal vor, dass zwei entsprechende Linien u und v zusammenfallen; d. h. durch einen beliebigen Punkt gehen $m + m'$ Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Curven, w. z. b. w.

Für die Singularitäten der Steiner'schen und Cayley'schen Curve gelten nun wieder analoge Sätze, wie für die entsprechenden

---

*) In ganz derselben Weise hätten wir die Klasse der Cayley'schen Curve einer Grundcurve $f = 0$ (p. 365) bestimmen können. — Die im Texte benutzte Anlage der Abzählung ist überhaupt bei derartigen Aufgaben sehr nützlich.

Verhältnisse bei dem Netze der ersten Polaren. Es ist diese Beziehung jedoch keineswegs der Art, dass jedes Curvennetz m^{ter} Ordnung als Polarensystem einer Curve $(m+1)^{ter}$ Ordnung aufgefasst werden kann. Drei beliebige Curven eines allgemeinen Netzes hängen nämlich zusammen von $\frac{3}{2} m (m+3)$ Constanten ab; drei beliebige Curven m^{ter} Ordnung eines Systems erster Polaren dagegen von den $\frac{(m+1)(m+4)}{2}$ Constanten der Grundcurve und den 6 Coordinaten ihrer drei Pole, zusammen also nur von $\frac{1}{2}(m+1)(m+4)+6$ Constanten. Beide Zahlen sind jedoch für $m=2$ einander gleich: *Ein Netz von Kegelschnitten kann daher nach dieser vorläufigen Abzählung immer als ein System von ersten Polaren einer Curve 3ter Ordnung angesehen werden.* In der später folgenden Theorie der Curven 3ter Ordnung werden wir hierauf noch näher eingehen.

Von den Netzen kann man weiter aufsteigen zur Untersuchung von Curvensystemen, die von 3, 4, ... Parametern abhängen, und somit bez. eine 3-fach, 4-fach, ... unendliche Mannigfaltigkeit repräsentiren; so kann man bei Curven n^{ter} Ordnung weiter gehen bis zu einem Systeme mit $\frac{1}{2} n (n+3)$ linear vorkommenden Parametern: ein System, welches dann die Gesammtheit *aller* Curven n^{ter} Ordnung umfasst. Der einfachste Typus für ein r-fach unendliches System wird dann immer durch die Gesammtheit der Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2} n (n+3) - r$ gemeinsamen Punkten gegeben sein. Dualistisch entsprechend wird man ferner Curvensysteme untersuchen müssen, deren Liniencoordinatengleichung eine gewisse Anzahl von Parametern linear enthält. Es ist aber bemerkenswerth, dass einem r-fach unendlichen Systeme von Curven n^{ter} Ordnung immer ein bestimmtes $\{\frac{1}{2} n (n+3) - r - 1\}$-fach unendliches System von Curven n^{ter} Klasse zugeordnet ist; und zwar geschieht dies in ähnlicher Weise, wie einer Linie u (d. i. einer Curve 1ter Ordnung, also $n=1$, $r=0$) vermöge der Bedingung

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{11}$$

ein 1-fach unendliches System von Punkten x, als „mit ihr vereinigt gelegen“ beigesellt ist. Zwei Curven

$$a_x{}^n = 0 \quad \text{und} \quad u_\alpha{}^n = 0$$

geben nämlich zu der simultanen, in den Coëfficienten beider linearen Invariante $a_\alpha{}^n$ Veranlassung. Fassen wir hierin die a als gegeben, die α als Parameter auf, *so wird der festen Curve $a_x{}^n = 0$ durch die Gleichung*

$$a_\alpha{}^n = 0$$

ein $(\frac{1}{2} n (n + 3) - 1)$*-fach unendliches lineares System von Curven* n^{ter} *Klasse als „mit jener Curve vereinigt gelegen" zugeordnet.**)

Ist allgemeiner ein lineares ∞^r-System gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda_0 a_x{}^n + \lambda_1 a'_x{}^n + \ldots + \lambda_r a^{(r)}{}_x{}^n = 0,$$

so gibt es ein System von Curven n^{ter} Klasse $v_\alpha{}^n = 0$, dessen Individuen die $r + 1$ Gleichungen

$$a_\alpha{}^n = 0, \quad a'_\alpha{}^n = 0, \ldots a^{(r)}{}_\alpha{}^n = 0$$

befriedigen, welches somit in der That noch von $\frac{1}{2} n (n + 3) - r - 1$ willkürlichen Parametern abhängig ist. *Dies System nennen wir mit jenem ersten in vereinigter Lage befindlich.***) Umgekehrt ist natürlich in dieser Weise auch mit einem Systeme

$$\lambda_0 u_\alpha{}^n + \lambda_1 u_{\alpha'}{}^n + \ldots + \lambda_r u_{\alpha^{(r)}}{}^n = 0$$

vermöge der $r + 1$ Gleichungen $a_{\alpha^{(i)}}{}^n = 0$ ein System von Curven $a_x{}^n = 0$ in vereinigter Lage. Sind insbesondere die $\alpha_k{}^{(i)}$ nicht Symbole von Formen $u_{\alpha^{(i)}}{}^n$, sondern Coordinaten wirklicher Punkte, so gehen die Curven des Systems $a_x{}^n = 0$ wirklich durch diese Punkte hindurch; in diesem Falle hat also unsere Bezeichnung eine unmittelbare geometrische Bedeutung. Eine solche kann man jedoch im Allgemeinen bisher nicht angeben; nur für Kegelschnitte ist die Bedeutung der Bedingung $a_\alpha{}^2 = 0$ bekannt (vgl. p. 295). Bei vereinigt gelegenen Kegelschnitten muss man streng unterscheiden, welcher in Punktcoordinaten, welcher in Liniencoordinaten gegeben vorausgesetzt wird, denn diese Curven sind von gleicher Ordnung und Klasse, und der Invariante A_{112} stellt sich sofort die andere A_{122} dualistisch entsprechend gegenüber (p. 289). Ist für $n = 2$ ins-

---

*) Man kann die Coëfficienten einer Curve n^{ter} Ordnung als selbstständige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots$ (Coordinaten) in einer Mannigfaltigkeit (Raum) von $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Dimensionen auffassen; dann entspricht jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit eine Curve n^{ter} Ordnung und den mit ihr vereinigt gelegenen Curven n^{ter} Klasse die $(\frac{1}{2} n (n + 3) - 1)$-fach unendlich vielen Ebenen ($u_x = 0$), welche durch den Punkt hindurchgehen. Den linearen Mannigfaltigkeiten verschiedener Stufe, welche durch das Schneiden verschiedener Ebenen $u_x = 0$, $v_x = 0, \ldots$ oder durch das Verbinden verschiedener Punkte entstehen, entsprechen dann die Curven-Büschel, -Netze, ... unserer Ebene und die mit ihnen vereinigt gelegenen Gebilde.

**) Rosanes gebraucht a. a. O. dafür das Wort conjugirt (vgl. die Anmerk. auf p. 295); für entsprechende Untersuchungen bei binären Formen vgl. ferner dessen Aufsatz: Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle's Journal, Bd. 76.

besondere $r = 2$, so liegt mit einem Kegelschnittnetze ein ebenfalls 2-fach unendliches System von Kegelschnitten *„ein Kegelschnittgewebe"* vereinigt; und beide Systeme stehen dann in mannigfachen interessanten Beziehungen zu einander. Wir werden hierauf noch bei den Curven dritter Ordnung zurückkommen. —

Die in einem Netze auftretenden Parameter können wir auch als Coordinaten eines Punktes der Ebene auffassen. Bezeichnen wir dieselben demgemäss mit y_1, y_2, y_3, so ordnet die Gleichung des Netzes:

$$\varphi y_1 + \psi y_2 + \chi y_3 = 0$$

jedem Punkte y eine Curve m^{ter} Ordnung und jedem Punkte x eine gerade Linie zu. Man kann dann entsprechend der Steiner'schen Curve einen Ort der Punkte y angeben, denen Curven mit Doppelpunkt entsprechen; und den Doppelpunkten derselben werden Curven mit zwei Doppelpunkten zugehören, ebenso wie in einem Netze von ersten Polaren (p. 369). Man kann ferner überhaupt Curvensysteme betrachten, die durch eine sowohl in den x als in den y homogene Gleichung von der Ordnung m, bez. n in den x und y:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$$

dargestellt werden. Es entspricht dann jedem Punkte x eine Curve n^{ter}, jedem Punkte y eine Curve m^{ter} Ordnung. Wir erwähnen nur einen auf sie bezüglichen Satz*), welcher als Erweiterung des Chasles'schen Correspondenzprincips (vgl. p. 210) für das ternäre Gebiet zu betrachten ist, und der für gewisse Abzählungen oft in ähnlicher Weise, wie jenes nützlich sein kann.

Sind nämlich zwei Curvensysteme der erwähnten Art gegeben:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}) = 0\,,$$

so entsprechen jedem Punkte x der Ebene $\alpha' = nn'$ Punkte y, die Schnittpunkte der beiden ihm durch $f = 0$ und $\varphi = 0$ zugeordneten Curven, und ebenso jedem Punkte y der Ebene $\alpha = mm'$ Punkte x: wir fragen nach solchen Punkten x, die mit einem der ihnen entsprechenden Punkte y zusammenfallen. Setzen wir demnach $x = y$ in den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, so erhalten wir die gesuchten Punkte *(Coincidenzpunkte)* als die Schnittpunkte der beiden Curven

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{x}) = 0\,, \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{x}) = 0\,;$$

ihre Zahl ist also gleich

*) Vgl. Salmon's Geometry of three dimensions, second edition, 1865, p. 511, oder p. 556 im 2. Theile der 2. Auflage von Fiedler's Bearbeitung, Leipzig 1874.

$$(m+n)(m'+n') = mm' + nn' + mn' + nm'$$
$$= \alpha + \alpha' + \beta,$$

wenn $\beta = mn' + nm'$ gesetzt wird. Die Zahl β ist hier gleich der Ordnung der Curve, welche ein Punkt y beschreibt, wenn x auf einer Geraden fortrückt. Die Gleichung dieser Curve ergibt sich nämlich, wenn wir in $f = 0$, $\varphi = 0$

$$x_i = z_i + \lambda t_i$$

setzen und λ eliminiren; das Eliminationsresultat ist aber dann gerade von der Ordnung $mn' + nm'$ in y. Von derselben Ordnung ist natürlich die Curve, welche x durchläuft, wenn y eine Gerade beschreibt.

Definirt man die Zahl β in dieser Weise geometrisch, so gilt unser Satz von der Zahl $\alpha + \alpha' + \beta$ auch noch, wenn die α bez. α' Punkte nicht als das vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven darstellbar sind, was immer eintreten muss, sobald α und α' Primzahlen bedeuten. Wir können den Satz aber noch allgemeiner aussprechen, wenn wir annehmen, dass für *alle* Punkte einer bestimmten Curve eine Coincidenz eintrete. Wir fragen dann nach der Zahl der nicht auf jener *„Coincidenzcurve“* gelegenen Coincidenzpunkte der Correspondenz.*)

Es mögen also einem Punkte x α' Punkte y, einem Punkte y α Punkte x entsprechen; es sei ferner β die Ordnung der Curve, welche die zu x gehörigen Punkte y durchlaufen, wenn x eine Gerade beschreibt. Letztere Annahme können wir offenbar auch so aussprechen, dass auf einer beliebigen Geraden β Punktepaare existiren sollen, so dass immer der eine Punkt unter der Gruppe der dem andern entsprechenden Punkte ist. In dieser Form ist β symmetrisch von den Punktgruppen x und y abhängig; *β ist daher zugleich die Ordnung der Curve, welche die zu y gehörigen Punkte x beschreiben, wenn y auf einer Geraden fortrückt.* Endlich bezeichnen wir mit γ die Ordnung der *„Coincidenzcurve“*, deren Punkte also sämmtlich Coincidenzpunkte sind, und mit δ die Klasse derjenigen Curve, deren Tangenten einen Punkt x der Coincidenzcurve mit dem ihm unendlich benachbarten, entsprechenden Punkte y verbinden.

Wir bestimmen nun zunächst die Ordnung einer Curve K_x, die von einem Punkte x durchlaufen wird, wenn seine Verbindungslinie mit einem der ihm zugeordneten α' Punkte y durch einen festen Punkt O gehen soll. Wir verbinden zu dem Zwecke O mit den Punkten x

*) Diese Ausdehnung des Satzes gab Zeuthen: Comptes rendus, Juni 1874. — Für den Fall, dass die Correspondenz durch zwei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ darstellbar ist, wird eine Coincidenzcurve dadurch entstehen, dass sich für $x = y$ von f und φ ein und derselbe Factor absondert.

einer beliebigen Geraden w durch Strahlen u. Jedem solchen Strahle u entsprechen dann α' Strahlen v, welche O mit den α' zu dem Schnittpunkte x von u und w gehörigen Punkten y verbinden. Jeder Linie v entsprechen dagegen β Strahlen u: die Verbindungslinien von O mit den Schnittpunkten der Linie w und der Curve von der Ordnung β, welche von den Punkten x beschrieben wird, wenn y den Strahl v durchläuft. Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe (p. 210) wird es nun $(\alpha + \beta)$-mal vorkommen, dass eine Linie u mit einer entsprechenden Linie v zusammenfällt. Von diesen Coincidenzstrahlen müssen wir jedoch γ ausschliessen: die Verbindungslinien von O mit den γ Schnittpunkt der Linie w und der Coincidenzcurve; denn jeder solchen Linie, aufgefasst als Strahl u, entspricht zufolge der Definition jener Coincidenzcurve ein unendlich benachbarter Strahl v. Es gibt auf w daher $\alpha' + \beta - \gamma$ Punkte, deren Verbindungslinien mit einem entsprechenden Punkte y durch O gehen, d. h. die gesuchte Ordnung der Curve K_x ist gleich $\alpha' + \beta - \gamma$. Ebenso ist der Ort der Punkte y, deren Verbindungslinien mit einem zugeordneten Punkte x durch O gehen, eine Curve K_y von der Ordnung $\alpha + \beta - \gamma$.

Wir nehmen ferner einen zweiten festen Punkt P und verbinden denselben mit den einander entsprechenden Punkten x und y, die paarweise auf einer durch O gehenden Geraden liegen, bez. durch Linien u' und v'. Jede Linie u' schneidet die zu O gehörige Curve K_x in $\alpha' + \beta - \gamma$ Punkten x; zu jedem der letzteren gehört ein Punkt y, dessen Verbindungslinie mit ihm durch O geht; also jeder Linie u' entsprechen $\alpha' + \beta - \gamma$ Linien v', und jeder Linie v' in analoger Weise $\alpha + \beta - \gamma$ Linien u'. Zwischen diesen Strahlen treten daher $\alpha + \alpha' + 2\beta - 2\gamma$ Coincidenzen ein. Von letzteren Coincidenzstrahlen entfallen aber $\beta - \gamma$ in die Verbindungslinie von O und P, denn diese enthält, wie jede beliebige Gerade, β Paare entsprechender Punkte x und y, von denen indess γ in die Schnittpunkte von w mit der Coincidenzcurve zusammenfallen. Die übrig bleibenden $\alpha + \alpha' + \beta - \gamma$ Coincidenzen geben zufolge unserer Construction die Verbindungslinien von P mit den Coincidenzpunkten der ursprünglichen Correspondenz in der Ebene. Unter ihnen sind aber noch die δ Verbindungslinien von P mit den δ Punkten der Coincidenzcurve enthalten, welche die ihnen zugehörigen Tangenten der oben definirten Klassencurve durch O schicken. Es gibt daher schliesslich $\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$ isolirt liegende Punkte, welche mit einem der ihnen zugeordneten zusammenfallen. Wir haben also das Theorem:

Es sei in der Ebene eine „Correspondenz" gegeben, vermöge deren jedem Punkte x α' Punkte y und jedem Punkte y α Punkte x entsprechen; es sei der Ort der Punkte x oder y, welche den Punkten einer beliebigen Geraden entsprechen, von der Ordnung β; die Correspondenz habe eine

„Coincidenzcurve" von der Ordnung γ; die Enveloppe der Verbindungslinien der Punkte dieser Curve mit den ihnen unendlich benachbarten zugehörigen Punkten sei von der Klasse δ): Alsdann gibt es in der Ebene*

$$\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$$

Punkte, in denen zwei entsprechende Punkte x und y zusammenfallen (Coincidenzpunkte).

Als eine Anwendung geben wir den Beweis für folgenden Satz:

Es gibt im Allgemeinen

$$(n-1)^2 + (n-1)(n'-1) + (n'-1)^2$$

Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf eine Curve n^{ter} und eine Curve n'^{ter} Ordnung zusammenfallen.

Sind nämlich $f = a_x^n = 0$, $\varphi = a_x'^{n'} = 0$ die beiden Curven, so gehören zu der linearen Polare eines Punktes x in Bezug auf $f = 0$ $(n'-1)^2$ Punkte x', deren lineare Polare diese Gerade in Bezug auf $\varphi = 0$ ist; wir haben also $\alpha' = (n'-1)^2$ und ebenso $\alpha = (n-1)^2$. Zur Bestimmung von β bemerken wir, dass die lineare Polare eines Punktes x in Bezug auf $f = 0$ eine Curve $(n-1)^{ter}$ Klasse umhüllt, wenn x eine Gerade durchläuft (vgl. p. 365). Jede Tangente dieser Curve ist wieder $(n'-1)^{te}$ Polare von $(n-1)^2$ Punkten x' in Bezug auf $\varphi = 0$; und alle diese Punkte x' bilden dann eine Curve der Ordnung $(n-1)(n'-1)$. Letzteres folgt aus dem allgemeinen Satze:

Wenn eine Gerade eine Curve μ^{ter} Klasse $u_\alpha^\mu = 0$ umhüllt, so beschreiben ihre $(m-1)^2$ Pole in Bezug auf eine Curve $a_x^m = 0$ eine Curve der Ordnung $\mu(m-1)$. Erhält man doch die Gleichung der letzteren unmittelbar, wenn man in $u_\alpha^\mu = 0$ für u_i die Werthe $a_i a_x^{m-1}$ einsetzt.

Wir haben also in unserm Falle $\beta = (n-1)(n'-1)$ zu nehmen; und somit ist (da $\gamma = \delta = 0$) in der That die Zahl der gesuchten Punkte gleich:

$$\alpha + \alpha' + \beta = (n-1)^2 + (n-1)(n'-1) + (n'-1)^2.$$

In diesem Falle hätten wir die gefundene Zahl auch leicht direct algebraisch ableiten können. Setzen wir nämlich $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, so müssen für die Coincidenzpunkte x folgende Gleichungen bestehen:

$$f_1 : f_2 : f_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

oder:

$$f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 = 0$$
$$f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 = 0$$
$$f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0$$

---

*) Wenn für die Beziehung der beiden benachbarten Curven γ^{ter} Ordnung keine besonderen Ausnahmepunkte vorhanden sind, so ist $\delta = 2\gamma$, vgl. p. 383.

Die ersten beiden sind je von der Ordnung $n - 1 + n' - 1$, haben also $(n - 1 + n' - 1)^2$ gemeinsame Lösungen. Hierunter sind aber auch die $(n - 1)(n' - 1)$ Schnittpunkte von $\varphi_2 = 0$, $f_2 = 0$, durch welche die Curve $f_3 \varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0$ nicht hindurchgeht. Die Zahl der *gemeinsamen* Lösungen aller *drei* Gleichungen ist daher

$$= (n-1+n'-1)^2 - (n-1)(n'-1) = (n-1)^2 + (n'-1)^2 + (n-1)(n'-1),$$

wie wir oben fanden.*)

Für den Fall $n = n'$ sind die resultirenden $3(n - 1)^2$ Coincidenzpunkte identisch mit den in dem Büschel $f + \lambda \varphi = 0$ auftretenden Doppelpunkten, denn die Bedingungen für einen solchen:

$$f_i + \lambda \varphi_i = 0$$

lassen sich nach Elimination von λ eben in der Form schreiben:

$$f_1 : f_2 : f_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 .$$

VI. Fortsetzung. — Die Methode der Charakteristiken.

Ausführlicher sind in neuerer Zeit solche Systeme von Curven untersucht, die noch von *einem* willkürlichen Parameter abhängen; und diese Betrachtungen haben insbesondere für die richtige Auffassung der Ausartungen algebraischer Curven zu wichtigen Resultaten geführt. Wir müssen uns jedoch im Folgenden darauf beschränken, die hierbei zu verfolgenden Gesichtspunkte zu kennzeichnen; nur bei den Kegelschnittsystemen werden wir etwas länger verweilen. Wir betreten hiermit ein Gebiet der Geometrie, das in neuerer Zeit sich zu einer immer vollständigeren Disciplin erhoben hat und demgemäss wohl auch als die „Geometrie der Anzahl" bezeichnet wird. —

Ein solches System von einfach unendlich vielen Curven lässt sich in folgender Form algebraisch darstellen: Die Coëfficienten der beweglichen Curve der Schaar ($f = 0$) sind algebraische, nicht nothwendig rationale Functionen *eines* Parameters λ. Ist diese Abhängigkeit eine irrationale, so kann man die Coëfficienten immer, wie die Theorie der algebraischen Functionen lehrt, *rational* durch *zwei* Parameter darstellen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, oder wenn wir noch einen Homogeneitätsfactor einführen, als ganze homogene Functionen gewisser Ordnung von λ_1, λ_2, λ_3, wo zwischen λ_1, λ_2, λ_3 eine homogene Gleichung besteht.

Für das Curvensystem sind nun besonders zwei Zahlen wichtig: *die Charakteristiken des Systems*, nämlich

*) Vgl. über solche Systeme von Gleichungen: Salmon-Fiedler: Raumgeometrie, Bd. 2, p. 519 ff. in der 2. Auflage, 1874.

μ, die Zahl der Curven des Systemes, welche durch einen beliebigen festen Punkt gehen, und

ν, die Zahl der Curven des Systems, welche eine beliebige feste Gerade berühren*);

und zwar reichen diese Zahlen für Kegelschnittsysteme aus, während bei höheren Curven noch andere Zahlen hinzutreten (vgl. unten).

Die Zahl μ stimmt, wenn die Coëfficienten der beweglichen Curve rationale Functionen eines Parameters sind, mit der Dimension überein, zu der letzterer in der Gleichung $f = 0$ des Systems in Punktcoordinaten vorkommt. Die Zahl ν wird alsdann im Allgemeinen die Dimension angeben, zu welcher dieser Parameter in die Gleichung $\varphi = 0$ des Systems in Liniencoordinaten eingeht, also bei Curven n^{ter} Ordnung gleich $2\mu(n-1)$ sein, da φ vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten von f ist.**) Es kann jedoch eintreten — und wir setzen im Folgenden solche Vorkommnisse im Allgemeinen voraus —, dass in dem Systeme Curven enthalten sind, die eine jede beliebige Gerade berühren, indem nämlich eine der Curven n^{ter} Ordnung z. B. in eine $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und eine doppelt zählende Gerade zerfällt, oder überhaupt einen mehrfach zählenden Zweig enthält. Alle solche Curven, welche der Gleichung $\varphi = 0$ identisch genügen, würden unter der Zahl $2\mu(n-1)$ mit einbegriffen sein, während wir unter der Zahl ν nur die *eigentlich* berührenden Curven verstehen wollen. Ebenso soll μ nur die Zahl der in eigentlichem Sinne durch einen Punkt gehenden Curven angeben, ohne Berücksichtigung derjenigen, die etwa einen doppelt zählenden Punkt enthalten und so in gewissem Sinne durch jeden Punkt hindurchgehen: Curven, die dann freilich nur durch die Liniencoordinatengleichung vollständig darstellbar sind.

Eben diese Vorkommnisse machen es für die algebraischen Untersuchungen nothwendig, immer gleichzeitig die beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ im Auge zu haben. Bei der geometrischen Betrachtung erscheinen diese *„singulären Curven“* mit mehrfach zählenden Zweigen, wenn man eine allgemeine Curve allmählich degeneriren lässt.***) Geht man dabei von der Punktauffassung aus, lässt also z. B.

---

*) Diese Charakteristiken wurden von Chasles zuerst eingeführt, welchem überhaupt die Entstehung der *Charakteristikentheorie* zu verdanken ist. Letztere wurde ferner durch de Jonquières, Cayley, Salmon, Zeuthen gefördert. Vgl. besonders die zusammenfassende Arbeit von Cayley: On the curves, wich satisfy given conditions, Philos. Transactions, London 1868, vol. 158; ferner Salmon's Higher plane curves und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven. Einen vollständigeren Literaturnachweis findet man bei Cayley a. a. O. und bei Painvin: Bulletin des sciences math. t. 3, p. 155.

**) Auf diese Annahmen beziehen sich die ersten Untersuchungen von de Jonquières.

***) Vgl. Beispiele hiefür auf p. 343 und p. 346.

zu den etwa schon vorhandenen Doppelpunkten noch einen weiteren hinzutreten, oder einen Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen, so stellt sich bei der Linienauffassung diese Reduction dadurch dar, dass sich von der Curve ein einzelner auf ihr liegender Punkt, eventuell mehrfach zählend, absondert. Einen solchen Punkt, in dem die betreffende Curve als von jeder durch ihn gehenden anderen Curve berührt anzusehen ist*), nennen wir einen *Klassenscheitel (sommet* nach Chasles). Ebenso werden sich einzelne, eventuell mehrfach zählende Gerade absondern können, die bei der Linienauffassung allein unberücksichtigt bleiben würden; wir bezeichnen sie als *Ordnungsstrahlen.* Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass es zur Bestimmung der Zahlen μ, ν für ein System vor allen Dingen nothwendig ist, die singulären Curven des Systems vollständig zu kennen; und in Bestimmung der letzteren, besonders der Vielfachheit etwa auftretender Ordnungsstrahlen und Klassenscheitel, liegt meist die Hauptschwierigkeit.

Wir erläutern diese Verhältnisse zunächst an den *Kegelschnittsystemen.* In einem solchen sind folgende singuläre Curven möglich:

1) bei der Punktauffassung:

Linienpaar, dessen Doppelpunkt dann ein Klassenscheitel ist, und

Doppellinie, selbst ein Ordnungsstrahl, auf dem dann zwei getrennt liegende oder zusammenfallende Klassenscheitel liegen;

2) bei der Linienauffassung:

Punktepaar, deren Verbindungslinie Ordnungsstrahl ist,

Doppelpunkt, selbst ein Klassenscheitel, durch den zwei getrennte oder zusammenfallende Ordnungsstrahlen gehen.

Wir bestimmen zunächst die Zahl

λ der vorkommenden Doppellinien

π „ „ „ Doppelpunkte.

Durch jeden Punkt einer beliebigen Geraden gehen μ Curven des Systems, von denen jede die Gerade noch in einem Punkte y schneidet; ebenso sind jedem Punkte y μ Punkte x auf der Geraden zugeordnet; wir haben also 2μ Coincidenzen. Diese entstehen entweder durch Berührung der Geraden mit einem eigentlichen Kegelschnitte, oder durch den Schnitt mit einer Doppellinie; es gibt aber ν eigentlich berührende Kegelschnitte, und also haben wir:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \lambda &= 2\mu - \nu \\ \pi &= 2\nu - \mu. \end{aligned}$$

*) Ein Klassenscheitel braucht nicht in einem einzelnen vielfachen Punkte zu liegen, wie in dem Beispiel, er kann auch auf einem vielfach zählenden Zweige der Curve beliebig liegen (vgl. p. 417, Anmk.).

Vermöge dieser Gleichungen kann man die Charakteristiken μ, ν eines Systems, wenn dies nicht direct gelingt, mittelst der Zahlen λ, π bestimmen, sobald man letztere kennt; und auf diese Bestimmungen beziehen sich besonders die Untersuchungen von Zeuthen. Dieselben sind noch einfach für die durch die sogenannten *Elementarbedingungen* gegebenen Systeme, d. h. wenn verlangt wird, dass die Kegelschnitte durch vier Punkte gehen sollen, oder durch drei Punkte gehen und eine Gerade berühren, etc.: Systeme, die wir kurz durch die Symbole

(::), (.˙.|), (..||), (.|||), (||||)

bezeichnen wollen. Wir stellen in der folgenden Tabelle die sich hier weiterhin für μ, ν, λ, π ergebenden Werthe zusammen:

(2)

	μ	ν	λ	π
(::)	1	2	0	3
(.˙.|)	2	4	0	6
(..||)	4	4	4	4
(.|||)	4	2	6	0
(||||)	2	1	3	0

Die Systeme (::) und (||||) sind schon in der Kegelschnitttheorie eingehend behandelt.

In Betreff der analytischen Darstellung des Systems (.˙.|) bemerken wir Folgendes. Die drei festen Punkte nehmen wir zu Ecken des Coordinatendreiecks; die Gleichung eines durch sie gehenden Kegelschnittes ist dann

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Sind ferner u_i die Coordinaten der festen Tangente, so haben wir noch die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung der Determinante gibt aber gerade das Product der vier Werthe, welche der Ausdruck

$$\sqrt{a_{23}u_1} \pm \sqrt{a_{31}u_2} \pm \sqrt{a_{12}u_3}$$

je nach Benutzung der Vorzeichen annimmt. Setzen wir also:

$$a_{23}u_1 = \lambda_1^2, \quad a_{31}u_2 = \lambda_2^2, \quad a_{12}u_3 = \lambda_3^2,$$

so ist die *Gleichung des Systems* (.˙.|):

(3) $$\frac{\lambda_1^2}{u_1} x_2 x_3 + \frac{\lambda_2^2}{u_2} x_3 x_1 + \frac{\lambda_3^2}{u_3} x_1 x_2 = 0,$$

wo:

(4) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Da hier λ_1, λ_2, λ_3 quadratisch vorkommen, ist $\mu = 2$.

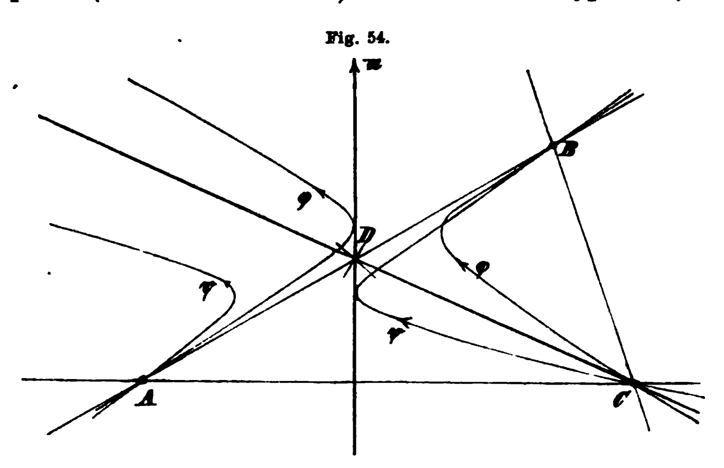
In dem Systeme sind drei Linienpaare enthalten, gegeben durch das Verschwinden der Determinante. Da diese $\left(\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{u_1^2 u_2^2 u_3^2}\right)$ aber ein vollständiges Quadrat ist, so zählt jedes Paar doppelt, ebenso also auch jeder der drei Scheitel; daher die Zahl $\pi = 6$ in der Tabelle. Diese Scheitel sind die Schnittpunkte der drei Dreiecksseiten mit der festen Geraden; jede Seite wird durch die Verbindungslinie des auf ihr liegenden Scheitels mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks zu einer Curve des Systems ergänzt. Doppellinien sind nicht vorhanden, es ist daher $\nu = 4$ und $\lambda = 0$; in der That sondert sich bei Bildung der Liniencoordinatengleichung kein Factor ab.

Von dem Umstande, dass die drei Linienpaare als Kegelschnitte des Systems doppelt zu zählen sind, kann man sich auch in folgender Weise rein geometrisch Rechenschaft geben. Wir verfolgen zunächst, wie in einem linearen Curvensysteme ein Kegelschnitt allmählich in ein Linienpaar oder Punktepaar übergeht. In einem Büschel müssen wir uns ein Linienpaar offenbar dadurch entstanden denken, dass in dem einen Winkelraume desselben die Zweige einer Hyperbel sich immer enger an die Gestalt des Linienpaares anlegen, um dann, in stetiger Fortsetzung ihrer Bewegung, nach Erreichung dieser Grenzlage, sich in dem andern Winkelraume wieder von demselben zu entfernen. Das Linienpaar wird dabei offenbar nur einmal durchlaufen: es zählt nur einfach. Entsprechend ist es beim Punktepaare in einer Kegelschnittschaar mit vier gemeinsamen Tangenten (z. B. einem confocalen Systeme): eine Ellipse zieht sich immer mehr um die Punkte des Paares zusammen, bis sie schliesslich die zwischen den Punkten liegende Strecke ihrer Verbindungslinie doppelt überdeckt, wo sie dann als Liniengebilde eben durch die beiden Punkte (Klassenscheitel) dargestellt ist. Gehen wir zu der nächst benachbarten Curve weiter, so ist dieselbe eine Hyperbel, welche sich an die beiden von den zwei Punkten aus sich in's Unendliche erstreckenden Zweige der Geraden eng anlegt und so diesen Theil der Linie doppelt überdeckt. Beim Fortschreiten zu weiteren Curven werden dann die Zweige der Hyperbeln immer steiler gegen jene Doppellinie. Das Punktepaar ist offenbar wieder einfach zu zählen; es bildet eine einfache Durchgangslage der Curven des Systems.

Anders ist dies bei dem uns vorliegenden Systeme $(\ldots|)$, wie in Fig. 54 schematisch veranschaulicht ist. Es sind hier A, B, C die

drei festen Punkte, u ist die feste Tangente. Einem der bezeichneten Linienpaare (mit dem Scheitel D) nähert sich die Hyperbel φ, deren

Fig. 54.



einer Zweig die Linie u berührt, während der andere ihr von der andern Seite her unendlich nahe kommt. Nachdem das Linienpaar erreicht ist, tritt die Hyperbel mit ihren Zweigen nicht bez. in die benachbarten Winkelräume über, sondern geht zurück, indem sie die Lage der Curve ψ in der Figur annimmt: sie verhält sich in dem Curvensysteme gewissermassen wie ein Rückkehrpunkt auf einer algebraischen Curve und muss daher, wie dieser, *doppelt* gezählt werden. —

Zur Darstellung des sich selbst dualistischen Systems (..||) nehmen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden als Ecke $u_1 = 0$ des Coordinatendreiecks, die Verbindungslinie der beiden Punkte als Seite $x_1 = 0$. Die übrigen Elemente des Dreiecks bestimmen wir so, dass die beiden gegebenen Punkte harmonisch zu den Punkten $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, und gleichzeitig die gegebenen Geraden harmonisch zu $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sind. Die Gleichung des Kegelschnittes hat dann die Form:

$$a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + 2\, a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0,$$

wo $a_{22} : a_{33} = c$ eine Constante ist. Ebenso muss in der Liniencoordinatengleichung

$$\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} = c'$$

constant sein, und das Glied mit $u_2 u_3$ fehlen, was die Bedingung gibt:

$$a_{12} \,.\, a_{13} = \Theta.$$

Jede der Annahmen $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ genügt also den gestellten Forderungen, und wir haben den Satz:

*Das Kegelschnittsystem mit zwei festen Punkten und zwei festen Tangenten ist reducibel, d. h. zerfällt in zwei völlig getrennte Systeme.**)

Setzen wir nun z. B. $a_{12} = 0$ und

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22} = c\,a_{33}, \quad \lambda_3 = a_{13},$$

so wird die *Gleichung des einen Systems:*

$$(5) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{c}\lambda_2 (c x_2^2 + x_3^2) + 2\lambda_3 x_1 x_3 = 0,$$

wo die Bedingung besteht:

$$(6) \qquad \lambda_1 \lambda_2 (c - c') + c c' \lambda_3^2 = 0.$$

Durch jeden Punkt gehen also noch zwei Kegelschnitte; ebenso im Systeme $a_{13} = 0$; es ist hier also $\mu = 4$, und wegen der Dualität auch $\nu = 4$. Daraus folgt ferner wegen (1): $\lambda = \pi = 4$. In der That für zerfallende Kegelschnitte muss die Discriminante

$$\lambda_1 \lambda_2^2 + c \lambda_3^2 \lambda_2$$

verschwinden. Die beiden Gleichungen

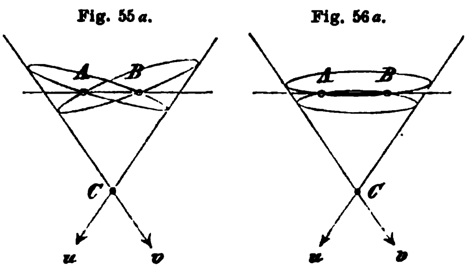
$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 - c\lambda_3^2 = 0$$

führen aber wegen der Bedingungsgleichung zu demselben Resultate:

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3^2 = 0.$$

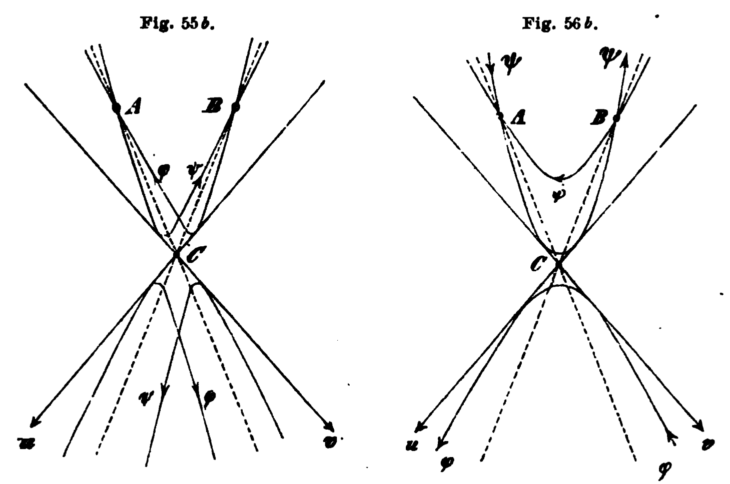
Es gibt daher in jedem der beiden Systeme nur eine Doppellinie ($x_1^2 = 0$) als singuläre Curve, die Verbindungslinie der beiden Punkte; und dieselbe zählt in jedem Systeme (wegen $\lambda_3^2 = 0$) doppelt, im Ganzen also vierfach ($\lambda = 4$). Ebenso gibt es einen vierfach zählenden Scheitel ($\pi = 4$): den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden.

Von der Vielfachheit der singulären Curven können wir uns durch eine ähnliche geometrische Ueberlegung Rechenschaft geben, wie bei dem Systeme (...|). In Fig. 55a, und 56a sind je zwei Kegelschnitte der beiden Systeme, in die das System (..||) zerfällt, kurz vor und kurz nach der Grenzlage dargestellt, welche durch die Doppellinie $\overline{AB}$ angezeigt ist. Die beiden Systeme unterscheiden sich, wie man sieht, dadurch, dass in dem einen je zwei Curven sich



*) Dies ist evident, wenn man die beiden festen Punkte in die Kreispunkte fallen lässt. Die Kreise des einen Systems liegen dann in dem einen Winkelraume zwischen den beiden festen Tangenten, die des andern in dem andern Winkelraume.

immer, in dem andern nicht immer in vier reellen Punkten schneiden. Durch den Umstand, dass die unendlich flach gewordene Ellipse sich nicht wieder in der oben (p. 394) geschilderten Weise zu einer Hyperbel erweitert, sondern sogleich in eine benachbarte Ellipse übergeht, ohne dass also die unendlichen Aeste der Doppellinie von einer unendlich flachen Hyperbel überdeckt würden, ist es hier angezeigt, dass die Doppellinie zweifach zählen muss; sie verhält sich eben wie ein Rückkehrpunkt einer algebraischen Curve. Ganz dualistisch entsprechend geschieht in den beiden Systemen die allmählige Annäherung an den Schnittpunkt C der beiden gegebenen Geraden u, v, was aus Fig. 55 *b* und 56 *b* ersichtlich sein wird. Die Tangenten der Hyperbeln



in den Punkten A, B nähern sich immer mehr den Linien AC, BC, dem entsprechend, dass in ersteren Figuren die Berührungspunkte der Ellipsen immer mehr an die Schnittpunkte der Doppellinie mit u und v heranrücken.*) —

Die von uns eingeführten Charakteristiken μ, ν, statt deren man wegen der linearen Gleichungen (1) auch λ, $\varkappa$ anwenden kann, werden nun von fundamentaler Bedeutung durch einen von Chasles zuerst durch Induction gefundenen Satz. Nach diesem ist die Zahl der Kegelschnitte eines Systems (μ, ν), welche noch einer fünften Bedingung genügen, immer von der Form

$$\alpha\mu + \beta\nu,$$

wo die Zahlen α, β von dem Kegelschnittsysteme vollständig unabhängig sind, sich vielmehr allein aus der Natur der hinzutretenden

*) Durch unsere geometrische Ueberlegung ist eigentlich nur entschieden, ob die Vielfachheit der betreffenden Curve durch eine gerade oder ungerade Zahl gegeben wird.

Bedingung bestimmen. Man nennt letztere Zahlen daher die *Charakteristiken der Bedingung.* *) Wir beweisen den wichtigen Satz in folgender Weise.

Für die Coëfficienten a_{ik} der Punktgleichung eines Kegelschnittes seien die vier Bedingungsgleichungen

$$(7) \qquad \Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0$$

gegeben, welche den Kegelschnitt in invariante Beziehungen zu festen Punkten, Linien oder Curven setzen. Dadurch ist dann ein Kegelschnittsystem unserer Art festgelegt. Wir nehmen an, dass diese vier Gleichungen zusammen mit einer fünften, welche in den Coëfficienten des veränderlichen Kegelschnittes linear ist, für diese Coëfficienten μ verschiedene Werthe zulassen. Alsdann ist μ die eine Charakteristik des Systems, denn die Forderung, dass der Kegelschnitt einen bestimmten Punkt enthalte, gibt eben eine lineare Gleichung für die a_{ik}. **) In Folge dieser Annahme ist nach einem bekannten Satze der Algebra μ von dem Grade der Gleichungen $\Pi_i = 0$ in den a_{ik} abhängig, und zwar ist, wenn q_i den Grad von Π_i bezeichnet:

$$\mu = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 .$$

Tritt nun zu den Gleichungen (7) statt der linearen eine Gleichung $\Pi_5 = 0$ vom Grade q_5 in den a_{ik}, so wird die Zahl der gemeinsamen Lösungen aller 5 Gleichungen gleich

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 = \mu \cdot q_5 .$$

Unter diesen μq_5 Kegelschnitten des Systems sind aber möglicher Weise noch zerfallende enthalten, welche die Bedingung $\Pi_5 = 0$ identisch erfüllen, während wir nur nach der Zahl der eigentlichen Kegelschnitte fragen, die den gestellten Bedingungen genügen. Jedenfalls ist darunter nicht jedes Linienpaar; denn alsdann müsste Π_5 den Factor $(abc)^2$ $(= \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33})$ enthalten; und wir wollen Π_5 als irreducibel voraussetzen. Für eine Doppellinie dagegen verschwindet bekanntlich die linke Seite der Liniencoordinatengleichung $F = (abu)^2 = u_\alpha^2$ unabhängig von den u; es wird daher *jede* in unserm Systeme enthaltene Doppellinie der Bedingung $\Pi_5 = 0$ genügen, sobald die Coëfficienten a_{ik} in Π_5 sich theilweise der Art zu Coëfficienten α_{ik} der Liniencoordinatengleichung vereinigen lassen, dass die letzteren homogen in Π_5 vorkommen. Es wird dann jede der λ Doppellinien β-mal

*) Vorausgesetzt wird dabei, dass die hinzutretende Bedingung in gewisser Weise von den das System bestimmenden Bedingungen unabhängig sei (vgl. p. 400).

**) Es kommt also nur darauf an, dass diese Gleichung linear ist. Man kann daher im Folgenden die Bedingung, dass ein Kegelschnitt durch einen Punkt gehe, z. B. durch die andere ersetzen, dass er mit einem festen Kegelschnitte $u_\alpha^2 = 0$ in vereinigter Lage (p. 385) sei.

als eine Lösung unseres Problems zu zählen sein, wenn wir mit β den Grad bezeichnen, zu welchem Π_5 die α_{ik} enthält. Bezeichnen wir ferner mit α den Grad, zu welchem die Coëfficienten a_{ik} ausserdem noch in Π_5 eingehen (d. h. ausser in den α_{ik}), wo dann*)

$$q_5 = \alpha + 2\beta,$$

so wird die Zahl der eigentlichen Lösungen gleich

$$q_5\mu - \beta\lambda = \alpha\mu + \beta(2\mu - \lambda),$$

oder wegen der Gleichungen (1):

$$= \alpha\mu + \beta\nu, \text{ q. e. d.}$$

Bei dieser Betrachtung ist zunächst vorausgesetzt, dass die Bedingungen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$, $\Pi_4 = 0$ nicht alle durch jede beliebige Doppellinie erfüllt werden. Dies würde eintreten, wenn Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 selbst auch homogen in den α_{ik} sind. Alsdann werden einer fünften linearen Bedingung unendlich viele Doppellinien genügen; aber unser Resultat bleibt auch dann gültig, wenn wir unter μ die Zahl der *eigentlichen* Kegelschnitte verstehen, welche einer hinzutretenden linearen Bedingung genügen. Wird letztere durch eine Bedingung vom Grade $q_5 = \alpha + 2\beta$ ersetzt, so ist die Zahl der eigentlichen Lösungen zunächst wieder gleich $q_5\mu$ (und davon ist noch die Zahl $\beta\lambda$ abzuziehen). Den Beweis hierfür erbringen wir durch einen Satz, der zugleich eine andere Verallgemeinerung unserer Betrachtung zur Folge hat; derselbe lautet:

Wenn ein System von Gleichungen (zwischen einer beliebigen Zahl von Unbekannten) zusammen mit einer linearen Gleichung μ Lösungen zulässt, so hat dasselbe zusammen mit einer Gleichung q^{ten} Grades μq Lösungen; und zwar gilt dies auch, wenn es ausserdem einfach unendlich viele Lösungen gibt, welche jene lineare Gleichung und die Gleichungen des gegebenen Systems identisch befriedigen.

Zum Beweise denken wir uns aus dem gegebenen Gleichungssysteme die Unbekannten als Functionen φ_i ϱ^{ten} Grades dreier homogen vorkommenden Parameter r, s, t berechnet, zwischen denen noch eine algebraische Gleichung σ^{ter} Ordnung besteht:

$$\Phi(r, s, t) = 0.$$

Führen wir die Parameter dann in eine hinzutretende lineare Gleichung ein, so geht letztere in eine Gleichung $\Psi = 0$ von der ϱ^{ten} Ordnung über, gibt also mit $\Phi = 0$ zusammen $\varrho\sigma$ Lösungen. Sollen aber einfach unendlich viele Lösungen möglich sein, so müssen

*) Diese Bedeutung der Zahlen α, β gab Clebsch bei Gelegenheit eines im Uebrigen etwas anders angelegten Beweises für den Chasles'schen Satz: Math. Annalen, Bd. 6, p. 1.

die Functionen Φ und Ψ einen Factor, sagen wir τ^{ter} Ordnung, gemein haben; und soll dies für *jede* lineare Combination Ψ der φ_i eintreten, so muss dieser Factor in jeder der Functionen φ_i enthalten sein. Derselbe Factor wird sich daher von jeder Gleichung q^{ten} Grades, welche an Stelle der linearen tritt, q-fach absondern. Eine solche hat folglich zusammen mit $\Phi = 0$

$$q\,(\varrho - \tau)\,(\sigma - \tau) = q \,.\, \mu$$

Lösungen, wo nun in der That $\mu = (\varrho - \tau)\,(\sigma - \tau)$ die Zahl der eigentlichen Lösungen von $\Phi = 0$ mit einer linearen Gleichung $\Psi = 0$ bedeutet. — Diesen Satz hat man nur an Stelle des andern über die Zahl der gemeinsamen Lösungen von 5 Gleichungen zu benutzen; alsdann behält obiger Beweis im Uebrigen seine Gültigkeit. Zugleich erkennt man aber, dass der Chasles'sche Satz auch für ein Kegelschnittsystem gilt, welches nicht durch 4 getrennte Bedingungen gegeben ist, sondern durch ein mit 4 Bedingungen äquivalentes System von mehr Gleichungen dargestellt wird.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass die Bedingung Π_5 in gewisser Weise „*unabhängig von dem gegebenen Systeme*" sein muss; d. h. sie darf nicht durch die Bedingungen des Systems schon identisch erfüllt sein. In dem Falle müsste man durch einen Grenzübergang zum Verschwinden sämmtlicher Coëfficienten einer Covariante etc. übergehen, um die Natur der hinzutretenden Bedingung ausdrücken zu können. Dies ist z. B. der Fall, wenn das Kegelschnittsystem eine feste Curve nochmals berühren soll, welche jeder Kegelschnitt des Systems ohnedies schon berührt. Diese Beschränkung trifft keineswegs *alle* Fälle, in denen die Elemente der Bedingung von den bedingenden Elementen der Curvenreihe selbst abhängen, sondern eben nur diejenigen, die nicht mehr durch das Verschwinden einer einzelnen Invariante ausdrückbar sind. — Wir haben somit den Satz*):

Unter den Kegelschnitten einer Reihe mit den Charakteristiken μ, ν gibt es $\alpha\mu + \beta\nu$, welche einer fünften Bedingung genügen, wenn letztere durch das Verschwinden einer invarianten Bildung vom Grade α in den Coëfficienten der Punktgleichung, vom Grade β in denen der Liniengleichung des variabeln Kegelschnittes gegeben ist.

Durch unseren Beweis sind somit die Charakteristiken einer Bedingung algebraisch definirt. Für eine geometrisch gegebene Bedingung ist jedoch die Bildung des Ausdrucks Π_5 im Allgemeinen nicht bekannt; und es bietet sich daher zunächst die Aufgabe, für eine solche die Charakteristiken α, β in anderer Weise zu bestimmen.

---

*) Einen anderen (weniger kurzen, auf Betrachtungen über das Chasles'sche Correspondenzprincip beruhenden) Beweis gab Halphen: Bulletin de la société mathématique de France, t. 1, 1873, p. 130.

Man kann zu diesem Ziele oft einfach gelangen, indem man die Zahlen r, s der Kegelschnitte aus den einfachsten Systemen (::) und (||||) für die Bedingung irgendwie direct feststellt und dann aus den Gleichungen

$$(8)\qquad \alpha + 2\beta = r, \quad 2\alpha + \beta = s$$

α und β berechnet. Wir haben z. B. gesehen (vgl. p. 375), dass es in einem Curvenbüschel m^{ter} Ordnung

$$2(nm + p - 1) - r$$

Curven gibt, welche eine feste Curve der Ordnung n, vom Geschlechte p, mit r Rückkehrpunkten berührt. Bezeichnen wir mit k die Klasse dieser Curve, so ist nach den Plücker'schen Formeln (p. 351):

$$2p - 2 = k + r - 2n,$$

und somit die angeführte Zahl gleich

$$2n(m - 1) + k.$$

Für das Kegelschnittsystem (::) haben wir also, da $m = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 2$:

$$\alpha + 2\beta = 2n + k,$$

und dualistisch entsprechend für das System (||||):

$$2\alpha + \beta = 2k + n;$$

woraus man findet:

$$\alpha = k, \quad \beta = n.$$

Die Charakteristiken α, β für die Bedingung der Berührung mit einer festen Curve sind also bez. gleich Klasse und Ordnung dieser Curve); d. h. es gibt in einer Kegelschnittreihe (μ, ν)*

$$k\mu + n\nu$$

Kegelschnitte, die eine feste Curve n^{ter} Ordnung, k^{ter} Klasse berühren.

Ein Beispiel für die Bestimmung der Zahlen α, β aus der algebraischen Darstellung gibt die Forderung, dass ein Kegelschnitt des Systems die Entfernung zweier festen Punkte harmonisch, oder allgemeiner nach einem gegebenen Doppelverhältnisse δ theilen soll. Sind x, y die beiden Punkte, so haben wir die Bedingung (vgl. p. 74):

$$\Pi_5 = a_x^2 b_y^2 (\delta + 1)^2 - 4\delta \,.\, a_x a_y \,.\, b_x b_y = 0,$$

und hierin ist $\alpha = 2$, $\beta = 0$, da eine Umformung von Π_5, durch die Factoren (abu) auftreten würden, nicht möglich ist. Demnach folgt das Resultat

*) Man kann diese Zahlen nach Chasles auch durch Betrachtung des Ortes der Punkte ableiten, deren lineare Polare in Bezug auf eine Curve des Systems zusammenfällt mit ihren linearen Polaren in Bezug auf die feste Curve.

In einer Reihe mit den Charakteristiken μ, ν gibt es 2μ Kegelschnitte, welche eine gegebene Strecke nach gegebenem Doppelverhältnisse theilen.

Eine Ausnahme tritt für $\vartheta = -1$ ein, denn hier wird Π_5 ein vollständiges Quadrat:

Es gibt daher μ Kegelschnitte, welche die gegebene Strecke harmonisch theilen.

Für $\vartheta = +1$ kommen wir wieder auf die Bedingung der Berührung. In der That wird

$$\Pi_5 = 4\, a_x b_y (a_x b_y - b_x a_y) = 2\,(abu)^2,$$

wenn u_i die Coordinaten der Verbindungslinie von x und y sind; und also ist: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, wie es sein muss. —

Der zuvor bewiesene Satz von Chasles ist um so wichtiger, als es vermöge desselben überhaupt gelingt, die Zahl der Kegelschnitte anzugeben, welche 5 einzelnen Bedingungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0, \quad \Pi_5 = 0$$

genügen, wenn deren Charakteristiken

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3, \beta_3; \quad \alpha_4, \beta_4; \quad \alpha_5, \beta_5$$

bekannt sind. Diese Zahl nämlich muss nach dem Chasles'schen Satze linear in den Charakteristiken jeder Bedingung sein, d. h. sie ist, wenn p, q, r, s, t, u reine Zahlenfactoren bedeuten:

$$\begin{aligned} Z = p\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 &+ q\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + r\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 \\ &+ s\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + t\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + u\,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5, \end{aligned}$$

wo die Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3, 4, 5 beziehen. Zur Bestimmung der hier vorkommenden Zahlenfactoren betrachten wir specielle Fälle.*) Soll ein Kegelschnitt durch 5 Punkte gehen, so ist:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0,$$

also:

$$Z = p = 1.$$

Kegelschnitte mit 4 festen Punkten und 1 festen Tangente gibt es 2. Hier ist aber

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 1,$$

und also:

$$Z = q = 2.$$

Endlich gibt es vier Kegelschnitte durch 3 feste Punkte mit 2 festen Tangenten. Hier ist

*) Man kann übrigens diese Factoren auch direct aus dem Bildungsgesetze der Zahl Z ableiten.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1\,, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = 0\,,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0\,, \quad \beta_4 = \beta_5 = 1\,,$$

und also:
$$Z = r = 4\,.$$

Mit p, q, r müssen u, t, s wegen des dualistischen Charakters der Zahlen α_i, β_i identisch sein; wir haben daher:

$$s = 4\,, \quad t = 2\,, \quad u = 1\,,$$

und somit den Satz:

Die Zahl der Kegelschnitte, welche 5 Bedingungen $\Pi_i = 0$, bez. mit den Charakteristiken α_i, β_i genügen, ist gleich

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5\\ &+ 4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 2\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\,.\end{aligned}$$

Wir können hiernach sofort die Zahl der Kegelschnitte angeben, welche durch eine gewisse Anzahl von Punkten gehen und eine gewisse Anzahl von Curven berühren sollen. *So gibt der angeführte Ausdruck die Zahl der Kegelschnitte, welche 5 Curven berühren,* wenn wir unter den α_i, β_i bez. Klasse und Ordnung dieser Curven verstehen; und zwar sind hierunter keine Doppellinien mehr enthalten. Es gibt also (für $\alpha_i = \beta_i = 2$) z. B. 3264 Kegelschnitte, welche 5 gegebene Kegelschnitte berühren. —

Nach Cremona kann man in ganz ähnlicher Weise, wie einfach unendliche Kegelschnittreihen durch die *zwei* Zahlen μ, ν, auch *zweifach unendliche Reihen* durch *drei* Zahlen charakterisiren; und so kann man weiter gehen zu drei- und vierfach unendlichen Systemen. Eine ∞^{ϱ}-Reihe bedarf dabei aber keiner besonderen Untersuchung mehr, sobald die $\infty^{5-\varrho}$-Reihe betrachtet ist: So haben wir die ∞^4-Reihe schon durch Vorstehendes erledigt. In der That, wenn wir mittelst (8) die Zahlen α, β durch r, s ausdrücken, so können wir das Chasles'sche Theorem allgemeiner folgendermassen aussprechen:

Wenn in einer einfach unendlichen Kegelschnittreihe (bestimmt durch 4 getrennte oder untrennbare Bedingungen) μ Curven durch einen beliebigen Punkt gehen, ν eine beliebige Gerade berühren, wenn ferner in einer davon unabhängigen vierfach unendlichen Reihe r Kegelschnitte durch vier beliebige Punkte gehen, s Kegelschnitte vier beliebige Gerade berühren; so gibt es)*

*) Für das vierfach unendliche System würde man zunächst 5 charakteristische Zahlen haben, nämlich:

$$r = (::)\,, \quad u = (.\dot{}.|)\,, \quad v = (:||)\,, \quad w = (.|||)\,, \quad s = (||||)\,.$$

Drei von ihnen kann man jedoch durch die beiden andern ausdrücken; man findet analog den Gleichungen (8):

$$u = 2\,\alpha + 4\,\beta = 2\,r\,, \quad w = 4\,\alpha + 2\,\beta = 2\,s\,, \quad v = 4\,\alpha + 4\,\beta = \tfrac{4}{3}\,(r + s)\,.$$

$$\tfrac{1}{3}(2s-r)\mu+\tfrac{1}{3}(2r-s)\nu = \tfrac{1}{3}(2\mu-\nu)s+\tfrac{1}{3}(2\nu-\mu)r$$

Kegelschnitte, welche gleichzeitig beiden Curvenreihen angehören.

Für ein zweifach unendliches Kegelschnittsystem, das sich durch drei getrennte Bedingungen (3 B):

$$\Pi_1=0,\quad \Pi_2=0,\quad \Pi_3=0$$

bestimmt, ist nach unserem allgemeinen Satze (9) die Zahl der Curven, welche durch zwei Punkte gehen:

$$\varrho \equiv (.\,.,3B)=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3+4\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3+4\,\beta_1\beta_3\beta_3\,,$$

die Zahl derjenigen, welche zwei Gerade berühren:

$$\tau \equiv (||,3B)=\beta_1\beta_2\beta_3+2\,\Sigma\beta_1\beta_2\alpha_3+4\Sigma\beta_1\alpha_2\alpha_3+4\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,,$$

die Zahl derjenigen, welche durch einen Punkt gehèn und eine Gerade berühren:

$$\sigma \equiv (.|,3B)=2\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3+4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3+4\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3+2\,\beta_1\beta_2\beta_3\,.$$

Hieraus findet man aber die Zahl (9) wieder in der Form:

$$(10)\qquad (5B)=\alpha_4\alpha_5\,.\,\varrho+(\alpha_4\beta_5+\beta_4\alpha_5)\,.\,\sigma+\beta_4\beta_5\,.\,\tau\,.$$

Diese Zahl setzt sich also linear aus ϱ, σ, τ zusammen. Dasselbe gilt aber auch, wenn das System durch 3 untrennbare Bedingungen definirt ist, sowie auch, wenn die beiden hinzutretenden Bedingungen untrennbare sind, wie jetzt gezeigt werden soll.*) Es sei eine zweifach unendliche Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ gegeben und eine dreifach unendliche mit den Charakteristiken

$$r=(\because.,2B),\quad s=(:|,2B),\quad t=(.||,2B),\quad u=(|||,2B)\,.$$

Wir fragen nach der Zahl der beiden Reihen gemeinsamen Curven.

Zunächst scheiden wir aus der ersten Reihe ein einfach unendliches System ab, indem wir die Curven betrachten, welche durch einen festen Punkt O gehen; also eine Reihe mit den Charakteristiken ϱ, σ. Von den Curven der letzteren wird ein fester Kegelschnitt K in vier beweglichen Punkten geschnitten. Durch je drei dieser Schnittpunkte können wir r Kegelschnitte der gegebenen ∞^3-Reihe legen. Es wird demnach in unserem ∞^1-Systeme eine endliche Zahl von Curven geben, für welche eine dieser zugehörigen Curven der ∞^3-Reihe auch noch den vierten Schnittpunkt enthält; und zwar ist die Zahl dieser durch O gehenden Kegelschnitte der ∞^1-Reihe nach dem obigen Chasles'schen Theoreme gleich

$$\mu=\alpha\varrho+\beta\sigma\,,$$

wo die Zahlen α, β nur von den das ∞^3-System definirenden Bedin-

*) Dies bemerkte Cremona: Comptes rendus, t. 59, p. 776. Einen von dem des Textes verschiedenen Beweis gab Halphen: a. a. O. p. 238.

gungen abhängen; und jedem dieser μ Kegelschnitte ist dann *eine* Curve der ∞^3-Reihe zugeordnet. Die Werthe der Zahlen α, β selbst haben wir nicht weiter nöthig. — Ferner ist durch eine beliebige feste Tangente aus der gegebenen ∞^2-Reihe eine ∞^1-Reihe mit den Charakteristiken σ, τ ausgeschieden; und in ihr muss es wieder nach dem Chasles'schen Theoreme

$$\nu = \alpha\sigma + \beta\tau$$

Kegelschnitte geben, welche den Kegelschnitt K in vier Punkten treffen, durch die auch eine Curve des ∞^3-Systems hindurchgeht.

Das Resultat dieser Ueberlegungen können wir auch in folgender Form aussprechen: Es gibt in der gegebenen zweifach unendlichen Kegelschnittreihe eine einfach unendliche Reihe mit den Charakteristiken μ, ν, deren Curven einen festen Kegelschnitt in vier Punkten treffen, durch welche noch eine Curve einer dreifach unendlichen Reihe hindurchgeht. Und dieser Reihe R_1 ist Curve für Curve durch unsere Construction eindeutig eine andere R_2 zugeordnet, welche in jener dreifach unendlichen Reihe enthalten ist. Wenn es uns nun gelingt, die Zahl der Curven in der einen Reihe zu bestimmen, welche mit den ihnen entsprechenden der andern zusammenfallen, so haben wir damit zugleich die gesuchte Zahl der Kegelschnitte gefunden, welche den beiden vorliegenden zwei- bez. dreifach unendlichen Systemen zugleich angehören. In R_1 wird es eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten geben, welche eine beliebige Gerade so schneiden, dass auch der entsprechende Kegelschnitt in R_2 durch einen dieser Schnittpunkte hindurchgeht; und zwar ist die Zahl dieser Curven wieder nach dem Chasles'schen Theoreme

$$= \gamma'\mu + \delta\nu ,$$

wo die Zahlen γ', δ nur von der Reihe R_2, d. h. von der ∞^3-Reihe abhängen. Hierunter sind auch die 2μ Kegelschnitte enthalten, welche zu je μ durch die beiden Schnittpunkte der Geraden mit K hindurchgehen. Schreiben wir also γ für $\gamma' - 2$, so wird die Zahl der für uns brauchbaren Lösungen

$$= \gamma\mu + \delta\nu = a\varrho + b\sigma + c\tau .$$

Jeder dieser Kegelschnitte hat dann aber mit seinem entsprechenden 5 Punkte gemein, fällt also ganz mit ihm zusammen. Damit ist unser Satz bewiesen; denn die Zahl $\gamma\mu + \delta\nu$ ist linear in ϱ, σ, τ. Um endlich noch die Coëfficienten von ϱ, σ, τ in dem Ausdrucke $\gamma\mu + \delta\nu$ zu bestimmen, betrachten wir insbesondere die durch (.˙.), (:|), (.||), (|||) bestimmten ∞^2-Reihen. Für sie haben wir bez.:

$$\varrho = 1, \quad \sigma = 2, \quad \tau = 4,$$
$$\varrho = 2, \quad \sigma = 4, \quad \tau = 4,$$
$$\varrho = 4, \quad \sigma = 4, \quad \tau = 2,$$
$$\varrho = 4, \quad \sigma = 2, \quad \tau = 1;$$

und daher zur Bestimmung von a, b, c die vier Gleichungen:

$$r = (.\dot{}., 2B) = a + 2b + 4c$$
$$s = (:|\ , 2B) = 2a + 4b + 4c$$
$$t = (.||, 2B) = 4a + 4b + 2c$$
$$u = (|||, 2B) = 4a + 2b + c.$$

Hieraus folgt zunächst der folgende Satz, den man mit Hülfe von (9) auch leicht für den Fall zweier getrennten Bedingungen verificirt:

Zwischen den Charakteristiken einer dreifach unendlichen Kegelschnittreihe besteht immer die Relation:

$$(11) \qquad 2(.\dot{}.) - 3(:|) + 3(.||) - 2(|||) = 0.$$

Aus den aufgestellten Gleichungen ergeben sich unter Anwendung von (11) für a, b, c die Werthe:

$$4a = 2u - t, \quad 4c = 2r - s,$$
$$16b = 5s - 6r - 6u + 5t;$$

und somit haben wir folgenden Satz:

Die Zahl der gemeinsamen Curven einer durch drei getrennte oder untrennbare Bedingungen gegebenen Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ und einer davon unabhängigen, durch zwei getrennte oder untrennbare Bedingungen gegebenen Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken r, s, t, u ist gleich

$$\tfrac{1}{4}(2u - t).\varrho + \tfrac{1}{16}(5s - 6r - 6u + 5t).\sigma + \tfrac{1}{4}(2r - s).\tau,$$

wo zwischen r, s, t, u die Gleichung besteht:

$$2(r - u) = 3(s - t).$$

Dieser Satz gibt zusammen mit dem von Chasles die Mittel, um die Anzahl aller Kegelschnitte zu bestimmen, welche beliebig gegebenen Bedingungen genügen, sobald man die Zahl derjenigen kennt, welche ausserdem durch einzelne Punkte gehen und einzelne Gerade berühren. Diese Sätze reichen jedoch nicht aus, wenn alle 5 Bedingungen von einander untrennbar sind. Handelt es sich aber nur um die Zahl der Kegelschnitte, welche gegebene Curven ein- oder mehrfach berühren, so können wir auch diese Aufgaben mit Hülfe des später zu erweisenden „erweiterten Correspondenzprincips" von Cayley erledigen. Wir geben hier nur noch einige Beispiele:

Für die doppelte Bedingung der Osculation mit einer gegebenen

Curve der Ordnung n, der Klasse k, mit r Rückkehrpunkten, w Wendetangenten, werden wir später mit Hülfe jenes Correspondenzprincips folgende Zahlen finden:

$$r = \alpha, \quad s = 2\alpha, \quad t = 2\alpha, \quad u = \alpha,$$

wo $\alpha = 3k + r = 3n + w$ gesetzt ist: *Die Zahl der Kegelschnitte, welche eine Curve osculiren und ausserdem einer zweifach unendlichen Reihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ angehören, ist gleich $\frac{1}{2}\alpha\sigma$.* Ist insbesondere das zweifach unendliche System bestimmt durch die Bedingung der dreipunktigen Berührung mit einer Curve, deren Singularitäten n', k', r', w', $\alpha' = 3k' + r' = 3n' + w'$ sind, so wird, wie später gezeigt werden soll,

$$\sigma = -8n' - 8k' + 6\alpha'.$$

Es gibt also $\alpha(3\alpha' - 4n' - 4k')$ Kegelschnitte, welch eine Curve n^{ter} Ordnung, k^{ter} Klasse, . . . zweipunktig und eine Curve n'^{ter} Ordnung, k'^{ter} Klasse, . . . dreipunktig berühren.

Die Zahlen der Kegelschnitte, welche gegebenen Berührungsbedingungen genügen, lassen sich aber nach den Untersuchungen Zeuthen's auch direct in mehr geometrischer Weise durch Untersuchung der Ausnahmskegelschnitte bestimmen.*) Wir müssen uns jedoch hier begnügen, auf diese Methoden ausdrücklich hinzuweisen.

Wenn wir uns nunmehr zu den entsprechenden Untersuchungen für *Curven beliebiger Ordnung* zurückwenden, so drängt sich zunächst die Frage auf, ob der Chasles'sche Satz über die Zahl $(\alpha\mu + \beta\nu)$ der Curven eines einfach unendlichen Systems auch hier gilt. Wir werden sehen, dass diese Frage im Allgemeinen zu verneinen ist, wenngleich der Satz in einzelnen Fällen, z. B. für alle Berührungsbedingungen, richtig bleibt.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel: es sei ein einfach unendliches System von Curven 3. Ordnung gegeben; und jede Curve desselben soll einen Rückkehrpunkt haben. Es mögen μ Curven durch einen beliebigen Punkt gehen, ν eine beliebige Gerade berühren. Ferner nehmen wir an, dass in dem Systeme α' Curven enthalten sind, die in eine doppelte und eine einfache Gerade zerfallen. Wir versuchen die den Gleichungen (1) entsprechenden aufzustellen. Auf einer beliebigen Geraden haben wir eine Correspondenz, vermöge deren jedem Punkte x 2μ Punkte y entsprechen: die 2μ weiteren Schnittpunkte der durch x gehenden Curven des Systems; und umgekehrt. Die 4μ Coincidenzpunkte dieser Correspondenz müssen nun

*) Zeuthen: Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, Kiobenhavn 1865; oder in französischer Uebersetzung: Nouvelles annales, t. 6, 1866. Vgl. Salmon's higher plane curves, p. 446 ff. in Fiedler's Uebersetzung.

gebildet werden durch die v Berührungspunkte und die Schnittpunkte der Doppellinien jener zerfallenden Curven mit der Geraden. Dazu kommen aber noch die auf der Geraden liegenden Spitzen von Curven des Systems, deren Zahl c sein wird, wenn c die Ordnung der von den Spitzen gebildeten Curve bedeutet; und zwar zeigt eine nähere (sogleich noch anzustellende) Ueberlegung, dass jede dieser Spitzen dreifach als Coincidenzpunkt unserer Correspondenz zu zählen ist, so dass man hat:

$$(12) \qquad 4\mu = \nu + 3c + \alpha',$$

und entsprechend, wenn c' die Klasse des Orts der Wendetangenten*), α die Zahl der in einen einfachen und einen Doppelpunkt ausartenden Curven bedeutet:

$$(13) \qquad 4\nu = \mu + 3c' + \alpha.$$

Man sieht, dass in diesen Gleichungen neben den auch bei Kegelschnitten auftretenden Zahlen μ, ν, α, α' (letztere für λ, π) noch die Zahlen c, c' zu berücksichtigen sind; ganz ebenso sind dann weiter die Zahlen für die Klasse der von den Rückkehrtangenten umhüllten Curve und für die Ordnung des Orts der Wendepunkte einzuführen; und noch mehr Zahlen treten bei Systemen von Curven höherer Ordnung auf. Ueber letztere nun hat Zeuthen begonnen, bis zu gewissem Grade allgemeine Betrachtungen anzustellen**); wir bezeichnen im Folgenden einige seiner Resultate.

Eine beliebige Curve des betrachteten einfach unendlichen Systems sei von der Ordnung n, und besitze d Doppel-, r Rückkehrpunkte; und durch obere Striche seien der Einfachheit halber die dualistisch entsprechenden Zahlen bezeichnet; also durch n' die Klasse, durch d' die Zahl der Doppeltangenten, durch r' die der Wendetangenten. Für unser Curvensystem werden dann nach Zeuthen zunächst die folgenden Zahlen besonders charakteristisch sein:

μ die Zahl der Curven, welche durch einen beliebigen Punkt gehen,
b die Ordnung des Orts der Doppelpunkte,
c „ „ „ „ „ Rückkehrpunkte,
p die Klasse der von den Tangentenpaaren in den Doppelpunkten umhüllten Curve,

---

*) Eine Curve dritter Ordnung mit Spitze hat immer einen Wendepunkt, ist also zu sich selbst dualistisch; vgl. p. 353.

**) Zeuthen: Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden. — Avec un résumé en français. Abhandlungen der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, Serie V, Bd. 10, 1873. — Vgl. auch einen Bericht im Bulletin des sciences mathématiques, t. 7, 1874, p. 97.

q die Klasse des Orts der Rückkehrtangenten,
u die Klasse der Curve, welche durch die $n' - 4$ von einem Doppelpunkte aus an die betreffende Curve des Systems zu legenden Tangenten umhüllt wird*),
v die Klasse der Enveloppe der in entsprechender Weise von einem Rückkehrpunkte ausgehenden Tangenten,
x die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien zweier Doppelpunkte,
y die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien eines Doppelpunktes mit einem Rückkehrpunkte,
z die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien zweier Rückkehrpunkte.

Insbesondere werden in unserm Systeme sogenannte *singuläre Curven* enthalten sein, d. h. solche, welche eine Singularität mehr besitzen, wie eine beliebige Curve des Systems; und zwar haben wir hier *zwei Klassen von singulären Curven* zu unterscheiden: Eine solche entsteht entweder durch Auftreten eines neuen Doppelpunktes, resp. Ausartung eines Doppelpunktes in einen Rückkehrpunkt, oder indem (in Folge der speciellen Natur der das System definirenden Bedingungen) sich ein mehrfach zählender Zweig (am einfachsten eine Gerade) von einer Curve des Systems absondert. Wir setzen nun voraus, dass keine andern Vorkommnisse der Art im Systeme eintreten, als diejenigen, welche in folgender Tabelle aufgeführt sind. Wir bezeichnen mit

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ die Zahl der Curven, bei denen ein neuer Doppelpunkt auftritt, wo
α_0 die Zahl der Curven bezeichnet, bei denen keiner der den Doppelpunkt bildenden Aeste eine Gerade ist,
α_1 die Zahl derjenigen, wo ein Ast eine Gerade ist,
α_2 die Zahl derjenigen, wo beide Aeste Gerade sind,
β die Zahl der Curven, bei denen ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt ausartet,
$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ die Zahl derjenigen, bei denen ein Rückkehrpunkt in einen Selbstberührungspunkt übergegangen ist, wo bei
γ_0 Curven keiner der sich berührenden Aeste eine Gerade, bei
γ_1 Curven ein Ast eine Gerade ist,
$(2d)$ die Zahl der Curven, bei denen zwei Doppelpunkte zusammenfallen,

*) Die Zahl $n' - 4$ ergibt sich daraus, dass die erste Polare des Doppelpunktes in ihm beide Zweige der Grundcurve berührt, was 6 Schnittpunkte absorbirt, während für einen beliebigen Punkt der Ebene nur 2 Schnittpunkte in den Doppelpunkt fallen.

(dr) die Zahl derjenigen, bei denen ein Doppel- mit einem Rückkehrpunkte zusammenfällt,
$(2r)$ die Zahl derjenigen, wo zwei Rückkehrpunkte zusammenfallen,
$(3d)$ die Zahl derjenigen mit 3 zusammenfallenden Doppelpunkten (dreifacher Punkt),
$(2dr)$ die Zahl derjenigen, wo 2 Doppelpunkte und ein Rückkehrpunkt zusammenfallen,
$(d2r)$ die Zahl derjenigen, wo ein Doppelpunkt und 2 Rückkehrpunkte zusammenfallen.

Es mögen endlich dieselben Buchstaben, versehen mit oberen Strichen, die dualistisch entsprechenden Bedeutungen haben; insbesondere also bezeichne μ' (wie bisher ν) die Zahl der eine beliebige Gerade berührenden Curven. Die Curven $(2d)$, (dr), $(2r)$ haben aber eine sich selbst dualistische Singularität, d. h. es bestehen die Relationen:

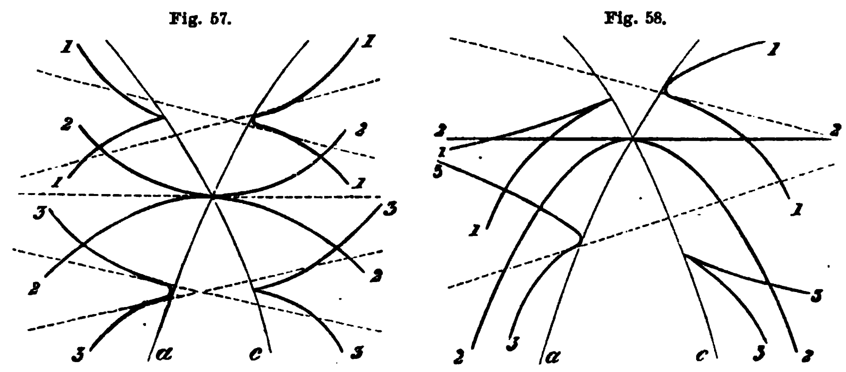
$$(2d) = (2d'), \quad (dr) = (d'r'), \quad (2r) = (2r').$$

Der Beweis hierfür kann durch eine Grenzbetrachtung erbracht werden, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Es ist ferner auch

$$\gamma_1 = \gamma_1';$$

wie man aus der sogleich mitzutheilenden Tabelle bestätigt.

Die verschiedenen hier anfgezählten singulären Curven findet man a. a. O. eingehend discutirt, besonders auch die Art, wie sie durch Grenzübergang aus den allgemeinen Curven des Systems entstehen. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einiger Beispiele. In Fig. 57 ist der Durchgang einer Curve des Systems durch eine Curve γ_0 dargestellt, während Fig. 58 das Entsprechende für eine Curve γ_1



gibt. In beiden Fällen vereinigt sich ein auf der Curve c^{ter} Ordnung fortschreitender Rückkehrpunkt mit einem benachbarten sehr scharf gewölbten Zweige der betreffenden Curve; und natürlich muss dies in einem Schnittpunkte des Orts der Spitzen mit der von den Systems-

curven eingehüllten Curve stattfinden. Es gibt jedoch keineswegs umgekehrt jeder dieser Schnittpunkte zu einer Curve γ Veranlassung. Ebenso stellen Fig. 59 und 60 bez. den Durchgang durch eine Curve β und durch eine Curve (dr) dar. Im ersten Falle geht der Doppel-

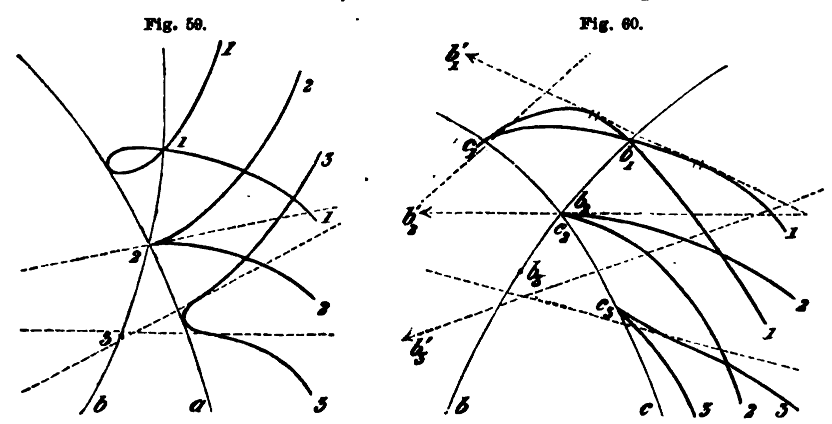


Fig. 59. Fig. 60.

punkt durch die Spitze in einen isolirten Punkt über; im andern entsteht durch Vereinigung eines Doppel- und eines Rückkehrpunktes eine Spitze zweiter Art. In den Figuren ist mit a immer die Umhüllungscurve aller Curven des Systems*) bezeichnet; es sind ferner die reellen durch Eintreten einer neuen Singularität absorbirten Doppel- und Wendetangenten angedeutet.**)

Für die singulären Curven α, β, γ stellen wir in folgender Tabelle die für das Folgende wichtigen Plücker'schen Zahlen zusammen, welche sich mittelst der Plücker'schen Formeln sofort aus ihren Definitionen ergeben. Es sei hier nur z. B. daran erinnert, dass nach Gleichung (8), p. 351 durch das Auftreten eines Doppelpunktes

$$2(n(n-1)-6)-4d-6r=2(n'-6)$$

Doppeltangenten absorbirt werden, dagegen nur 6 Wendetangenten. Bei den zerfallenden Curven α_1, α_2, γ_1 beziehen sich die angegebenen Zahlen nur auf die nach Absonderung der betreffenden Geraden übrig bleibenden „*Restcurven*". So ist α_1 von der Ordnung $n-1$ und hat $d-(n-2)$ Doppelpunkte; denn von den $(n-1)$ Schnittpunkten der sich ablösenden Geraden müssen $n-2$ aus den Doppelpunkten d

*) Ueber die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen dieser Umhüllungscurve vgl. Zeuthen: Comptes rendus, t. 78, 1874, p. 274 und p. 239.

**) Man sieht so insbesondere, dass eine Spitze zweiter Art (p. 336) äquivalent ist mit einem Doppel-, einem Rückkehrpunkte, einer Doppel- und einer Wendetangente. Vgl. auch Salmon's higher plane curves, p. 56 in Fiedler's Uebersetzung. — Die Linie b_3' in Fig. 60 ist eine isolirte Doppeltangente der Curve 3.

entstanden sein, während einer als der neu hinzutretende Doppelpunkt zu zählen ist. Die so gewonnene Tabelle ist folgende:

	Ordnung	Klasse	Doppelpunkte	Spitzen	Doppeltangenten	Wendetangenten
α_0	n	$n'-2$	$d+1$	r	$d'-2(n'-6)$	$r'-6$
α_1	$n-1$	$n'-2$	$d-(n-2)$	r	$d'-2(n'-4)$	$r'-3$
α_2	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	r	$d'-2(n'-2)$	r'
β	n	$n'-1$	$d-1$	$r+1$	$d'-(n'-4)$	$r'-2$
γ_0	n	$n'-1$	$d+2$	$r-1$	$d'-(n'-5)+2$	$r'-4$
γ_1	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$r-1$	$d'-(n'-3)$	$r'-1$
α_0'	$n-2$	n'	$d-2(n-6)$	$r-6$	$d'+1$	r'
α_1'	$n-2$	$n'-1$	$d-2(n-4)$	$r-3$	$d'-(n'-2)$	r'
α_2'	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	r	$d'-2(n'-2)$	r'
β'	$n-1$	n'	$d-(n-4)$	$r-2$	$d'-1$	$r'+1$
γ_0'	$n-1$	n'	$d-(n-5)+2$	$r-4$	$d'+2$	$r'-1$
γ_1'	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$r-1$	$d'-(n'-3)$	$r'-1$

Mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips können wir nun unter Berücksichtigung der so gefundenen Singularitäten der Restcurven eine Reihe von Relationen aufstellen, denen die von uns eingeführten Zahlen genügen, und welche für diese Theorien von hervorragender Bedeutung sind. Diese Zahlen sind also keineswegs von einander unabhängig.

Wir denken uns die Coëfficienten der Gleichung einer veränderlichen Curve als rationale Functionen zweier Parameter gegeben, zwischen denen eine Gleichung besteht (p. 390). Nun erlaubt eine lineare Gleichung in den Coëfficienten unserer Annahme nach zusammen mit der Gleichung zwischen den beiden Parametern μ Lösungen für letztere. Die Bedingung der Berührung mit einer festen Geraden G, welche vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten ist (p. 279), wird daher $2(n-1)\mu$ Lösungen erlauben. Die Liniencoordinatengleichung verschwindet aber — so können wir den Inhalt der Plücker'schen Formeln aussprechen — zweifach für jede durch einen Doppel-, dreifach für jede durch einen Rückkehrpunkt gehende Gerade. Die $2(n-1)\mu$ Berührungspunkte der Geraden G mit Curven des Systems bestehen daher aus den μ' eigentlichen Berührungspunkten, den b Schnittpunkten mit dem Orte der Doppelpunkte (zweifach zählend) und den c Schnittpunkten mit dem Orte der Rückkehrpunkte (dreifach zählend). Dazu kommen endlich noch die α' Schnittpunkte mit den neuen Doppeltangenten der Curven α', denn jede solche Doppel-

tangente ist anzusehen als entstanden durch Vereinigung zweier benachbarten Curvenäste (vgl. p. 346). Wir haben somit als Verallgemeinerung der Gleichungen (12) und (13) die Gleichung:

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha', \tag{14}$$

und dualistisch entsprechend:

$$2(n'-1)\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha.$$

Wir betrachten ferner die folgende Correspondenz zwischen Strahlen ξ und η durch einen beliebigen Punkt O. Auf einer Linie ξ liegen b Doppelpunkte von b verschiedenen Curven, an jede der letzteren kann man von O aus noch n' Tangenten η legen. Jedem ξ entsprechen also bn' Strahlen η, und jedem η offenbar $d\mu'$ Strahlen ξ. Die $\xi + \eta$ Coincidenzstrahlen sind andererseits durch die u bez. β durch O gehenden Tangenten der Curven u und β gegeben, sowie durch die p Tangenten der Curve p. Von letzteren zählt aber jede doppelt; denn eine Tangente im Doppelpunkte schneidet die Curve auf zwei verschiedene Weisen in zwei zusammenfallenden Punkten; einmal insofern ein weiterer Schnittpunkt der Linie durch den Doppelpunkt mit dem Punkte desselben Zweiges, das andere Mal, insofern er mit dem Punkte des andern Zweiges zusammenfällt. Wir haben daher:

$$n'b + d\mu' = 2p + u + \beta, \tag{15}$$

und in analoger Weise findet man:

$$n'c + r\mu' = 3q + v + \gamma: \tag{16}$$

Suchen wir ferner die Coincidenzen der Correspondenz $\xi = (d-1)b$, $\eta = (d-1)b$, welche durch die Verbindungslinien von O mit einem Doppelpunkte einer Curve und diejenigen mit den $d-1$ übrigen Doppelpunkten derselben Curve bestimmt wird, so haben wir die Paare von Doppelpunkten zu berücksichtigen, welche bei den Curven α' durch die neue Doppeltangente zufolge unserer Tabelle absorbirt werden, und zu beachten, dass jede durch O gehende Tangente der Curve x zweimal als Coincidenzstrahl zu zählen ist, einmal indem man von dem einen, einmal indem man von dem andern auf ihr liegenden Doppelpunkte ausgeht. Man findet so*):

*) Die im Texte gegebene Bestimmung der Zahlenfactoren wird man nicht in allen Fällen für absolut streng ansehen dürfen. — Zur genauen (auch analytisch verfolgbaren) Bestimmung der in die Gleichungen eingehenden Zahlenfactoren betrachet Zeuthen die zu den singulären Curven benachbarten Curven und wendet dann die folgende Regel an: *Wenn auf einer Geraden ein Punkt* ξ *und ein entsprechender Punkt* η *in einen Punkt* δ *zusammenfallen, und dabei, sobald die Strecke* $\delta\xi$ *unendlich klein wird, die Strecke* $\delta\eta$ *proportional zu* $(\delta\xi)^{\varrho}$ *wird, so ist der Punkt* δ *als Coincidenzpunkt der Correspondenz* ϱ*-fach zu zählen.* — Vgl. auch eine Mittheilung desselben im Bulletin des sciences math. t. 5, p. 186, sowie Halphen: Bulletin de la société mathématique de France, t. 1, p. 132.

(17) $$2(d-1)b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2dr) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2';$$

und analog:

(18) $$2(r-1)c = 2z + (2r) + 3(d2r) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + 12\gamma_0';$$

oder wenn man die durch O gehenden Strahlen betrachtet, auf welchen gleichzeitig ein Doppel- und ein Rückkehrpunkt liegt:

(19) $$rb + dc = y + (dr) + 2(2dr) + 3(d2r).$$

Wir fragen ferner nach der Zahl der Punkte auf einer Geraden, durch welche eine Curve geht, die ihre Tangente durch O schickt. Geht nun die Gerade durch O selbst, so liegen μ solche Punkte in O vereinigt, und μ' andere sind durch die Berührungspunkte der Geraden mit Curven des Systems gegeben. Wir haben also den Satz:

Der Ort der Berührungspunkte von Curven des Systems mit den Tangenten durch einen festen Punkt ist von der Ordnung $\mu + \mu'$ (mit μ-fachem Punkte in letzterem).

Durch Betrachtung der Schnittpunkte der betreffenden Ortscurven mit einer beliebigen durch O gezogenen Geraden findet man in ähnlicher Weise folgende Sätze:

Der Ort der $n-2$ Schnittpunkte einer Curve des Systems mit einer ihrer durch einen festen Punkt gehenden Tangenten ist von der Ordnung $(n'-2)\mu + (n-2)\mu'$.

Der Ort der $n-2$ Punkte, in denen die Verbindungslinie eines festen Punktes mit einem Doppelpunkte einer Curve des Systems diese Curve noch schneidet, ist von der Ordnung $d\mu + (n-2)b$.

Der Ort der $n-2$ Punkte, in denen die Verbindungslinie eines festen Punktes mit einem Rückkehrpunkte einer Curve des Systems diese Curve noch schneidet, ist von der Ordnung $r\mu + (n-2)c$.

Diese Sätze sollen uns zur Aufstellung weiterer Gleichungen dienen. Zwischen den Strahlen ξ und η, welche durch einen zweiten festen Punkt P gehen, ist in folgender Weise eine Correspondenz bestimmt. Auf jedem Strahle ξ liegen in Folge des ersten der eben ausgesprochenen Sätze $\mu + \mu'$ Punkte, durch welche je eine Systemscurve geht, die ihre Tangente in ihnen durch O schickt. Jede Tangente schneidet die betreffende Curve noch in $(n-2)$ Punkten, die wir mit P durch Linien η verbinden. Jedem ξ entsprechen so $(n-2) \cdot (\mu + \mu')$ Strahlen η; und umgekehrt jedem η nach dem zweiten Satze $(n'-2)\mu + (n-2)\mu'$ Strahlen ξ. Unter den $\xi + \eta$ Coincidenzstrahlen ist aber die Linie OP, welche von μ' Systemscurven berührt wird, $(n-2)\mu'$-*fach* zu zählen. Es bleiben also $(n + n' - 4)\mu + (n-2)\mu'$ Strahlen, welche durch O gehen und eine Curve des Systems je in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Bestimmt man

diese Zahl andererseits aus den oben aufgestellten für das System charakteristischen Zahlen, so erhält man die Gleichung

$$(20)\qquad (n-2)\mu' + (n+n'-4)\mu = c' + p + 2q.$$

Analog findet man mit Hülfe des dritten Satzes für die Zahl der Linien, welche O mit einem Doppelpunkte einer Systemscurve verbinden und in ihm die Curve dreipunktig schneiden, indem die Linie OP hier $(n-2)\,b$-fach zählt:

$$(21)\quad (n-2)\,b + d\mu = p + 3\,(3\,d) + 3\,(2\,dr) + 2\,(d\,2\,r) + (n-6)\,\alpha_0' + (n-4)\,\alpha_1' + (n-2)\,\alpha_2';$$

und analog:

$$(22)\quad (n-2)\,c + r\mu = 2\,q + (2\,dr) + 4\,(d\,2\,r) + 4\,\alpha_0' + 2\,\alpha_1' + 8\,\gamma_0';$$

für die Zahl der Geraden, welche durch O gehen, eine Systemscurve berühren und dieselbe noch einmal in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, indem die Vielfachheit der Linie OP hier gleich $(n-2)\,.\,(n-3)\,\mu'$ zu nehmen ist:

$$(23)\quad (n-3)\,[(n-2)\,\mu' + 2\,(n'-2)\,\mu] = 2\,b' + 2\,u + 3\,v + n'\alpha_0' + (n'-1)\,\alpha_1' + (n'-2)\,\alpha_2';$$

für die Zahl der Linien, welche O mit einem Doppelpunkte einer Systemscurve verbinden und letztere ausserdem noch in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden:

$$(24)\quad (n-3)\,[(n-2)\,b + 2\,d\mu] = u + 4\,x + 3\,y + [d - 2\,(n-6)]\,\alpha_0' + [d-2\,(n-4)]\,\alpha_1' + [d-2\,(n-2)]\,\alpha_2';$$

und analog:

$$(25)\quad (n-3)\,[(n-2)\,c + 2\,r\mu] = v + 2\,y + 6\,z + (r-6)\,\alpha_0' + (r-3)\,\alpha_1' + r\,\alpha_2'.$$

Neben die so gefundenen 12 Gleichungen (14)—(25) stellen sich natürlich ebenso viele andere, die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und der nicht gestrichenen Buchstaben entstehen. Man kann diesen Gleichungen mit Hülfe des Correspondenzprincips leicht noch weitere hinzufügen; z. B. findet man für die Zahl der Doppelpunkte von Systemscurven, deren Tangenten eine feste Gerade in 2 zusammenfallenden Punkten treffen:

$$2\,p = 2\,b + \beta + 2\,(2\,d) + 3\,(dr) + (d\,2\,r).$$

Es zeigt sich jedoch, dass nur 23 der so gefundenen Gleichungen von einander unabhängig sind. *Man kann daher 23 der Zahlen* μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α_0', α_1' α_2', β, β', γ_0, γ_1, γ_0', $(2\,d)$, (dr), $(2\,r)$, $(3\,d)$, $(3\,d')$, $(2\,dr)$, $(2\,d'r')$, $(d2r)$, $(d'\,2\,r')$ *linear durch die 17 anderen ausdrücken.* Die 23 Gleichungen treten so gewissermassen für Curvensysteme höherer

Ordnung an die Stelle der Plücker'schen Formeln, welche für Systeme von Geraden bez. Punkten (an bez. auf einer Curve) gelten.

Die aufgestellten Gleichungen sind selbstverständlich nicht mehr anwendbar, wenn noch andere singuläre Curven, als die von uns genannten im Systeme auftreten, d. h. Curven mit mehrfach zählenden Aesten, insbesondere solche, von denen sich mehrfach zählende Gerade absondern. Für diese Vorkommnisse fehlt es jedoch an allgemeinen Untersuchungen; und die hier auftretenden Möglichkeiten sind auch verschieden je nach den Werthen der Zahlen n, d, r. Nur für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ sind diese Art Curven, vorausgesetzt, dass das System nur durch feste Punkte und Tangenten definirt ist (also für „Elementarsysteme"), eingehend untersucht; und in Folge dieser Untersuchung gelingt es dann die charakteristischen Zahlen *für die Elementarsysteme der Curven dritter und vierter Ordnung zu bestimmen.* *) Die von uns betrachteten singulären Curven genügen jedoch immer, wenn die Curven des Systems gezwungen sind, durch mehr als $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ beliebige Punkte zu gehen oder mehr als $\frac{1}{2}(n'^2 - n' + 2)$ beliebige Gerade zu berühren. Sollte sich nämlich etwa eine doppelte Gerade absondern, so würde eine Restcurve der Ordnung $n - 2$ übrig bleiben; und diese ist schon durch $\frac{1}{2}(n - 2)(n + 1)$ Punkte bestimmt. Man kann also in der That höchstens durch $\frac{1}{2}(n - 2)(n + 1) + 2 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ feste Punkte eine Curve n^{ter} Ordnung legen, von der sich eine doppelte Gerade absondert. Insbesondere gilt dies für ein *System von Curven n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte, das durch $\frac{1}{2}(n^2 - n + 4)$ feste Punkte und $2n - 3$ andere Bedingungen bestimmt ist. Man hat hier* $(n > 2)$ **):

$$n' = n(n-1), \quad d' = \tfrac{1}{2} n (n-2)(n^2-9), \quad r' = 3n(n-2);$$
$$d = r = b = c = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$
$$(2d) = (dr) = (2r) = (3d) = (2dr) = (d2r) = 0,$$
$$p = q = u = v = x = y = z = 0;$$

und für die übrigen Zahlen findet man aus den Gleichungen (14)—(25):

$$\mu' = 2(n-1) \,.\, \mu,$$
$$b' = 2n(n-2)(n-3) \,.\, \mu, \quad c' = 3n(n-2) \,.\, \mu, \quad \alpha = \alpha_0 = 3(n-1)^2 \,.\, \mu,$$
$$p' = (n-3)(2n^2 + 5n - 6) \,.\, \mu, \quad q' = 6(n-1) \,.\, \mu,$$

---

*) Für Curven 3. Ordnung wurden diese Bestimmungen fast gleichzeitig gegeben von Zeuthen (Comptes rendus, t. 74; 19, 26 février et 11 mars 1872) und Maillard (auf anderem Wege: Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre. Thèse pour le doctorat (1870), publiée en décembre 1871); für Curven 4. Ordnung von Zeuthen: Comptes rendus, t. 75, p. 703 und 950; und in ang. dänischer Abhandlung.

**) Vgl. auch de Jonquières: Crelle's Journal, Bd. 66.

$u' = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)(5n^2+5n-6)\,.\,\mu\,,\quad v' = 3(n-3)(n^2+2n-2)\,.\,\mu\,,$
$x' = \frac{1}{2}(n-3)(2n^6 - 8n^5 - 16n^4 + 96n^3 - 40n^2 - 196n + 90)\,.\,\mu\,,$
$y' = \frac{3}{2}(n-3)(n^5 + 3n^4 - 28n^3 + 20n^2 + 76n - 40)\,.\,\mu$
$z' = 3(3n^4 - 12n^3 + 39n - 20)\,.\,\mu\,,\quad (3d') = (n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)\,.\,\mu\,,$
$(2d'r') = 3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)\,.\,\mu\,,\quad (d'2r') = 6(n-3)(3n-2)\,.\,\mu.$

Unsere singulären Curven reichen aber auch aus für die Systeme von Curven dritter Ordnung mit singulärem Punkte ($n = 3$; $d = 1$, $r = 0$ oder $d = 0$, $r = 1$) und von Curven vierter Ordnung mit drei singulären Punkten. Wir geben jedoch im Folgenden als Beispiel nur noch kurz die Untersuchung der Elementarsysteme für $n = 3$, $d = 0$, $r = 1$ (also auch $n' = 3$, $d' = 0$, $r' = 1$), wo man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung auch leicht direct durch die geometrische Anschauung überzeugt. *Eine Curve dritter Ordnung und dritter Klasse* kann nur in einen Kegelschnitt und eine Tangente desselben, oder in eine Doppellinie und eine einfache Gerade, oder in eine dreifache Gerade, oder in drei durch einen Punkt gehende Gerade ausarten.*) Die letzten drei Ausartungen hängen aber, wenn man nur noch die auf ihnen möglichen Klassenscheitel in richtiger Weise mitzählt**), bez. von 5, 4, 4 Constanten ab; sie können daher in einem Systeme von Curven, welches 6 von einander unabhängigen Elementarbedingungen unterworfen ist, nicht vorkommen; und ein solches System haben wir zu untersuchen, denn eine allgemeine Curve dritter Ordnung ist von 9, also eine solche mit Rückkehrpunkt von 7 Constanten abhängig. Als einzige singuläre Curven bleiben daher diejenigen zu betrachten, welche aus einem Kegelschnitte und einer Tangente desselben bestehen, d. h. Curven $\gamma_1 = \gamma_1'$. Unsere Formeln (14) — (25) reduciren sich dann auf die folgenden:

$$(26)\qquad 2\gamma_1 = \mu + \mu',$$

$$(27)\qquad \begin{cases} 3c = 4\mu - \mu', & 3c' = 4\mu' - \mu, \\ 6q = 7\mu - \mu', & 6q' = 7\mu' - \mu. \end{cases}$$

Die Zahl γ_1 können wir nun in den einzelnen Elementarsystemen leicht direct bestimmen; und daraus lassen sich weiterhin in jedem Falle μ, μ' berechnen. — Wir beginnen mit dem System $(3p, 3l)$, dessen Curven durch 3 Punkte (p_1, p_2, p_3) gehen und 3 Gerade

*) Vgl. Ausführlicheres hierüber in dem betreffenden Abschnitte der unten folgenden Theorie der Curven 3. Ordnung.

**) Im ersten Falle nämlich zählt der Schnittpunkt der einfachen und zweifachen Geraden doppelt; auf letzterer kann daher noch ein Klassenscheitel liegen (vgl. die Anmk. p. 392); auf einer dreifachen Geraden dagegen können noch 3 Klassenscheitel beliebig vertheilt liegen.

(l_1, l_2, l_3) berühren. Dasselbe ist sich selbst dualistisch, wir haben also jedenfalls

(28) $$\mu = \mu' .$$

Als Curven γ_1 haben wir folgende Arten von je in eine C_2 und eine C_1 zerfallenden Curven zu berücksichtigen:

1) zwei C_2 durch p_1, p_2, p_3 und den Schnittpunkt von g_1, g_2, die g_3 berühren, zu einer C_3 ergänzt durch ihre Tangenten im Schnittpunkte von g_1, g_2;
2) vier C_2 durch p_1, p_2, p_3, die g_1 und g_2 berühren, jeder zu einer C_3 ergänzt durch je eine seiner Tangenten in seinen Schnittpunkten mit g_3;
3) zwei C_2, welche die Verbindungslinien von p_1 mit dem Schnittpunkte von g_1, g_2 in letzterem und ausserdem g_3 berühren und durch p_2, p_3 gehen; jeder ergänzt zu einer C_3 durch jene Verbindungslinie;
4) acht C_2, welche durch p_1, p_2 gehen, g_1, g_2 berühren und g_3 so schneiden, dass die Tangenten in den Schnittpunkten durch p_3 gehen*); jeder durch diese beiden zugehörigen Tangenten zu je einer C_3 ergänzt;
5) die dem Falle 3) dualistisch entsprechenden Curven;
6) „ „ „ 2) „ „ „ „ „
7) „ „ „ 1) „ „ „ „ „ .

Beachtet man in jedem dieser Fälle auch die aus ihm durch Vertauschung der Punkte p_1, p_2, p_3 oder der Geraden g_1, g_2, g_3 entstehenden, so erhält man schliesslich:

$$\gamma_1 = 3.2 + 3.4.2 + 3.3.2 + 3.3.8 + 3.3.2 + 3.4.2 + 3.2$$
$$= 168.$$

Aus (26), (27) *und* (28) *ergibt sich also für das System* $(3p, 3l)$;

$$\mu = \mu' = 168, \quad c = c' = 168, \quad q = q' = 168.$$

Für das System $(4p, 2l)$ folgt hieraus sofort $\mu' = 168$; und wir finden durch eine der obigen analoge geometrische Ueberlegung:

$$\gamma_1 = 1 + 2.2.2 + 4 + 4.2(4+2) + 4.4.2 + \tfrac{4.3}{2}.2.2 + \tfrac{4.3}{2}.4$$
$$= 141.$$

Für das System $(4p, 2l)$ *haben wir also wegen* (26) *und* (27):

$$\mu = 114, \quad \mu' = 168, \quad c = 96, \quad c' = 186, \quad q = 105, \quad q' = 177.$$

---

*) Es gibt 8 solche Curven, da die Punkte p_1, p_2 und die Geraden g_1, g_2 ein C_2-System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 4$ bilden, und weil der Ort der Berührungspunkte der von p_3 an die C_2 des Systems gelegten Tangenten nach einem Satze auf p. 414 von der Ordnung $\mu + \nu$ ist.

Die Zahl μ des Systems $(4p, 2l)$ liefert sofort die Zahl μ' des Systems $(5p, l)$. Für γ_1 dagegen finden wir:

$$\gamma_1 = 2 + 5(1+2) + 5 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 87 .$$

Für das System $(5p, l)$ *haben wir also:*

$$\mu = 60, \quad \mu' = 114, \quad c = 42, \quad c' = 132, \quad q = 51, \quad q' = 123 ;$$

und endlich für das System $(6p)$:

$$\gamma_1 = 6 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5}{2} 2 = 42 ,$$

$$\mu = 24, \ \mu' = 60, \quad c = 12, \quad c' = 72, \quad q = 18, \quad q' = 66 .$$

Dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge gelten natürlich für die Systeme $(2p, 4l)$, $(p, 5l)$, $(6l)$. Hieraus findet man für die *Zahlen der Curven dritter Ordnung und dritter Klasse, welche durch gegebene Punkte gehen und gegebene Gerade berühren*, folgende Werthe:

$$(7p) = 24, \quad (6p, 1l) = 60, \quad (5p, 2l) = 114, \quad (4p, 3l) = 168,$$
$$(3p, 4l) = 168, \quad (2p, 5l) = 114, \quad (1p, 6l) = 60, \quad (7l) = 24.$$

Wenn wir nach diesen Betrachtungen unsere ursprüngliche Frage nach der Zahl der Curven eines einfach unendlichen Systems, welche einer hinzutretenden Bedingung genügen, allgemeiner zu erörtern versuchen, so zeigt sich, dass eine algebraisch erschöpfende Behandlung der Frage noch wesentliche Schwierigkeiten bietet. Wir bezeichnen daher nur einzelne Punkte, welche man besonders wird berücksichtigen müssen.

Wir denken uns das System algebraisch dargestellt; und zwar sehen wir, wie bei den Kegelschnitten (p. 390), die $\frac{1}{2} n (n+3)$ Coëfficienten der Curve als Variable an, für die uns $\frac{1}{2} n (n+3) - 1$ Bedingungen gegeben sind. Letztere können durch ebenso viele von einander unabhängige Gleichungen, oder durch ein System von mehreren untrennbaren Gleichungen dargestellt sein. Die Zahl μ definiren wir als die Zahl der Lösungen, welche jenes System von Gleichungen zusammen mit einer linearen Gleichung noch zulässt. Eine Gleichung q^{ten} Grades wird dann $q\mu$ Lösungen liefern. Aber unter letzteren können Curven enthalten sein, welche die Bedingung identisch befriedigen, d. h. dieselbe erfüllen, ohne von den die Bedingung etwa bestimmenden festen Curven oder Punkten abhängig zu sein, sondern allein wegen der Art, in welcher die Coëfficienten der veränderlichen Curve in die Bedingungsgleichung eingehen; und die Anzahl solcher Lösungen ist von der Zahl $q\mu$ abzuziehen. So kann es eintreten, dass es im Systeme einzelne Curven gibt, für welche zwei Invarianten A, B des Systems verschwinden, ohne dass eine dieser

Invarianten für eine beliebige Curve des Systems Null wäre*); und dann würden diese Curven auch jede Bedingung

$$A\Pi_1 + B\Pi_2 = 0$$

identisch erfüllen, wenn Π_1, Π_2 irgend welche andere Functionalinvarianten sind, die von den Coëfficienten der Systemscurven und beliebigen festen Elementen abhängen. Oder es kann im Systeme eine Zahl von Curven vorkommen, für die eine zugehörige Form $u_\alpha{}^\varrho$ identisch Null ist; dann werden diese Curven τ-fach zählend *jede* Bedingung erfüllen, welche die Coëfficienten $\alpha_{ikh}\ldots$ der verschwindenden Form zum τ^{ten} Grade enthält. Man erkennt hieraus, dass der Begriff der singulären Curven bei unserer algebraischen Auffassung folgendermassen allgemeiner als früher hingestellt werden kann: *Unter einer singulären Curve des Systems verstehen wir jede Curve desselben, welche eine Invarianteneigenschaft hat, die durch zwei oder mehr Gleichungen dargestellt wird, und die einer beliebigen Curve des Systems nicht zukommt.***) Und diese Festsetzung reicht aus, insofern man unter einer singulären Lösung eine jede versteht, welche einer gegebenen Bedingung genügt, ohne von den durch diese und die Bedingungen des Systems eingeführten constanten Elementen abzuhängen.

In der That erkennt man leicht, dass alsdann das Verschwinden simultaner Functionalinvarianten nicht berücksichtigt zu werden braucht. Sollte nämlich eine solche (deren Verschwinden zwei oder mehr Bedingungen äquivalent ist) Null werden, so kann dies *erstens* dadurch eintreten, dass sie für eine *jede* Curve des Systems Null ist; und dann würde eine hinzutretende Bedingung, welche die Coëfficienten dieser Functionalinvariante homogen enthält, nicht in der Weise von den Bedingungen des Systems unabhängig sein, wie wir es immer voraussetzen (vgl. p. 400). *Zweitens* kann es vorkommen, dass eine der das System definirenden Bedingungen durch *einzelne* Curven des Systems mehrfach erfüllt wird; wie an folgendem Beispiele sofort klar werden wird. Wenn alle Kegelschnitte $a_x{}^2 = 0$ einer ∞^1-Reihe einen festen Kegelschnitt $a_x'^2 = 0$ berühren sollen, so verschwindet die Tactinvariante (p. 298):

$$4\,(A_{111}A_{122} - A_{112}{}^2)\,(A_{112}A_{222} - A_{122}{}^2) - (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})^2\,.$$

Dann wird eine bestimmte Zahl von Kegelschnitten der Reihe die

---

*) So verschwindet in einem Systeme von Curven 3. Ordnung mit Doppelpunkt für alle Curven die Invariante $S^3 - 6\,T^2$ (vgl. die 5. Abtheilung dieser Vorlesungen); und für die im Systeme enthaltenen Curven mit Rückkehrpunkt die Invarianten S, T einzeln.

**) Curven mit einer durch *eine* Gleichung darstellbaren Invarianteneigenschaft können selbstverständlich nicht als singuläre auftreten (vgl. p. 398).

feste Curve osculiren. Für diese verschwindet die Tactinvariante quadratisch, indem zugleich die 3 Relationen bestehen:

$$A_{111}A_{122} = A_{112}^2, \quad A_{112}A_{222} = A_{122}^2, \quad A_{111}A_{222} = A_{112}A_{122}.$$

Durch alle diese Curven wird eine hinzutretende Bedingung, welche durch das Verschwinden eines Ausdrucks von der Form

$$(A_{111}A_{122} - A_{112}^2)\Pi_1 + (A_{112}A_{222} - A_{122}^2)\Pi_2 + (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})\Pi_3$$

darstellbar ist, identisch erfüllt. Es geschieht dies aber doch nur durch Beziehungen der Curven zu gegebenen festen Elementen, nicht durch eine Eigenschaft dieser Curven an und für sich: Solche Vorkommnisse wollen wir daher nicht als singuläre bezeichnen. In der That würde man, wie unser Beispiel lehrt, andernfalls schon für Kegelschnittsysteme nichts Allgemeines aussagen können.

Insbesondere folgt aus unserer Definition der singulären Curven, *dass in einem Systeme von Curven n^{ter} Ordnung jede Curve als singuläre auftreten kann.* Es wird dies recht deutlich an folgendem Beispiele. Eine jede Curve des Systems wird eine Anzahl absoluter Invarianten (vgl. p. 267) $A_1, A_2, \ldots A_r$ besitzen, die von Curve zu Curve verschiedene Werthe annehmen. Stellen wir die Forderung, dass eine von ihnen, etwa A_1 einen bestimmten Werth λ_1 habe, so ist dadurch (wenn nicht dieser Werth für *alle* Systemscurven derselbe ist) eine bestimmte Zahl von Curven festgelegt. Für eine jede von diesen haben dann aber auch die übrigen absoluten Invarianten bestimmte Werthe. Letztere mögen für eine der Curven folgende sein:

$$A_1 = \lambda_1, \quad A_2 = \lambda_2, \quad \ldots \quad A_r = \lambda_r;$$

Dann ist diese Curve singulär in Bezug auf jede hinzutretende Bedingung von der Form:

$$(A_1 - \lambda_1)\Pi_1 + (A_2 - \lambda_2)\Pi_2 + \ldots + (A_r - \lambda_r)\Pi_r = 0.$$

Ob eine Curve in Bezug auf eine hinzutretende Bedingung singulär ist, oder nicht, hängt hiernach wesentlich von der letzteren ab (ausserdem natürlich von den Bedingungen des Systems).

Inwiefern nun das Auftreten singulärer Curven durch die Natur der Bedingungen des Systems begründet werden kann, davon mag man sich für einzelne Fälle in folgender Weise eine Vorstellung bilden. Eine singuläre Curve sei durch das Verschwinden einer Functionalinvariante Π_s (oder eines Systems von solchen) charakterisirt. Das entsprechende System von Gleichungen möge $\frac{1}{2}n(n+3) - s$ einzelnen Bedingungen äquivalent sein, so dass es überhaupt s-fach unendlich viele C_n gibt, für welche Π_s Null ist. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden. *Erstens* können sämmtliche das System definirenden Bedingungen die Coëfficienten von Π_s enthalten. Dann wird ihnen zunächst durch die

ganze ∞^s-Reihe von C_n identisch genügt. Man wird aber nur solche Curven dieser Art als Curven des vorliegenden ∞^1-Systems auffassen, welche aus anderen Curven dieses Systems durch Grenzübergang abgeleitet werden können, wie schon bei den Kegelschnitten erörtert wurde (p. 399). *Zweitens* kann es vorkommen, dass nur eine Gruppe der $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Systemsbedingungen durch *jede* Curve der erwähnten ∞^s-Reihe identisch erfüllt wird. Dann erhalten wir eine endliche Anzahl der letzteren, welche gleichzeitig dem ∞^1-Systeme angehören, wenn jene Gruppe äquivalent mit $\frac{1}{2}n(n+3)-1-s$ Einzelbedingungen ist; denn dann wird durch die Gruppe der übrigen Systemsbedingungen, äquivalent mit s Einzelbedingungen, eine endliche Zahl von Curven bestimmt, für welche die Functionalinvariante Π_s verschwindet. Dies sind dann singuläre Curven unseres ∞^1-Systems in Bezug auf jede hinzutretende Bedingung, welche homogen in den Coëfficienten von Π_s ist.

Für eine bestimmte hinzutretende Bedingung ist nun die Zahl der verschiedenen Arten von singulären Curven eine endliche, denn dieselbe kann nur von den Coëfficienten einer endlichen Anzahl von Functionalinvarianten*) abhängen. Nehmen wir an, sie sei vom Grade τ_i in den Coëfficienten einer Functionalinvariante Π_i, die Coëfficienten der letzteren seien vom Grade σ_i in den Coëfficienten a der Gleichung der veränderlichen Curve n^{ter} Ordnung des Systems, und in der Bedingungsgleichung seien die Coëfficienten a noch zum α^{ten} Grade enthalten, ohne sich zu Coëfficienten einer Functionalinvariante der C_n zusammenziehen zu lassen; so wird der Gesammtgrad q der Bedingungsgleichung gegeben durch

$$q = \alpha + \sum_i \sigma_i \tau_i .$$

Seien ferner λ_i Curven vorhanden, für welche Π_i identisch Null ist**), so ist, wenn μ Systemscurven durch einen beliebigen Punkt gehen, *die Zahl der Systemscurven, welche die gestellte Bedingung nicht identisch erfüllen****):*

$$= q\mu - \Sigma\lambda_i\tau_i = \alpha\mu + \sum_i (\sigma_i\mu - \lambda_i)\,\tau_i ,$$

die Summe ausgedehnt über die Indices aller Functionalinvarianten

*) Ob jedoch zu der C_n überhaupt ein endliches System von Functionalinvarianten existirt, durch die sich alle anderen ganz und rational ausdrücken (p. 211), kommt hier zunächst nicht in Betracht.

**) Dabei ist jede r-fach zählende Curve der Art für r verschiedene Curven gezählt.

***) Bei dieser Betrachtung verfahren wir unsymmetrisch, indem wir die Systemscurven nur als Punktgebilde auffassen. Es wird sich diese Unsymmetrie, wie oben bei den Kegelschnittsystemen, im Resultate vermöge der zwischen den Zahlen μ, τ_i und den zu ihnen dualistischen bestehenden Relationen beseitigen.

Π_i, deren Coëfficienten in der gestellten Bedingung vorkommen. Es hängen hier, analog den Verhältnissen bei Kegelschnittsystemen, die Zahlen α, σ_i, τ_i nur von der gestellten Bedingung, die Zahlen μ, λ_i nur von dem gegebenen Systeme ab. Man wird aber nicht behaupten dürfen, dass es für *jedes* Curvensystem eine bestimmte Anzahl von solchen Zahlen λ_i gibt. Dies erhellt schon aus dem oben über die absoluten Invarianten Gesagten; allgemeiner aus folgender Ueberlegung. Es sei eine singuläre Curve des Systems durch das Verschwinden einer Reihe von Functionen Π_i bezeichnet. Zwischen den Π_i und anderen Functionen P_i können dann (eventuell in Folge der gegebenen Bedingungen des Systems) solche Relationen bestehen, dass gleichzeitig mit den Π_i immer die P_i verschwinden, ohne dass sich doch die P_i direct rational und ganz durch die Π_i ausdrücken liessen. Es tritt dies z. B. ein, wenn

$$P_i^{\alpha} = \Sigma A_i \Phi_i^{\beta_i} + \Sigma B_i \Pi_i^{\gamma_i},$$

wo die Φ_i in Folge der Bedingungen des Systems verschwinden mögen. Durch die betrachtete singuläre Curve ist dann jede hinzutretende, die Coëfficienten von P_i enthaltende Bedingung identisch erfüllt, ohne dass letztere die Coëfficienten der Π_i selbst enthielte. Es würde also edenfalls nicht ausreichen, wenn man etwa bei Bestimmung der Zahlen λ_i für ein gegebenes System nur *die* Functionalinvarianten berücksichtigen wollte, deren Coëfficienten homogen in den Bedingungen des Systems vorkommen. —

Diese Erörterungen werden hinreichen, um die Schwierigkeiten zu kennzeichnen, auf welche eine allgemeine algebraische Behandlung der Charakteristikentheorie zunächst stossen wird. Wir erwähnen hier nur noch ein Beispiel, um zu zeigen, wie unter den Zahlen λ_i insbesondere diejenigen enthalten sein können, welche sich auf die singulären Curven, genommen in unserm früheren Sinne (p. 409) beziehen:

Es soll die Zahl der Curven gefunden werden, welche eine gegebene Gerade so schneiden, dass durch einen der Schnittpunkte noch eine der Doppelpunktstangenten derselben Curve hindurchgeht, oder mit andern Worten: *Es soll die Ordnung des Ortes der Punkte bestimmt werden, in denen eine Curve des Systems von den Tangenten in ihren Doppelpunkten noch geschnitten wird.* Auf der Geraden haben wir hier eine Correspondenz, vermöge deren jedem Punkte ξ die $2\mu d$ Schnittpunkte η der Doppelpunktstangenten der μ durch ξ gehenden Curven entsprechen, während jedem Punkte η umgekehrt np Punkte ξ zugehören. Unter den $\xi + \eta$ Coincidenzpunkten sind aber eine Reihe von uneigentlichen Lösungen unserer Aufgabe

mitgezählt, wie man leicht übersieht. Zieht man letztere ab, so erhält man für die gesuchte Zahl den Werth*):

$$np + 2d\mu - \{6b + (n-2)\alpha_1 + 2(n-2)\alpha_2 + 2(n-6)\alpha_0' + 2(n-4)\alpha_1' \\ + 2(n-2)\alpha_2' + 2(n-4)\beta' + 3(n-5)\gamma_0' + 3(n-3)\gamma_1\}.$$

Derselbe setzt sich also in der That aus unsern obigen Zahlen (p. 409) linear zusammen.

Aus dem Vorstehenden erhellt sofort, weshalb der Chasles'sche Satz nur für Kegelschnitte gilt: Eine solche Curve kann eben nur eine, mit zwei Bedingungen äquivalente Invarianteneigenschaft haben, nämlich die, dass die linke Seite der Liniencoordinatengleichung, die Form $F = (abu)^2$, identisch werschwindet, d. h. dass der Kegelschnitt in eine Doppellinie ausartet (bez. in einen Doppelpunkt, wenn man von der Linienauffassung ausgeht). In Folge dessen haben wir nur zwei Zahlen μ und λ, oder — wegen der Gleichungen (1) —, μ und ν zu berücksichtigen. Andererseits erkennt man aber, dass der Chasles'sche Satz auch allgemein gilt, sobald die hinzutretende Bedingung die der Berührung mit einer festen Curve (C_m), sagen wir der m^{ten} Ordnung und k^{ten} Klasse, ist. Eine solche Bedingung nämlich wird offenbar identisch (d. h. unabhängig von der zu berührenden festen Curve) erfüllt durch jede Curve des Systems, welche einen doppelt zählenden Ast enthält, und zweifach durch jede, welche auf der C_m einen Doppelpunkt, dreifach durch jede, welche auf ihr einen Rückkehrpunkt hat.**) Dies geschieht aber auch durch keine anderen Curven des Systems, als durch solche mit den eben genannten Singularitäten (oder höheren der Art); denn keine andere Systemscurve schneidet jede beliebige feste Curve in zwei zusammenfallenden Punkten. Nun ist aber für die hinzutretende Tactinvariante $q = 2m(n-1) + k$; denn dieselbe ist vom Grade m in den Coëfficienten der Liniengleichung, vom Grade k in denen der Punktgleichung der beweglichen Systemscurve, wie durch Verallgemeinerung unserer obigen Betrachtung bei Kegelschnitten leicht zu beweisen ist (vgl. p. 401). Die Zahl der die C_m eigentlich berührenden Curven ist daher:

$$= (2m(n-1) + kn)\mu - (2b + 3c + \alpha')m,$$

oder nach Gleichung (14):

$$= k\mu + m\mu'.$$

*) Vgl. Zeuthen, a. a. O.

**) Dies folgt direct aus den Plücker'schen Formeln. Die C_m nämlich kann in der Nähe eines solchen Punktes durch ihre Tangente ersetzt werden; für eine Gerade aber gelten obige Sätze nach jenen Formeln.

Wir haben daher den folgenden, auch schon von Chasles ausgesprochenen Satz*):

In einem Systeme von Curven, von denen μ durch einen beliebigen Punkt gehen, μ' eine beliebige Gerade berühren, gibt es $k\mu + m\mu'$ Curven, welche eine beliebige feste Curve m^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse berühren. **) —

Wir machen schliesslich noch einmal auf die bei unsern Untersuchungen befolgte Methode aufmerksam: wir erlangten die meisten einzelnen Resultate durch Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips. Dasselbe müsste aber auch auf rein algebraischem Wege zu erreichen sein; beruht doch jenes Correspondenzprincip auch nur auf einer algebraischen Thatsache (vgl. p. 210). Der Vortheil, den dagegen die Anwendung dieses Princips gewährt, ist, dass man bei der Betrachtung einer Frage alle ihr fremden Verhältnisse durch die Anlage der Abzählung ausschliesst, und so die Zahl der Lösungen ganz direct findet, während bei der algebraischen Behandlung, welche nicht nur den Grad der Schlussgleichung, sondern diese selbst verlangt, verschiedene Schwierigkeiten (z. B. die Ausscheidung überflüssiger Factoren) zu beseitigen sein werden. Umgekehrt wird man die durch das Correspondenzprincip gewonnenen Resultate für die algebraische Behandlung verwerthen können, insofern dann der Grad der zur Lösung dienenden Endgleichung, sowie die Vertheilung der verschiedenen Arten von Lösungen von vornherein bekannt sind. In diesem Sinne muss man die doch wesentlich auf dem Correspondenzprincipe beruhende Theorie der Charakteristiken als einen wichtigen Beitrag für die algebraische Behandlung der entsprechenden Eliminationsprobleme auffassen.

VII. Die Geometrie auf einer algebraischen Curve.

Wir haben schon verschiedentlich darauf hingewiesen, dass von den Schnittpunkten zweier Curven, insbesondere von den Grundpunkten eines Curvenbüschels nicht alle willkürlich gewählt werden können, dass vielmehr immer eine gewisse Zahl durch die übrigen bestimmt ist.

Es sollen nun zunächst diese Verhältnisse genauer untersucht werden. Eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung $f = 0$ wird von einer

*) Vgl. Chasles: Comptes rendus, 15. février 1864. Einen Beweis gab Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 3, p. 153.

**) Man sieht sofort, dass der Satz auch gilt, wenn im Systeme ausser den Curven α' noch andere mit mehrfach zählenden Zweigen vorkommen; denn durch letztere Curven wird die Zahl $q\mu$ immer entsprechend beeinflusst, wie die Gleichung (14).

Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ in mn Punkten geschnitten, von denen wir zunächst annehmen, dass sie nicht in Doppel- oder Rückkehrpunkte von $f = 0$ fallen. Ist $m < n$, so sind $\frac{m(m+3)}{2}$ Schnittpunkte als gegeben erforderlich; durch diese ist die Curve $\varphi = 0$ vollkommen bestimmt, mithin auch ihre übrigen Schnittpunkte mit $f = 0$. Ist hingegen $m \geq n$, so kann man, wenn es sich nur um die Schnittpunkte beider Curven, nicht um die schneidende Curve φ selbst handelt, an Stelle der Gleichung $\varphi = 0$ die Gleichung

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0$$

setzen, wo μ ein Ausdruck $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Die vollkommen willkürlichen

$$\tfrac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$$

Coëfficienten von μ dürfen nun besonders so gewählt werden, dass ebensoviele Coëfficienten der Function φ' verschwinden. Man kann also, ohne das Schnittpunktsystem zu ändern, statt einer allgemeinen Curve $\varphi = 0$, eine specielle Curve:

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0$$

setzen, welche nur noch von

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Constanten abhängt. Diese reducirte Curve ist dann durch $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte bestimmt; sind also so viele Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi' = 0$ gegeben, so sind die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dadurch festgelegt; und dasselbe gilt natürlich für die Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$, da dies dieselben Punkte sind.

Die beiden Zahlen

$$mn - \frac{m(m+3)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

welche bez. für $m < n$ und $m > n$ angeben, wie viel Schnittpunkte des Systems durch die übrigen gegeben werden, stimmen überein für $m = n - 1$ und $m = n - 2$. Für $m > n - 3$ kann man also immer die Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gelten lassen, welche — und das ist das Wichtige — von m ganz unabhängig ist.*) Für kleinere Werthe von

*) Auf diesen Umstand bei Curven gleicher Ordnung wies zuerst Euler hin (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1748; Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes); derselbe wurde ausführlich erörtert von Cramer (Introduction à l'analyse etc., 1750, p. 78), und von Plücker: Gergonne's Annalen, Bd. 19. Die Erweiterung des Satzes gaben gleichzeitig Jacobi (De relationibus etc., Crelle's Journal, Bd. 15) und Plücker (ib. Bd. 16); eine noch weiter gehende Verallgemeinerung des Satzes findet man in Plücker's

m aber ist die Zahl der Punkte, welche durch die übrigen gegeben sind, eine geringere.

Diese Betrachtungen verlangen eine leichte Modification, wenn φ durch einige Doppel- oder Rückkehrpunkte von f geht. Diese Punkte nämlich müssen als Bestimmungsstücke von φ einfach, dagegen als Schnittpunkte von φ mit f doppelt gezählt werden. Die Anzahl der durch die übrigen bestimmten Schnittpunkte wird dadurch um die Zahl (δ) derjenigen Punkte vermindert, welche in diese Ausnahmepunkte hineinfallen und daher von vornherein bekannt sind. Man hat also den Satz:

Von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve n^{ter} Ordnung $f = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch δ Ausnahmepunkte von $f = 0$ gehen soll, ohne in diesen selbst mehrfache Punkte zu haben, sind

1) *wenn* $m \gtreqless n - 2$, $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$ *durch die übrigen bestimmt;*

2) *wenn* $m < n - 2$, $mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta$ *durch die übrigen bestimmt.*

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die nicht in singulären Punkten der Grundcurve liegenden Schnittpunkte einander beliebig gruppenweise unendlich nahe rücken können, ohne dass dadurch die Gültigkeit unseres Satzes beeinflusst wird. Derselbe erleidet jedoch eine Ausnahme, wenn die willkürlich zu wählenden Punkte in gewisser Weise von einander abhängig sind. Zerfällt z. B. die Curve $\varphi = 0$ in mehrere Curven niedrigerer Ordnung, so zerfällt auch das ganze Schnittpunktsystem in mehrere, und in jedem dieser Schnittpunktsysteme dürfen sich nur so viel Punkte unter den gegebenen befinden, als für eine solche Curve niedrigerer Ordnung hinreichen, vermittelst unseres Theorems die übrigen zu bestimmen. Schneiden wir z. B. eine Curve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte ($\delta = 0$) mit einer Curve dritter Ordnung, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt, so dürfen von ersterer nur 2 Punkte, von letzterem 5 Punkte, im Ganzen also nur 7 Punkte willkürlich auf der C_4 gewählt werden, während in dem Schnittpunktsysteme einer beliebigen C_3 mit der C_4 9 ($= 3n - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$) Punkte beliebig auf der C_4 angenommen werden dürfen. Es kann andererseits eintreten, dass bei nicht zerfallenden Schnittpunktsystemen die $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta$ gegebenen Punkte (für $m > n - 2$) noch nicht ausreichen, um die übrigen zu bestimmen: Man wird sich geradezu die Aufgabe stellen können, zu $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta - r$ gegebenen Punkten

Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 11. — Für die Darstellung des Textes vgl. Clebsch und Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 34.

r weitere so zu bestimmen, dass sie mit jenen die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)$. $(n-2)-\delta$ Schnittpunkte einer durch δ Ausnahmepunkte von $f=0$ gehenden Curve m^{ter} Ordnung nicht bestimmen. Und in der That wird das entsprechende Problem für $m=n-3$ später für uns noch von besonderer Wichtigkeit werden. Genauer sprechen wir den angeführten Satz daher in der Form aus, dass *höchstens* $\frac{1}{2}(n-1)$ $(n-2)-\delta$, *bez.* $mn-\frac{1}{2}m(m+3)-\delta$ *Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind, wenn keine anderen Bedingungen hinzutreten.*

Dieser Satz gehört wegen seiner zahlreichen Anwendungen zu den wichtigsten in der Theorie der algebraischen Curven; besonders für das zunächst Folgende bildet er im Wesentlichen die Grundlage.*) Wir bemerken zunächst, dass für $m=n$ von den m^2 Grundpunkten eines Büschels in der That $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ durch die übrigen bestimmt, also nur $\frac{1}{2}m(m+3)$ willkürlich sind (vgl. p. 373). Ferner gibt das Theorem, angewandt auf Curven dritter Ordnung einen äusserst einfachen Beweis für den Pascal'schen Satz, den wir nicht unerwähnt lassen wollen.**) Für $m=n=3$ lautet dasselbe:

Alle Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte gemein haben, gehen auch durch einen neunten Punkt.

Es seien nun die sechs auf einem Kegelschnitte liegenden Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der Weise zu Paaren vereinigt, dass wir die in dem Schema (vgl. p. 50):

$$\begin{array}{ccc} \overline{12} & \overline{45} & \text{I} \\ \overline{23} & \overline{56} & \text{II} \\ \overline{34} & \overline{61} & \text{III} \end{array}$$

neben einander stehenden Linien als gegenüberliegende Seiten des Sechsecks auffassen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von je zweien derselben bez. mit I, II, III; so können wir die ganze Figur aus drei zerfallenden Curven 3. Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten zusammengesetzt denken; dieselben sind:

1) der Kegelschnitt und die Linie $\overline{\text{I II}}$,

2) die 3 Linien $\overline{12}$, $\overline{56}$, $\overline{34}$,

3) die 3 Linien $\overline{45}$, $\overline{23}$, $\overline{61}$.

Jede dieser Curven geht durch die 8 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, I, II;

---

*) Aus ihm lassen sich eine Reihe weiterer Sätze über Schnittpunktsysteme ableiten, auf die wir nicht eingehen; vgl. Cayley: Cambridge and Dublin mathematical journal, vol. III, p. 211, und die angeführten Werke von Cremona und Salmon.

**) Vgl. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, 1828, p. 267.

folglich geht durch den 9ten Schnittpunkt III zweier von ihnen auch die dritte, und damit ist der Pascal'sche Satz bewiesen.*)

Der uns beschäftigende Satz bildet nun zusammen mit dem später zu begründenden „erweiterten Correspondenzprincipe" die Grundlage für die *Geometrie auf einer algebraischen Curve*, d. h. er erlaubt uns in ähnlicher Weise eine Theorie der auf einer solchen gelegenen Punktgruppen herzustellen, wie wir dieselbe auf der geraden Linie bereits kennen gelernt haben (Theorie der binären algebraischen Formen). Bei den hierauf bezüglichen Untersuchungen wird uns zuerst die fundamentale Bedeutung des *Geschlechtes* (p. 351)

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r$$

einer Curve n^{ter} Ordnung ihrem vollen Umfange nach entgegen treten: Es zeigen sich die wesentlichsten Eigenschaften der Punktsysteme auf einer Curve geradezu allein von der Zahl p, nicht von Ordnung oder Klasse der Curve abhängig, so dass wir weiterhin genöthigt sind, die Curven je nach ihrem Geschlechte näher zu untersuchen, sie nach demselben in wesentlich verschiedene Klassen zu theilen. Es steht dies in genauem Zusammenhange mit der Theorie der Abel'schen Integrale und der eindeutigen Transformationen: erst an der Hand dieser Theorien werden wir einen vollständigen Ueberblick über die Geometrie auf einer Curve gewinnen können. Besonders auf Grund der Arbeiten von Brill und Nöther sind wir jedoch in der Lage, schon jetzt eine Reihe von Problemen rein algebraisch zu erledigen.**)

Wir beschränken uns dabei auf Betrachtung der Punktsysteme, welche auf einer gegebenen festen Curve durch sogenannte adjungirte Curven ausgeschnitten werden; eine Beschränkung, welche sogleich noch näher begründet werden wird. *Unter einer „adjungirten Curve" verstehen wir eine solche, die durch sämmtliche Doppel- und Rückkehrpunkte der festen Grundcurve einmal hindurchgeht*, oder allgemeiner, die durch jeden *i-fachen* Punkt derselben $(i-1)$-fach hindurchgeht, ohne dass sich dabei einzelne Zweige beider Curven berühren. Ferner setzen wir voraus, dass die gegebene Curve n^{ter} Ordnung (C_n) in jedem i-fachen Punkte lauter getrennte Tangenten besitzt.***) Alsdann können wir jeden i-fachen Punkt durch $\frac{1}{2}i(i-1)$

---

*) Man überzeugt sich leicht, dass die oben hervorgehobene Einschränkung des Satzes für zerfallende Schnittpunktsysteme in diesem Falle ohne Einfluss bleibt.

**) Vgl. für das Folgende Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie: Göttinger Nachrichten, Februar 1873 und Math. Annalen, Bd. VII. p. 269.

***) Ueber die Berücksichtigung von vielfachen Punkten mit theilweise zusammenfallenden Aesten vgl. den Abschnitt über eindeutige Transformation in der 6. Abtheilung, sowie den Schluss dieser 4. Abtheilung.

Doppelpunkte ersetzt denken (vgl. p. 329), und dem entsprechend setzen wir das Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_i \alpha_i \frac{i(i-1)}{2},$$

wenn die Curve C_n α_2 Doppel-, α_3 dreifache, . . . α_i i-fache Punkte besitzt. Für das Schnittpunktsystem einer adjungirten Curve haben wir in den Formeln unseres Fundamentaltheorems $\delta = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1)$ zu setzen; und wir können dasselbe dann folgendermassen aussprechen, wie man leicht erkennt, da in einem i-fachen Punkte immer $i\,(i-1)$ Schnittpunkte mit der adjungirten Curve zusammenfallen:

Von den nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkten einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung mit der gegebenen C_n sind

1) *für $m > n-3$: höchstens p durch die übrigen $nm - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - p = n\alpha + p - 2$ ($\alpha = m - (n-3)$) Schnittpunkte bestimmt*)*;

2) *für $m = n - 2 - r$: höchstens $p - 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$ durch die übrigen $\frac{1}{2} m\,(m+3) - \frac{1}{2} \Sigma\alpha_i . i\,(i-1)$ bestimmt.*

Wenn wir uns nun zu Betrachtungen von Systemen von adjungirten Curven wenden, oder vielmehr zur Betrachtung der von solchen Systemen auf der C_n ausgeschnittenen Punktgruppen, wollen wir die letzteren durch folgende Elemente als charakterisirt ansehen:

1) Die Zahl (Q) der in jeder Gruppe der „*Schaar*" befindlichen Punkte, d. h. die Zahl der *beweglichen* Schnittpunkte einer adjungirten Curve des betrachteten Systems (letztere kann nämlich auch ausserhalb der singulären Punkte von f eine Anzahl *feste* Schnittpunkte mit der C_n gemein haben).

2) Die *Mannigfaltigkeit der Schaar*, d. h. die Zahl (q) der willkürlichen Parameter, von denen die Coëfficienten einer Curve des Systems abhängen.

3) Der *Grad der Schaar*, d. h. die Dimension, bez. die Form, in welcher diese q Parameter in die Gleichung der Curve eingehen. Dieselben sollen im Folgenden immer rational vorkommend vorausgesetzt werden.

Einige Beispiele mögen diese Unterscheidungsmerkmale näher erläutern. Die C_n sei eine Curve 3ter Ordnung ohne singulären Punkt; alsdann bilden die sämmtlichen Geraden der Ebene ein 2-fach unendliches ($q = 2$) System (∞^2) von adjungirten Curven, das von zwei Parametern linear abhängt; die von ihnen auf der C_3 ausgeschnittenen Punktgruppen bilden daher eine *lineare 2-fach unendliche Schaar von je 3 Punkten* ($Q = 3$). Dagegen bestimmen alle Linien, die durch einen festen Punkt der C_3 gehen, und also noch in 2 beweglichen Punkten schneiden, eine *lineare 1-fach unendliche Schaar von je 2 Punkten* ($Q = 2$,

*) Dieser Satz gibt also eine directe geometrische Bedeutung für die Zahl p.

$q = 1$); ferner die Tangenten eines festen Kegelschnittes ($x_1 x_2 - x_3^2 = 0$), da dieselben in der Form

$$x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0$$

darstellbar sind, eine *quadratische einfach unendliche Schaar von je 3 Punkten.* Hat die C_3 einen Doppelpunkt und betrachten wir den von ihm ausgehenden Strahlbüschel, von dem jeder Strahl die C_3 noch in einem beweglichen Punkte trifft, so bestimmt dieser Büschel eine *einfach unendliche lineare Schaar von je einem Punkte* ($Q = 1$). Allgemein endlich schneiden alle adjungirten Curven m^{ter} Ordnung ($m > n - 3$), die durch s beliebige feste Punkte gehen, auf der C_n eine lineare Schaar von Punktgruppen aus, für welche

$$Q = nm - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i - 1)$$
$$q = nm - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i - 1) - p - s\,;$$

denn von den Q Schnittpunkten sind nach unserm Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme p durch die übrigen bestimmt, und somit nur noch $Q - p$ willkürlich; also ist $q = Q - s - p$. Liegen hingegen von den s festen Punkten R auf der C_n, so haben wir:

$$Q = mn - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i - 1) - R$$
$$q = mn - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i - 1) - s - p\,.$$

Während die Punktgruppen auf der C_n durch die bisherige Darstellung wesentlich von den betreffenden adjungirten Curven abhängig erscheinen, gelingt es durch den sogenannten *Restsatz*, zu dessen Darlegung wir nun übergehen, diese Gruppen in gewissem Grade unabhängig von den sie ausschneidenden Curven zu definiren, wodurch sie entsprechend den Forderungen einer Geometrie auf der Curve mehr als selbständige Gebilde dastehen. Um den *Restsatz* präcis aussprechen und beweisen zu können, müssen wir die folgenden Bezeichnungen einführen.

Als *Residuum* einer Gruppe G_Q von Q Punkten bezeichnen wir eine jede Punktgruppe (G_R), welche mit jener zusammen das vollständige Schnittpunktsystem der vorliegenden C_n mit einer adjungirten Curve bildet; die Ordnung der letzteren ist dabei gleichgültig. Es sei hierbei noch einmal hervorgehoben, dass wir in dem Schnittpunktsysteme die in singuläre Punkte der C_n fallenden Schnittpunkte nie mitzählen, sondern da ihre Zahl ($\Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i - 1)$) für dieselbe C_n immer die gleiche ist, stets als selbstverständlich ergänzen. Es kann jedoch vorkommen, dass von den Punkten der G_Q (etwa durch Berührung der ausschneidenden Curve mit den Aesten der Grundcurve im singulären Punkte) in einen solchen ausnahmsweise noch mehr Schnittpunkte fallen; diese sind unter den $Q + R$ Punkten mitzuzählen. — Die Punktgruppe G_R heisst dann zu G_Q *residual*, und umgekehrt.

Corresidual in Bezug auf G_Q nennen wir zwei Punktgruppen G_R und $G_{R'}$, welche zu derselben dritten Gruppe G_Q residual sind, welche also von zwei adjungirten Curven ausgeschnitten werden können, deren übrige Schnittpunkte mit der C_n sämmtlich in die Punkte Q fallen; diese beiden Curven können dabei von gleicher oder verschiedener Ordnung sein. Der Begriff der *Corresidualität* ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil er eben durch den Restsatz von einem speciellen Residuum (G_Q) unabhängig gemacht wird.

Um ein *Beispiel* für die Anwendung dieser Definition zu geben, wählen wir eine Curve 5ter Ordnung ($n = 5$) mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$). Alle adjungirten Kegelschnitte, welche durch 2 feste Punkte der C_5 (und durch die Doppelpunkte) gehen, schneiden die C_5 noch in 4 anderen Punkten. Jede dieser Gruppen G_4 ist dann zu jenen beiden festen Punkten residual, und alle diese einfach unendlich vielen G_4 sind unter einander corresidual in Bezug auf die feste G_2.

Der zu beweisende Satz lautet nun allgemein folgendermassen:

*Sind auf einer algebraischen Curve die Punktgruppen G_R, $G_{R'}$, ... einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie auch corresidual in Bezug auf jede andere Punktgruppe $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist.**)

Wir erläutern den Sinn des Satzes zunächst an einigen Beispielen. Wir betrachten wieder eine C_5 mit zwei Doppelpunkten ($p = 4$) und den Büschel adjungirter C_2 mit 2 festen Punkten G_2 (ausser den Doppelpunkten). Letzterer bestimmt uns eine einfach unendliche lineare Schaar von G_4, welche in Bezug auf die G_2 corresidual sind. Durch eine solche G_4 kann aber nur ein einziger adjungirter Kegelschnitt gelegt werden; um daher zu einer Gruppe $G_{Q'}$ zu gelangen, die in Bezug auf eine G_4 zu der G_2 corresidual ist, müssen wir durch die G_4 eine adjungirte Curve höherer, sagen wir 3ter Ordnung, legen. Diese schneidet die C_5 dann noch in 7 anderen Punkten, die eine in Bezug auf G_4 zu G_2 corresiduale Gruppe G_7 bilden. Der Restsatz sagt nun aus, dass man durch diese G_7 einen Büschel von adjungirten C_3 legen kann, welche auf der C_5 *dieselbe* Schaar von Punktgruppen G_4 ausschneiden, die wir vorhin durch einen Büschel adjungirter Kegelschnitte bestimmt haben. Die zuerst willkürlich durch eine der G_4

---

*) Der Satz wurde für Curven 3. Ordnung auch von Sylvester gegeben und findet sich in dem Werke Salmon's über höhere Curven, welches gleichzeitig mit der Note von Brill und Nöther in den Göttinger Nachrichten erschien. Historisch ist derselbe zunächst, wenn auch nicht in der Form, aus dem Additionstheoreme der Abel'schen Integrale erwachsen. — Der Satz gilt übrigens auch für Punktgruppen auf einer zerfallenden Curve; denn wir werden beim Beweise an keiner Stelle die Irreducibilität der Curve $f = 0$ vorauszusetzen brauchen.

gelegte adjungirte C_3 hätten wir auch so wählen können, dass sie in einem der 4 Punkte die C_5 berührt, dass also ein Punkt der durch sie ausgeschnittenen Gruppe G_7 mit einem Punkte der G_4 zusammenfällt; an dem Wesen der Sache wird dadurch nichts geändert. Ueberhaupt sei bemerkt, *dass es gleichgültig ist, ob die Gruppen G_R, $G_{R'}$, . . . und die Gruppen G_Q, $G_{Q'}$, . . . lauter verschiedene oder theilweise je dieselben Punkte enthalten.*

Zum *Beweise* unseres Theorems nehmen wir an, die gegebene Curve (C_n) sei

$$f = 0;$$

auf ihr mögen die Punktgruppen

$$\begin{array}{llllll} G_Q & \text{und} & G_R & \text{durch} & A = 0\,, \\ G_Q & \text{„} & G_{R'} & \text{„} & B = 0\,, \\ G_{Q'} & \text{„} & G_R & \text{„} & \alpha = 0 \end{array}$$

ausgeschnitten werden, wo $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$ zu $f = 0$ adjungirte Curven sind: wir haben zu zeigen, dass auch die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ auf einer adjungirten Curve liegen. Es lassen sich nämlich, wie sogleich nachgewiesen werden soll, immer zwei adjungirte Curven

$$\beta = 0\,, \quad \gamma = 0$$

finden der Art, dass identisch die Gleichung

$$(1) \qquad \alpha \,.\, B = \beta \,.\, A + \gamma \,.\, f$$

besteht. Es enthält dann ausser den singulären Punkten von f die (zerfallende) Curve

$$\begin{array}{lllll} & \alpha \,.\, B = 0 & \text{die Punktgruppen} & G_Q,\ G_{Q'},\ G_R,\ G_{R'}\,, \\ & \gamma \,.\, f = 0 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & G_Q,\ G_{Q'},\ G_R,\ G_{R'}\,, \\ \text{und} & A = 0 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & G_Q,\ G_R\,; \end{array}$$

folglich muss, damit $\beta \,.\, A$ für alle gemeinsamen Verschwindungspunkte von $\alpha \,.\, B$ und $\gamma \,.\, f$ Null sei, $\beta = 0$ die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ enthalten, w. z. b. w.

Dass die Identität (1) in der That immer hergestellt werden kann, ergibt sich, weil das Product $\alpha \,.\, B$ alle Bedingungen erfüllt, an welche nach einem früher von uns behandelten Satze von Nöther*) die Möglichkeit geknüpft ist, dasselbe auf die Form der rechten Seite zu bringen; denn es verschwindet für alle gemeinsamen Punkte von $A = 0$ und $f = 0$, und zwar $(2\,i - 2)$-fach in jedem i-fachen Punkte

*) Vgl. p. 341. Wir haben in dem dort gegebenen Satze nur f durch $\alpha \,.\, B$, φ durch A, ψ durch f zu ersetzen und $r = i$, $q = i - 1$ zu nehmen. — Hierin liegt auch der Grund, weshalb man sich bei diesen Untersuchungen auf adjungirte Curven beschränkt.

von $f = 0$, während $A = 0$ in einem solchen einen $(i - 1)$-fachen Punkt hat. Wegen der *Identität* (1) muss nun ferner das Verhalten von $\beta \, . \, A$ gegenüber $\gamma \, . \, f$, dem von $\alpha \, . \, B$ vollkommen analog sein, $\beta = 0$ also in jedem i-fachen Punkte von f $(i - 1)$-fach verschwinden, ohne die Zweige von f zu berühren, d. h. eine adjungirte Curve darstellen, w. z. b. w.

An Stelle von $B = 0$ können wir nun eine *Schaar* von Curven $B = 0$ treten lassen, welche alle durch G_Q gehen, indem wir die Coëfficienten von B als abhängig von einer Anzahl Parametern betrachten. Diese Curven schneiden auf f ein System von beweglichen Punktgruppen $G_{R'}$ aus. Ist dann $A = 0$ eine feste Curve, welche durch G_Q und ausserdem durch eine Gruppe G_R geht, $\alpha = 0$ dagegen eine feste Curve, welche durch G_R und ausserdem durch eine dritte Gruppe $G_{Q'}$ geht; und soll dann wieder die Identität (1) bestehen: so muss $\beta = 0$ offenbar eine zweite Schaar von Curven darstellen, welche alle durch die festen Punkte $G_{Q'}$ hindurchgehen und auf $f = 0$ *dasselbe* System von beweglichen Punktgruppen $G_{R'}$ ausschneiden, das wir vorhin durch die Curvenschaar $B = 0$ bestimmt hatten. Und es muss, wenn (1) eine *identische* Gleichung sein soll, die Schaar $\beta = 0$ dieselben willkürlichen Parameter in derselben Form enthalten, wie die Schaar $B = 0$. Beide Schaaren, $B = 0$ und $\beta = 0$, sind somit in ihrer Beziehung zu $f = 0$ völlig vertauschbar: sie sind, wie wir uns ausdrücken wollen, *zu einander äquivalent*. Kommen in ihnen insbesondere die Parameter *linear* vor, so können wir dies Resultat in folgendem Satze aussprechen, den wir noch mehrfach benutzen werden:

Die Zahl der linear von einander unabhängigen Curven einer linearen Schaar von adjungirten Curven ist gleich der entsprechenden Zahl für eine jede zu ihr residuale Schaar. Für die letztere darf dabei natürlich nicht eine solche gewählt werden, die durch besondere Bedingungen specialisirt ist und in Folge dessen eine Schaar von geringerer Mannigfaltigkeit vorstellt.

Als Beispiel für solche Vorkommnisse betrachten wir zwei einfach unendliche Curvenbüschel, wodurch wir wieder auf die Chasles-Jonquières'sche Erzeugungsweise der algebraischen Curven geführt werden. Durch einen festen Punkt (also $Q = 1$) einer Curve n^{ter} Ordnung (C_n) ohne singuläre Punkte legen wir einen Strahlbüschel $B \equiv u_x + \lambda v_x = 0$, durch welchen eine lineare einfach unendliche Schaar von G_{n-1} ($= G_{R'}$) auf der C_n gegeben ist. Durch eine beliebige Gruppe ($= G_R$) dieser G_{n-1} (bestimmt durch $A \equiv u_x + \lambda' v_x = 0$) legen wir eine Curve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\alpha = 0$, was immer möglich ist; dieselbe schneidet die C_n noch in einer $G_{Q'}$, bestehend aus $n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)^2$ Punkten: es muss sich dann eine Curvenschaar $\beta = 0$ so bestimmen lassen, dass wieder

$$\alpha \,.\, B \equiv \beta \,.\, A + \gamma \,.\, f\,;$$

d. h. durch jene Gruppe $G_{Q'}$ von $(n-1)^2$ Punkten gehen noch unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\beta = 0$ hindurch. Die Gesammtheit der letzteren bildet einen zu $B = 0$ äquivalenten Büschel, der Art, dass jeder Curve $B = 0$ *eine* Curve $\beta = 0$ durch unsere Construction zugeordnet ist, und umgekehrt.*) Beide Büschel sind daher projectivisch auf einander bezogen und man kann sich also die C_n aus ihnen in bekannter Weise erzeugt denken (p. 376). — Dasselbe gilt aber auch noch, wenn die C_n vielfache Punkte hat. Den Strahlbüschel nämlich können wir dann zu einem Büschel von adjungirten Curven durch Hinzufügen einer festen adjungirten Curve $P = 0$ ergänzen; d. h. wir setzen:

$$B = P\,(u_x + \lambda v_x)\,, \quad A = P\,.\,(u_x + \lambda' v_x)\,.$$

Durch die $n-1$ Schnittpunkte des Strahles $u_x + \lambda' v_x = 0$ mit $f = 0$ können wir immer noch eine adjungirte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\alpha \equiv a_x^{n-1} + \lambda' \alpha_x^{n-1} = 0$$

legen; denn für eine solche dürfen nach Obigem mindestens $2(n-1)+p$ Punkte willkürlich gewählt werden. Dieselbe schneidet die C_n ausserdem noch in $(n-1)^2$ Punkten, von denen $\Sigma \alpha_i\, i\,(i-1)$ in die vielfachen Punkte der C_n fallen. Wegen der Identität (1) muss sich nun wieder ein zu B äquivalenter Büschel $\beta = 0$ bestimmen lassen, welcher jene $(n-1)^2$ Punkte zu Basispunkten ist. Hieraus folgt zunächst, dass *jede algebraische Curve durch einen Geradenbüschel und einen ihm projectivischen Büschel von Curven* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung erzeugt werden kann.* In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn der Strahlbüschel durch einen Kegelschnittbüschel ersetzt wird, dessen 4 Basispunkte auf der C_n liegen. Jede Curve desselben schneidet noch in $2\,(n-2)$ Punkten; durch diese wird man aber nur eine adjungirte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen können, wenn $n-2+p \geqq 2\,(n-2)$ ist (vgl. p. 430). Andernfalls hat man einen Büschel von C_{n-2} zu construiren, welcher durch Hinzufügen einer festen Curve zu einem äquivalenten Büschel adjungirter Curven ergänzt wird, und dann kann man wieder die Identität (1) anwenden. Es ist klar, wie man in der Weise weiter gehen kann zu projectivischen Büscheln m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dabei hat man nur zu berücksichtigen, dass die m^2 Grundpunkte eines Büschels m^{ter} Ordnung nicht von einander unabhängig sind, dass man also von ihnen auf der C_n nur eine geringere Zahl wird willkürlich annehmen dürfen, wenn auch die übrigen auf der C_n liegen sollen (vgl. darüber de Jonquières a. a. O.). —

*) Man weist nämlich sehr leicht nach, dass im binären Gebiete jede eindeutige Transformation linear sein muss.

Aus den letzten Beispielen ist ersichtlich, wie man die Sätze über Schnittpunktsysteme adjungirter Curven für Punktgruppen verwerthen kann, die durch nicht adjungirte Curven ausgeschnitten werden, indem man letztere durch Hinzufügen fester Curven zu adjungirten ergänzt. Begründet ist die von uns eingehaltene Beschränkung aber wesentlich darin, dass für adjungirte Curven die Identität (1) *immer* angenommen werden kann, und dass die Schnittpunktsysteme solcher Curven auch für andere, später zu entwickelnde Theorien von besonderer Wichtigkeit sind.

Wir beschränken uns nun im Folgenden auf die Betrachtung *der linearen Schaaren von Punktgruppen.* Zur Abkürzung führen wir für sie folgende Bezeichnungen ein; es bedeute:

$g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ... eine lineare q-fach unendliche Schaar von Gruppen zu je Q Punkten, und

$G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, ... eine einzelne Gruppe aus einer solchen Schaar $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ...

Jede Gruppe in einer linearen Schaar $g_Q^{(q)}$ ist offenbar durch q willkürlich zu wählende Punkte eindeutig festgelegt; die übrigen $Q - q$ Punkte einer Gruppe der Schaar sind dadurch mit bestimmt. Da nun aber nach unserem Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme von Curven m^{ter} Ordnung auf der C_n

für $m > n - 3$ höchstens p,

für $m = n - 2 - r$ höchstens $p - 1 - \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$

durch die übrigen bestimmt sind, so haben wir den Satz:

Zwischen den Zahlen q, Q einer durch Curven m^{ter} Ordnung auf einer Curve vom Geschlecht p ausgeschnittenen Schaar $g_Q^{(q)}$ besteht die Relation:

für $m > n - 3 \qquad : q \geqq Q - p$,

für $m = n - 3 - r : q \geqq Q - p + 1 + \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber — wie spätere Anwendungen lehren werden — der Umstand, dass sich dieser Satz für $m \leqq n - 3$ umkehren lässt. Wir brauchen dies nur für $m = n - 3$ nachzuweisen; denn wir haben nirgends vorausgesetzt, dass die adjungirten Curven nicht zerfallen, und daher kann jede Schaar von Curven niedrigerer Ordnung durch Hinzufügen fester Curven zu einer solchen von Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung ergänzt werden. Ueberdies sind diese Curven für das Weitere, besonders für die eindeutigen Transformationen, von grösster Wichtigkeit. Wir sprechen deshalb zunächst die Schnittpunktsätze noch einmal für sie besonders aus:

Von den $2p-2$ Schnittpunkten einer adjungirten Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung sind, wenn $p>1$ höchstens) $p-1$ durch die übrigen $p-1$ Punkte bestimmt; und zwischen den Zahlen q, Q einer durch solche Curven ausgeschnittenen Schaar besteht die Gleichung:*

$$q \geqq Q-p+1\,.$$

Die nunmehr zu erweisende Umkehr der letzteren Behauptung ist die folgende:

Eine q-fach unendliche lineare Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen zu je Q Punkten kann immer dann durch eine Schaar von adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten werden, wenn

(2) $$q \geqq Q-p+1\,, \quad \textit{also} \quad Q-q \leqq p-1\,.$$

Es sei bemerkt, dass unter den Q Punkten jeder $G_Q^{(q)}$ sich auch solche befinden können, die für alle Gruppen der $g_Q^{(q)}$ *dieselben* sind. Für Q ist uns eine obere Grenze durch die Bedingung

$$Q \leqq 2p-2$$

gegeben; denn in so viel beweglichen Punkten kann eine C_{n-3} überhaupt nur schneiden. Diese Bedingung ist jedoch auf den Gang des Beweises ohne Einfluss; und gerade aus diesem Umstande werden wir eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen.

Zunächst ist sofort klar, dass der Satz richtig ist für $q=0$ (also $Q \leqq p-1$); denn durch eine vollständig bestimmte *einzelne* Gruppe von $p-1$ oder weniger Punkten kann immer eine adjungirte Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung gelegt werden. Ebenso sieht man die Richtigkeit des Satzes für $q=1$ (also $Q \leqq p$) leicht ein. Denn für $Q=p$ und $m>n-3$ würden im Allgemeinen p Punkte durch die übrigen, hier festen Punkte bestimmt, dieselben können also nur für $m \gtreqless n-3$ beweglich sein. Liegen aber die festen Punkte der schneidenden C_m so, dass sie die weiteren p Punkte nicht bestimmen, so construiren wir in folgender Weise einen äquivalenten Büschel $(n-2)^{ter}$ Ordnung von besonderer Art. Wir legen durch eine der beweglichen

---

*) Das Wort „höchstens" ist z. B. wegen des folgenden Falles nöthig: Man nehme auf einer C_5 mit 2 Doppelpunkten ($p=4$) $p-1=3$ Punkte in einer Geraden durch einen der Doppelpunkte an; eine andere Gerade durch den andern Doppelpunkt ergänzt dann erstere zu einem adjungirten Kegelschnitte (C_{n-3}); ihre $p-1=3$ Schnittpunkte sind aber durch die jener Linie nicht bestimmt, sondern bilden noch eine $g_3^{(1)}$. Nimmt man die $p-1=3$ Punkte jedoch so an, dass zwei auf einer Geraden durch den einen, einer auf einer Geraden durch den andern Doppelpunkt liegen, so sind dadurch die übrigen 3 Schnittpunkte wieder bestimmt. — Bei Curven mit $p=0$ oder $p=1$ gelten ähnliche Sätze für Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung.

$G_p^{(1)}$ eine C_{n-2}, die in eine Gerade A und eine C_{n-3} zerfällt, so dass letztere durch $p-1$ von den Punkten der $G_p^{(1)}$ bestimmt wird und die C_n noch in $p-1$ anderen Punkten Γ_{p-1} trifft, während die Gerade A beliebig durch den p^{ten} Punkt α hindurchgeht, und die C_n noch in $n-1$ weiteren Punkten Γ_{n-1} schneidet. Letztere Gruppe Γ_{n-1} bildet dann zusammen mit der Γ_{p-1} das System von Grundpunkten für den äquivalenten Büschel von C_{n-2}, welcher die $g_p^{(1)}$ ausschneidet. Die Gerade A ist aber allen diesen Curven C_{n-2} gemeinsam, und also bleibt ein Büschel von C_{n-3}, durch welches die $g_p^{(1)}$ ausgeschnitten werden muss. Insbesondere muss auch, wenn dies für *alle* anderen Gruppen der Schaar eintritt, die bei unserer Construction benutzte $G_p^{(1)}$ auf einer C_{n-3} liegen; und somit folgt, dass von den $p-1$ Punkten der Γ_{p-1} einer in den Punkt α hineinfällt. Wir können dies Resultat ($Q=p$, $q=1$) in folgender Weise aussprechen:

Wenn ein Büschel von adjungirten Curven eine $g_p^{(1)}$ bestimmt, d. h. in p beweglichen Punkten schneidet, so liegt jeder Punkt einer einzelnen $G_p^{(1)}$ der Schaar mit den $p-1$ anderen Punkten auf einer C_{n-3}, und diese Curven C_{n-3} bilden einen zum ersten Büschel äquivalenten Büschel.

Für $q=1$, $Q<p$ endlich ist die Richtigkeit unseres obigen Theorems wieder evident, denn durch $p-1$ oder weniger Punkte kann man immer eine C_{n-3} legen; und somit ist hier die Construction eines äquivalenten Büschels von C_{n-3} selbstverständlich.

In ähnlicher Weise kann man den Beweis überhaupt führen, indem man von einer $g_{Q-1}^{(q-1)}$ zu einer $g_Q^{(q)}$ aufsteigt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass der Satz richtig ist für jede Schaar $g_Q^{(q)}$, wenn er richtig ist für Schaaren $g_{Q-1}^{(q-1)}$, immer vorausgesetzt, dass $q \geqq Q-p-1$, und zwar nehmen wir $q \geqq 2$ an, da wir die Fälle $q=0$ und $q=1$ schon erledigt haben.

Zu dem Zwecke fassen wir einen beliebigen festen Punkt α ins Auge. Alle Gruppen der gegebenen Schaar $g_Q^{(q)}$, welche diesen Punkt enthalten, bilden noch eine $g_{Q-1}^{(q-1)}$, da wir *lineare* Schaaren voraussetzen. Diese $g_{Q-1}^{(q-1)}$ kann der Annahme nach durch eine ∞^{q-1}-Schaar von $C_{n-3}^{(\alpha)}$ ausgeschnitten werden, welche alle noch durch $R_\alpha = 2p - 2 - (Q-1)$ feste Punkte gehen. Wir haben nur nachzuweisen, *dass unter letzteren R_α Punkten der Punkt α selbst mit enthalten ist;* denn nehmen wir diesen dann wieder beweglich, so erhalten wir von selbst eine ∞^q-Schaar von C_{n-3}, welche alle durch die übrigen $R_\alpha - 1$

festen Punkte gehen, und die gegebene $g_Q^{(q)}$ ausschneiden, wie es verlangt wurde.

Ist nun zunächst $R_\alpha > p - 1$, so folgt:

$$Q - 1 < p - 1 .$$

Dann ist unser Satz selbstverständlich, denn wir können jedenfalls über einen der R_α Punkte willkürlich verfügen, ihn also mit α zusammenfallen lassen

Für $R_\alpha = p - 1$, und also $Q - 1 = p - 1$ wird für $q > 2$ (also $q - 1 > 1$) unter den ∞^{q-1} Gruppen von je $p - 1$ Punkten jedenfalls eine bestimmte Zahl vorhanden sein, welche eine durch sie gehende C_{n-3} noch nicht bestimmt; denn dies erfordert die Erfüllung von 2 Bedingungen.*) Durch eine solche Gruppe und den Punkt α können wir dann noch eine C_{n-3} legen, welche in $p - 2$ weiteren Punkten schneidet. Die letzteren bilden nach dem Restsatze zusammen mit α die $p - 1$ Basispunkte für einen Büschel von C_{n-3}, welcher ebenfalls die von den $C_{n-3}^{(\alpha)}$ bestimmte $g_{p-1}^{(q-1)}$ ausschneidet, q. e. d. Durch jede Gruppe der letzteren Schaar (von $p - 1$ Punkten) gehen also zwei, und somit unendlich viele C_{n-3}, ebenso wie der Annahme nach durch die Gruppe von $R_\alpha = p - 1$ Punkten. Hieraus folgt beiläufig:

Wenn $p - 1$ Punkte so liegen, dass sie eine adjungirte C_{n-3} nicht bestimmen, so schneidet jede durch sie gehende adjungirte C_{n-3} die C_n in $p - 1$ weiteren Punkten, durch welche ebenfalls noch unendlich viele C_{n-3} hindurchgehen.

Wir hätten hiernach also jede beliebige Gruppe von $p - 1$ Punkten des Büschels von $C_{n-3}^{(\alpha)}$ zur Construction eines äquivalenten Büschels von C_{n-3} benutzen können. — In Folge des letzten Satzes erledigt sich aber auch der Fall $R_\alpha = p - 1$ für $q = 2$ von selbst. Nach demselben können wir nämlich durch irgend eine Punktgruppe von $p - 1$ Punkten, in der eine durch die festen Punkte R_α gehende $C_{n-3}^{(\alpha)}$ die C_n noch trifft, immer eine C_{n-3} legen, welche durch den Punkt α hindurchgeht und also wieder einen zu dem Büschel der $C_{n-3}^{(\alpha)}$ äquivalenten Büschel von anderen, *durch α gehenden* C_{n-3} construiren, wie im Falle $q > 2$.

Für den Fall $R_\alpha < p - 1$, d. h.

$$Q - 1 > p - 1 , \quad \text{oder} \quad Q - 2 \geqq p - 1 ,$$

(der auch im Allgemeinen eintreten wird, da durch $p - 1$ Punkte nur in besonderen Fällen unendlich viele C_{n-3} gehen) construiren wir neben

*) Wir werden nämlich später sehen, dass man zu $p - 3$ Punkten immer 2 weitere finden kann, so dass alle $p - 1$ eine adjungirte C_{n-3} *nicht* bestimmen. Vgl. die VI. Abtheilung dieser Vorlesungen (Normalcurven).

der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ eine zweite ∞^{q-1}-Schaar $C_{n-3}^{(\beta)}$, welche eine $g_{Q-1}^{(q-1)}$ ausschneidet und zu allen Curven der ursprünglich gegebenen Schaar $g_Q^{(q)}$, die durch einen beliebigen festen Punkt β gehen, äquivalent ist. Wir betrachten die Punktgruppen der gegebenen $g_Q^{(q)}$ welche gleichzeitig die Punkte α und β enthalten, was für $q \geqq 2$ immer möglich ist. Durch die $Q-2$ beweglichen Punkte einer solchen Gruppe können wir dann der Annahme nach 2 Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, von denen eine der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ angehört und durch β geht, die andere der Schaar $C_{n-3}^{(\beta)}$ angehört und durch α geht. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich*), denn durch die $Q-2$ $(\geqq p-1)$ Punkte ist eine C_{n-3} im Allgemeinen bestimmt. Die beiden erwähnten C_{n-3} müssen daher identisch sein, und somit jede durch *beide* Punkte gehen. Da ferner β völlig beliebig war, so folgt, dass jede Curve der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ den Punkt α enthält, dass also letzterer unter den R_α festen Punkten der Schaar mit enthalten ist; q. e. d.

Das folgende Beispiel möge den hiermit bewiesenen Satz erläutern; wir behaupten: Die einzigen auf einer Curve 5ter Ordnung mit 2 Doppelpunkten möglichen Gruppen $g_3^{(1)}$ sind die beiden ∞^1-Schaaren, welche von den durch die Doppelpunkte gehenden Strahlen ausgeschnitten werden. Nach unserem Satze nämlich kann jede $g_3^{(1)}$ durch adjungirte Kegelschnitte ausgeschnitten werden; soll also ein C_2-Büschel ausser den Doppelpunkten noch 3 $(=p-1)$ feste Punkte mit der C_5 gemein haben, so muss jede C_2 des Büschels zerfallen.

In dem Beweise haben wir an keiner Stelle von der Bedingung $Q \leqq 2p-2$ Gebrauch gemacht. Auch wenn diese nicht erfüllt wäre, würde dieselbe Schlussweise, und somit auch der resultirende Satz gelten. Weil aber adjungirte C_{n-3}, die in mehr als $2p-2$ Punkten schneiden, nicht existiren, so müssen wir rückwärts schliessen, *dass Punktgruppen $G_Q^{(q)}$ von mehr als $2p-2$ Punkten, für welche $q \geqq Q-p+1$ ist, nicht existiren.*

Diese Bemerkung kann man zum Beweise eines wichtigen Satzes benutzen. Gruppen G_Q, welche durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden, bilden mindestens eine $(Q-p+1)$-fach unendliche Schaar; also Gruppen G_{2p-2} *mindestens* eine ∞^{p-1}-Schaar; sie bilden aber auch *höchstens* eine solche. Denn bildeten sie z. B. eine ∞^p-Schaar,

---

*) Sollte dies doch in speciellen Fällen möglich sein, so könnte man einen dritten Punkt γ und eine dritte Schaar $C_{n-3}^{(\gamma)}$ hinzunehmen und entsprechende Ueberlegungen anstellen, etc.

so könnte man, durch Hinzufügen *desselben* willkürlichen *festen* Punktes β auf C_n zu jeder Gruppe der Schaar, eine Schaar $g_{2p-1}^{(p)}$ herstellen; eine solche kann aber zufolge der eben gemachten Bemerkung nicht existiren. Es gibt somit keine Schaar $g_{2p-2}^{(p)}$, und um so weniger eine $g_{2p-2}^{(p+1)}$ u. s. w.

Es gibt also nur eine $(p-1)$*-fach unendliche Schaar, d. h. nur* p *linear von einander unabhängige adjungirte Curven* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung.*

Mit diesem Satze, dem wir später noch wieder begegnen werden, brechen wir die Untersuchungen dieser Art über Schnittpunktsysteme ab, um darauf später in Verbindung mit der Theorie der Abel'schen Functionen zurückzukommen, wo sie dann unter neuem Gesichtspunkte erscheinen und unter Anwendung neuer Hülfsmittel formal einfacher auszusprechen sind. Das hier Angeführte wird zunächst genügen, um einen Einblick in die von Brill und Nöther befolgte Methode zu gewähren.

VIII. Fortsetzung. — Das erweiterte Correspondenzprincip.

Mit den letzten Betrachtungen nicht in unmittelbarem Zusammenhange steht ein für die Geometrie auf einer Curve nicht minder wichtiger Satz, *das sogenannte erweiterte Correspondenzprincip,* zu dessen Aufstellung wir uns wenden. Dasselbe ist eine von Cayley angegebene, von Brill bewiesene Verallgemeinerung des auf der Geraden gültigen und uns bekannten (vgl. p. 210) Chasles'schen Correspondenzprincips für eine beliebige Curve. Von dem Chasles'schen Principe ist dasselbe für Curven vom Geschlecht Null nicht verschieden; es kommt eben nur ein vom Geschlechte der Curve (C_n) abhängiges Glied zu der von jenem gegebenen Zahl hinzu, so dass auch hier wieder die hohe Bedeutung des Geschlechtes für eine Curve hervortritt.*) Die zahlreichen Probleme, deren Erledigung mittelst dieser allgemeineren *Correspondenzformel* gelingt, und von denen wir einige weiterhin bezeichnen, werden ein näheres Eingehen auf den Gegenstand hinreichend rechtfertigen.

---

*) Das Princip wurde zuerst ohne Beweis von Cayley ausgesprochen: Comptes rendus, t. 62, p. 586; ausführlicher in: On the correspondence of two points on a curve, Proceedings of the London math. society, vol. 1. 1866 (Beweis für einen speciellen Fall) und mit zahlreichen Anwendungen in: Second memoir on the curves, which satisfy given conditions, Philos. Transactions of the R. Soc. London, vol. 158, 1868. Einen algebraischen Beweis zugleich für eine allgemeinere Formel gab Brill: Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve, Math. Annalen, Bd. VI, p. 33, 1873, und mehr geometrisch: Ueber die Correspondenzformel, ib. Bd. VII, p. 607, 1874. — Die Gültigkeit seines Princips für Curven vom Geschlechte Null benutzte schon Chasles: Comptes rendus, t. 62, p. 584, März 1866.

Die Gleichung der betrachteten Curve (C_n) von der Ordnung n und dem Geschlechte p sei:

$$f(x) = 0; \tag{1}$$

und zwar setzen wir sie zunächst ohne Doppel- und Rückkehrpunkte voraus. Es sei ferner eine Gleichung:

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0 \tag{2}$$

gegeben, vermöge deren jedem Punkte x der Ebene eine Curve s^{ter} Ordnung, jedem Punkte y eine Curve r^{ter} Ordnung entspricht. Auf der Curve f haben wir dann, wenn gleichzeitig

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(y) = 0,$$

eine *Correspondenz*, vermöge deren jedem Punkte y der Curve $a = rn$ Punkte x und jedem Punkte x derselben $b = sn$ Punkte y zugeordnet sind. Dabei soll zunächst vorausgesetzt werden, dass *nicht alle beweglichen (zu y (bez. x) gehörenden) Curven dieselben festen Punkte gemein haben**), dass also die a bez. b Punkte sämmtlich mit y bez. x beweglich seien. Die Curve $(r + s)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0 \tag{3}$$

stellt nun den Ort eines Punktes dar, für welchen die ihm entsprechende Curve durch ihn selbst hindurchgeht. Sie schneidet auf f daher $(r + s)\,n = a + b$ Punkte aus, für welche einer der y correspondirenden Punkte x in y fällt, oder umgekehrt. Diese $a + b$ Punkte nennen wir die *Coincidenzpunkte der Correspondenz* φ; die Correspondenz selbst werden wir, insofern sie in Bezug auf f betrachtet wird, kurz durch (a, b) bezeichnen.

Diese Betrachtung verliert jedoch ihre Gültigkeit, wenn die Gleichung (3) vermöge $f(x) = 0$ und $f(y) = 0$ für *jeden* Punkt x oder y von f erfüllt ist**), d. h. wenn von den Schnittpunkten der einem Punkte x entsprechenden Curven einer oder mehrere, sagen wir γ, in x selbst hineinfallen, und von den Schnittpunkten der zu y gehörenden Punkte δ in y liegen. Es kann dies dadurch eintreten, dass die betreffende Curve in x eine $(\gamma - 1)$-fache Berührung mit f hat, d. h. γ unendlich benachbarte Schnittpunkte, oder einen γ-fachen Punkt, oder einen ϱ-fachen Punkt und $\gamma - \varrho$ successive Schnittpunkte, wobei sich die letzteren noch in verschiedener Weise auf die ϱ Zweige der Curve φ vertheilen können. Wir sagen in allen diesen Fällen, die

---

*) In Betreff dieser Fälle sei auf den Abschnitt über eindeutige Transformationen in der 6ten Abtheilung dieses Bandes verwiesen.

**) Dies tritt z. B. ein, wenn $\varphi = \psi(x) \cdot \chi(y) - \chi(x) \cdot \psi(y)$ ist, oder wenn φ für $x = y$ eine Potenz von f zum Factor erhält.

Curve habe mit f *einen „γ-werthigen Schnittpunkt in $x = y$“*. Analoges gilt für y und δ. Es ist aber sehr wichtig, *dass immer*

$$(4) \qquad \gamma = \delta$$

sein muss. Denken wir uns nämlich aus $\varphi(x, y) = 0$ mit Hülfe von $f(x) = 0$ eine der Coordinaten x_i von x, etwa x_3, eliminirt, so muss in der Eliminationsgleichung, da sie für $x_i = y_i$ γ-fach verschwindet, der Factor $x_1 y_2 - x_2 y_1$ γ-mal auftreten. Eliminirt man dann noch y_3 mittelst $f(y) = 0$, so enthält die Resultante diesen Factor $n\gamma$-mal. Dasselbe Resultat muss sich aber ergeben, wenn man umgekehrt erst y_3 und dann x_3 eliminirt, wodurch jener Factor $m\,\delta$-mal vorkommen würde. Daher hat man in der That $\gamma = \delta$. Die Zahl γ zeigt sich für die Correspondenz φ charakteristisch; wir werden eine solche mit einem γ-werthigen Punkte in x durch $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ bezeichnen, oder durch $(\alpha, \beta)_\gamma$, wenn $a - \gamma = \alpha$, $b - \gamma = \beta$ gesetzt wird.

Unsere Aufgabe ist es nun, anzugeben, wie oft noch ein $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt der zu x gehörigen Curve mit x zusammenfällt, d. h. *wie oft in der Correspondenz $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ ein Punkt y mit einem entsprechenden x zusammenfällt.*

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst für $\gamma = 0$ gleichzeitig zwei Correspondenzen (a, b) und (a', b'):

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}) = 0$$

und fragen nach der Zahl der Punktepaare x, y auf f, welche gleichzeitig beiden Correspondenzen genügen.*) Nun entsprechen jedem Punkte y der Ebene die rr' Schnittpunkte x der ihm zugehörigen Curven $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$; ebenso sind jedem Punkte x der Ebene ss' Punkte y zugeordnet. Bewegt sich y auf einer Geraden, so durchlaufen die entsprechenden rr' Punkte x, wie wir bei einer anderen Gelegenheit sahen (p. 387), eine Curve der Ordnung $rs' + sr'$, also wenn y unsere Curve f beschreibt, durchlaufen sie eine Curve von der Ordnung

$$(5) \qquad n(rs' + sr').$$

Jeder Schnittpunkt x der letzteren mit f wird mit *einem* auf f liegenden Punkte y ein Paar der gesuchten Art geben. Die Zahl der zwei Correspondenzen (a, b), (a', b') zugleich genügenden Punktepaare auf f ist daher gleich

$$(6) \qquad n^2(rs' + sr') = ab' + ba'.$$

Zeigen die Punkte x und y zu jeder der beiden Correspondenzen ein *symmetrisches* Verhalten (wofür nothwendig $a = b$, $a' = b'$), so

*) Das Verhalten dieser Aufgabe zu der vorhergehenden ist analog demjenigen der Bestimmung des Grades der Resultante zweier Gleichungen zu der Bestimmung des Grades der Discriminante einer Gleichung.

ergibt das angeführte Verfahren *dieselbe* Curve der Ordnung $n\,(rs'+sr')$, wenn wir y, und wenn wir x auf der Curve f wandern lassen; jeder Schnittpunkt mit f trägt daher zweimal zur Bildung eines Paares bei. Die Zahl der gesuchten Paare ist also gleich der Hälfte der eben gefundenen Zahl: $r = aa' = bb'$.

Eine Reduction ist jedoch an obiger Zahl $ab' + ba'$ anzubringen, wenn eine oder jede der beiden Correspondenzen einen mehrwerthigen Punkt in $x = y$ hat, und wenn man dann die Anzahl von *getrennt* liegenden Punkten x, y auf f angeben will, welche beiden genügen. Wenn nämlich etwa φ' einen γ'-werthigen Punkt besitzt (also für φ' beim Wandern von x auf f immer γ' Punkte y mit x vereinigt liegen), so genügt ein aus zwei solchen benachbarten Punkten x, y bestehendes Paar zugleich der Correspondenz φ an denjenigen $a + b$ Stellen von f, wo Coincidenzen von φ stattfinden, und zwar an jeder solchen Stelle γ'-fach; wir haben daher $\gamma'\,(a + b)$ abzuziehen. *Die Anzahl der getrennt liegenden Punktepaare, welche zwei Correspondenzen*

$$(a, b) \quad \textit{und} \quad (a' - \gamma', b' - \gamma')_{\gamma'}$$

gleichzeitig genügen, ist also gleich

$$a\,(b' - \gamma') + b\,(a' - \gamma')\,. \tag{7}$$

Die weitere Reduction, welche eintritt, wenn φ zugleich einen γ-werthigen Punkt in $x = y$ hat, d. h. wenn die Correspondenzen

$$\varphi = (a - \gamma, b - \gamma)_\gamma\,, \quad \varphi' = (a' - \gamma', b' - \gamma')_{\gamma'}$$

gegeben sind, bestimmen wir durch folgenden Grenzprocess. Wir denken uns zunächst die eine Correspondenz, etwa φ, ein wenig deformirt (d. h. die Coëfficienten der entsprechenden Gleichung $\varphi = 0$ sehr wenig geändert) in eine andere

$$\pi = (a, b)_0\,,$$

welche dann in $x = y$ keinen ein- oder mehrwerthigen Punkt besitzt, *dagegen γ diesem benachbarte Punkte x, bez. y auf der C_n für jeden Punkt y bez. x ergibt.* Die Zahl der gemeinsamen Punktepaare für die Correspondenzen π und φ' ist nun nach dem Vorigen gleich:

$$ab' + ba' - \gamma'\,(a + b)\,.$$

Unter diesen Paaren gibt es noch solche, welche aus zwei nahe benachbarten Punkten x, y bestehen und, indem diese Punkte zusammenfallen, zu einer weiteren Reduction unserer Zahl Veranlassung geben, sobald die Deformation von φ in π rückgängig gemacht wird. Diese Paare sind zu finden.

Wir betrachten einen Coincidenzpunkt G der Correspondenz φ' näher, d. h. einen Punkt, in dem $\gamma' + 1$ Punkte $x = y$ von φ' liegen. Während sich x dem Punkte G nähert, rückt der mit ihm später

coincidirende Punkt y zunächst in die Nähe von x, fällt, wenn x G erreicht, mit x zusammen und entfernt sich wieder von x, wenn x sich von G entfernt. Während also x durch einen Coincidenzpunkt von φ' geht, durchläuft y alle zu x benachbarten Punkte von f, indem der eine Punkt den andern gewissermassen einholt und dann über ihn hinaus eilt. Unter den benachbarten Punkten von x sind aber auch die γ Punkte, welche aus dem γ-werthigen Punkte von φ in Folge unserer Deformation entstanden: auch jeden dieser γ Punkte muss daher, wenn x durch einen Coincidenzpunkt G von φ' geht, der coincidirende Punkt y einmal passiren. Für jeden Punkt G entstehen dadurch γ aus nahe benachbarten Punkten x, y gebildete Paare, welche zugleich den Correspondenzen φ' und π genügen, und welche bei Aufhören der Deformation von φ eine entsprechende Reduction der Zahl $ab' + ba' - \gamma'(a + b)$ hervorrufen.*) *Ist also C' die Zahl der Coincidenzpunkte von φ'*, so bleiben

$$(8)\qquad (\varphi\varphi') = ab' + ba' - \gamma'(a + b) - \gamma C'$$

Paare von getrennt fallenden Punkten x, y, die den Correspondenzen φ und φ' zugleich genügen.

Nun verfahren wir aber unsymmetrisch, wenn wir die eine Correspondenz φ deformiren; hätten wir statt dessen φ' deformirt, so würden wir die Formel

$$(9)\qquad (\varphi\varphi') = a'b + b'a - \gamma(a' + b') - \gamma' C$$

erhalten haben, *wo C die Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz φ bedeutet.* Da die beiden Werthe für $(\varphi\varphi')$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung:

$$(10)\qquad \frac{C - (a - \gamma) - (b - \gamma)}{\gamma} = \frac{C' - (a' - \gamma') - (b' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Dieser Quotient hat für φ dieselbe Form, wie für φ' und muss daher von der speciellen Natur der Correspondenz ganz unabhängig sein; er kann durch irgend eine Correspondenz, für welche die Zahl C anderweitig bekannt ist, bestimmt werden. Nehmen wir z. B. die Correspondenz zwischen dem Berührungspunkte y einer Tangente der C_n und ihren anderen $n - 2$ Schnittpunkten x mit der C_n, für welche C gleich der Anzahl der Wendepunkte von f, also gleich $3n(n - 2)$ ist. Hier haben wir

$$a = n, \quad b = n(n - 1), \quad \gamma = 2,$$

*) Die Schlussweise des Textes würde zunächst nur für reelle Punkte gelten. Man kann jedoch den gemachten Grenzprocess auch algebraisch verfolgen, wodurch sich dann auch imaginäre Vorkommnisse erledigen; vgl. Brill, Math. Annalen, Bd. VI, a. a. O.

und also den Werth des Quotienten gleich $(n-1)(n-2)$, gleich $2p$. Daher hat man die *Correspondenzformel:*

$$(11) \qquad C = (a-\gamma) + (b-\gamma) + 2\gamma p\,,$$

und ferner durch Substitution:

$$(\varphi\varphi') = (a-\gamma)(b'-\gamma') + (b-\gamma)(a'-\gamma') - 2p\gamma\gamma'\,.$$

Setzt man noch:

$$a-\gamma = \alpha\,; \qquad a'-\gamma' = \alpha'\,,$$
$$b-\gamma = \beta\,; \qquad b'-\gamma' = \beta'\,,$$

wo dann also α die Zahl der vermöge der Correspondenz φ dem Punkte y entsprechenden *nicht* mit y zusammenfallenden Punkte x ist, u. s. w., so haben wir den Satz:*)

Die Anzahl der Coincidenzpunkte einer Correspondenz $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$ auf einer Curve vom Geschlecht p (zunächst ohne Doppelpunkte etc.) ist:

$$(12) \qquad C = \alpha + \beta + 2p\gamma\,;$$

und die Zahl der den beiden Correspondenzen $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$, $\varphi' = (\alpha', \beta')_{\gamma'}$ zugleich genügenden Punktepaare x, y ist:

$$(13) \qquad (\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'\,.$$

Von der letzteren Zahl ist wieder nur die *Hälfte* zu nehmen, wenn φ und φ' ein völlig *symmetrisches* Verhalten zeigen, wie früher für den Fall $\gamma = \gamma' = 0$ schon ausgeführt wurde. —

Wir stellen uns nunmehr die Frage, wie die Coincidenzpunkte einer Correspondenz algebraisch durch ein Eliminationsverfahren zu bestimmen sind. Wir werden insbesondere zeigen, dass sich immer eine Curve angeben lässt, welche die Coincidenzpunkte C auf f ausschneidet, dass also *die Coincidenzpunkte immer das vollständige Schnittpunktsystem von f mit einer anderen Curve bilden.* Diese Curve möge zunächst für die einfachsten Fälle $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ wirklich gebildet werden; für $\gamma = 0$ ist sie ja direct durch $\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0$ gegeben.

Es sei also erstens $\gamma = 1$. Wir setzen symbolisch:

$$(14) \qquad f = a_x^n = b_x^n = \ldots, \quad \varphi = \alpha_x^r \beta_y^s = \alpha'^r_x \beta'^s_y = \ldots,$$

so dass in φ erst je r Symbole α zusammen mit je s Symbolen β eine wirkliche Bedeutung gewinnen. Der Annahme nach haben wir:

$$(15) \qquad \alpha_x^r \beta_x^s = 0, \quad \text{(eventuell vermöge } f = 0\text{)};$$

---

*) Es sei besonders hervorgehoben, dass die gefundenen Formeln ihrer Ableitung nach nur angewandt werden dürfen, wenn die Correspondenz zwischen den Punkten x und y durch *eine* Gleichung $\varphi = 0$ darstellbar ist, d. h. wenn die $a = \alpha + \gamma$ zu y gehörigen, sowie auch die $b = \beta + \gamma$ zu x gehörigen Punkte durch eine bewegliche Curve ausgeschnitten werden.

und es soll sein für $y = x + dx$:

$$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_{dx} = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0. \tag{16}$$

Um zwischen beiden Gleichungen die Differentiale dx_i in symmetrischer Weise eliminiren zu können, sei bemerkt, dass man zwischen den x_i, um ihnen absolute Werthe zu ertheilen, immer eine Gleichung der Form

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1$$

annehmen kann, wo die k_i Constante bedeuten. Hieraus ergibt sich dann als dritte Gleichung:

$$k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0. \tag{17}$$

Aus ihr und den Gleichungen (16) kann man nun die dx eliminiren und findet die Bedingung:

$$(a \beta k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^r \beta_x^{s-1} = 0. \tag{18}$$

Aber statt (16) hätte man auch die Gleichungen:

$$\alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_{dx} = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0 \tag{19}$$

zu Grunde legen können; es ist also auch

$$(a \alpha k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{r-1} \beta_x^s = 0. \tag{20}$$

Hieraus schaffen wir die k_i durch Anwendung der Identität (p. 283):

$$(a \alpha k)\, \beta_x = (a \beta k)\, \alpha_x + (\beta \alpha k)\, a_x + (a \alpha \beta)\, k_x$$

fort; denn wegen (18) und wegen $f = 0$ geht dann (20) bis auf den constanten Factor k_x über in

$$(a \alpha \beta)\, \alpha_x^{r-1} \beta_x^{s-1} a_x^{n-1} = 0, \tag{21}$$

und *diese Gleichung stellt die gesuchte Curve dar.* Die Zahl ihrer Schnittpunkte mit f ist in der That gleich:

$$nr + ns + n(n-3) = nr - 1 + ns - 1 + 2p.$$

Es sei zweitens $\gamma = 2$; und zwar möge dies zunächst dadurch geschehen, dass die zu x gehörige Curve in x und ebenso die zu y gehörige in y einen Doppelpunkt hat; d. h. dass unabhängig von den z:

$$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_z \equiv 0, \qquad \alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_z \equiv 0. \tag{22}$$

Wir fragen nach den Punkten x, in denen ein Zweig des Doppelpunktes die Curve f berührt, d. h. für welche

$$\alpha_x^r \beta_x^{s-2} \beta_{dx}^2 = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0. \tag{23}$$

Die Elimination der dx aus diesen Gleichungen und (17) ergibt:

$$(\beta a k)\, (\beta b k)\, \alpha_x^r \beta_x^{s-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0. \tag{24}$$

Statt (23) hätte man aber auch die Gleichungen:

$$\alpha_x^{r-2} \alpha_{dx}^2 \beta_x^s = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0 \tag{25}$$

zu Grunde legen können; es ist also auch:

$$(26)\qquad (\alpha a k)\,(\alpha b k)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s}a_x^{n-1}b_x^{n-1}=0\,.$$

Es sei ferner bemerkt, dass auch die Gleichungen (18), (20) und (21) wegen (22) für jeden auf f gelegenen Punkt x erfüllt sind. — Zur Fortschaffung der k_i aus (24) wenden wir die Identitäten an:

$$(\beta a k)\,\alpha_x=(\beta a \alpha)\,k_x+(\beta\alpha k)\,a_x+(\alpha a k)\,\beta_x\,,$$
$$(\beta b k)\,\alpha_x=(\beta b \alpha)\,k_x+(\beta\alpha k)\,b_x+(\alpha b k)\,\beta_x\,.$$

In dem entstehenden Ausdrucke verschwinden die Glieder mit den Factoren a_x, b_x wegen $f=0$, das mit β_x^2 wegen (26); es bleiben ein in k_x^2 und zwei in $k_x\beta_x$ multiplicirte Glieder. Die letzteren sind wegen der Vertauschbarkeit von a und b bis auf gemeinsame Factoren:

$$(\alpha a k)\,(\beta b \alpha)\,\beta_x+(\beta a \alpha)\,(\alpha b k)\,\beta_x=2\,(\alpha a k)\,(\beta b \alpha)\,\beta_x\,.$$

Für den rechts stehenden Term benutzen wir die Identität:

$$(\alpha a k)\,b_x=(\alpha a b)\,k_x+(\alpha b k)\,a_x+(b a k)\,\alpha_x\,.$$

In dem entstehenden Ausdrucke verschwindet das zweite Glied wegen $f=0$, das dritte wegen der Gleichungen (22). Der Ausdruck (24) geht also, abgesehen von dem Factor k_x^2, über in:

$$P=(\alpha\beta b)\left\{(\alpha\beta a)\,b_x+2\,(\alpha a b)\,\beta_x\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}b_x^{n-2}a_x^{n-1}\,.$$

Diesen können wir noch symmetrischer schreiben; es ist nämlich:

$$(\alpha a b)\,\beta_x=(\alpha\beta b)\,a_x+(\beta a b)\,\alpha_x+(\alpha a \beta)\,b_x\,,$$

und also, indem sich die übrigen Glieder fortheben:

$$P=(\alpha\beta b)\left\{(\alpha a b)\,\beta_x+(\beta a b)\,\alpha_x\right\}a_x^{n-1}b_x^{n-2}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}\,.$$

Hierin können wir noch a und b vertauschen und die Summe beider Ausdrücke bilden. An Stelle von $(\alpha\beta b)\,a_x$ tritt dann der Factor:

$$\tfrac{1}{2}\left\{(\alpha\beta b)\,a_x-(\alpha\beta a)\,b_x\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{(\alpha a b)\,\beta_x-(\beta a b)\,\alpha_x\right\}.$$

Die Gleichung der gesuchten Curve ist also schliesslich:

$$(27)\quad 2\,P\equiv\left\{(\alpha a b)^2\,\beta_x^2-(\beta a b)^2\,\alpha_x^2\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2}=0\,.$$

Die Zahl der von ihr auf $f=0$ ausgeschnittenen Coincidenzpunkte stimmt mit der oben gefundenen überein.

Eine andere Curve gleicher Ordnung erhalten wir bei der Annahme, dass der 2-werthige Punkt in $x=y$ durch Berührung entsteht. In dem Falle treten an Stelle von (22) die Gleichungen:

$$(28)\qquad \alpha_x^{r}\,\beta_x^{s-1}\beta_{dx}=0\,,\qquad \alpha_x^{r-1}\beta_x^{s}\alpha_{dx}=0\,,$$

und an Stelle von (23) die Bedingungen:

$$(29)\qquad \alpha_x{}^r \beta_x{}^{s-1} \beta_{d^2x} + (s-1)\, \alpha_x{}^r \beta_x{}^{s-2} \beta_{dx}{}^2 = 0$$

$$(30)\qquad a_x{}^{n-1} a_{d^2x} + (n-1)\, a_x{}^{n-2} a_{dx}{}^2 = 0$$

$$(31)\qquad k_1 d^2x_1 + k_2 d^2x_2 + k_3 d^2x_3 = 0\,,$$

während wieder die Gleichungen (18), (20), (21) für jeden Punkt von f erfüllt sind. Man kann sich hier die dx_i aus (29) und (30) in Function der d^2x_i berechnet denken, ihre Werthe in $a_x{}^{n-1} a_{dx} = 0$ und eine der Gleichungen (28) einsetzen, und aus diesen beiden Gleichungen zusammen mit (31) die d^2x_i eliminiren. Symmetrischer geschieht diese Elimination jedoch in folgender Weise.

Man füge die an Stelle von (19) tretende Gleichung:

$$(32)\qquad \alpha'_x{}^{r-1} \alpha'_{d^2x} \beta'_x{}^s + (r-1)\, \alpha'_x{}^{r-2} \alpha'_{dx}{}^2 \beta'_x{}^s = 0$$

hinzu; und eliminire aus ihr, sowie aus (29), (30) und (31) die Grössen d^2x_i. Dies gibt das Resultat:

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_1 \beta_x & \beta_2 \beta_x & \beta_3 \beta_x & (s-1)\, \beta_{dx}{}^2 \\ \alpha'_1 \alpha'_x & \alpha'_2 \alpha'_x & \alpha'_3 \alpha'_x & (r-1)\, \alpha'_{dx}{}^2 \\ a_1 a_x & a_2 a_x & a_3 a_x & (n-1)\, a_{dx}{}^2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \end{vmatrix} \alpha_x{}^r \beta_x{}^{s-2} \alpha'_x{}^{r-2} \beta'_x{}^s a_x{}^{n-2}.$$

Diese Determinante entwickeln wir nach den Gliedern der letzten Verticalreihe. Alsdann verschwinden wegen der Gleichungen (18) und (20) zunächst alle Glieder einzeln; das Glied mit dem Factor $a_x{}^{n-2} a_{dx}{}^2$ aber verschwindet sogar quadratisch. Letzteres ist nämlich gleich

$$(n-1)\, (\beta \alpha' k)\, a_{dx}{}^2 \,.\, \alpha_x{}^r \beta_x{}^{s-1} \alpha'_x{}^{r-1} \beta'_x{}^s a_x{}^{n-2};$$

und durch Anwendung der Identität

$$(\beta \alpha' k)\, a_{dx} = (\beta \alpha' a)\, k_{dx} + (\beta a k)\, \alpha'_{dx} + (a \alpha' k) \,.\beta_{dx}$$

entsteht aus ihm eine Summe, deren einzelne Glieder je für sich quadratisch verschwinden. Für die beiden letzten Glieder folgt dies unmittelbar aus den Gleichungen (18), (20) und (28); das erste Glied enthält den verschwindenden Factor k_{dx}, und das Verschwinden des andern Factors ergibt sich durch Elimination der dx_i aus (28) und $a_x{}^{n-1} a_{dx} = 0$. Den Term mit $a_x{}^{n-2} a_{dx}{}^2$ als Factor können wir daher gegen die beiden andern Terme der Determinante fortfallen lassen; die letztere reducirt sich somit auf die Summe:

$$(33)\qquad \left\{(s-1)(\alpha' a k)\, \alpha'_x \beta_{dx}{}^2 - (r-1)(\beta a k)\, \beta_x \alpha'_{dx}{}^2\right\} \alpha_x{}^r \beta_x{}^{s-2} \alpha'_x{}^{r-2} \beta'_x{}^s a_x{}^{n-1}.$$

Zur weiteren Umformung dieser Summe dienen folgende Bemerkungen. Jedem Punkte x entsprechen unserer Annahme nach die Punkte x und $x + dx$; umgekehrt müssen daher dem Punkte $x + dx$ wieder die Punkte $x + dx$ und x entsprechen, d. h. *neben* (28) *besteht noch die Gleichung:*

(34) $$\alpha_x^{r-1}\alpha_{dx}\beta_x^{s-1}\beta_{dx} = 0\,.$$

Da ferner in unserm Falle, wie oben bemerkt (p. 446), der Ausdruck $\alpha_x^r\beta_x^s$ identisch Null ist oder den Factor f hat, so ist auch vermöge $f=0$ und $df=0$:

(35) $$s\,.\,\alpha_x^r\beta_x^{s-1}\beta_{dx} + r\,.\,\alpha_x^{r-1}\beta_x^s\alpha_{dx} = 0\,,$$

oder wegen $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$:

$$s\,.\,(\beta a k)\,\alpha_x^r\beta_x^{s-1}a_x^{n-1} = -\,r\,.\,(\alpha a k)\,\alpha_x^{r-1}\beta_x^s a_x^{n-1}\,.$$

In Folge dieser Gleichung kann man aus (33) einen gemeinsamen verschwindenden Factor absondern. Vertauscht man noch im zweiten Gliede die gestrichenen Buchstaben mit den nicht gestrichenen, so erhält man also als das *Resultat der Elimination der* d^2x_i *aus* (29), (30), (31):

(36) $$\{s(s-1)\,\beta_{dx}^2\alpha_x^2 + r(r-1)\,\alpha_{dx}^2\beta_x^2\}\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} = 0\,.$$

Die Elimination der dx_i aus dieser Gleichung und aus $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$ gibt also:

$$0=\{s(s-1)(\beta a k)(\beta b k)\,\alpha_x^2 + r(r-1)(\alpha a k)(\alpha b k)\beta_x^2\}\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1};$$

oder, wie wir kurz schreiben wollen:

(37) $$s(s-1)\,.\,\Pi_1 + r(r-1)\,.\,\Pi_2 = 0\,.$$

Zur Fortschaffung der k_i wenden wir im ersten Gliede die Identitäten an:

$$(\beta a k)\,\alpha_x = (\beta a \alpha)\,k_x + (\beta\alpha k)\,a_x + (\alpha a k)\,\beta_x\,,$$
$$(\beta b k)\,\alpha_x = (\beta b \alpha)\,k_x + (\beta\alpha k)\,b_x + (\alpha b k)\,\beta_x\,.$$

Es wird dann wegen $f=0$:

$$\Pi_1 = (\alpha\beta a)\,(\alpha\beta b)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1}\,.\,k_x^2 + \Pi_2 + 2\,k_x\,.\,\Pi_3\,,$$

wenn: $$\Pi_3 = (\beta a\alpha)\,(\alpha b k)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-1}a_x^{n-1}b_x^{n-1}\,.$$

Letzteren Ausdruck formen wir nochmals mittelst der Identität

$$(\beta a\alpha)\,k_x = (\beta a k)\,\alpha_x - (\beta\alpha k)\,a_x - (\alpha a k)\,\beta_x$$

um. Von den drei dann entstehenden Gliedern verschwindet das erste wegen (34), das zweite wegen $f=0$, das dritte ist gleich $-\Pi_2$; und also wird, wenn S den Factor von k_x^2 bezeichnet:

(38) $$\Pi_1 + \Pi_2 = S\,.\,k_x^2\,.$$

Um auch die Differenz $\Pi_1 - \Pi_2$ zu bilden, benutzen wir für Π_1 folgende Identität (IV, p. 283)

$$2\,(\beta a k)\,(\beta b k)\,a_x b_x = (\beta a k)^2\,b_x^2 + (\beta b k)^2\,a_x^2 - (a b k)^2\,\beta_x^2$$
$$-\,(a b \beta)^2\,k_x^2 + 2\,(\beta a b)\,(a b k)\,k_x\beta_x\,.$$

Setzt man dies in Π_1 ein, so bleiben nur die letzten beiden Glieder der rechts stehenden Summe. Es wird also bis auf die Factoren $\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2}$ der Ausdruck Π_1 gleich

$$-\tfrac{1}{2}(ab\beta)^2\,\alpha_x^2\,.\,k_x^2+(\beta ab)\,(abk)\,\beta_x\alpha_x^2\,.\,k_x,$$

und ebenso bis auf dieselben Factoren Π_2 gleich

$$-\tfrac{1}{2}(ab\alpha)^2\,\beta_x^2\,.\,k_x^2+(\alpha ab)\,(abk)\,\alpha_x\beta_x^2\,.\,k_x\,.$$

Bei Bildung der Differenz benutzen wir für die letzten beiden Glieder die Identität:

$$(\beta ab)\,\alpha_x-(\alpha ab)\,\beta_x=(\alpha\beta a)\,b_x-(\alpha\beta b)\,a_x\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von a, b und wegen des Factors (abk) können wir für die rechts stehende Differenz $2\,(\alpha\beta a)\,b_x$ schreiben. Den so umgeformten Factor von k_x in $\Pi_1-\Pi_2$ wollen wir für den Augenblick mit $2\,X$ bezeichnen. Derselbe lässt sich auf Π_1 und Π_2 zurückführen.

Die Form $(\alpha\beta a)\,\alpha_x^{r-1}\beta_x^{s-1}a_x^{n-1}$ nämlich ist für unsern Fall identisch Null oder hat $f=a_x^n$ zum Factor; jedenfalls ist also auch vermöge $f=0$ und $df=0$:

$$(\alpha\beta a)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}\left\{(r-1)\beta_x a_x\alpha_{dx}+(s-1)\alpha_x a_x\beta_{dx}+(n-1)\alpha_x\beta_x a_{dx}\right\}=0.$$

Ersetzen wir aber hierin wieder die dx_i durch die Unterdeterminanten $(bk)_i\,b_x^{n-1}$, so wird der Coëfficient von $(n-1)$ gerade gleich jener Form X; der Coëfficient von $(r-1)$ dagegen wird gleich dem oben mit Π_3 bezeichneten Ausdrucke, also sein Product mit k_x gleich $-\Pi_2$, und entsprechend muss der Coëfficient von $(s-1)$ bis auf den Factor k_x gleich $+\Pi_1$ werden. Wir haben sonach die Relation:

$$(n-1)\,k_x\,.\,X=(r-1)\,\Pi_2-(s-1)\,\Pi_1\,.$$

Tragen wir dies in den für $\Pi_1-\Pi_2$ gefundenen Ausdruck ein und bezeichnen den Coëfficienten von k_x^2 in Π_1 mit T_1, in Π_2 mit T_2, so ist also:

$$(n-1)(\Pi_1-\Pi_2)=\tfrac{1}{2}k_x^2\,(n-1)(T_2-T_1)+2\,(r-1)\,\Pi_2-2\,(s-1)\,\Pi_1\,,$$

oder:

$$(39)\quad 2\,(2s+n-3)\,\Pi_1-2\,(2r+n-3)\,\Pi_2=k_x^2(n-1)\,(T_2-T_1)\,.$$

Diese Gleichung zusammen mit (38) gibt die Resultate:

$$4\,(r+s+n-3)\,\Pi_1=k_x^2\left\{2\,(2r+n-3)\,S+T_2-T_1\right\}$$
$$4\,(r+s+n-3)\,\Pi_2=k_x^2\left\{2\,(2s+n-3)\,S-T_2+T_1\right\}.$$

Damit ist die Absonderung des Factors k_x^2 aus der Gleichung (37) geleistet. *Die Gleichung der gesuchten Curve, welche auf $f=0$ die Coincidenzpunkte der Correspondenz $\alpha_x^r\beta_y^s=0$ ausschneidet, ist also:*

$$(40)\quad 2S[s(s-1)(2r+n-3)+r(r-1)(2s+n-3)]+T(n-1)[r(r-1)-s(s-1)]=0,$$

wo S, $T = T_1 - T_2$ *in folgender Weise definirt sind:*

$$S = (a\alpha\beta)(b\alpha\beta)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1}$$

$$T = (ab\beta)^2\alpha_x^r\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2} - (ab\alpha)^2\alpha_x^{r-2}\beta_x^s a_x^{n-2}b_x^{n-2}.$$

Aus diesen Beispielen wird es klar sein, wie man im allgemeinen Falle zu verfahren hat: Man wird mit Rücksicht auf die Gleichungen $k_{d^i x} = 0$ durch ein dem obigen analoges Verfahren, bei dem die Symbole α und β der Function $\varphi = \alpha_x^r\beta_y^s$ symmetrisch benutzt werden, nach einander die Differentiale verschiedener Ordnung aus den Gleichungen eliminiren können, welche den γ-werthigen Punkt der Correspondenz in $x = y$ definiren; sei es dass letzterer durch einen mehrfachen Punkt der Curven φ daselbst oder durch mehrpunktige Berührung derselben mit $f = 0$ oder durch gleichzeitiges Eintreten beider Vorkommnisse entsteht. Aus dem Endresultate hat man dann immer noch durch identische Umformungen in obiger Weise eine Potenz von k_x als Factor abzusondern, um schliesslich die Gleichung der Curve zu erhalten, welche die Coincidenzpunkte auf f ausschneidet. *Die Ordnung dieser Curve* können wir indess ohne nähere Betrachtung jener algebraischen Operationen angeben, da wir nach Formel (11) die Zahl ihrer Schnittpunkte mit f kennen, dieselbe ist ($a = rn$, $b = sn$) gleich:

(41) $$[r + s + \gamma(n - 3)].$$

Diese Zahl bleibt die nämliche, wenn $f = 0$ Doppel- und vielfache Punkte besitzt, denn die angedeuteten algebraischen Operationen bleiben immer ausführbar. Andererseits wird aber auch unsere zur Aufstellung der Zahl $C = \alpha + \beta + 2\gamma p$ führende Ueberlegung durch das Auftreten vielfacher Punkte auf f nicht modificirt, wenigstens nicht, wenn die verschiedenen Aeste des vielfachen Punktes alle getrennt verlaufen.*) Die Zahl C wird alsdann aber kleiner, wie die Zahl der Schnittpunkte obiger Curve mit $f = 0$. Dies erklärt sich dadurch, dass diese Curve durch die vielfachen Punkte von f hindurchgeht, dass in diesen also Coincidenzen entstehen, ohne dass die coincidirenden Punkte einander benachbart auf demselben Curvenzweige liegen, wie sogleich noch deutlicher werden wird; und für Coincidenzen dieser Art gelten unsere obigen geometrischen Schlüsse nicht. Demgemäss führen wir folgende Unterscheidungen ein: *Wir bezeichnen als eigentliche Coincidenz*

---

*) Bei der oben zur Bestimmung der Zahl der Wendepunkte (p. 445) benutzten Correspondenz tritt noch die Besonderheit ein, dass die Curven φ (die ersten Polaren) in den vielfachen Punkten *gemeinsame feste* Punkte haben. Zur Umgehung der dadurch vielleicht entstehenden Schwierigkeiten (auf die wir später eingehen), kann man ein anderes Beispiel wählen, z. B. die Correspondenz $(n-1, n-1)_1$, welche durch die Linien eines Strahlbüschels auf $f = 0$ bestimmt wird.

eine jede, welche dadurch entsteht, dass einer der α beweglichen einem Punkte y entsprechenden Punkte diesem Punkte auf d e m s e l b e n *Curvenzweige unendlich nahe liegt; als* u n e i g e n t l i c h e C o i n c i d e n z *eine jede, für welche dies nicht der Fall ist.* Nach dem Obigen gilt dann in Folge dieser Definitionen der Satz, dass *die uneigentlichen Coincidenzen zusammen mit den eigentlichen Coincidenzen auf $f = 0$ ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden.* Bezeichnen wir also mit G die Zahl der ersteren, so muss die Zahl

$$C + G = nr - \gamma + ns - \gamma + [\gamma (n-1)(n-2) - 2d] + G,$$

wo d die Zahl der Doppelpunkte von $f = 0$ angibt, durch n theilbar sein, d. h. es ist $G = 2\gamma d$.

In jeden Doppelpunkt von f fallen also 2γ (ebenso in jeden i-fachen Punkt mit getrennten Tangenten $\gamma \cdot i(i-1)$) uneigentliche Coincidenzen.

In der That verschwindet für $\gamma = 1$ die linke Seite von (21) in jedem i-fachen Punkte von f $(i-1)$-fach. Um dies in (27) zu erkennen, hat man für einen Doppelpunkt x von f nur zu beachten, dass der Ausdruck $(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ in einem solchen proportional zu u_x^2 wird.

Von diesem Verhalten der die Coincidenzpunkte ausschneidenden Curve, die wir im Folgenden kurz als „*Coincidenzcurve*" bezeichnen wollen*), in den singulären Punkten von f mag man sich in folgender Weise direct Rechenschaft geben für den Fall, dass die zu x gehörigen Curven φ in $x = y$ einen γ-fachen Punkt haben.**) Nähert sich dann x einem Doppelpunkte von f auf dem einen Zweige dieser Curve (mit dem also die zugehörige Curve φ immer γ Schnittpunkte in $x = y$ hat), so wird die Curve φ, sobald x in den Doppelpunkt eintritt, in x noch weitere γ Schnittpunkte mit dem andern durch den

---

*) Dass dies Wort früher in anderem Sinne gebraucht wurde (p. 387), wird nicht zu Missverständnissen Anlass geben können.

**) Dies kann *entweder* unabhängig von $f = 0$ eintreten *oder* vermöge $f = 0$. In ersterem Falle hat die Curve φ selbstverständlich auch in einem Doppelpunkte von f einen γ-fachen Punkt, dessen Tangenten von den Doppelpunktstangenten verschieden sind. Dass letzteres auch im zweiten Falle im Allgemeinen eintritt, beweist man, indem man die Function $\varphi(x, y) = \alpha_x^r \beta_y^s$ nach dem von Gordan gegebenen Satze (Math. Annalen, Bd. 5, p. 100) in eine Reihe entwickelt, deren $s + 1$ Glieder für $r > s$ bis auf Zahlenfactoren bez. aus den Formen:

$$\varphi_0 = \alpha_x^r \beta_x^s, \; \varphi_1 = (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x) \alpha_x^{r-1} \beta_x^{s-1}, \; \ldots \; \varphi_s = (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)^s \alpha_x^{r-s}$$

durch einen Polarenprocess entstehen. Die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\gamma$ müssen dann bez. die Potenzen $f^\gamma, f^{\gamma-1}, f^{\gamma-2} \ldots f^0$ zu Factoren haben. Verschwinden insbesondere die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\gamma-1}$ alle identisch, so hat man den Fall, wo der γ-fache Punkt in $x = y$ unabhängig davon eintritt, ob x auf f liegt oder nicht.

Doppelpunkt gehenden Zweige von f besitzen, so dass γ uneigentliche Coincidenzen eintreten. Dasselbe gilt, wenn x auf diesem andern Zweige an den Doppelpunkt heranrückt; und so haben wir in der That zusammen 2γ uneigentliche Coincidenzen, wie es sein soll.

Betrachten wir ferner den Fall, wo der γ-werthige Punkt in $x = y$ durch Berührung entsteht. Hier können wir uns immer die zu Punkten x gehörigen Curven φ aus einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Curven s^{ter} Ordnung, deren jede die Curve $f = 0$ in $\gamma - 1$ consecutiven Punkten trifft, eben durch die Bedingung ausgeschieden denken, dass eine solche Curve noch einen weiteren benachbarten Punkt mit f gemein habe. Jedem Punkte x entsprechen dann die übrigen $ns - \gamma$ einfachen Schnittpunkte y einer solchen Curve mit f, von denen im Allgemeinen keiner in den Doppelpunkten liegt. Durch jeden Punkt y dagegen gehen einfach unendlich viele Curven jener ∞^2-Schaar, deren jede in einem nicht in y liegenden Punkte die Curve f in $\gamma - 1$ benachbarten Punkten trifft; unter diesen wird aber eine endliche Zahl von Curven sein, welche f in je γ benachbarten Punkten schneiden: Dem Punkte y entspricht daher eine Curve, welche die so ausgezeichneten Berührungspunkte der letzterwähnten Curven ausschneidet, d. h. die Coincidenzcurve (p. 453) einer Correspondenz mit $(\gamma - 1)$-werthigem Punkte. Eine solche Correspondenz hat aber, wie wir sogleich sehen werden, $\gamma(\gamma - 1)$ uneigentliche Coincidenzen in jedem Doppelpunkte von f; und also fallen in jeden $\gamma(\gamma - 1)$ Schnittpunkte der zu y gehörigen Curve. *Hat also eine Correspondenz in $x = y$ einen γ-werthigen Punkt, der durch $(\gamma - 1)$-punktige Berührung entsteht, und gehen die zu x gehörigen Curven nicht durch die Doppelpunkte von f, so fallen doch für jede zu einem Punkte y gehörige Curve $\gamma(\gamma - 1)$ Schnittpunkte in jeden Doppelpunkt von f; d. h. wir haben eine Correspondenz mit festen Punkten.*

Solche Correspondenzen haben wir allerdings von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen. Für sie soll später der folgende Satz bewiesen werden*), den wir einstweilen wiederholt werden benutzen müssen und deshalb hier mittheilen: *Entfallen bei einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ für jede der zu x gehörigen Curven σ, für jede der zu y gehörigen τ Schnittpunkte mit f in einen festen einfachen Punkt von f, so liegen in diesem $\sigma + \tau$ uneigentliche Coincidenzen; ist der feste Punkt jedoch Doppelpunkt von f, so liegen in ihm $\sigma + \tau + 2\gamma$ uneigentliche Coincidenzen. — Die eigentlichen Coincidenzen dagegen bestimmen sich wieder durch die Formel* (12), *wenn man nur unter α, β die Zahlen der beweglichen zu x, bez. y gehörenden Punkte versteht.*

---

*) Vgl. den Abschnitt über eindeutige Transformationen in der 6. Abtheilung dieser Vorlesungen.

Wir wollen nun voraussetzen, dass σ Schnittpunkte der zu x gehörenden Curve in einem Doppelpunkte liegen. Ist dann $\gamma = 2$ (durch Berührung in x), so bestimmt sich die zu y gehörige Curve in der geschilderten Weise als Coincidenzcurve einer Correspondenz mit $\gamma = 1$, $\sigma = \sigma$, und auch $\tau = \sigma$. Für diese liegen aber $\sigma + \tau + 2\gamma = 2(\sigma + 1)$ uneigentliche Coincidenzen im Doppelpunkte, d. h. in der Correspondenz mit $\gamma = 2$ liegen $2(\sigma + 1)$ Schnittpunkte der zu y gehörigen Curve im Doppelpunkte. Wir haben also hier $\sigma = \sigma$, $\tau = 2(\sigma + 1)$; und somit wird die Zahl u der uneigentlichen Coincidenzen: $u = 3(\sigma + 2)$. Für eine Correspondenz mit $\gamma = 3$ ergibt sich hieraus $\sigma = \sigma$, $\tau = 3(\sigma + 2)$, und also: $u = 4(\sigma + 3)$. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise (durch einen Schluss von γ auf $\gamma + 1$) findet man allgemeiner, wenn $\sigma = \sigma$ gegeben ist:

$$\tau = \gamma(\sigma + \gamma - 1), \quad u = \sigma + \tau + 2\gamma = (\gamma + 1)(\sigma + \gamma).$$

Fallen also in einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ für die zu x gehörige Curve, welche in x $(\gamma - 1)$-punktig berührt, σ feste Schnittpunkte in einen Doppelpunkt von f, so fallen in diesen für jede zu y gehörige Curve $\gamma(\sigma + \gamma - 1)$ feste Schnittpunkte; und es liegen in ihm $(\gamma + 1)(\sigma + \gamma)$ uneigentliche Coincidenzen. — Für $\sigma = 0$ folgt hieraus der oben ausgesprochene Satz; ebenso beweist man auch den folgenden: *Wenn bei der genannten Correspondenz für die zu x gehörige Curve σ Schnittpunkte in einen festen einfachen Punkt von f fallen, so fallen in ihn $\gamma\sigma$ feste Schnittpunkte für jede zu y gehörige Curve und $(\gamma + 1)\sigma$ uneigentliche Coincidenzen.*

Lassen wir andererseits den Punkt x in einen Doppelpunkt von f rücken, so wird ihm zunächst keine bestimmte Curve zugehören, indem der Ausdruck $\varphi(x, y)$ *unabhängig von den y zu Null wird.* Man erhält daher erst eine bestimmte Curve, wenn man unter den beiden von x aus auf f möglichen Fortschreitungsrichtungen eine Wahl trifft und demgemäss $x + dx$ statt x in $\varphi(x, y)$ setzt. *Dem Doppelpunkte, als Punkte x, entsprechen daher 2 völlig verschiedene Curven, deren jede einen Zweig von f $(\gamma - 1)$-punktig berührt.* — Es möge dies noch an folgendem Beispiele erläutert werden:

Man soll die Correspondenz $\varphi = 0$ angeben, vermöge deren jedem Punkte x die in ihm die Curve $f = 0$ berührende Curve m^{ter} Ordnung eines Netzes entspricht. Sind $\alpha_x^m = 0$, $\alpha_x'^m = 0$, $\alpha_x''^m = 0$ drei beliebige Curven des Netzes, so hat man zu dem Zwecke zunächst $\varkappa$, λ, μ aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\varkappa\alpha_x^m + \lambda\alpha_x'^m + \mu\alpha_x''^m = 0,\\
&\varkappa\alpha_y^m + \lambda\alpha_y'^m + \mu\alpha_y''^m = 0,\\
&\varkappa\alpha_x^{m-1}\alpha_{dx} + \lambda\alpha_x'^{m-1}\alpha'_{dx} + \mu\alpha_x''^{m-1}\alpha''_{dx} = 0,
\end{aligned}$$

und aus dem Resultate die dx_i vermöge der Relationen $a_x^{n-1} a_{dx} = 0$, $k_{dx} = 0$ zu eliminiren. Mittels einiger identischer Umformungen hat man dann noch einen Factor k_x abzusondern, um schliesslich das Resultat zu erhalten:

$$a_x^{n-1} \left\{ (a \alpha' \alpha'') \alpha'^{m-1}_x \alpha''^{m-1}_x \alpha_y^m + (a \alpha'' \alpha) \alpha''^{m-1}_x \alpha_x^{m-1} \alpha'^m_y \right.$$
$$\left. + (a \alpha \alpha') \alpha_x^{m-1} \alpha'^{m-1}_x \alpha''^m_y \right\} = 0 .$$

Die Richtigkeit des Resultats verificirt man auch leicht nachträglich. Die Gleichung stellt nämlich in den Veränderlichen y jedenfalls eine Curve des Netzes dar; setzt man in ihr $y = x$, so sondert sich in der That wegen der Identität*)

$$(a \alpha' \alpha'') \alpha_x + (a \alpha \alpha') \alpha''_x + (a \alpha'' \alpha) \alpha'_x = (\alpha \alpha' \alpha'') a_x$$

ein Factor a_x^n ab; und ebenso, wenn man $y = x + dx$ setzt, ein Factor $a_x^{n-1} a_{dx}$, wie es sein soll. Die Gleichung kann aber als lineare Function der Grössen $a_x^{n-1} a_i$ angesehen werden; und daraus folgt, dass *jede* zu einem Punkte y gehörige Curve in der That durch die Doppelpunkte von f gehen muss, wie behauptet wurde.

Ausserdem kann es natürlich eintreten, dass der γ-werthige Punkt dadurch entsteht, dass die Curve φ in $x = y$ einen vielfachen Punkt hat, dessen einzelne Zweige die Curve noch ein- oder mehrpunktig berühren. Diese Fälle können als Combinationen der soeben behandelten angesehen werden. —

Lassen wir nun den Doppelpunkt von f in einen Rückkehrpunkt ausarten. Alsdann behalten die vorstehenden Betrachtungen jedenfalls ihre Gültigkeit, insofern es auf die uneigentlichen Coincidenzen ankommt. In einem Rückkehrpunkte aber sind zwei zusammenfallende Punkte immer als auf *demselben* Curvenelemente gelegen zu betrachten; es werden daher die in einen solchen fallenden Coincidenzen theilweise als eigentliche gezählt werden müssen, so dass auch an der Zahl C in (12) noch eine Reduction anzubringen ist, wenn man nach der Zahl der *nicht in singuläre Punkte von f fallenden eigentlichen Coincidenzen fragt.* Wir geben im Folgenden einige Beispiele für die Bestimmung dieser Reduction.

Nehmen wir an, dass die Curven φ in $x = y$ einen γ-fachen Punkt haben; dasselbe wird dann der Fall sein, wenn x ein Rückkehrpunkt ist, und im Allgemeinen sind die Tangenten des γ-fachen Punktes von der Rückkehrtangente verschieden. Die Zahl der in x

*) Aus dem Satze (p. 382), dass die Curven eines Netzes, welche durch einen Punkt der Jakobi'schen Curve desselben gehen, sich in diesem alle berühren, folgt, dass die zu einem Schnittpunkte x der Jakobi'schen Curve mit f gehörige Curve φ in x einen Doppelpunkt hat, also nicht eigentlich berührt; was man auch direct bestätigt.

liegenden eigentlichen Coincidenzen ist dann offenbar unabhängig von der speciellen Correspondenz und kann für dieselbe Zahl γ an einem beliebigen Beispiele bestimmt werden. In der Nähe von x können wir aber die Curve mit γ-fachem Punkte durch ihre γ Tangenten ersetzen. Wir brauchen also die betreffende Zahl an einem Beispiele nur für den Fall zu bestimmen, dass die zu x gehörigen Curven φ in γ gerade Linien zerfallen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Correspondenz $(n-1, n-1)_\gamma$, welche einem Punkte von f die $\gamma(n-1)$ von ihm an eine beliebige Curve γ^{ter} Klasse zu legenden Tangenten zuordnet. Die Zahl der eigentlichen Coincidenzen muss gleich der Zahl der gemeinsamen Tangenten beider Curven sein, d. h., gleich

$$k \cdot \gamma = \gamma \left\{n(n-1) - 2d - 3r\right\},$$

wenn k, d, r für die Curve f die bekannten Bedeutungen haben. Unsere Correspondenzformel ergibt aber die Zahl:

$$C = 2\gamma(n-1) + 2\gamma p = \gamma\left\{n(n-1) - 2d - 2r\right\};$$

und hieran haben wir noch eine Reduction von γr anzubringen, um die Zahl $k\gamma$ zu erhalten. *Entsteht also der γ-werthige Punkt in $x = y$ durch einen γ-fachen Punkt der Curven φ, so entfallen in jeden Rückkehrpunkt γ eigentliche Coincidenzen.*

Entsteht dagegen der γ-werthige Punkt durch Berührung, so kann man für $\gamma = 2$ die Curven φ in der Nähe von x wieder durch gerade Linien ersetzen und so die eintretende Reduction aus den Plückerschen Formeln bestimmen. Wir werden erst später auch den allgemeinen Fall erledigen*) unter der Voraussetzung, dass die zu x gehörigen Curven φ aus einer linearen γ-fach unendlichen Schaar von Curven eben durch die Bedingung der Berührung ausgeschieden werden. Es scheint jedoch misslich ganz allgemeine Regeln anzugeben. Insbesondere treten z. B. Ausnahmen ein, wenn die zu x und die zu y gehörenden Curven φ durch einen Rückkehrpunkt von f gehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Man bestimme die Zahl der von einem Rückkehrpunkte an die Curve f zu legenden Tangenten. Die Berührungspunkte sind die Coincidenzpunkte einer Correspondenz $(n-3, n-3)_1$ mit einem zweifach zählenden festen Punkte im Rückkehrpunkte für jede Curve φ (d. i. Gerade durch den Rückkehrpunkt). Die Zahl der eigentlichen Coincidenzen ist also, wenn ausserdem (der Kürze wegen) keine Rückkehrpunkte auf f mehr vorhanden sind (also $r = 1$), gleich

$$2n - 6 + 2p = k - 3.$$

Andererseits sind diese Punkte die nicht in Doppelpunkte von f

*) Vgl. den Schluss dieses Abschnittes.

fallenden Schnittpunkte der ersten Polare des Rückkehrpunktes mit f. Für diese fallen aber in den Rückkehrpunkt 6 Schnittpunkte mit f, d. i. 3 mehr, als wie für einen beliebigen Pol; wir erhalten also noch $k - 3$ andere Schnittpunkte; und somit fällt in den einen Rückkehrpunkt *keine* eigentliche Coincidenz. —

Wir gehen dazu über, im Folgenden eine Reihe von *Beispielen und Anwendungen für die Correspondenzformel* zu geben, wobei wir gleichzeitig verschiedene, an sich wichtige Theoreme, sowie eine Verallgemeinerung unserer Correspondenzformel kennen lernen werden.

1) Als Beispiel zu der Formel (13) für $(\varphi\varphi')$ diene das folgende: Gegeben sei ein einfach unendlicher Curvenbüschel, der die C_n in einer Zahl fester und in M beweglichen Punkten schneidet, worunter die Punkte x und y sich befinden mögen. Es soll die Zahl der Paare von Schnittpunkten x, y bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebigen festen Kegelschnitt conjugirte Pole sind. Ein solches Paar muss zugleich der Correspondenz $\varphi = (M - 1, \; M - 1)_1$ zwischen den beweglichen Schnittpunkten und der Correspondenz $\varphi' = (n, \, n)_0$ zwischen einem Punkte y der C_n und den n Schnittpunkten x der Polaren von y genügen. Man erhält daher

$$\tfrac{1}{2} (\varphi\varphi') = n (M - 1)$$

für die Anzahl der gesuchten Paare (den Zahlenfactor $\frac{1}{2}$ wegen der Symmetrie).

2) Die Formel (12) benutzen wir zuerst zur Ableitung des schon früher angegebenen Satzes von der *Gleichheit des Geschlechtes zweier eindeutig auf einander bezogenen Curven* (vgl. p. 368). Wir fragen sogleich allgemein: Wie ist das Geschlecht (p) einer Curve C von demjenigen (p') einer Curve C' abhängig, wenn beide so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte P von C x' Punkte P' von C' entsprechen, und jedem Punkte P' von C' x Punkte P von C?*)

Wir bezeichnen mit y und y' die Zahlen der Coincidenzen von 2 Punkten, welche bez. auf C und C' demselben Punkte der andern Curve entsprechen, wobei die durch Doppelpunkte der Curven hervorgerufenen Coincidenzen nicht mitgezählt sind. Ausserdem möge es z-mal (auf jeder Curve) vorkommen, dass *zugleich* zwei einem Punkte P entsprechende Punkte in P' zusammenfallen, und umgekehrt zwei von den P' zugehörigen Punkten in P. Wir setzen ferner voraus, dass die Curven C und C' nur Doppelpunkte, keine Rückkehrpunkte haben. Zur Bestimmung der Punkte y und z auf C haben wir nun eine Correspondenz:

$$(x' (x - 1), \quad x' (x - 1))_{x'} .$$

*) Vgl. im Folgenden Zeuthen: Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Math. Annalen, Bd. 3, p. 150.

Jedem Punkte P von C entsprechen nämlich x' Punkte P' von C', jedem dieser Punkte wieder x Punkte Q auf C, von denen je einer (also im Ganzen x') mit P zusammenfällt; und so entsteht die erwähnte Correspondenz, welche zufolge unserer Bezeichnung $y + 2z$ Coincidenzpunkte hat; denn als solcher zählt jeder der z Punkte zweimal, indem dann noch *zwei* Punkte Q mit P zusammenfallen. Es ist daher:

$$y + 2z = 2x'(x - 1) + 2x'p,$$

und ebenso:

$$y' + 2z = 2x(x' - 1) + 2xp';$$

also durch Subtraction:*)

$$y - y' = 2x'(p - 1) - 2x(p' - 1).$$

*Zwischen zwei „x-x'-deutig auf einander bezogenen Curven", bez. vom Geschlecht p und p' mit y bez. y' Coincidenzpunkten besteht die Relation:***)

$$y - y' = 2x'(p - 1) - 2x(p' - 1).$$

Für $x = x' = 1$, also $y = y' = 0$ haben wir insbesondere $p = p'$; und so ergibt sich das Theorem, dessen Darlegung im Einzelnen uns noch später beschäftigen wird:

Zwei eindeutig auf einander bezogene Curven sind von gleichem Geschlechte.

3) Mit Hülfe der Correspondenzformel können wir ferner die Frage nach der Zahl der Curven eines Systems beantworten, welche eine gegebene Curve f vom Geschlechte p in gewissen Punkten mehrfach berühren.***) Die dabei auftretenden Correspondenzen sind nach dem Obigen (p. 454) immer solche mit festen Punkten; bei Bestimmung der eigentlichen Coincidenzen hat man aber nach der daselbst

---

*) Dieselben Gleichungen würden übrigens beim Auftreten von Rückkehrpunkten fortbestehen, wenn man nur unter y, bez. y' die *Gesammtheit der eigentlichen Coincidenzpunkte* versteht (vgl. oben), also ohne die durch Rückkehrpunkte noch besonders veranlassten Reductionen.

**) Nimmt man insbesondere $x' = 1$, also $y' = 0$, und $p = p'$, so wird $y = 2(p - 1) - 2x(p - 1)$. Weil nun y immer eine positive Zahl sein muss, so ist auch $x = 1$ (wenn nicht $p = 1$); und es folgt der Satz: *Sind zwei Curven von gleichem Geschlechte ($p > 1$) so auf einander bezogen, dass jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten entspricht, so ist diese Beziehung auch eindeutig umkehrbar.* Hierfür gab Weber mit Hülfe Riemann'scher Principien auch einen directen Beweis: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 345. — Der Fall $p = 1$ bedarf einer besondern Erörterung; er bezieht sich auf die Transformation der ellipt. Functionen.

***) Die betreffenden Formeln sind (für $r = 0$) zuerst von de Jonquières aufgestellt: Sur les problèmes de contact des courbes algébriques, Crelle's Journal, Bd. 66, 1866; erweitert für Curven mit Rückkehrpunkten von Cayley: Philos. Transactions, vol. 158, p. 109, 1868. Vgl. auch Bischoff: Crelle's Journal, Bd. 56. Exacte Beweise für jene Formeln gab Brill: Math. Annalen, Bd. 6, p. 46.

angegebenen Regel nur auf die beweglichen Schnittpunkte der Curven $\varphi(x, y) = 0$ und $f = 0$ zu achten. Wenn wir also im Folgenden Curvensysteme betrachten, die linear von q Parametern abhängen, so können auch immer einzelne einfache oder Doppelpunkte von f allen Curven des Systems gemeinsam sein, ohne dass unsere Formeln dadurch beeinflusst würden; denn diese zeigen sich nur von *der Zahl M der beweglichen Schnittpunkte* abhängig. Wir setzen hier zunächst voraus, dass *f keine Rückkehrpunkte habe*, fügen aber der Vollständigkeit halber die betreffenden (später zu beweisenden) Reductionen sogleich hinzu.

Es sei zunächst ein Curvenbüschel ($q = 1$) gegeben. Durch jeden Punkt x von f geht eine Curve desselben, die f in $M - 1$ weiteren Punkten y schneidet. Wir haben also eine Correspondenz $(M - 1, M - 1)_1$; *und die Zahl α_1 der berührenden Curven ist:*

$$\alpha_1 = 2(M - 1) + 2p - r = 2(M + p - 1) - r,$$

wobei die in etwa auf der C_n liegenden *festen* Punkten berührenden Curven *nicht* mitgezählt sind.*)

Nehmen wir ein Curvennetz mit M beweglichen Schnittpunkten, also $q = 2$, so berührt in einem beliebigen Punkte x der C_n eine Curve des Systems, denn durch zwei (hier successive) Punkte ist eine solche bestimmt. Dieselbe schneidet $M - 2$ correspondirende Punkte y aus. Durch jeden Punkt y geht dagegen ein Büschel von Curven des Netzes mit $M - 1$ beweglichen Schnittpunkten, unter denen nach dem Früheren $\alpha_1 - 2$ berührende sind; denn die Zahl α_1 geht in $\alpha_1 - 2$ über, wenn man M durch $M - 1$ ersetzt. Wir haben $\gamma = 2$, denn es gibt ausserdem noch 2 unendlich benachbarte Curven, welche in y selbst berühren. Wir finden so zwischen den Berührungspunkten x und den andern Schnittpunkten y der Curven eine Correspondenz $(M - 2, \alpha_1 - 2)_2$.

Es gibt daher

$$\alpha_2 = M - 2 + \alpha_1 - 2 + 4p - r = 3(M + 2p - 2) - 2r$$

---

*) Ist die Gleichung des Büschels durch $a'^m_x + \lambda a''^m_x = 0$ gegeben, so ist die Correspondenz auf f bestimmt durch

$$\varphi \equiv \alpha_x^m \beta_y^m \equiv a'^m_x a''^m_y - a''^m_x a'^m_y = 0.$$

Beachtet man nun, dass in nicht symbolischer Form:

$$m^2 n (a\alpha\beta) \alpha_x^{m-1} \beta_x^{m-1} a_x^{n-1} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_2}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

so ersieht man, dass die Coincidenzpunkte ausgeschnitten werden durch die Curve (p. 447):

$$(a a' a'') a_x^{n-1} a'^{m-1}_x a''^{m-1}_x = 0.$$

*osculirende (in 3 successiven Punkten schneidende) Curven im Netze.**) Ganz in derselben Weise kann man weiter von q auf $q+1$ schliessen, und gelangt dann zu dem Satze:

In einer q-fach unendlichen linearen Schaar von Curven, welche die C_n in M beweglichen Punkten schneiden, gibt es

$$\alpha_q = (q+1)(M+qp-q) - qr$$

Curven, welche die C_n in $q+1$ benachbarten Punkten treffen (q-punktig berühren).

Sind die Curven der Schaar von der m^{ten} Ordnung und keiner Bedingung unterworfen, so haben wir insbesondere $M = nm$, $q = \frac{1}{2} m \,.\, (m+3)$ zu setzen. Es gibt also z. B. *auf der C_n*

$$12n + 30(p-1) - 5r$$

*Punkte, in denen ein Kegelschnitt 5-punktig berühren kann.***)

4) Um weiter auch die Zahl der Curven eines Netzes zu bestimmen, welche die C_n in zwei getrennten Punkten berühren, muss man zuvor die Correspondenzformel in gewisser Weise verallgemeinern. Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass die zu einem Punkte x oder y gehörigen Curven $\varphi(x, y) = 0$ ausser in $x = y$ die Curve f nur in lauter einfach zählenden Punkten schneiden. Es kann aber vorkommen, dass dieselben z. B. in einem Punkte ein- oder mehrfach berühren und in den übrigen mehrfach schneiden. Diese complicirteren Fälle wollen wir hier nur kurz erwähnen.***) — Man beweist zunächst (ähnlich wie oben die Formel $\gamma = \delta$, p. 443) den folgenden Satz:

Wenn unter den beweglichen einem Punkte x' entsprechenden Punkten y ein i-werthiger Punkt y' vorkommt (d. h. ein solcher Punkt, in welchem i einfache Schnittpunkte vereinigt liegen), so verhält sich umgekehrt unter den zu y' gehörigen Punkten x der Punkt x' ebenfalls wie ein i-werthiger.

Gehören nun zu einem Punkte x in einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ allgemein β' (nicht in x fallende) i'-werthige Punkte y', β'' i''-werthige Punkte y'', u. s. w., also zusammen

$$\beta = \beta' i' + \beta'' i'' + \beta''' i''' + \ldots$$

Punkte y, so wird man nach dem erwähnten Satze zu jedem Punkte $y^{(\varrho)}$ eine Anzahl $\alpha^{(\varrho)}$ von Punkten $x^{(\varrho)}$ finden können, die ihm $i^{(\varrho)}$-

*) Eine die Osculationspunkte ausschneidende Curve ist von Brill angegeben, Math. Annalen, Bd. 3, p. 459. Man wird dieselbe aus der obigen Gleichung (40) auf p. 451 ableiten können, wenn man die Form $\varphi(x, y)$ wie auf p. 456 gegeben denkt.

**) Cayley hat auch eine Curve angegeben, welche diese Punkte auf der Grundcurve ausschneidet: Philos. Transactions, 1859 und 1865.

***) Vgl. Cayley: Comptes rendus, t. 62, 1866 und Brill a. a. O.

fach entsprechen, so dass die Zahl der einem Punkte y im Ganzen entsprechenden Punkte x gleich

$$\alpha = \alpha' i' + \alpha'' i'' + \alpha''' i''' + \ldots$$

wird. *Die Zahl der Coincidenzpunkte der so entstehenden Correspondenz* $(\alpha, \beta)_\gamma$ *ist dann nach der Correspondenzformel* (12): $C = \alpha + \beta + 2\gamma p$; *d. h. es besteht die Relation:*

$$i'(C' - \alpha' - \beta') + i''(C'' - \alpha'' - \beta'') + \ldots = 2\gamma p,$$

wenn $C^{(\varrho)}$ angibt, wie oft eine Coincidenz zwischen einem $i^{(\varrho)}$-werthigen Punkte $x^{(\varrho)}$, bez. $y^{(\varrho)}$ mit dem γ-werthigen Punkte $y = x$ eintritt, wenn also gesetzt wird:

$$C = i'C' + i''C'' + i'''C''' + \ldots$$

Das einfachste Beispiel für die Anwendung dieser Formel gibt die Bestimmung der Zahl der Doppeltangenten der Curve f, oder allgemeiner die Bestimmung der Zahl der an zwei verschiedenen Stellen der C_n berührenden Curven eines Netzes mit M beweglichen Schnittpunkten auf f. Durch jeden Punkt x geht ein Büschel von Curven mit $M - 1$ beweglichen Schnittpunkten, in dem sich nach der früheren Bezeichnung $\alpha_1 - 2$ berührende Curven befinden (denn die obige Zahl α_1 wird um 2 verringert, wenn man in ihr $M - 1$ statt M schreibt). Von diesen schneidet jede die C_n in 1 zweiwerthigen und in $M - 3$ einwerthigen Punkten. Wir haben also:

$$i' = 1, \quad \beta' = \alpha' = (\alpha_1 - 2)(M - 3), \quad \gamma = \alpha_1 - 2$$
$$i'' = 2, \quad \beta'' = \alpha_1 - 2, \quad \alpha'' = M - 2^{*}).$$

Ferner ist $C'' = \alpha_2$ die (uns schon bekannte) Zahl der osculirenden Curven, während $C' = 2\alpha_{11}$ das *Doppelte* der gesuchten Zahl angibt. Setzen wir also die Curve f ohne Rückkehrpunkte voraus, so finden wir für *die Zahl der doppelt berührenden Curven des Netzes:*

$$\alpha_{11} = (\alpha_1 - 2)(M - 3) - \alpha_2 + (\alpha_1 - 2) + (M - 2) + (\alpha_1 - 2)p.$$

In derselben Weise können wir aber auch die Zahl α_{1q} der an einem Punkte q-punktig, an einem andern 1-punktig berührenden Curven eines linearen q-fach unendlichen Systems von Curven mit M beweglichen Schnittpunkten finden. Es ergibt sich:

$$\alpha_{1q} = 2(\alpha_q - q - 1)(M - q - 2) - (q + 1)\{\alpha_{q+1} - (\alpha_q - q - 1) - (M - q - 1)\} + 2(\alpha_q - q - 1)p;$$

*) Die Zahl α'' bestimmt sich, wie folgt. In jedem Punkte y'' berührt eine Curve des Netzes. Dieselbe zählt aber doppelt in der Gesammtheit der α_1 durch y'' gehenden Curven des Netzes, welche f berühren; also ist in der That jeder der übrigen $M - 2$ Schnittpunkte mit f als 2-werthiger zu y'' gehöriger Punkt x'' zu zählen, wie es obiger Satz verlangt.

oder wenn wir mit $[q]_M$ die Zahl der in einem Punkte q-punktig berührenden (in $q+1$ Punkten schneidenden) Curven einer in M beweglichen Punkten schneidenden linearen ∞^q-Schaar bezeichnen und analog $\alpha_{1q} = [1, q]_M$ setzen, die *Recursionsformel:*

$$[1, q]_M = 2[q]_{M-1}(M-2-q) - (q+1)\{[q+1]_M - [q]_{M-1} - (M-1-q)\} + 2p[q]_{M-1}.$$

In ganz analoger Weise kann man eine Formel bilden, welche die Zahl $[s, q]_M$ aus der Zahl $[s-1, q]_{M-1}$ bilden lehrt; und eine weitere Verallgemeinerung gibt schliesslich eine Recursionsformel für die Zahl $[q, q', \ldots q^{(\varrho)}]_M$, d. i. für die Zahl der an ϱ verschiedenen Stellen bez. q-, q'-, ... $q^{(\varrho)}$-punktig berührenden Curven einer linearen Schaar von der Mannigfaltigkeit $q + q' + \ldots + q^{(\varrho)}$ (vgl. Brill a. a. O.).

5) Wir geben noch einige Beispiele für die Bestimmung mehrfach berührender Curven aus einer nicht linearen Schaar, auf die wir uns schon früher bezogen (p. 407); und zwar beschränken wir uns auf *Kegelschnitt*schaaren. Zunächst folgt aus der obigen Formel für α_2, dass *es* $3k + r$ $(= 3n + w)$ *Kegelschnitte gibt, welche durch 3 feste Punkte gehen und die gegebene Curve osculiren.* Nehmen wir aber für die Schaar 2 beliebige Punkte und 1 Tangente fest, so gehen durch 2 benachbarte Punkte der C_n noch 2 C_2 der Schaar, während durch einen beliebigen Punkt derselben $2k + 4n - 4$ C_2 gehen, welche die C_n noch in einem andern Punkte berühren (vgl. p. 401); wir haben also eine Correspondenz $(4n-4, 2k+4n-4)_4$ zu betrachten. Dieselbe hat zunächst $6k + 4r$ eigentliche Coincidenzen; davon sind aber nach obiger Bemerkung über den Einfluss von Rückkehrpunkten (p. 457) noch $2r$ abzuziehen. *Es gibt daher* $2(3k + r) = 2(3n + w)$ *Kegelschnitte, welche unsere feste C_n osculiren, durch 2 Punkte gehen, und 1 Gerade berühren;* und dualistisch entsprechend gibt es ebenso viele, die ausserdem 2 Gerade berühren und durch 1 Punkt gehen. — Analog bestimmt sich *die Zahl der dreipunktig berührenden C_2, welche durch 1 Punkt gehen und 1 Gerade berühren* mittelst einer Correspondenz

$$(4n-6, 6k+2r-6)_6.$$

Die Zahl der Coincidenzpunkte findet man zunächst gleich $n + 3k + 3w + 5r$; davon sind aber nach jener Bemerkung noch $2r$ abzuziehen. Die übrig bleibenden Coincidenzen sind zwar alle eigentliche und liegen nicht in singulären Punkten der C_n, sind aber nicht alle durch eigentliche berührende Kegelschnitte bedingt. Jede von dem festen Punkte an die C_n gelegte Tangente nämlich ist doppelt genommen auch ein Kegelschnitt, welcher den gestellten Bedingungen genügt; er schneidet die C_n im Berührungspunkte ebenfalls in 4 zusammenfallenden Punkten. Da ferner die *beiden* in einem be-

liebigen Punkte der C_n osculirenden C_2 der Schaar für einen jener Berührungspunkte in die doppelt zählende Tangente desselben zusammenfallen, so zählt der Berührungspunkt einer jeden dieser k Doppellinien 2-fach als eine Lösung; und wir haben von obiger Zahl noch $2k$ abzuziehen. Dieselbe wird dann gleich

$$n + k + 3r + 3w = -8n - 8k + 6\alpha,$$

wenn $\alpha = 3k + r = 3n + w$ gesetzt wird; eine Zahl, welche, wie es bei dem sich selbst dualistischen Charakter der Aufgabe sein muss, symmetrisch in n, k und r, w ist. In letzterem Umstande haben wir gleichzeitig eine Controlle für die richtige Berücksichtigung der Rückkehrpunkte. —

Schliesslich kehren wir noch einmal zu den Formeln für die Zahlen α_q zurück, da die nähere Untersuchung derselben zu bemerkenswerthen geometrischen Beziehungen zwischen gewissen Curvensystemen führt. Wir werden dabei ein Gesetz der Reciprocität*) kennen lernen, welches in gewissem Sinne als Verallgemeinerung des Princips der Dualität anzusehen ist.

Es seien zunächst zwei Correspondenzen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ gegeben; es sei $\Phi = 0$ die Coincidenzcurve (p. 453) von φ, $\Psi = 0$ die von ψ; ferner mögen φ und ψ beide von der Ordnung r in den x, der Ordnung s in den y sein und keinen gemeinsamen Coincidenzpunkt haben. Wir betrachten die lineare Schaar von Correspondenzen $\varphi + \lambda\psi = 0$. Jeder Punkt von f wird dann Coincidenzpunkt einer Correspondenz der Schaar sein, und auch nur einer. Sollten nämlich zwei Correspondenzen der Schaar einen Coincidenzpunkt gemein haben, so müsste derselbe offenbar Coincidenzpunkt für alle Correspondenzen der Schaar sein, also auch für φ und ψ, was der Annahme widerspricht. Hieraus folgt, dass durch jeden Punkt von f nur *eine* der zu der Schaar $\varphi + \lambda\psi = 0$ gehörenden Coincidenzcurven hindurchgeht, d. h. dass diese Curven den Büschel $\Phi + \lambda\Psi = 0$ bilden; oder mit anderen Worten: *Die Gleichung der Coincidenzcurve einer Correspondenz $\varphi(x, y) = 0$ ist linear in den Coëfficienten von φ; einer linearen Schaar von Correspondenzen entspricht daher auch eine lineare Schaar von Coincidenzcurven.* Es wird dies durch die oben von uns berechneten Beispiele (bei $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$) bestätigt.

In der Schaar $\varphi + \lambda\psi = 0$ wird nun eine Zahl von Correspondenzen enthalten sein, für die zwei Coincidenzpunkte benachbart liegen, und zwar sind dies diejenigen, deren entsprechende Coincidenzcurven aus dem Büschel $\Phi + \lambda\Psi = 0$ die Curve $f = 0$ berühren. Wir kennen

*) Vgl. Brill: Math. Annalen, Bd. 4, p. 527.

aber nach dem Obigen (p. 452) die Ordnung der Curven Φ und Ψ, aber auch nach der Formel für α_1 die Zahl dieser berührenden Curven des Büschels und somit die Zahl der in genannter Weise ausgezeichneten Correspondenzen.

Für die spätere Anwendung dieser Ueberlegungen ist noch folgende Bemerkung von Nutzen. Für die Zahl α_q der q-punktig berührenden Curven einer linearen ∞^q-Schaar*) mit M beweglichen Schnittpunkten fanden wir oben den Werth (p. 461):

$$\alpha_q = (q+1)\left\{M + qp - q\right\}.$$

Setzen wir hierin $M-1$ statt M, d. h. betrachten wir eine Schaar von Curven von derselben Mannigfaltigkeit mit nur $M-1$ beweglichen Schnittpunkten, so erkennt man, dass es in ihr nur $\alpha_q - (q+1)$ q-punktig berührende Curven gibt. *Die eine in dem festen Punkte selbst q-punktig berührende Curve der Schaar zählt also $(q+1)$-fach unter der Gesammtheit der q-punktig berührenden Curven.* —

Es seien nun $(q+1)$ Curven gegeben $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$; wir betrachten die ∞^q-Schaar:

$$\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_q\varphi_q = 0,$$

deren einzelne Curven in M beweglichen (und ausserdem in a festen einfachen oder Doppel-Punkten von f) die Curve f schneiden. Durch die Berührungspunkte der $(q-1)$-punktig berührenden Curven der ∞^{q-1}-Schaar:

$$\varphi_1 + \mu_1\varphi_2 + \ldots + \mu_{q-1}\varphi_q = 0,$$

legen wir eine Curve Φ_0 (also die Coincidenzcurve einer Correspondenz zwischen einem Punkte von f und den Punkten, in welchen eine durch ihn gehende Curve der Schaar $(q-1)$-punktig berührt). Durch die entsprechenden Punkte der Schaar

$$\varphi_0 + \nu_1\varphi_2 + \nu_2\varphi_3 + \ldots + \nu_{q-1}\varphi_q = 0$$

legen wir eine andere Curve Φ_1 etc., so dass wir im Ganzen $q+1$ Curven $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_q$ erhalten. Irgend eine lineare Combination der so bestimmten $q+1$ ∞^{q-1}-Schaaren der φ gibt dann auf f eine Correspondenz, welche sich *linear***) aus den $q+1$ genannten (d. i. die Φ bestimmenden) Correspondenzen zusammensetzt; und also setzt sich die Coincidenzcurve derselben nach obigem Satze ebenfalls linear aus den Φ zusammen. Den q-fach unendlich vielen ∞^{q-1}-Schaaren, welche die gegebene ∞^q-Schaar der φ enthält, entspricht so eine

*) Unter *Schaar* soll hier immer eine *lineare Schaar* verstanden werden.

**) Einem Punkte x von f nämlich muss dann eine in ihm $(q-2)$-punktig berührende Curve φ der ∞^{q-1}-Schaar entsprechen, also eine Curve, die sich *linear* aus den Curven φ zusammensetzt; vgl. auch unten p. 472.

lineare ∞^q-Schaar von Curven Φ. Aus der letzteren wählen wir wieder eine ∞^{q-1}-Schaar

$$\text{(I)} \qquad \Phi_1 + \mu_1\Phi_2 + \ldots + \mu_{q-1}\Phi_q = 0$$

aus. Jeder Curve derselben entspricht eine bestimmte ∞^{q-1}-Schaar von Curven φ, und zwar immer eine solche, welche die Curve φ_0 enthält; denn die bez. zu den Curven Φ_1, $\Phi_2 \ldots \Phi_q$ gehörenden Schaaren enthalten einzeln die Curve φ_0. In der Schaar (I) nun wird es eine Anzahl von $(q-1)$-punktig berührenden (q-punktig schneidenden) Curven geben. Einer solchen Curve Φ muss dann eine ∞^{q-1}-Schaar von Curven φ entsprechen, für welche q der in ihr enthaltenen $(q-1)$-punktig berührenden Curven zusammenfallen; denn jedem Schnittpunkte einer Curve Φ mit f entspricht *eine* daselbst $(q-1)$-punktig berührende Curve φ der zugehörigen Schaar von φ. Unter den ∞^{q-1}-Schaaren von Curven φ, welche in der gegebenen ∞^q-Schaar möglich sind und die Curve φ_0 enthalten, sind aber jedenfalls diejenigen, deren Curven sämmtlich durch einen Schnittpunkt von φ_0 mit f hindurchgehen (denn dies gibt *eine* lineare Bedingung für die q Parameter). In einer solchen Schaar zählt die in dem festen Punkte selbst $(q-1)$-punktig berührende Curve nach der soeben gemachten Bemerkung q-fach. Unter den Berührungspunkten der $(q-1)$-punktig berührenden Curven Φ unserer ∞^{q-1}-Schaar sind folglich jedenfalls die Schnittpunkte von f mit φ_0; ausserdem noch andere (nur von der Gesammtheit der Curven φ abhängende) Punkte, die uns später beschäftigen sollen.

Die Reciprocität zwischen den Curven Φ und φ lässt sich demnach in folgender Weise aussprechen):* Gruppirt man die $q+1$ Curven φ zu $q+1$ Schaaren von je q und sucht diejenigen Curven einer solchen Schaar, welche f $(q-1)$-punktig berühren, so lässt sich durch die Berührungspunkte eine Curve Φ legen, welche ausser in diesen f nur noch in den festen Punkten der φ und den singulären Punkten trifft. Jede Schaar liefert so eine Curve Φ, welche zusammen wieder eine Schaar von $q+1$ Curven bilden. Auf letztere kann man dieselbe Operation, welche man auf die φ angewendet hat, wiederum anwenden; und die hieraus hervorgehenden beweglichen Curven sind alsdann keine anderen, als die φ, von denen man ausging.

Bevor wir weiter gehen, erläutern wir dies an einem *Beispiele*. Es sei $q = 2$, also das Netz

$$\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$$

gegeben. Wir bilden die 3 Curvenbüschel:

*) In der von Brill gegebenen Ableitung (a. a. O.) erscheinen diese Sätze als Anwendungen eines auch sonst wichtigen Determinantensatzes, auf den hier nicht eingegangen werden soll.

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2 + \nu\varphi_0 = 0 .$$

In jedem von ihnen gibt es eine Anzahl berührender Curven, deren Berührungspunkte bez. durch die Curven $\Phi_2 = 0$, $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 0$ ausgeschnitten werden. Wir betrachten nun z. B. die einfach unendliche Reihe der Büschel

$$(\varphi_0 + \lambda\varphi_1) + \varrho\,(\varphi_1 + \mu\varphi_2) = 0 ,$$

welche alle Curven des Netzes umfasst, dieselben nur in besonderer Weise anordnet, indem allen Büscheln die Curve φ_1 gemeinsam ist. Einem Punkte x von f entspricht nun im ersten Büschel die Curve $\varphi_0(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_0(y) = 0$, im zweiten die Curve $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\,\varphi_1(y) = 0$, also im Netze (bei unserer Anordnung) der Büschel von Curven:

$$\{\varphi_0(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_0(y)\} + \varrho\,\{\varphi_1(x)\,\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\,\varphi_1(y)\} = 0;$$

in der That eine Correspondenz, welche sich linear aus den durch die beiden ersten Büschel gegebenen Correspondenzen zusammensetzt. Ihre Coincidenzcurve ist demnach gegeben durch $\Phi_2 + \varrho\,\Phi_0 = 0$ (p. 464). Einer berührenden Curve des letzteren Büschels entspricht nun ein Büschel der φ, in welchem zwei berührende Curven zusammenfallen, welcher also entweder (in der geschilderten Weise) in einem Schnittpunkte von f mit φ_1 einen festen Punkt hat oder eine osculirende Curve des Netzes der φ enthält. Bezeichnen wir also die Coincidenzcurve der Correspondenz

$$\Phi_2(x)\,\Phi_0(y) - \Phi_0(x)\,\Phi_2(y) = 0$$

mit $X_1 = 0$, so ist $X_1 = \varphi_1 \,.\, L$, wo $L = 0$ auf f die Punkte ausschneidet, in denen Curven des Netzes osculiren. Diese Punkte aber sind von der speciellen Anordnung der Curven zu Büscheln, wie wir sie treffen, unabhängig; man hat also auch $X_2 = \varphi_2 \,.\, L$, $X_3 = \varphi_3 \,.\, L$, wenn $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ die berührenden Curven der Büschel $\Phi_0 + \varrho\,\Phi_1 = 0$, $\Phi_1 + \varrho\Phi_2 = 0$ bestimmen (dass auf den rechten Seiten bei φ_1, φ_2, φ_3 keine constante Factoren mehr auftreten können, wird weiterhin noch gezeigt werden). Es folgt hieraus, dass in *jedem* Büschel, welcher in dem Netze der Φ enthalten ist, Curven vorkommen, die $f = 0$ in den Schnittpunkten mit $L = 0$ berühren. Während also in einem beliebigen Punkte von f nur eine Curve des Netzes der Φ berührt, berühren in jedem dieser Punkte unendlich viele Curven dieses Netzes. Ein Punkt, in dem dies stattfindet, liegt aber bekanntlich auf der Jakobi'schen Curve desselben (p. 382); und somit haben wir den Satz:

Die Punkte, in denen eine Curve des Netzes der φ die Curve f osculirt, liegen auf der Jakobi'*schen Curve des Netzes der Φ.**)

Wir können hier auch die Zahl dieser Punkte direct bestimmen. Die Φ schneiden in α_1 beweglichen Punkten, wo $\alpha_1 = 2\,(M + p - 1)$, wenn f keine Rückkehrpunkte hat. Die Coincidenzpunkte der durch einen Büschel der Φ gegebenen Correspondenz bestimmen sich daher mittelst einer Correspondenz $(\alpha_1, \alpha_1)_1$; und ihre Zahl ist gleich

$$\alpha_2 + M = 2\,(\alpha_1 + p - 1)\,.$$

Hieraus folgt in der That, wie oben (p. 460):

$$\alpha_2 = 3\,(M + 2p - 2)\,.$$

*) Man kann dies auch direct algebraisch nachweisen, wobei sich dann ergibt, dass L die schon früher erwähnte Coincidenzcurve der die osculirenden Curven bestimmenden Correspondenz mit $\gamma = 2$ ist (p. 461 Anmk.). — Wir bezeichnen mit $(\varphi\chi\psi)$ die Functionaldeterminante dreier Functionen φ, χ, ψ dividirt durch das Product ihrer Ordnungen; dann ist nach der Anmk. auf p. 460:

(1) $\qquad \Phi_0 = (f\varphi_1\varphi_2)\,, \qquad \Phi_1 = (f\varphi_2\varphi_0)\,, \qquad \Phi_2 = (f\varphi_0\varphi_1)\,;$

(2) $\qquad X_0 = (f\Phi_1\Phi_2)\,, \qquad X_1 = (f\Phi_2\Phi_0)\,, \qquad X_2 = (f\Phi_0\Phi_1)\,;$

also auch nach den Erörterungen des Textes:

(3) $\qquad (f\Phi_1\Phi_2) = \varphi_0\,.\,L\,, \qquad (f\Phi_2\Phi_0) = \varphi_1\,.\,L\,, \qquad (f\Phi_0\Phi_1) = \varphi_2\,.\,L\,.$

Ferner bestehen, wie schon auf p. 456 bemerkt, die Identitäten:

$$(f\Phi_0\Phi_1)\,\Phi_2 + (f\Phi_1\Phi_2)\,\Phi_0 + (f\Phi_2\Phi_0)\,\Phi_1 = (\Phi_0\Phi_1\Phi_2)\,f\,,$$
$$(f\varphi_0\varphi_1)\,\varphi_2 + (f\varphi_1\varphi_2)\,\varphi_0 + (f\varphi_2\varphi_0)\,\varphi_1 = (\varphi_0\varphi_1\varphi_2)\,f\,;$$

und durch Benutzung derselben findet man wegen (1) und (3) zur Bestimmung von L die Relation:

(4) $\qquad (\varphi_0\varphi_1\varphi_2)\,.\,L = (\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\,,$

womit der Satz des Textes bewiesen ist. Es lässt sich weiter zeigen, dass L immer eine ganze Function ist. Die φ mögen von der Ordnung m sein und der Einfachheit wegen nicht sämmtlich durch die Doppelpunkte von f gehen. Dann sind die Φ nach (1) von der Ordnung $2m + n - 3$; und L ist nach (3) von der Ordnung $3\,(m + n - 2)$, also in der That von derselben Ordnung, wie die Coincidenzcurve der auf p. 456 betrachteten Correspondenz (vgl. dazu p. 452);

(5) $\qquad (f\varphi_0\varphi_1)\,\varphi_2\,(y) + (f\varphi_1\varphi_2)\,\varphi_0\,(y) + (f\varphi_2\varphi_0)\,\varphi_1\,(y) = 0\,.$

Von den Schnittpunkten der letzteren Curve mit f liegen in jedem Doppelpunkte von f $\gamma\,(\gamma + 1) = 6$ vereinigt (nach dem Satze über uneigentliche Coincidenzen p. 454); in demselben liegen aber auch ebenso viele Schnittpunkte einer jeden der Curven $(f\Phi_i\Phi_k) = 0$ mit f, wie aus einem Satze auf p. 455 folgt (denn die Φ gehen als Coincidenzcurven alle durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von f). Die Curve $(f\Phi_i\Phi_k)$ schneidet also f in ganz denselben Punkten, wie das Product $\varphi_l\,.\,L$ und kann daher in der Form $\varphi_l\,.\,L + K\,.\,f$ dargestellt werden. Da sich somit L auch in den singulären Punkten von f verhält, wie die Coincidenzcurve der Correspondenz (5), so folgt, dass *L die von* Brill (Math. Annalen, Bd. 3, p. 462) *berechnete Function ist* (bis auf einen Zahlenfactor). — Die in den Gleichungen (3), (4) ausgesprochenen *Sätze über Functionaldeterminanten* schliessen sich an die von Clebsch (Crelle's Journal, Bd. 69 und 70) gegebenen an.

Ganz analog gestalten sich diese Verhältnisse im allgemeinen Falle. Wir haben hier zunächst noch zu zeigen, dass in einer ∞^{q-1}-Schaar von Φ nur M der $(q-1)$-punktig berührenden Curven bei der gewählten Gruppirung der q betrachteten ∞^{q-1}-Schaaren von Curven φ abhängen, die übrigen dagegen nur von der Gesammtheit der Curven φ; und zwar wollen wir nachweisen, dass diese übrigen die α_q Punkte sind, in denen eine Curve φ q-punktig berühren kann. Zu dem Zwecke stellen wir folgende Betrachtung an.

Eine in der gegebenen ∞^q-Schaar der φ enthaltene ∞^{q-1}-Schaar ist jedenfalls durch q aus ersterer beliebig herausgewählte Curven bestimmt. Wir betrachten nun eine solche ∞^{q-1}-Schaar, welche eine beliebige Curve φ (etwa φ_0) enthält und ausserdem andere zu einander benachbarte $q-1$ Curven φ, welche in $q-1$ zu einander benachbarten Punkten ξ von f je $(q-1)$-punktig berühren (d. i. q-punktig schneiden).*) Die zu der so construirten Schaar gehörige Curve Φ wird dann immer f in ξ $(q-2)$-punktig berühren, sonst aber noch in weiteren Punkten einfach schneiden, in denen andere Curven φ unserer Schaar die Curve f $(q-1)$-punktig berühren. Lassen wir nun ξ auf f wandern, so wird sich unsere ∞^{q-1}-Schaar mit ξ ändern (aber immer noch φ_0 enthalten); und insbesondere kann ξ so liegen, dass die zugehörige Curve Φ $(q-1)$-punktig berührt (q-punktig schneidet). In dem Falle haben wir in der betreffenden ∞^{q-1}-Schaar der φ nicht $q-1$, sondern q benachbarte Curven, welche f in den Punkten ξ je $(q-1)$-punktig berühren. Dies tritt nach dem Früheren *erstens* in den Schnittpunkten von f mit φ_0 ein (p. 465); *zweitens* in den α_q Punkten, wo eine Curve φ q-punktig berühren ($(q-1)$-punktig schneiden) kann, indem diese Curve dann doppelt zählt. In andern Punkten von f kann dies aber nicht eintreten. Eine anderswo $(q-1)$-punktig berührende Curve φ zählt nämlich immer einfach; durch q benachbarte Curven der Art ist daher eine in der ∞^q-Schaar der φ enthaltene ∞^{q-1}-Schaar schon völlig bestimmt, wird also nicht mehr die vollkommen willkürlich zu wählende Curve φ_0 enthalten. Unter den Berührungspunkten der $(q-1)$-punktig berührenden Φ der zu φ_0 gehörigen ∞^{q-1}-Schaar sind also in der That ausser den Schnittpunkten von φ_0 mit f nur *die von der Gesammtheit der* φ *abhängenden Punkte* α_q enthalten.

Diese Punkte sind aber je $(q-1)$-*fach zu zählen.* Da nämlich die Φ zufolge ihrer Definition f in α_{q-1} beweglichen Punkten treffen, wo nach p. 461 (wenn f zunächst keine Rückkehrpunkte hat):

$$\alpha_{q-1} = q\,\{M + (q-1)(p-1)\}\,;$$

---

*) Solche Curven φ kann man in jedem Punkte von f bestimmen, da eine Curve φ gerade durch q (hier benachbarte) Punkte festgelegt wird.

so ist die Zahl A_{q-1} der Curven, welche der Schaar (I) angehören und $(q-1)$-punktig berühren:

$$A_{q-1} = q\left\{\alpha_{q-1} + (q-1)(p-1)\right\} = q^2 M + q(q^2-1)(p-1).$$

Diese Punkte sollen theilweise in den M nicht allen Curven φ gemeinsamen Schnittpunkten von φ_0 mit f liegen (denn durch die gemeinsamen Punkte gehen auch die Φ), theilweise in den α_q Punkten; d. h. es soll für alle Werthe von M die Relation bestehen:

$$q^2 M + q(q^2-1)(p-1) = \varkappa M + \lambda(q+1)(M+qp-q).$$

Hieraus folgt aber $\varkappa = 1$ und $\lambda = q-1$, q. e. d.

Die A_{q-1} Punkte werden durch eine Curve ausgeschnitten, die wir mit X_0 bezeichnen wollen, und welche ausserdem noch durch die singulären Punkte sowie durch die den φ gemeinsamen einfachen Punkte von f hindurchgeht. *Das Verhalten von X_0 in letzteren Punkten wollen wir bestimmen.* Dies können wir nach einem obigen Satze (p. 455), da X_0 Coincidenzcurve einer Correspondenz mit $(q-1)$-werthigem Punkte in $x = y$ ist, vermöge deren jedem Punkte x eine Curve Φ der Schaar (I) zugeordnet wird. Das Verhalten der Φ in den betreffenden Punkten kennen wir aber, da dieselben Coincidenzcurven von Correspondenzen sind, vermöge deren jedem Punkte x eine in ihm $(q-2)$-punktig berührende Curve φ zugehört. Und zwar liegen in jedem Doppelpunkte von f, in welchem σ feste Schnittpunkte der φ liegen, nach jenem Satze, indem $\gamma = q-1$ ist, $q(\sigma+q-1)$ Schnittpunkte der Φ, und also

$$\text{(II)} \qquad q\left\{q(\sigma+q-1)+q-1\right\} = q^2\sigma + q(q^2-1)$$

Schnittpunkte von X_0. In jedem einfachen Punkte von f dagegen, in dem die Φ σ Punkte mit f gemein haben, liegen $q\sigma$ Schnittpunkte der Φ, und also $q^2\sigma$ Schnittpunkte von X_0. Es ist nun leicht zu sehen, dass sich in allen Schnittpunkten von X_0 mit f das Product $\varphi_0 \,.\, L_q^{q-1}$ ebenso verhält, wenn $L_q = 0$ die Coincidenzcurve ist, welche die α_q Punkte ausschneidet. Für letztere nämlich fallen nach demselben Satze $(q+1)\sigma$ Schnittpunkte von L_q in jeden einfachen Punkt von f der zuletzt genannten Art, also in der That

$$\sigma + (q-1)(q+1)\sigma = q^2\sigma$$

Schnittpunkte des Productes $\varphi_0 L_q^{q-1}$. Ferner liegen in jedem Doppelpunkte von f, in denen σ feste Schnittpunkte der φ liegen, $(q+1)$ $\cdot(\sigma+q)$ Punkte von L_q, also wie in (II)

$$\sigma + (q-1)(q+1)(\sigma+q) = q^2\sigma + q(q^2-1)$$

Punkte von $\varphi_0 \,.\, L_q^{q-1}$; und endlich geht letzteres Product einfach durch die M Schnittpunkte von φ_0 mit f und $(q-1)$-fach durch die

α_q Punkte, wie es sein soll. Bedeutet also C einen constanten Factor, so können wir (unter Adjunction von $f = 0$) setzen*):

(III) $$X_0 = C \cdot \varphi_0 \cdot L_q^{q-1}.$$

Der Factor C aber kann nur ein Zahlenfactor sein, d. h. die Coëfficienten der φ und f nicht mehr enthalten. Andernfalls nämlich würde er durch sein Verschwinden aussagen, dass es in der Schaar (I) unendlich viele $(q-1)$-punktig berührende Curven Φ gibt (indem $X_0 \equiv 0$); dann aber müsste entweder φ_0 unendlich viele Punkte mit f gemein haben, oder es müssten auch unendlich viele q-punktig berührende Curven φ in der gegebenen Schaar sein (also $L_q \equiv 0$). Beide Bedingungen können aber offenbar nicht durch das Verschwinden eines einzigen Ausdrucks C angezeigt werden. Da somit C ein Zahlenfactor ist, muss derselbe der Symmetrie wegen in allen Gleichungen den gleichen Werth haben, welche aus (III) durch Vertauschung von φ_0 mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ entstehen; und wir können ihn in die Definition der X_i eingehen lassen, wenn $X_1, X_2, \ldots X_q$ entsprechende Bedeutung wie X_0 haben. *Es bestehen dann also die Gleichungen:*

(IV) $$X_i = \varphi_i \cdot L_q^{q-1}.$$

Damit ist obiges Reciprocitätsgesetz völlig bewiesen (p. 466).

Dasselbe findet seinen Ausdruck in dem Entsprechen der Zahlen M und α_{q-1}, d. h. der Zahlen für die beweglichen Schnittpunkte der Curven φ und Φ. Aus jeder Relation zwischen den Zahlen M, α_{q-1} und andern von den φ abhängenden Zahlen kann man daher eine zweite ableiten, indem man M mit α_{q-1} vertauscht und jene anderen Zahlen mit den ihnen im Systeme der Φ entsprechenden. Insbesondere wirft sich hier die Frage auf, welche Zahl β_q in letzterem als der Zahl α_q entsprechend angesehen werden muss. Die Punkte α_q sind zusammen mit den (eventuell mehrfach zu zählenden) Rückkehrpunkten von f die eigentlichen Coincidenzpunkte einer Correspondenz, deren Coincidenzcurve durch $L_q = 0$ gegeben ist. Um die Zahl β_q zu finden, haben wir also die Curve L_q für das System der Φ statt für das der φ zu bilden. *Wir wollen zeigen, dass diese Curve mit der Curve L_q identisch ist.*

Die Correspondenz, für welche L_q Coincidenzcurve ist, ordnet jedem Punkte x eine in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve der Schaar von Curven φ zu, jedem Punkte y aber eine Curve, welche

*) Man überzeugt sich auch leicht, dass auf beiden Seiten die Ordnungen übereinstimmen; denn (vgl. p. 452) L_q ist von der Ordnung $(q+1)\{m + \frac{1}{2}(n-3)q\}$, wo m die Ordnung von φ_0, n die von f bezeichnet, und X_0 ist von der Ordnung: $q\{q[m + \frac{1}{2}(n-3)(q-1)] + \frac{1}{2}(n-3)(q-1)\} = q^2 m + \frac{1}{2}(n-3)q(q-1)$.

auf f die Berührungspunkte der durch y gehenden $(q-1)$-punktig berührenden φ ausschneidet, d. h. eine Curve der Schaar Φ. Diese Correspondenz wird daher durch eine Gleichung dargestellt, welche linear in den $\varphi(y)$ und linear in den $\Phi(x)$ ist. Betrachtet man nun einen Punkt x, für welchen Φ_0 verschwindet, so muss die in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve φ zufolge der Definition von Φ_0, eine lineare Combination der Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ sein; d. h. in unserem lineo-linearen Ausdrucke muss jedenfalls Φ_0 in φ_0 multiplicirt sein, die übrigen Φ dagegen dürfen den Factor φ_0 nicht haben. Betrachtet man ferner einen auf φ_0 gelegenen Punkt y von f, so erkennt man ebenso, dass Φ_0 auch nicht in $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ multiplicirt vorkommen darf. Zu dem Producte $\Phi_0\varphi_0$ kann ferner kein constanter Factor (keine simultane Invariante der φ und f) hinzutreten. Das Verschwinden eines solchen nämlich würde zur Folge haben, dass in der Gleichung der Correspondenz ein Glied mit $\varphi_0(y)$ nicht mehr vorkommt. Vermöge der Correspondenz würde also jedem Punkte x von f eine in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve aus der durch $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ bestimmten ∞^{q-1}-Schaar zugeordnet; die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass in dieser Schaar unendlich viele $(q-1)$-punktig berührende φ sind, ist aber offenbar das identische Verschwinden von Φ_0; dieselbe Bedingung kann daher nicht durch das Verschwinden *einer* Invariante ausgedrückt werden. Das Product $\Phi_0\varphi_0$ kann sonach in der Correspondenzgleichung nur in einen Zahlenfactor multiplicirt sein; ein solcher aber muss der Symmetrie wegen dann ebenso bei den Gliedern $\Phi_1\varphi_1, \ldots \Phi_q\varphi_q$ auftreten. *Die fragliche Correspondenz kann man daher in folgender Form darstellen**):

$$\Phi_0(x) \cdot \varphi_0(y) + \Phi_1(x) \cdot \varphi_1(y) + \ldots + \Phi_q(x) \cdot \varphi_q(y) = 0 .$$

Stellt man die entsprechende Correspondenz für die Φ auf, so *erhält man ganz dieselbe Gleichung;* nur sind die x und y vertauscht. Man hat nämlich Φ_i statt φ_i, X_i statt Φ_i zu schreiben; dann sondert sich aber wegen (IV) ein Factor L_q^{q-1} ab, und man erhält das erwähnte Resultat. Da nun die beiden Correspondenzen dieselben sind, so sind auch ihre Coincidenzcurven identisch, q. e. d.

Die aus vorstehenden Betrachtungen geschlossenen algebraischen Resultate behalten offenbar ihre Gültigkeit, wenn die Curve f Rückkehrpunkte besitzt; es rücken dann nur einzelne der α_q eigentlichen Coincidenzpunkte in diese Rückkehrpunkte (in näher zu bestimmender Weise) hinein. Die Untersuchung dieser Verhältnisse wird uns zu der geforderten Bestimmung der Zahl β_q führen. — Die Schnittpunkte von L_q mit f, welche eigentliche Coincidenzen geben, zerfallen in 2

---

*) Vgl. dazu das Beispiel $q = 2$ auf p. 456.

Gruppen: die nicht in den Rückkehrpunkten liegenden Punkte α_q und die r Rückkehrpunkte von f, durch welche die Curven φ zunächst nicht hindurchgehen mögen. In jedem Punkte der ersteren Gruppe berührt *eine* Curve φ q-punktig, und zwar geht *jede* Curve φ, welche daselbst q benachbarte Punkte von f enthält, auch durch einen $(q+1)^{\text{ten}}$ benachbarten Punkt von f. In einem Punkte derselben Gruppe berührt ebenfalls *eine* Curve Φ q-punktig (eventuell mehrfach zählend), ausserdem aber *einfach unendlich viele* Curven Φ je $(q-1)$-punktig.*) In einem Rückkehrpunkte dagegen verhalten sich die φ gerade so, wie die Φ in einem der α_q Punkte; in der That berührt jede der einfach unendlich vielen φ, welche durch den Rückkehrpunkt und $q-2$ benachbarte Punkte gehen $(q-1)$-punktig, da der Rückkehrpunkt doppelt zählt; und unter diesen wird es eine (event. mehrfach zählende) Curve geben, welche noch einen $(q-1)^{\text{ten}}$ benachbarten Punkt von f (d. i. zusammen wieder $q+1$ benachbarte Punkte) enthält. Hieraus folgt nach unserem Reciprocitätsgesetze, dass sich umgekehrt die Φ in den Rückkehrpunkten von f verhalten wie die φ in den Punkten α_q; d. h. wir haben $\beta_q = r$ zu nehmen: *Vermöge der Reciprocität zwischen den φ und Φ entsprechen sich die Zahlen α_q und r.*

Das besondere Verhalten der Φ in den Rückkehrpunkten kann nur dadurch begründet sein, dass dieselben sämmtlich (als Coincidenzcurven) durch die Rückkehrpunkte hindurchgehen; denn andernfalls würde für sie dieselbe Schlussweise wie für die φ gültig sein. Hieraus kann man rückwärts schliessen, dass unsere Schlussweise auch für die φ ungültig wird, wenn dieselben in den Rückkehrpunkten gemeinsame feste Punkte haben, d. h. dass sich diese dann verhalten wie die α_q Punkte. *Gehen also die φ sämmtlich durch r' Rückkehrpunkte von f hindurch, so entsprechen sich die Zahlen α_q und $r-r'$ oder r und $\alpha_q + r'$, so dass jeder der r' Rückkehrpunkte sich selbst entspricht.* —

Die letzteren Ueberlegungen gestatten uns endlich auch die in den Gleichungen auf p. 460 f. vorläufig mitgetheilten Reductionen zu bestimmen, welche die Zahl α_q beim Auftreten von Rückkehrpunkten erleidet. Wir betrachten eine q-fach unendliche Schaar von Curven φ, für welche M, r, r' die angegebenen Bedeutungen haben mögen. Die Zahl der Curven φ, welche durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen und die Grundcurve $(q-1)$-punktig berühren, ist dann:

$$\alpha_{q-1} = q\,\{M + (q-1)(p-1)\} - \varrho r - \varrho' r',$$

wo ϱ, ϱ' noch zu bestimmen sind. Hieraus folgt aber, wenn man nach unserem Reciprocitätsgesetze α_{q-1} mit M, r mit $\alpha_q + r'$, vertauscht, die andere Gleichung:

*) Man erkennt dies in ganz derselben Weise, wie oben das Entsprechende für $q = 2$.

$$M = q\,\{\alpha_{q-1} + (q-1)(p-1)\} - \varrho\,(\alpha_q + r') - \varrho' r',$$

und durch Elimination von α_{q-1} aus beiden Gleichungen:

$$\varrho\,\alpha_q = (q^2 - 1)(M + qp - q) - \varrho\, q\, r - r'\,\{\varrho + (q+1)\,\varrho'\}.$$

Für $r = r' = 0$ ist aber bekanntlich $\alpha_q = (q+1)(M + qp - q)$, und somit $\varrho = q - 1$. Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so haben alle Glieder derselben den Factor $(q-1)$ bis auf den in ϱ' multiplicirten Term; es ist also $\varrho' = \pm (q-1)$ zu nehmen, so dass

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q) - qr - [1 \pm (q+1)]\, r'.$$

Diese Zahl muss aber für $r = r' = 1$, $M = n - 2$, $q = 1$, d. h. wenn man den von einem Rückkehrpunkte ausgehenden Strahlbüschel betrachtet, nach p. 457 den Werth $k - 3$ annehmen, was nur bei Wahl des negativen Zeichens eintritt. Man hat also den Satz:

In einer q-fach unendlichen linearen Schaar von Curven, welche auf f beliebige gemeinsame feste Punkte haben und unter diesen r' Rückkehrpunkte von f, ausserdem aber f in M beweglichen Punkten treffen, gibt es

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q) - q\,(r - r')$$

Curven, die f (nicht in den festen Punkten) q-punktig berühren. Dabei ist p das Geschlecht, r die Zahl der Rückkehrpunkte von f.

Es sei schliesslich bemerkt, dass sich analoge Reciprocitätsgesetze für die niederen aus der ∞^q-Schaar der φ auszuscheidenden linearen Mannigfaltigkeiten von Curven φ aufstellen lassen.*) Dieselben gestatten dann die genaue Bestimmung der an verschiedenen Punkten von f mehrpunktig berührenden Curven (vgl. Brill, a. a. O.).

IX. Eindeutige Abbildung zweier Ebenen auf einander.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen über algebraische Curven bildete die Theorie der linearen Transformation. Wir lernten letztere als analytischen Ausdruck für die projectivische Beziehung zweier Ebenen zu einander auffassen, und konnten demgemäss die von uns allein berücksichtigten Eigenschaften der Curven als diejenigen definiren, die durch beliebige (reelle oder imaginäre) Projection der Curven nicht geändert werden. Im Anschlusse an diese Auffassung trat zuerst die Theorie der ternären algebraischen Formen und mit ihr die symbolische Bezeichnung und Rechnung in den Vordergrund, um einen eleganten algebraischen Apparat für die geometrische Ueberlegung zu liefern. Bei weiterem Fortschreiten jedoch haben wir die

---

*) Es sei darauf hingewiesen, dass diese Reciprocitätsgesetze in enger Beziehung stehen zu dem gewöhnlichen Dualitätsgesetze, wie dieses bei Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen auftritt (vgl. auch die Anmk. auf p. 385).

Grenzen des durch diese Gesichtspunkte bezeichneten Gebietes allmählich überschritten: In der That boten uns schon die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve ein Beispiel für die Untersuchung zweier nicht linear, aber doch eindeutig auf einander bezogenen Curven, und noch mehr wurden wir beim Studium der Geometrie auf einer Curve gelegentlich zu der Bemerkung veranlasst, dass die entwickelten Sätze nicht nur gegenüber *linearen*, sondern überhaupt gegenüber *eindeutigen* Transformationen der Grundcurve einen invarianten Charakter zeigen, d. h. für die transformirte Curve ebenso gelten, wie für die ursprüngliche. Während wir aber hier nur von zwei einzelnen, eindeutig auf einander bezogenen Curven sprachen, kann man auch die Frage stellen, ob es möglich ist, zwei ganze Ebenen Punkt für Punkt eindeutig auf einander zu beziehen, und welche Eigenschaften derartigen Transformationen zukommen. Diese auf die *ganze* Ebene bezüglichen Transformationen sollen uns hier zunächst allein beschäftigen; auf die anderen, nur für zwei einzelne Curven eindeutigen werden wir bei einer anderen Gelegenheit eingehen.

Die Möglichkeit einer nicht linearen eindeutig umkehrbaren Beziehung zwischen zwei Ebenen zeigt sofort ein einfachstes Beispiel: die *quadratische Verwandtschaft.**) Dieselbe wird zwischen den Punkten x und y zweier vereinigt oder getrennt gedachten Ebenen E_x und E_y vermittelt durch die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = y_2 y_3, \quad \varrho x_2 = y_3 y_1, \quad \varrho x_3 = y_1 y_2; \tag{1}$$

und diese geben unmittelbar die ebenfalls eindeutige Umkehrung:

$$\sigma y_1 = x_2 x_3, \quad \sigma y_2 = x_3 x_1, \quad \sigma y_3 = x_1 x_2. \tag{2}$$

Wir wollen diesen für das folgende besonders wichtigen Specialfall noch näher betrachten. Einer geraden Linie $u_x = 0$ entspricht vermöge (1) in E_y ein Kegelschnitt

$$u_1 y_2 y_3 + u_2 y_3 y_1 + u_3 y_1 y_2 = 0 \tag{3}$$

und umgekehrt einer Linie $v_y = 0$ vermöge (2) in E_x ein Kegelschnitt

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0;$$

wir sehen, dass die Beziehung beider Ebenen auf einander vollkommen dieselbe ist. Die *Eindeutigkeit* dieser Beziehung wird geometrisch folgendermassen evident. Dem Schnittpunkte zweier Linien $u_x = 0$

*) Sie wurde zuerst betrachtet von Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833, und vorher im Crelle's Journal, Bd. 8; später von Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit, etc. Gelegentlich finden sich quadratische Verwandtschaften auch schon bei Poncelet (Traités des propriétés projectives des figures, 1822, p. 198) und Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5).

und $u_x' = 0$ in E_x entsprechen in E_y die Schnittpunkte des Kegelschnittes (3) mit dem Kegelschnitte

$$u_1' y_2 y_3 + u_2' y_3 y_1 + u_3' y_1 y_2 = 0 .$$

Wir bemerken aber, dass von diesen vier Schnittpunkten drei immer dieselben sind: die Ecken des Dreiecks $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. *Den Geraden der einen Ebene entsprechen also Kegelschnitte durch drei feste Punkte, „Fundamentalpunkte", in der andern; und dem Schnittpunkte zweier Geraden der vierte bewegliche Schnittpunkt der beiden zugehörigen Kegelschnitte.* *)

In der Weise können wir uns diese *„quadratische Verwandtschaft"* überhaupt geometrisch definirt denken: wir setzen die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Geraden einer Ebene entsprechend zu der Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Kegelschnitte eines Netzes mit drei festen Fundamentalpunkten. Den Kegelschnitten durch einen Punkt der einen sind dann die Geraden durch einen Punkt der andern Ebene zugeordnet; jedem Punkte der einen Ebene entspricht also der Schnittpunkt zweier (und somit unendlich vieler) Geraden der andern Ebene und umgekehrt. Demgemäss können wir die algebraische Darstellung der Verwandtschaft allgemeiner folgendermassen fassen. Es seien Q_1, Q_2, Q_3 und Q_1', Q_2', Q_3 beliebige lineare Functionen in y_1, y_1, y_3, dann geben die beiden linearen Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 &= 0 \\ Q_1' x_1 + Q_2' x_2 + Q_3' x_3 &= 0 \end{aligned}$$

wieder unsere Beziehung; denn durch Auflösung erhalten wir**):

---

*) Von den Fundamentalpunkten können zwei oder alle drei einander benachbart liegen, wo sich dann alle Kegelschnitte des Netzes bez. ein- oder zweipunktig berühren.

**) Die Gleichungen (4) kann man in der Form schreiben $\Sigma\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$, $\Sigma\Sigma b_{ik} x_i y_k = 0$. Nimmt man dann insbesondere $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ und lässt die Ebenen E_x und E_y zusammenfallen, so bilden je zwei entsprechende Punkte x und y ein conjugirtes Polepaar in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$. Die Fundamentalpunkte der einen Ebene fallen mit denen der andern zusammen und bilden die Ecken des beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. — Eine andere einfache geometrische Darstellung der Beziehung ergibt sich, wenn man zwei Fundamentalpunkte (bei vereinigter Lage beider Ebenen) in die imaginären Kreispunkte, den dritten in den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems legt. Setzen wir demgemäss:

$$\frac{x_1}{x_3} = x + iy , \quad \frac{x_2}{x_3} = x - iy , \quad \frac{y_1}{y_3} = \xi + i\eta , \quad \frac{y_2}{y_3} = \xi - i\eta ,$$

so gehen die Gleichungen (1) für $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$ über in:

$$x = \frac{\xi}{\varrho^2} , \quad y = -\frac{\eta}{\varrho^2} ;$$

und diese Gleichungen stellen bekanntlich die sogenannte Verwandtschaft der *reciproken Radien* dar.

$\varrho x_1 = Q_2 Q_3' - Q_3 Q_2', \quad \varrho x_2 = Q_3 Q_1' - Q_1 Q_3', \quad \varrho x_3 = Q_1 Q_2' - Q_2 Q_1',$
und die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ stellen in der That wieder drei Kegelschnitte mit drei festen Punkten dar, den Fundamentalpunkten der Ebene E_y. Die Umkehrung dieser Formeln würde sich ergeben, wenn wir die Gleichungen (4) nach den y_i ordnen und auflösen wollten.

Wir bezeichnen mit β_1, β_2, β_3 die drei Fundamentalpunkte in E_y, mit α_1, α_2, α_3 die drei Fundamentalpunkte in E_x. *Für diese Punkte selbst ist unsere Verwandtschaft nicht mehr eindeutig;* und solche Ausnahmepunkte treten bei allen höheren eindeutigen Beziehungen auf. Dem Punkte α_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) entsprechen nämlich nach (1) und (2) *alle* Punkte der Geraden $\overline{\beta_2 \beta_3}$ ($y_1 = 0$) in E_y; und umgekehrt entspricht *jedem* Punkte dieser Geraden ein und derselbe Punkt α_1 in E_x. Da aber die Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ die Punkte β_2, β_3 enthält, denen bez. die ganzen Geraden $\overline{\alpha_3 \alpha_1}$, $\overline{\alpha_3 \alpha_2}$ entsprechen, so erleidet gleichwohl der Satz, dass *jeder* Geraden in dem einen Systeme in dem andern ein Kegelschnitt durch die drei Fundamentalpunkte zugehört, für die Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ keine Ausnahme.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen können wir leicht die Aenderungen angeben, welchen eine Curve durch unsere Transformation unterworfen wird. Es ist klar, dass einer C_n in E_x eine C_{2n}' in E_y entspricht, deren Gleichung sich einfach durch Einsetzen von $y_2 y_3$ statt x_1 etc. aus der Gleichung der C_n ergibt. Da aber die Geraden $\alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_3 \alpha_1$, $\alpha_1 \alpha_2$ von der C_n in je n Punkten geschnitten werden, denen immer derselbe Punkt (bez. β_1, β_2, β_3) in E_y entspricht, so geht die C_{2n}' durch die Punkte β_1, β_2, β_3 je n-mal; und zwar werden diese n Zweige der C_{2n}' alle von einander getrennt verlaufen, wenn die n Schnittpunkte der C_n mit der betreffenden Fundamentalgeraden der andern Ebene alle von einander getrennt liegen. Geht dagegen die C_n durch einen Fundamentalpunkt α_1, so wird von der zugehörigen C_{2n}' ein fester Theil, die α_1 entsprechende Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ abgesondert: es bleibt nur eine Curve von der Ordnung $2n - 1$; und dieselbe geht durch β_2 und β_3 nur noch je $(n-1)$-mal hindurch.

Allgemein entspricht daher einer Curve n^{ter} Ordnung der einen Ebene, welche durch die Fundamentalpunkte α_1, α_3, α_3 derselben bez. k_1-, k_2-, k_3-mal hindurchgeht in der andern Ebene eine Curve von der Ordnung $2n - k_1 - k_2 - k_3$, welche durch die Fundamentalpunkte β_1, β_2, β_3 dieser Ebene bez. $n - (k_2 + k_3)$, $n - (k_3 + k_1)$, $n - (k_1 + k_2)$ mal hindurchgeht. So entspricht z. B. einer C_4 mit je einem Doppelpunkte in α_1, α_2, α_3 eine C_2, die nicht durch β_1, β_2, β_3 hindurchgeht; und umgekehrt jedem solchen Kegelschnitte eine C_4 mit 3 Doppelpunkten in α_1, α_2, α_3.

Durch directe Verallgemeinerung dieser Anschauung werden wir zu der geometrischen Definition einer allgemeinen eindeutigen Transformation der Ebene geführt, einer sogenannten *rationalen* oder Cremona'schen Transformation; Cremona ist es nämlich, welcher diese wichtige Theorie zuerst in voller Allgemeinheit aufgestellt hat.*) An Stelle des Kegelschnittsystems mit 3 festen Punkten haben wir ein doppelt unendliches lineares System von Curven n^{ter} Ordnung mit einem beweglichen, also $n^2 - 1$ festen Schnittpunkten zu setzen. Nun sind aber nach unserem Fundamentaltheoreme über Schnittpunktsysteme (vgl. p. 427) durch $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Schnittpunkte zweier Curven n^{ter} Ordnung den übrigen $\frac{1}{2} (n - 1 (n - 2)$ Punkte im Allgemeinen schon völlig bestimmt. Soll daher bei $n^2 - 1$ festen Schnittpunkten noch ein beweglicher möglich sein, so müssen diese $n^2 - 1$ festen Punkte eine ganz besondere Lage zu einander haben, bez. die Curven des Systems sich in ihnen besonders verhalten; und die Feststellung dieser Verhältnisse ist im Folgenden unsere wesentliche Aufgabe. Daran knüpft sich dann von selbst eine Erörterung über die Natur der die Transformation vermittelnden Functionen, und die andere Frage, ob noch andere eindeutige Transformationen einer Ebene möglich sind, als die durch solche Curvensysteme mit $n^2 - 1$ festen Punkten vermittelten.

Eine eindeutig umkehrbare Transformation sei durch die drei Gleichungen

$$\varrho y_i = f_i (x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

gegeben, wo die f_i Functionen n^{ter} Ordnung sind, welche keinen Factor gemein haben, und deren Functionaldeterminante nicht identisch verschwindet.**) Nehmen wir an, es sei in Folge derselben jedem Punkte y umgekehrt *ein* Punkt x zugeordnet vermittelst der Gleichungen:

$$\sigma x_i = \varphi_i (y_1, y_2, y_3), \tag{6}$$

wo die φ_i rationale, ganze Functionen ν^{ter} Ordnung in den y sein mögen.

Den Geraden $u_x = 0$ in E_x entsprechen dann die Curven ν^{ter} Ordnung $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ in E_y und den Geraden $v_y = 0$ in E_y die Curven n^{ter} Ordnung $\Sigma v_i f_i$ in E_x. Den Schnittpunkten von

---

*) In den beiden Abhandlungen: Sulle transformazioni geometriche delle figure piane, Memorie dell' Accademia di Bologna, Serie II, t. 2, 1863 und t. 5, 1865; abgedruckt in Battaglini's Giornale, t. 1 und 3. Vgl. die zusammenfassenden (für den Text benutzten) Darstellungen von Cayley: On the rational transformations between two spaces, Proceedings of the London math. Society, vol. 3, 1870; und Rosanes: Ueber rationale Substitutionen, Crelle's Journal, Bd. 73, 1871; sowie Bulletin des sciences mathématiques, vol. 5, p. 207. — Verallgemeinerungen für mehrdeutige Abbildungen findet man bei Wiener: Math. Annalen, Bd. 3, p. 11.

**) In letzterem Falle würden die drei Curven f einem Büschel angehören, vgl. p. 377, Anmk.

$$u_x = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma v_i f_i = 0$$

entsprechen also die Schnittpunkte von

$$v_y = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma u_i \varphi_i = 0 .$$

Die Anzahl derselben muss aber wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit unserer Beziehung zwischen E_x und E_y beide Male die gleiche sein; also ist $n = \nu$:

Die eindeutig umkehrbaren Substitutionen sind von derselben Ordnung wie ihre inversen.

Suchen wir den Punkt x, welcher dem Durchschnitte zweier in E_y gelegenen Geraden v und w entspricht, so haben wir aus den Gleichungen:

$$(7) \qquad v_y \equiv \Sigma v_i f_i = 0 , \quad w_y \equiv \Sigma w_i f_i = 0 , \quad u_x = 0$$

die x zu eliminiren. Das Endresultat, welches die u zum Grade n^2, die v, w je zum Grade n enthält, gibt die Gleichung des Productes der n^2 Schnittpunkte der Curven (7). Unter letzteren muss sich der gesuchte befinden, dessen Gleichung, wie wir wissen, durch $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ dargestellt wird, der Ausdruck $\Sigma u_i \varphi_i$ muss also, wenn wegen (7)

$$y_1 = v_2 w_3 - w_2 v_3 , \quad y_2 = v_3 w_1 - w_3 v_1 , \quad y_3 = v_1 w_2 - w_1 v_2$$

gesetzt wird, ein Factor des Eliminationsresultates sein. Aber auch $\Sigma u_i \varphi_i$ enthält dann die v, w je in der n^{ten} Ordnung; die übrigen Factoren jenes Resultates können daher v, w nicht mehr enthalten, und man hat den Satz:

Je zwei Curven des Systems $\Sigma v_i f_i = 0$ schneiden sich nur in einem beweglichen und in $n^2 - 1$ festen Punkten, „den Fundamentalpunkten der Transformation“. Dasselbe gilt natürlich für das System der Curven $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ in der andern Ebene. *Jede eindeutige Beziehung der beiden Ebenen auf einander ist daher eine* Cremona'*sche.*

Wir haben nunmehr die Lage der $n^2 - 1$ festen Punkte in den beiden Ebenen festzustellen. Da den Punkten einer Geraden $v_y = 0$ eindeutig die Punkte einer Curve $\Sigma v_i f_i = 0$ zugeordnet sind, so folgt nach einem früheren Theoreme (p. 459), dass diese Curve und die Gerade von demselben Geschlechte sind; d. h. *die Curven des eine eindeutige Transformation vermittelnden Netzes sind sämmtlich vom Geschlechte $p = 0$:* sie haben mehrfache Punkte, welche mit $\frac{1}{2}(n-1) \cdot (n-2)$ Doppel- bez. Rückkehrpunkten äquivalent sind. Wir wollen nun zeigen, *dass diese vielfachen Punkte sämmtlich in den festen Fundamentalpunkten liegen müssen.* Nehmen wir nämlich an, dass in ihnen die hinreichende Zahl noch nicht vereinigt wäre, so müsste jede Curve des doppelt unendlichen Netzes ausser den festen jedenfalls noch einen Doppelpunkt besitzen. Da es aber auch nur doppelt unendlich viele Punkte in einer Ebene gibt, so könnte dies nur in den beiden folgen-

den Fällen eintreten. *Entweder* müsste jeder Punkt ein solcher Doppelpunkt sein, d. h. die drei Gleichungen:

$$\Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0, \quad \Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_2} = 0, \quad \Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_3} = 0$$

müssten für jedes Werthsystem x_1, x_2, x_3 ein bestimmtes Werthsystem v_1, v_2, v_3 ergeben, im Ganzen also *zwei*fach unendlich viele solche Werthsysteme. Dann aber müssten sich die drei Gleichungen auf eine reduciren, d. h. es beständen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2} : \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} : \frac{\partial f_2}{\partial x_2} : \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} : \frac{\partial f_3}{\partial x_2} : \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

was der Voraussetzung widerspricht, dass f_1, f_2, f_3 keinen gemeinsamen Factor besitzen. *Oder* es gäbe *ein*fach unendlich viele Werthsysteme x, denen je ein Werthsystem v zugehört, nämlich diejenigen, für welche die Functionaldeterminante der f_i verschwindet; und es müsste jeder solche Punkt x Doppelpunkt für einfach unendlich viele Curven des Netzes sein. Dann würden aber für je zwei dieser einfach unendlich vielen Curven vier Schnittpunkte in x zusammenfallen, während wir voraussetzen, dass je zwei Curven f sich nur in einem beweglichen Punkte schneiden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Von den allen Curven des Netzes gemeinsamen Fundamentalpunkten wird nun im Allgemeinen jeder einer mehrfachen Anzahl von Schnittpunkten je zweier Curven äquivalent sein; es können jedoch höhere als $(n-1)$-fache Punkte nicht auftreten, denn sonst würden alle Curven φ_i zerfallen. Nehmen wir an, es seien α_1 einfache Punkte aller Curven, α_2 Doppelpunkte, α_3 dreifache, ... α_{n-1} $(n-1)$-fache Punkte darunter, so müssen dieselben zusammen ein System von n^2-1 Punkten darstellen, d. h. man muss haben:

$$(8) \qquad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1 .$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Curven φ sich in den Fundamentalpunkten nicht berühren und dass die Tangenten einer beliebigen Curve φ in den vielfachen Punkten getrennt verlaufen.

Eine zweite Relation für die Zahlen α_i folgt aus der Bemerkung, dass ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten immer mit $\frac{1}{2} k (k-1)$ Doppelpunkten äquivalent ist (p. 329). Da nämlich die Gesammtzahl der Singularitäten gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sein muss (d. i. $p = 0$), so haben wir:

$$(9) \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

und ferner durch Combination mit (8):

(10) $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+3) - 2.$*)

Für ein bestimmtes n erhält man aus diesen beiden Gleichungen je nach der Zahl ihrer brauchbaren ganzzahligen Lösungen eine bestimmte Reihe verschiedener Möglichkeiten für die Transformation, wofür von Cremona und Cayley Tabellen gegeben sind. Von $n = 1$ bis $n = 7$ hat man z. B.:

n	2	3	4	5	6	7
α_1	3	4	6, 3	8, 3, 0	10, 1, 4, 3	12, 2, 0, 5, 3
α_2		1	0, 3	0, 3, 6	0, 4, 1, 4	0, 3, 3, 0, 5
α_3			1, 0	0, 1, 0	0, 2, 3, 0	0, 2, 4, 3, 0
α_4				1, 0, 0	0, 0, 0, 1	0, 1, 0, 1, 0
α_5					1, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0, 1
α_6						1, 0, 0, 0, 0

Den in E_x gegebenen Fundamentalpunkten α entsprechen nun in E_y nicht einzelne, sondern je unendlich viele Punkte, wie schon das Beispiel der quadratischen Transformation zeigte. Betrachten wir einen Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung α_1. Sind ξ_i die Coordinaten dieses Punktes und setzen wir für den Augenblick

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = a_x^n,$$

so haben wir die identische Gleichung

$$a_\xi^{n-k+1} a_x^{k-1} \equiv 0,$$

während $a_\xi^{n-k} a_x^k = 0$ das Product der Tangenten im k-fachen Punkte darstellt. Ist ferner ζ irgend ein Punkt der Ebene, so sind $\xi_i + \lambda\zeta_i$ die Coordinaten eines in der Richtung $\overline{\xi\zeta}$ zu ξ unendlich benachbarten Punktes, wenn λ unendlich klein genommen wird. Für $f_i = a^{(i)}x^n$ haben wir also in erster Annäherung

(11) $$\varrho y_i = a^{(i)}{}_\xi^{n-k} a^{(i)}{}_\zeta^k$$

d. h. jeder von ξ ausgehenden Fortschreitungsrichtung entspricht in E_y *ein* ganz bestimmter Punkt; und, wenn ζ sich um ξ bewegt, so durchlaufen alle diese Punkte eine Curve k^{ter} Ordnung, deren Gleichung sich durch Elimination der ζ_i aus den Gleichungen (11) ergibt. Die Coordinaten eines Punktes dieser Curve sind durch (11) gleichzeitig als rationale Functionen eines Parameters dargestellt, denn wir

*) Da es nach p. 339 $\frac{1}{2}k(k+1)$ Bedingungen äquivalent ist, wenn eine Curve in einem bestimmten Punkte einen k-fachen Punkt haben soll, folgt aus dieser Gleichung, dass das Netz der Transformationscurven *allein* durch die gemeinsamen Punkte derselben bestimmt wird.

können zwischen den ξ_i noch eine beliebige, z. B. lineare Gleichung annehmen. Eine solche Darstellung ist aber, wie wir später sehen werden, nur bei Curven vom Geschlechte $p = 0$ möglich. Wir haben also den Satz:

Einem Fundamentalpunkte k^{ter} Ordnung in E_x entspricht eine Curve k^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p = 0$ in E_y.

Den k in ξ vereinigten Punkten einer Curve des Systems $\Sigma v_i f_i = 0$ entsprechen hiernach k einzelne Punkte der Geraden $v_y = 0$: die Schnittpunkte derselben mit der zu ξ gehörigen Curve k^{ter} Ordnung.

Die Beziehungen dieser sogenannten *Fundamentalcurven* zu den in E_y gelegenen Fundamentalpunkten des Systems $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ sind nun von besonderer Wichtigkeit. Zunächst müssen natürlich auch für diese die Gleichungen (8), (9) und (10) bestehen; d. h. wenn es in E_y β_1 einfache, β_2 zweifache . . . Punkte gibt, so ist:

$$\begin{aligned} \sum_i i^2 \beta_i &= n^2 - 1 \\ \sum_i i(i-1)\beta_i &= (n-1)(n-2) \\ \sum_i i(i+1)\beta_i &= n(n+3) - 4. \end{aligned}$$

Durch Combination der letzten beiden Gleichungen folgt ferner:

$$\sum_i i\beta_i = 3n - 3 = \sum_i i\alpha_i.$$

Legen wir auf die Werthe der Zahlen α_i, β_i kein besonderes Gewicht, und sind die Fundamentalpunkte in E_x der Grösse nach geordnet von den Ordnungen $r_1, r_2 \ldots$, so dass $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \ldots$, ebenso die Fundamentalpunkte in E_y von den Ordnungen $s_1, s_2 \ldots$, so dass $s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \ldots$, so können wir diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \sum_i r_i^2 &= n^2 - 1, & \sum_k s_k^2 &= n^2 - 1 \\ \sum_i r_i &= 3n - 3, & \sum_k s_k &= 3n - 3. \end{aligned}$$

Alsdann gilt ferner, wenn wir als k^{te} Fundamentalcurve von E_x die zum k^{ten} Fundamentalpunkte von E_y gehörige bezeichnen, der Satz: *Die k^{te} Fundamentalcurve von E_x geht ebenso oft durch den i^{ten} Fundamentalpunkt von E_x, wie die i^{te} Fundamentalcurve von E_y durch den k^{ten} Fundamentalpunkt von E_y geht.*

Sind nämlich zwei Fundamentalpunkte A, B gegeben, bez. in E_x und in E_y, und F_A, F_B die ihnen zugehörigen Fundamentalcurven, und geht F_A ϱ-mal durch B, so entsprechen diesen ϱ von B ausgehenden Fortschreitungsrichtungen ϱ Punkte auf der F_B; letztere müssen aber alle mit A zusammenfallen, da jedem Punkte der F_A eben wieder A entspricht. Also die F_B geht ebenfalls ϱ-mal durch A,

w. z. b. w. Aus diesem Beweise erkennt man ferner die Richtigkeit des Satzes:

Die Fundamentalcurven in E_x haben ihre vielfachen Punkte in den Fundamentalpunkten von E_x.

Wir bezeichnen nun mit α_{ik} die Zahl, welche aussagt, wie oft die i^{te} Fundamentalcurve in E_y durch den k^{ten} Fundamentalpunkt in E_y geht. Zwischen diesen Zahlen α_{ik} und den Zahlen r, s besteht dann eine Reihe von Relationen. Zunächst gibt der Satz, *dass die Fundamentalcurven vom Geschlechte Null sind,* die Gleichungen:

$$(13)\quad (r_i-1)(r_i-2)=\sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik}-1), \quad (s_k-1)(s_k-2)=\sum_i \alpha_{ik}(\alpha_{ik}-1).$$

Würden sich zwei Fundamentalcurven F_A, $F_{A'}$ derselben Ebene ausser in den Fundamentalpunkten dieser Ebene schneiden, so müssten dem Schnittpunkte die *beiden* Punkte A und A' der andern Ebene entsprechen; also:

Fundamentalcurven schneiden sich nur in Fundamentalpunkten, d. h. es ist:

$$(14)\quad r_i r_{i'} = \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{i'k}, \quad s_k s_{k'} = \sum_i \alpha_{ik}\alpha_{ik'}.$$

Wenn eine Curve des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ von einer Fundamentalcurve F_B ausser in den Fundamentalpunkten noch geschnitten wird, so müsste einem solchen Schnittpunkt zugleich ein Punkt der Linie $v_y = 0$ und der Punkt B entsprechen, was nicht möglich ist. Also:

Die Curven, welche Bilder von Geraden sind, werden von den Fundamentalcurven nur in Fundamentalpunkten geschnitten; es ist somit:

$$(15)\quad n r_i = \sum_k s_k \alpha_{ik}, \quad n s_k = \sum_i r_i \alpha_{ik}.$$

Schliesslich werden wir sogleich den Satz beweisen:

Die Anzahl aller Zweige von Fundamentalcurven, welche durch einen Fundamentalpunkt gehen, ist gleich dem Dreifachen der Ordnung des letzteren, vermindert um Eins; was die Gleichungen gibt:

$$(16)\quad 3r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik}, \quad 3s_k - 1 = \sum_i \alpha_{ik}.$$

Durch Combination der Gleichungen (16) mit (13) folgt ferner:

$$(17)\quad r_i^2 + 1 = \sum_k \alpha_{ik}^2, \quad s_k^2 + 1 = \sum_i \alpha_{ik}^2.$$

Zum Beweise des zuletzt erwähnten Satzes bemerken wir, dass *die Fundamentalcurven der Ebene E_y zusammen die* Jakobi'*sche Curve des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, und ebenso die Fundamentalcurven von E_x die* Jakobi'*sche Curve des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ bilden.*

Die Jakobi'sche Curve nämlich ist der Ort der neuen Doppelpunkte derjenigen Curven des Netzes, welche ausser in den Fundamentalpunkten noch einen weiteren Doppelpunkt haben. Dies ist

aber nur möglich, wenn die betreffenden Curven zerfallen, denn alle Curven des Netzes haben schon das Maximum der möglichen vielfachen Punkte. Solche zerfallende Curven können wir nun in der Ebene E_y auf folgende Weise construiren. Wir betrachten eine Gerade, welche durch einen Fundamentalpunkt von der Ordnung r in E_x geht. Ihr entspricht in E_y eine C_n des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, welche in die zu dem Fundamentalpunkte gehörige Fundamentalcurve C_r und in eine C_{n-r} zerfallen muss. Dreht sich nun die Gerade in E_x um den Punkt r, so bleibt jene C_r fest, während die C_{n-r} sich ändert. Letztere wird dabei von der C_r in einem beweglichen Punkte, einem neuen Doppelpunkte der betreffenden $C_{(n-r)+r}$, geschnitten werden; und also ist die C_r ein Theil des Ortes dieser Doppelpunkte, d. i. ein Theil der Jakobi'schen Curve. Umgekehrt entspricht auch *jeder* zerfallenden Curve des Netzes der φ eine Gerade durch einen Fundamentalpunkt in E_x. Einer solchen Curve in E_y nämlich entspricht jedenfalls eindeutig eine Gerade; zerfällt nun die Curve, so müsste auch die Gerade zerfallen, was nicht möglich ist. Dem einen Theile der zerfallenden Curve muss daher ein einzelner Punkt der Geraden, d. i. ein Fundamentalpunkt entsprechen; q. e. d. Nun haben wir aber früher gesehen (p. 383), dass die Jakobi'sche Curve in einem Punkte einen $(3r-1)$-fachen Punkt hat, wenn daselbst die Curven des Netzes alle einen r-fachen Punkt haben; und damit ist die Formel (16) bewiesen. —

Mittelst der aufgestellten Gleichungen finden wir nun weitere Beziehungen zwischen den Fundamentalpunkten in den beiden Ebenen. Wir bezeichnen mit ϱ die Anzahl der Punkte r, mit σ die der Punkte s, d. h. wir setzen

$$\varrho = \Sigma \alpha_i, \quad \sigma = \Sigma \beta_i .$$

Summiren wir nun die eine Seite der Gleichungen (16) nach i, die andere nach k, wobei die rechten Theile einander gleich werden, so folgt:

$$3 \sum_i r_i - \varrho = 3 \sum_k s_k - \sigma .$$

Aber nach (12) ist $\sum_i r_i = \sum_k s_k$, und daher $\varrho = \sigma$: *Die Zahl der Fundamentalpunkte in den beiden Ebenen ist dieselbe, es ist* $\Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i$. —

Wir wollen auch noch weiter zeigen, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ von den Zahlen $\beta_1, \beta_2 \ldots$ überhaupt nur der Anordnung, nicht der Grösse nach verschieden sind, dass es also zu jedem α_i ein ihm gleiches β_k geben muss.*) Wir führen diesen längeren Beweis um so mehr

*) Den Beweis dieses von Cremona schon aufgestellten Satzes gab Clebsch: Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen, Math. Annalen, Bd. 4, p. 490.

an, als er allein auf Constantenzählen und gewissen Symmetriebetrachtungen beruht und so an sich von Interesse ist.

Wir können den Werth für das Quadrat der aus den Zahlen α_{ik} zu bildenden Determinante Δ mittelst der Gleichungen (14) und (17) angeben, denn in diesen stehen rechts unmittelbar die einzelnen Glieder dieses Quadrates, d. i. diejenigen Ausdrücke, welche als Glieder in der ϱ ($= \sigma$)-reihigen Determinante auftreten, die aus Δ durch Multiplication mit sich selbst nach dem Determinantenmultiplicationssatze hervorgeht. Der Werth derselben (Δ^2) ist demnach unter Benutzung von (12) gleich den beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & \dots \\ r_2 r_1 & r_2^2+1 & r_2 r_3 & \dots \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2+1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_i r_i^2 = n^2$$

$$= \begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 & \dots \\ s_2 s_1 & s_2^2+1 & s_2 s_3 & \dots \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2+1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_k s_k^2 = n^2 .$$

Der absolute Werth der Determinante der α_{ik} ist also gleich n:

$$\Delta = \pm n . \tag{18}$$

Das Vorzeichen bleibt unbestimmt, weil die Ordnung der Reihen in der Determinante durch die Anordnung der r, s nach ihrer Grösse nicht völlig bestimmt zu sein braucht. Unter denselben können nämlich gleiche sein, deren Vertauschung dann das Vorzeichen von Δ ändern würde; und dies ist auch bei den bisher bekannten Beispielen immer der Fall.

Wir denken uns nun die Determinante Δ der α_{ik} durch horizontale und verticale Linien getheilt, so dass in jedem der entstehenden Rechtecke nur Horizontalreihen vorkommen, welche zu *gleichen* r, und nur Verticalreihen, welche zu *gleichen* s gehören.

Betrachten wir eins dieser Rechtecke. Zu den in ihm vorkommenden*) r gehört eine Gruppe von Fundamentalpunkten in E_x und diese liefert für die Transformation eine gewisse Zahl von Constanten, welche bei der Bildung des Curvennetzes $\Sigma v_i f_i = 0$ in E_x voll-

*) Die Abhängigkeit zwischen den zu einem α_{ik} gehörigen r_i, s_k wird durch obige Formeln vermittelt. Dieselben können wir mit Hülfe von (18) noch in einfacherer Gestalt schreiben. Durch Auflösung von (15) nach den r, s ergibt sich nämlich:

$$\pm r_i = \sum_k s_k \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}, \qquad \pm s_k = \sum_i r_i \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}},$$

kommen symmetrisch benutzt werden.*) Dasselbe gilt für die in dem Rechtecke vorkommenden s: die entsprechende Gruppe von Fundamentalpunkten der Ebene E_y muss von jenen Constanten der zu r gehörigen Gruppe in E_x ebenfalls symmetrisch abhängen, und umgekehrt: *Zwischen den r und s muss völlige Symmetrie in dem Rechtecke herrschen.* Die in einer Verticalreihe unseres Rechtecks stehenden α müssen demnach in den verschiedenen Verticalreihen desselben sich wiederholen, und zwar in allen Permutationen, und jede Permutation *gleich oft*. Sei k die Zahl der Elemente einer Verticalreihe des Rechtecks, p die Zahl ihrer Permutationen, l die Zahl der Elemente in einer Horizontalreihe, q die Zahl ihrer Permutationen. Man muss dann haben:

$$l = \mu p, \tag{19}$$

wo μ eine ganze Zahl; und ebenso folgt, wenn man in Vorstehendem die Rolle der Horizontal- und Verticalreihen vertauscht:

$$k = \nu q; \tag{20}$$

wo ν eine ganze Zahl. Nun ist die Zahl der Permutationen immer grösser, als die der Elemente, ausgenommen

1) wenn alle Elemente gleich sind, wo die Zahl der Permutationen gleich 1 ist;

2) wenn alle Elemente bis auf eines einander gleich sind, wo dann die Zahl der Permutationen gleich der Zahl der Elemente.

Schliessen wir diese beiden Fälle vorläufig aus, so sind die Gleichungen (19), (20) unmöglich, denn sie würden gleichzeitig fordern, dass $k > l$ und $l > k$. Im Falle 1) haben wir dagegen $p = 1$, $q = 1$, also k und l beliebig; im Falle 2) aber wird $p = k$, $q = l$, also $l = \mu k$, $k = \nu l$. Demnach muss $\mu = \nu = 1$, $k = l$ sein: Das Rechteck geht in ein Quadrat über. Mithin gilt der Satz: *In den Recht-*

---

und unter Benutzung dieser Gleichungen aus (14) und (17) durch Auflösung nach den α_{ik} (bei constantem i' bez. k'):

$$r_i s_k = n\,\alpha_{ik} \mp \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}.$$

*) Eine Cremona'sche Transformation ist überhaupt durch eine gewisse Anzahl von absoluten Constanten charakterisirt, die allein von den Fundamentalpunkten abhängen können, da durch diese das Netz der φ völlig bestimmt ist. Betrachtet man projectivische Umformungen beider Ebenen (abhängig von 8 Constanten) als unwesentlich, so kann man ohne den Charakter der Transformation zu ändern, in jeder Ebene noch 4 Fundamentalpunkten beliebige Lagen geben und dann als eigentliche Constante der Transformation die $2\varrho - 8$ Doppelverhältnisse der Strahlbüschel auffassen, welche von zweien solcher 4 Punkte je nach den 3 anderen und einem 5ten Fundamentalpunkte gerichtet sind. Es sind dies *absolute Invarianten* der Transformation, insofern sie sich durch projectivische Umformung nicht mehr ändern.

ecken von Δ, welche durch die Gruppen gleicher r und gleicher s abgetheilt werden, sind immer die Elemente α einander gleich; nur in den Fällen, wo das Rechteck ein Quadrat ist, kann in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein von den übrigen verschiedenes Glied vorkommen. Diese Glieder sind dann unter sich gleich, und mit ihnen lässt sich durch Umstellen der Reihen die eine Diagonale des Quadrates ausfüllen.

Ferner kann man zeigen, dass in dem Schema der ganzen Determinante niemals zwei solche Quadrate horizontal oder vertical neben einander stehen können. Sonst nämlich würden wir in zwei Quadraten von gleicher Grösse die abweichenden Elemente an gewissen Stellen finden, die dadurch auf einander bezogen erschienen. Es würde also eine gewisse Zuordnung der r bez. s der dem einen Quadrate zugehörigen Gruppe von Fundamentalpunkten gegenüber den r und s der dem andern Quadrate zugehörigen Gruppe hervorgerufen. Da eine solche Zuordnung wegen der durchaus selbständig innerhalb jeder Gruppe auftretenden Symmetrie nicht existiren kann, so sieht man den Satz ein:

Jeder Gruppe von r kann höchstens eine Gruppe von s entsprechen, welche eine gleiche Zahl von Elementen enthält, und welche mit jener zusammen auf ein Quadrat von α_{ik} innerhalb Δ führt, dessen Elemente nicht sämmtlich gleich sind.

Aber andererseits muss auch *wenigstens eine* solche Gruppe existiren, denn sonst würden der Gruppe der r lauter Rechtecke entsprechen, welche gleiche Elemente enthielten, und die Determinante der α würde verschwinden, während doch ihr Werth nach (18) gleich $\pm n$ ist. Nur wenn die Gruppe der r sich auf ein *einziges r* reducirt, trifft dieser Schluss nicht zu. Jeder Gruppe von r, welche mehr als ein r enthält, entspricht also irgend eine gleich grosse Gruppe von s und umgekehrt. Lassen wir diese bei Seite, so bleiben nur noch einzelne r, bez. s übrig, welche sämmtlich unter sich verschieden sind; aber die Zahl dieser r muss der Zahl dieser s gleich sein, und sie bilden daher wieder ein System von Gruppenpaaren gleicher Grösse. Damit ist endlich unsere Behauptung bewiesen, d. h. der Satz:

Die Zahlen α_i, welche angeben, wie viele r jedesmal einander gleich sind, und die Zahlen β_i, welche angeben, wie viele s jedesmal einander gleich, sind höchstens der Anordnung, nicht der Grösse nach verschieden.

So haben wir z. B. in obiger Tabelle für $n = 6$ eine Transformation:

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0$$

und eine andere:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0.$$

Von beiden wird nach unserem Satze die eine die inverse Transfor-

mation der andern sein, wenn nicht etwa in einem besonderen Falle jede zu sich selbst invers ist. Letzteres ist für die Transformationen von $n=2$ bis $n=5$ zufolge der Tabelle immer der Fall; für diese Transformationen niedrigster Ordnung sagt also unser Satz nichts aus. Ebenso wie bei $n=6$ verhält es sich mit den beiden letzten Verticalreihen der Tabelle für $n=7$. —

Von ganz fundamentaler Bedeutung für diese Theorie ist endlich der folgende Satz:

Die Summe der Ordnungszahlen für die drei höchsten Fundamentalpunkte einer Transformation n^{ter} Ordnung ist grösser als n; d. h. es ist:

$$r_1 + r_2 + r_3 > n,$$

wo nach unserer früheren Annahme $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq r_4 \ldots$

Wir haben nämlich wegen (12) die Gleichungen:

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} \sum_i{}' r_i^2 + r_3^2 &= n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2, \\ \sum_i{}' r_i + r_3 &= 3n - 3 - r_1 - r_2, \end{aligned}$$

wo sich das Summenzeichen Σ' auf alle Indices i ausgenommen $i = r_1$, r_2, r_3 bezieht. Wir wollen zeigen, dass *unmöglich*

$$n \geqq r_1 + r_2 + r_3$$

sein kann.

Multipliciren wir die zweite der Gleichungen (21) mit r_3 und subtrahiren von ihr die erste, so kommt:

$$r_3 \sum_i{}' r_i - \sum_i{}' r_i^2 = r_3(3n - 3 - r_1 - r_2) - n^2 + 1 + r_1^2 + r_2^2.$$

Hier steht aber links ein positiver Ausdruck, da $r_3 \geqq r_4 \ldots$; derselbe ist nur Null für $r_3 = r_4 = r_5 \ldots$ Wir haben also rechts

$$r_3(3n - 3 - r_1 - r_2) \geqq n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2,$$

Nehmen wir nun an, es sei $n \geqq r_1 + r_2 + r_3$, so erhalten wir:

$$r_3(3r_3 - 3 + 2r_1 + 2r_2) \geqq r_3^2 + 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) - 1,$$

oder:

$$2r_3^2 - 2r_1 r_2 - 3r_3 + 1 \geqq 0;$$

und dies ist nicht möglich, denn es ist der Annahme nach $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ und $3r_3 > 1$, da r_3 mindestens gleich 1 sein muss. Damit ist der gewünschte Beweis geliefert.

Dieser Satz über die Multiplicität der drei höchsten Fundamentalpunkte erlangt so grosse Wichtigkeit durch die folgende aus ihm sich ergebende Folgerung. Wir unterwerfen die Ebene E_x einer quadratischen Transformation, deren drei Fundamentalpunkte mit den Punkten r_1, r_2, r_3 zusammenfallen. Durch dieselben geht jede Curve n^{ter} Ordnung des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ bez. r_1-, r_2-, r_3-mal hindurch; einer jeden entspricht also nach der oben für quadratische Transformationen ge-

gebenen Regel eine Curve von der Ordnung $2n - r_1 - r_2 - r_3$ in der neuen Ebene E_z; und alle diese Curven bilden wieder ein Netz mit einem beweglichen Schnittpunkte, denn ihnen entsprechen durch Vermittlung der Ebene E_x eindeutig die Geraden der Ebene E_y. Die directe Beziehung zwischen E_y und E_z wird sonach durch Functionen der Ordnung $2n - r_1 - r_2 - r_3$ hergestellt. Nun ist aber $r_1 + r_2 + r_3 > n$, also jedenfalls

$$2n - r_1 - r_2 - r_3 < n;$$

d. h. die ursprüngliche Transformation ist auf eine andere von niedrigerer Ordnung zurückgeführt. Mit dieser kann man weiter in derselben Weise verfahren, bis man schliesslich auf eine quadratische oder lineare Transformation zurückkommt; und umgekehrt muss man natürlich durch wiederholte Anwendung quadratischer Transformationen wieder auf die ursprüngliche geführt werden. Wir haben also den Satz:

Jede Cremona'*sche Transformation kann durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen ersetzt werden, indem man die drei Fundamentalpunkte einer solchen je in die höchsten Basispunkte des Systems der Transformationscurven hineinlegt.**)

Ist z. B. die Transformation 4[ter] Ordnung mit

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

gegeben, so legen wir die 3 Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation in den dreifachen und in zwei der einfachen Punkte. Dadurch kommen wir auf Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, welcher dadurch entsteht, dass die Verbindungslinie der beiden einfachen Fundamentalpunkte (lineare Fundamentalcurve der quadratischen Transformation) von den C_4 noch in zwei Punkten getroffen wird. Wir haben also eine Transformation dritter Ordnung mit $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$. Benutzen wir nun zwei Punkte α_1 und den Punkt α_2 zu einer neuen quadratischen Transformation, so erhalten wir Curven 2[ter] Ordnung mit drei einfachen Fundamentalpunkten, wie es sein sollte. —

Wie wir früher die Curven hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersuchten, welche gegenüber beliebigen *linearen* Transformationen ungeändert bleiben, so kann man, wie schon oben hervorgehoben, auch nach solchen Eigenschaften der Curven und überhaupt der ebenen

---

*) Dieser Satz wurde ziemlich gleichzeitig von Clifford (ohne Beweis, vgl. den angeführten Aufsatz von Cayley), Nöther (Math. Annalen, Bd. 3, p. 164) und Rosanes (a. a. O.) gefunden. Die Ungleichung $n < r_1 + r_2 + r_3$ und somit auch dieser Satz von der Zusammensetzbarkeit der Transformationen gilt auch noch, wenn mehrere Fundamentalpunkte einander unendlich nahe rücken, was im Texte nicht berücksichtigt wurde; vgl. Nöther, Math. Annalen, Bd. 5, p. 635.

Gebilde fragen, welche bei beliebigen Cremona'schen Transformationen erhalten bleiben, und andererseits nach der Art, wie solche Eigenschaften durch die Transformation beeinflusst werden. Dabei kann man sich wegen unserer letzten Ueberlegungen immer auf die Betrachtung quadratischer Transformationen beschränken. Wie bei einer solchen die Singularitäten einer einzelnen Curve geändert werden, haben wir schon früher erwähnt, wenigstens insoweit diese Aenderungen durch die Fundamentalpunkte der Transformation veranlasst werden (p. 477). Andere Aenderungen, als die dort erwähnten treten aber auch nicht ein. *Hat nämlich die C_n ausserhalb der Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt P in E_x, so entspricht diesem auch ein Doppelpunkt P' der zugehörigen C' in E_y.* Dies folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit unserer Transformation, denn in Folge derselben muss jeder von P aus auf der C_n möglichen Fortschreitungsrichtung *eine* von P' ausgehende Fortschreitungsrichtung auf der C' entsprechen. Analoges gilt für vielfache Punkte. — Insbesondere tritt hier nun wieder *der Satz von der Erhaltung des Geschlechts* in den Vordergrund (p. 459), den man auch für quadratische Transformationen leicht direct bestätigt. Einer C_m in E_x möge eine C_μ in E_y entsprechen. Dann ist $\mu = 2m - k_1 - k_2 - k_3$, wenn die C_m bez. k_1-, k_2-, k_3-mal durch die 3 Fundamentalpunkte in E_x geht; und die C_μ geht bez. $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\varkappa_3$-mal durch die Fundamentalpunkte von E_y, wenn:

$$\varkappa_1 = m - k_2 - k_3, \quad \varkappa_2 = m - k_3 - k_1, \quad \varkappa_3 = m - k_1 - k_2.$$

Aus diesen Relationen ergibt sich direct die Identität:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} k_i(k_i-1) = \tfrac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} \varkappa_i(\varkappa_i-1).$$

Von diesen Ausdrücken unterscheidet sich aber das Geschlecht beider Curven nur um eine Zahl, welche allein von den nicht in Fundamentalpunkten liegenden vielfachen Punkten derselben abhängt; und die letzteren sind für beide Curven dieselben. Folglich haben auch beide Curven dasselbe Geschlecht, q. e. d.

Man kann übrigens auch leicht den Einfluss einer Transformation n^{ter} Ordnung auf die C_m angeben; man gelangt mittelst der oben entwickelten Principien zu folgendem Satze:

Einer Curve C_m in E_x, welche l_i-mal durch einen Fundamentalpunkt r_i geht, entspricht eine Curve C_μ, wo $\mu = nm - \sum_i r_i l_i$, welche λ_k-mal durch jeden Fundamentalpunkt s_k geht, wo $\lambda_k = m s_k - \sum_i r_i \alpha_{ik}$.

Mittelst dieser Formeln könnte man ebenfalls die Gleichheit des Geschlechts bestätigen; doch gehen wir hierauf nicht ein, da wir später bei Betrachtung der nur für einzelne Curven eindeutigen Trans-

formationen ähnliche Verhältnisse ohnehin näher besprechen müssen. — Um Beispiele für andere Eigenschaften zu geben, welche bei Cremona'schen Transformationen erhalten bleiben, sei bemerkt, dass je zwei sich berührende Curven nothwendig wieder in zwei sich berührende (und zwar ebenso vielpunktig) Curven übergehen, oder mit andern Worten, dass einer Punktgruppe der einen Curve, welche einen γ-fachen Punkt enthält, auf der transformirten Curve wieder eine Punktgruppe mit einem γ-fachen Punkte entspricht. Hieraus folgt dann z. B., dass die zu einer auf einer Curve f gegebenen Correspondenz gehörige Coincidenzcurve (p. 453) nicht nur gegenüber linearen, sondern auch gegenüber Cremona'schen Transformationen Invarianteneigenschaft hat.*)

Wir betrachten im Folgenden noch eine *Anwendung* der hier entwickelten Theorie. Die Bemerkung nämlich, dass jedem vielfachen Punkte einer Curve durch eine Cremona'sche Transformation, sobald er Fundamentalpunkt derselben ist, einzelne getrennte Punkte der neuen Curve entsprechen, kann man dazu benutzen, um eine *gegebene Curve mit beliebigen singulären Punkten in eine andere zu transformiren, welche nur gewöhnliche vielfache Punkte enthält* (d. i. vielfache Punkte mit getrennten Tangenten). Durch solche Transformationen wird dann – und das ist das Wichtige — die Singularität des betrachteten vielfachen Punktes von f in analoger Weise in verschiedene *Klassen* zerlegt, wie wir es früher an der Hand der Methoden von Newton, Cramer und Puiseux kennen gelernt haben.**) Den Unterschied beider Methoden werden wir später noch kurz charakterisiren. — Wenn wir bei den betreffenden Untersuchungen nur quadratische Transformationen anwenden, so liegt darin keine Specialisirung, denn aus solchen lassen sich ja alle anderen Cremona'schen Transformationen zusammensetzen (p. 489).

Zur näheren Discussion dieser Verhältnisse nehmen wir nun *erstens* an, dass die betrachtete Curve C in P einen i-fachen Punkt mit lauter getrennten Tangenten besitzt. Wenden wir dann auf C die quadratische Transformation:

$$(22) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

an, deren einer Fundamentalpunkt ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) in P liegen möge, so entsprechen dem Punkte P von C auf der neuen Curve C' i einzelne Punkte der Geraden $y_3 = 0$ (vgl. p. 477), und damit ist die Singularität von P erschöpft.

*) Vgl. die Beispiele für solche Curven auf p 447, 448, 451 und p. 460 Anmk.

**) Vgl. im Folgenden Nöther: Göttinger Nachrichten, 1871, p. 267, sowie einen demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Aufsatz desselben.

Zweitens mögen alle i Zweige von C in P zusammenfallen, jedoch so, dass je zwei Zweige sich nur einfach berühren, also nur in Grössen erster Ordnung der Kleinheit übereinstimmen. Dann ist, wenn C von der n^{ten} Ordnung

$$C \equiv (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2)^i x_3^{n-i} + f_{i+1}(x_1, x_2) x_3^{n-i-1} + \ldots + f_n(x_1, x_2) = 0$$

die Gleichung unserer Curve; und durch jene quadratische Transformation geht sie über in:

$$C' \equiv (\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1)^i y_1^{n-i} y_2^{n-i} + f_{i+1}(y_2, y_1) y_1^{n-i-1} y_2^{n-i-1} y_3 + \ldots = 0.$$

Diese Curve hat, entsprechend dem Punkte P von C, mit $y_3 = 0$ in dem Schnittpunkte der Linie $\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1 = 0$ i consecutive Punkte gemein, *ohne* daselbst jedoch einen *vielfachen* Punkt zu besitzen; eine weitere Trennung dieser benachbarten Punkte ist daher durch keine rationale Transformation mehr möglich. Wir behaupten nun, dass *in diesem Falle die Singularität von C in P aufzufassen ist als entstanden durch Zusammenrücken von $\frac{1}{2} i(i-1)$ Doppelpunkten, unter denen $i - 1$ Rückkehrpunkte enthalten sind*, oder mit anderen Worten, dass *die Reduction, welche die Klasse $n(n-1)$ von C in Folge der Singularität P erleidet, gleich $i(i-1) + i - 1$ zu setzen ist.* Zum Beweise bemerken wir, dass den Linien durch den Punkt Q ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) in der Ebene E_y die geraden Linien durch den Punkt Q' ($y_1 = 0$, $y_3 = 0$) entsprechen, während im Allgemeinen einer Geraden in E_x ein Kegelschnitt in E_y zugeordnet ist, und umgekehrt. Da nun benachbarte Punkte von C in benachbarte Punkte von C' übergehen, so muss die Zahl der Tangenten, welche man von Q an C legen kann, gleich der Zahl der von Q' an C' zu legenden sein, wobei natürlich die in Q' selbst berührenden Tangenten nicht mitzuzählen sind. Man bestätigt diese Behauptung auch leicht direct mit Hülfe der obigen Sätze (p. 477). Die Curve C nämlich geht i-mal durch den Fundamentalpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, hingegen nicht durch die beiden andern Fundamentalpunkte; die Curve C' ist also von der Ordnung $2n - i$ und hat im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ einen n-fachen, dagegen in den beiden andern Fundamentalpunkten je einen $(n-i)$-fachen Punkt, alle mit getrennten Tangenten. Bezeichnet nun δ den Einfluss, welchen alle andern singulären Punkte von C' (die dann ebenso bei C vorkommen) auf die Klasse von C' haben, so wird letztere:

$$k' = (2n-i)(2n-i-1) - \delta - n(n-1) - 2(n-i)(n-i-1).$$

Wegen besagter Vielfachheit des Punktes Q' ist die Zahl der von ihm aus noch an C' gehenden Tangenten gleich

$$k' - 2(n-i) = n(n-1) - \delta - i(i-1).$$

Diese Zahl aber ist gleich der Klasse von C, vermehrt um die Zahl der in P vereinigten Rückkehrpunkte, also, da P nicht auf C ange-

nommen wurde, in der That gleich der Zahl der durch P gehenden Geraden, welche C in zwei benachbarten Punkten treffen; womit unsere Zwischenbehauptung bewiesen ist. — Unter jenen $k' - 2(n - i)$ von Q' ausgehenden Tangenten ist nun die Linie $y_3 = 0$ $(i - 1)$-fach enthalten, denn auf ihr liegen i benachbarte Punkte von C'. Letztere aber sind aus dem Punkte P durch die Transformation hervorgegangen; also zählt die Linie $Q'P'$ ebenfalls $(i - 1)$-fach als Tangente von C, d. h. *die Klasse von C ist:*

$$k = n(n-1) - \delta - i(i-1) - (i-1), \text{ q. e. d.}$$

Drittens nehmen wir an, dass der Coëfficient von x_3^{n-i} in C den Factor $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ zur l^{ten} Potenz enthalte $(l \leqq i)$; die übrigen Factoren von x_3^{n-i} können unter einander auch wieder in verschiedene mehrwerthige Gruppen zerfallen, was dann einer weiteren ganz analogen Untersuchung bedarf; jedenfalls ist die folgende Untersuchung des Verhaltens von C gegen jenen l-fachen Factor davon unabhängig. Ferner möge der Factor $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ in jedem Factor $f_{i+r}(x_1, x_2)$ mindestens $(l_1 - r)$-mal enthalten sein, so dass also in C' für $y_3 = 0$ und $\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1 = 0$ alle späteren Glieder l_1-fach Null werden. Die neue Curve C' wird dann wieder von $y_3 = 0$ in i zusammenfallenden Punkten getroffen; aber diese liegen nicht wieder sämmtlich einander benachbart auf demselben Curvenzweige von C'. Vielmehr hat jetzt C' in dem Schnittpunkte von $y_3 = 0$ mit $\varkappa_2 y_1 + \varkappa_1 y_2 = 0$ einen l_1-fachen Punkt, dessen Zweige die Linie $y_3 = 0$ im Allgemeinen nicht sämmtlich berühren werden. Durch diesen vielfachen Punkt werden l_1 der l in ihm liegenden Schnittpunkte von $y_3 = 0$ mit C' absorbirt, und es bleiben nur noch $l - l_1$ einander benachbarte. Ganz ebenso, wie in vorstehendem Falle, ist daher der Punkt P von C, so weit es auf die von uns betrachteten l Zweige ankommt, äquivalent mit $\frac{1}{2} i(i-1)$ Doppelpunkten, unter denen $l - l_1$ Rückkehrpunkte sind, und mit $\frac{1}{2} l_1 (l_1 - 1)$ weiteren Doppelpunkten, unter denen ebenfalls noch Rückkehrpunkte vorkommen können, was einer weiteren Untersuchung bedarf. Die letztere geschieht ganz ebenso, indem man die Curve C' wieder durch eine quadratische Transformation umformt, deren einer Fundamentalpunkt in dem l_1-fachen Punkte liegt; u. s. w. Geometrisch hat man sich die Singularität von P so zu denken, dass von den i Zweigen l zusammenfallen, und dass von diesen wieder l_1 noch einen weiteren benachbarten Punkt gemein haben, dass also *an den i-fachen Punkt ein l_1-facher Punkt unendlich nahe herangerückt ist, und zwar in einer Richtung, in welche l Tangenten des i-fachen Punktes zusammenfallen.* In der That muss ja nach unsern obigen Sätzen (p. 489 f.) aus einem nicht in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ selbst, sondern nur dazu benachbart gelegenen l_1-fachen Punkte von C wieder ein l_1-facher Punkt von C' entstehen; wie es bei unserer letzten Transformation eintrat.

Wir erläutern das Vorstehende an dem folgenden Beispiele. Es sei eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(2n-2)$-fachem Punkte in P ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) gegeben durch die Gleichung:

$$C = x_3^2 \, [f_{n-1}(x_1, x_2)]^2 + f_{2n}(x_1, x_2) = 0,$$

wo wieder der untere Index an f die Ordnung der beiden in x_1, x_2 homogenen Functionen f anzeigt. Durch Anwendung der Transformation (22) erhalten wir die Curve:

$$C' = y_1^2 y_2^2 \, [f_{n-1}(y_2, y_1)]^2 + f_{2n}(y_2, y_1) \cdot y_3^2 = 0.$$

Dem singulären Punkte von C entsprechen auf C' die $n-1$ *gewöhnlichen Doppelpunkte*, bestimmt durch $y_3^2 = 0$ und $f_{n-1}(y_2, y_1) = 0$. Es bilden sich also zuerst $n-1$ Klassen, von denen jede sodann in zwei Punkte zerfällt, d. h. C hat in P einen $(2n-2)$-fachen Punkt mit $n-1$ getrennten Tangenten, in deren jeder noch ein Doppelpunkt zu P benachbart liegt, d. h. in dem Punkte P liegen $n-1$ Selbstberührungspunkte von C (vgl. p. 334). Die Zahl der getrennten Doppelpunkte, mit welchen P äquivalent ist, wird also schliesslich gleich

$$\tfrac{1}{2}(2n-2)(2n-3) + n - 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(2n-1).$$

Wie man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich nach einer *endlichen* Anzahl von Operationen zu einer Curve mit nur einfachen, einander benachbarten oder von einander getrennten Punkten an Stelle der Singularität P kommt, wird aus Vorstehendem klar sein; in der That können sich zwei Curvenzweige ja nur in einer *endlichen* Anzahl von benachbarten Punkten treffen. Um uns nun einfacher ausdrücken zu können, wollen wir das Ausarten eines Doppelpunktes in einen Rückkehrpunkt dadurch bezeichnen, dass *an den Doppelpunkt ein Verzweigungspunkt herangerückt sei.**) Alsdann haben wir folgenden Satz:

Jeder i-fache Punkt einer algebraischen Curve kann definirt werden als Grenzfall eines gewöhnlichen i-fachen Punktes, zu dem eine in obiger Weise zu bestimmende Zahl von Verzweigungspunkten treten, und an welchen überdies eine Reihe von l_1-, l_2-, . . . fachen Punkten (wo $l_1 + l_2 + \ldots \leq i$), jeder wieder eine gewisse Zahl von Verzweigungspunkten enthaltend, unendlich nahe heranrücken.

*) Diese Bezeichnungsweise ist aus der Theorie der Riemann'schen Flächen herübergenommen. Die Verzweigungspunkte derselben entsprechen nämlich den Berührungspunkten der von dem unendlich fernen Punkte der Y-Axe aus an die Curve zu legenden eigentlichen Tangenten. Von letzteren aber rückt (nach den Plücker'schen Formeln) einer an einen Doppelpunkt unendlich nahe heran, wenn ein solcher in einen Rückkehrpunkt übergeht (so dass jeder Rückkehrpunkt zu einem Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche Veranlassung gibt).

Die Reduction, welche ein solcher Punkt an der Klasse von C verursacht, ist dann gleich

$$i(i-1) + l_1(l_1-1) + l_2(l_2-1) + \ldots + r,$$

wenn r die *Gesammtzahl* der in ihm liegenden Verzweigungspunkte bedeutet.

Um auch den *Einfluss von P auf das Geschlecht* der Curve C zu bestimmen, betrachten wir wieder die einfachsten Fälle. Wenn alle i Zweige von P getrennt verlaufen, so verursacht P eine Reduction um $\frac{1}{2} i(i-1)$. Fallen einige Zweige zusammen, ohne dass eine weitere Besonderheit hinzutritt, so transformiren wir C in obiger Weise in eine Curve C'; das Geschlecht der letzteren ist dann (vgl. p. 430):

$$p' = \tfrac{1}{2}(2n-i-1)(2n-i-2) - \tfrac{1}{2}n(n-1) - (n-i)(n-i-1) - \vartheta,$$

wenn ϑ die durch andere singuläre Punkte, welche auf C und C' gleichmässig vorkommen, hervorgerufene Reduction bedeutet. Diese Zahl ist aber gleich

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}i(i-1) - \vartheta.$$

Die letztere Zahl werden wir auch als das Geschlecht von C bezeichnen; dasselbe ist dann seiner Definition nach bei eindeutiger Transformation constant. — Für den allgemeinen Fall, der ja eine Combination der beiden genannten ist, folgt hieraus der Satz:

Die in P oder unendlich benachbart zu P liegenden Verzweigungspunkte haben auf die Bestimmung des Geschlechtes von C keinen Einfluss.

Man kann dies auch direct durch eine Grenzbetrachtung aus unserer Definition der Singularität von P erkennen, und so *direct* ohne Benutzung einer Curve C' das Geschlecht von C definiren. In der That ist ja der bei einem Rückkehrpunkte zum Doppelpunkte hinzutretende Verzweigungspunkt ohne Einfluss auf das Geschlecht; und der Punkt P ist eine Vereinigung verschiedener einzelner Doppelpunkte mit Verzweigungspunkten. Berechnet man nun das Geschlecht von C auf Grund dieser Bemerkung, so kommt man, wie leicht zu übersehen, zu demselben Werthe, welchen das Geschlecht von C' ergab: *Beide Definitionen stimmen also überein.* Mittelst dieser Ueberlegung ergibt sich auch, dass *für das so bestimmte Geschlecht von C ganz dieselben geometrischen Sätze gelten, wie für das Geschlecht einer Curve mit gewöhnlichen vielfachen Punkten* (vgl. p. 425—474). —

Wir machen schliesslich auf den Unterschied zwischen der hier gebrauchten Methode von Nöther und der früher zur Discussion eines singulären Punktes benutzten Cramer'schen Regel aufmerksam (p. 330, ff.). Zunächst lehrt ein Rückblick auf letztere sofort, dass auch sie eigentlich Transformationen der vorgelegten Curve benutzt. Diese sind aber im Allgemeinen nur eindeutig für die Nähe des be-

trachteten Punktes P, nicht für die ganze Ebene (z. B. die Transformation $x = x'^{\beta}$, $y = y'^{\alpha}$ auf p. 332); man beherrscht daher das Verhältniss von P zu der Curve C nicht so unmittelbar und erhält nicht so leicht Aufschluss über den Einfluss von P auf die Klasse von C, wie dies bei eindeutiger Transformation möglich ist. Die successive Trennung der durch P gehenden Zweige in verschiedene Klassen ist jedoch bei beiden Methoden dieselbe, insofern man jedesmal alle Zweige zu einer Klasse zusammenfasst, welche in Grössen von gleicher Ordnung der Kleinheit übereinstimmen. In der That kann man auch mittelst der quadratischen Transformationen dieselbe Reihenentwicklung für den singulären Punkt aufstellen, zu welcher die Anwendung der Cramer'schen Regel führt; wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.*)

---

*) Zu dem Zwecke bedient man sich besser der quadratischen Transformation mit zwei zusammenfallenden Fundamentalpunkten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_3 : y_1 y_2 : y_3^2 .$$

Dieselbe gibt für $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $y_1 = x'$, $y_2 = y'$, $y_3 = 1$ die Substitution $x = x'$, $y = x'y'$, welche Hamburger (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16, p. 474 ff.) und Königsberger (Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, p. 187 ff.) zur Aufstellung jener Reihenentwicklung benutzen.

Fünfte Abtheilung.

Die Curven dritter Ordnung oder dritter Klasse.

I. Das System der Wendepunkte.

Wenn wir nunmehr dazu übergehen, die gewonnenen allgemeinen Sätze und Anschauungen insbesondere für Curven *dritter* Ordnung zu verwerthen*), so wollen wir dem Vorstehenden entsprechend die folgenden verschiedenen Punkte berücksichtigen:

1) Ihre Beziehung zur Polarentheorie und zu den Plücker'schen Formeln, besonders also die Lage der 9 Wendepunkte. Auf die Theorie der letzteren, welche bei den Curven dritter Ordnung zuerst vorkommen, wird sich unser Hauptinteresse concentriren.
2) Die Darstellung ihrer Eigenschaften mittelst der Theorie der ternären cubischen Formen.
3) Die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung. Für diese werden wir dann durch Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen ganz neue Hülfsmittel kennen lernen.
4) Curven dritter Ordnung mit vielfachen Punkten und Ausartungen dieser Curven.

Endlich könnten wir noch Systeme von Curven 3. Ordnung untersuchen, besonders die Anwendung der Methode der Charakteristiken auf diese Systeme. Darauf soll aber nicht eingegangen werden; es sei nur daran erinnert, dass die Elementarsysteme der Curven

---

*) Für die Ausbildung der Theorie dieser Curven sind besonders folgende Aufsätze von Wichtigkeit: Newton: Enumeratio linearum tertii ordinis; Maclaurin: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus (in's Französische übertragen von de Jonquières: Mélanges de géométrie pure, p. 197, Paris 1856); Plücker: System der analytischen Geometrie; Hesse: Crelle's Journal, Bd. 28, 36 und 38; Cayley: Philosophical Transactions, vol. 147, sowie die mehrfach erwähnten Werke von Salmon, Cremona und Chasles (Géométrie supérieure): Eine Zusammenstellung der geometrischen Theorien gab auch Durège: Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871. Auf letztere Werke sei in Betreff weiterer Ausführungen einzelner Punkte der Theorie verwiesen; man findet daselbst auch eingehendere Litteraturnachweise.

dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt schon früher betrachtet wurden (p. 417). —.

Zuerst werden wir fragen, wie eine Curve 3ter Ordnung überhaupt aussehen kann, ob wir der Gestalt nach mehrere projectivisch verschiedene Typen zu unterscheiden haben, oder ob, wie bei den Kegelschnitten, jede reelle Curve durch reelle Combination (oder auch nur durch continuirliche Verzerrung) in jede andere reelle Curve übergeführt werden kann. Dass wir die Coëfficienten der Curvengleichung für diese gestaltlichen Ueberlegungen reell annehmen müssen, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden. Eine ganz imaginäre Curve kann höchstens 9 reelle Punkte besitzen: die Schnittpunkte der reellen Curven $f = 0$ und $\varphi = 0$, wenn die imaginäre Curve in der Form

$$f + \sqrt{-1}\,\varphi = 0$$

darstellbar ist, vorausgesetzt, dass diese Schnittpunkte reell sind. Für die weiteren algebraischen Untersuchungen ist eine Annahme über die Realität der Coëfficienten jedoch nicht nothwendig.

Eine reelle Curve 3ter Ordnung wird nun von einer Geraden immer in 3 reellen Punkten, oder in 2 conjugirt imaginären und einem reellen getroffen; und zwar gibt es in der Ebene immer gerade Linien *beider* Arten. Geht man nämlich von einer Geraden mit drei reellen Schnittpunkten aus und dreht dieselbe um einen beliebigen ihrer Punkte, so wird sie nach dem Gesetze der Continuität allmählich in eine Lage kommen, wo zwei der Schnittpunkte zusammenfallen. Setzt man die Drehung über diese Grenzlage hinaus noch weiter fort, so müssen die beiden Punkte imaginär werden, denn sonst müsste der Berührungspunkt der Grenzlage ein Doppelpunkt der C_3 sein; die Existenz eines solchen aber schliessen wir vorläufig aus. So wird man in der That zu einer Geraden mit nur einem reellen Schnittpunkte geführt; von dieser ausgehend kann man dasselbe Verfahren rückwärts anwenden. — Insbesondere muss auch die unendlich ferne Gerade in einem reellen Punkte oder in drei solchen schneiden; bezeichnen wir daher die Tangente einer Curve in einem unendlich fernen Punkte als *Asymptote* derselben, so haben wir den Satz:

Jede reelle Curve dritter Ordnung hat mindestens eine reelle Asymptote und kann immer in eine Curve projicirt werden, welche nur eine reelle Asymptote hat.

Ausserdem haben wir für unsern nächsten Zweck noch den folgenden Satz zu beweisen:

Jede reelle Curve dritter Ordnung hat drei reelle Wendepunkte. Dass auch nicht mehr dieser Punkte reell sein können, werden wir erst später zeigen.

Wie eben bewiesen ist, können wir nämlich die Curve immer so annehmen, dass sie nur *einen* Zweig besitzt, welcher sich ins Unendliche erstreckt; und dieser muss zwischen den beiden Punkten A und B in Fig. 61, in denen er sich der Asymptote zu nähern beginnt, in continuirlichem Zuge verlaufen. Nun liegen die Punkte A und B immer auf *verschiedenen* Seiten der Asymptote (ebenso wie bei der Hyperbel), und auf beiden Seiten entfernt sich die Curve zunächst von dieser Linie. Sollen also beide Theile sich einander nähern, um einen zusammenhängenden Zug zu bilden, so müssen sie ihre Krümmung ändern, d. h. etwa in W_1 und W_2 zwei Wendepunkte bilden. Dadurch entstehen aber zwei verschieden gekrümmte Theile des Zweiges, deren Vereinigung nur in einem dritten Wendepunkte, etwa W_3, möglich ist; und damit ist unser Satz bewiesen.

Fig. 61.

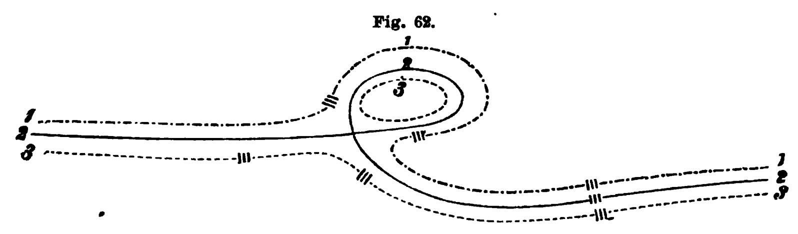
Der hier beschriebene Zweig der Curve wird von *jeder* reellen Geraden der Ebene in einem reellen Punkte geschnitten; die Curve kann also ausserdem nur noch einen Zweig enthalten, der von einer beliebigen Geraden in höchstens zwei reellen Punkten getroffen wird, d. h. ein Oval. Letzteres kann aber auch ganz fehlen. Wir erhalten so die folgenden beiden Typen für die möglichen Gestalten einer Curve dritter Ordnung:

1) *Eintheilige Curve*, bestehend aus einem einzigen Zuge mit 3 Wendepunkten (1 in Fig. 62).

2) *Zweitheilige Curve*, bestehend aus einem solchen Zuge und einem ausserhalb desselben gelegenen Oval (3 in Fig. 62).

Als Uebergangscurve zwischen beiden Arten kann man die Curve mit Doppelpunkt (2 in Fig. 62) auffassen (vgl. p. 343, f.); je nach

Fig. 62.



der Art und Weise, wie man sich diese aus einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung entstanden denkt, wird man auf die ein- oder auf die zweitheilige Curve geführt, wie es Fig. 62 wohl hinreichend veranschaulicht. Und durch diesen Uebergangsprocess ist gleichzeitig der im Obigen noch fehlende Existenzbeweis für die beiden angeführten Typen geliefert.*)

*) Aehnliche Ueberlegungen gelten übrigens für Curven beliebiger Ordnung. Eine solche besteht aus verschiedenen, getrennt verlaufenden Zügen, die man

Die Gestalt einer Curve 3[ter] Ordnung kann jedoch von den in Fig. 62 dargestellten scheinbar sehr verschieden sein, indem das Oval durch die unendlich ferne Gerade in zwei Theile getrennt wird, indem ein Wendepunkt unendlich weit rückt, u. s. f.; und in der Weise erhält man je nach diesen Beziehungen zur unendlich fernen Geraden die mannigfach verschiedenen Arten von Curven dritter Ordnung, wie sie in den Eintheilungen von Newton, Cramer, Plücker, Möbius und Cayley*) angegeben werden. — Durch unsere Fundamentaleintheilung in ein- und zweitheilige Curven soll übrigens keineswegs gesagt sein, dass alle Curven einer Klasse durch Collineation in einander übergeführt werden. Dies ist im Gegentheile nicht möglich; denn eine Curve dritter Ordnung hat, wie wir später sehen werden, eine absolute Invariante; und diese muss für zwei Curven denselben Werth haben, wenn sie linear in einander transformirbar sein sollen.**) —

Wir stellen im Folgenden zunächst eine Reihe von Sätzen kurz zusammen, welche sich aus früheren allgemeineren Erörterungen unmittelbar ergeben, wenn man nur die betreffenden Zahlen specialisirt. Wir werden dadurch sogleich auf wichtige Sätze über die Lage der Wendepunkte geführt.

Die Curve 3[ter] Ordnung ($f \equiv a_x^3 = 0$) ist im Allgemeinen von der 6[ten] Klasse (vgl. p. 278 und 353), d. h. man kann von einem beliebigen Punkte y aus an dieselben 6 Tangenten legen. Die 6 Berührungspunkte der letzteren liegen auf dem Kegelschnitte $a_x^2 a_y = 0$, der ersten Polare von y (p. 309). Alle ersten Polaren bilden ein Kegelschnittnetz; unter ihnen gibt es einfach unendlich viele, die einen Doppelpunkt haben, d. h. in ein Linienpaar zerfallen. Der Ort

---

nach v. Staudt (Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 81) in *paare* und *unpaare* einzutheilen hat. Ein unpaarer Zug kann, wie der Zug mit 3 Wendungen bei den C_3, durch Verzerrung einer Geraden erzeugt werden; ein paarer Zug dagegen durch Verzerrung eines Kegelschnittes. Zwei unpaare Züge schneiden sich immer; eine Curve ohne Doppelpunkt kann daher *höchstens* nur einen solchen Zug enthalten. Eine Curve ungerader Ordnung ohne Doppelpunkt enthält auch *immer* einen der Art, eine allgemeine Curve gerader Ordnung besteht nur aus paaren Zügen. — Vgl. auch Klein: Math. Annalen, Bd. VI, p. 577 und Zeuthen: ib. Bd. VII, p. 410.

*) Vgl. darüber Salmon's higher plane curves.

**) Die C_3 hat nämlich zwei Invarianten S und T, derart, dass S^3 dividirt durch T^2 die absolute Invariante ist (vgl. unten). Die Bedingung für einen Doppelpunkt ist dann $S^3 - 6\ T^2 = 0$; der Unterscheidung zweier Typen von C_3 entspricht eine Trennung der Fälle, in denen der Werth von $S^3 - 6\ T^2 > \text{oder} < 0$ ist, wie sich durch Betrachtung der 4 von einem Punkte des unpaaren Zuges ausgehenden Tangenten ergibt, wenn man die Sätze über die Realität der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung benutzt (Clebsch: Theorie der binären Formen, p. 160 und 468); vgl. den Schluss des 5. Abschnittes dieser Abtheilung.

der Pole für diese Kegelschnitte ist eine Curve 3ter Ordnung (Determinante der zweiten Differentialquotienten), die Hesse'*sche Curve* (p. 312):

$$(abc)^2 a_y b_y c_y = 0,$$

welche die Grundpunkte in den 9 Wendepunkten schneidet. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination der x aus den drei Gleichungen:

$$\sum_k f_{ik} y_k = a_i a_x a_y = 0,$$

wo $f_{ik} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, und wo die x_i die Coordinaten des zu y gehörigen Doppelpunktes sind. Diese Gleichungen ändern sich aber nicht, wenn man die x_i mit den y_i vertauscht; und somit folgt der Satz:

Für eine Curve dritter Ordnung sind Hesse'*sche und* Steiner'*sche Curve identisch.* Hieraus ergibt sich ferner (vgl. p. 365):

Die linearen Polaren eines Punktes y der Hesse'schen Curve berühren diese Curve in dem Doppelpunkte der ersten Polare von y.

Auf das Verhalten der von den Linien $\overline{xy}$ umhüllten Cayley'schen Curve werden wir erst später eingehen. —

Wir können auch leicht die Gleichung des Productes der 6 von y ausgehenden Tangenten angeben. Ist nämlich x ein Punkt einer solchen Tangente, so muss die Gleichung:

$$f(x + \lambda y) \equiv f + 3\lambda Df + 3\lambda^2 D^2 f + \lambda^3 D^3 f = 0,$$

wo $f = a_x^3$, $Df = a_x^2 a_y$, $D^2 f = a_x a_y^2$, $D^3 f = a_y^3$, für λ zwei gleiche Wurzeln ergeben; d. h. ihre Discriminante muss verschwinden. *Das Product der 6 von einem Punkte y ausgehenden Tangenten ist also gegeben durch* (vgl. p. 219):

$$(1) \quad 4(f \cdot D^2 f - (Df)^2)(Df \cdot D^3 f - (D^2 f)^2) - (f \cdot D^3 f - Df \cdot D^2 f)^2 = 0.$$

Rückt der Pol y in einen Punkt der Curve, so fallen zwei der von ihm ausgehenden Tangenten in die Tangente dieses Punktes, und die Grundcurve wird in ihm von seiner Polare berührt. In der That erhält die Gleichung (1) für $D^3 f = 0$ den Factor $(D^2 f)^2$; *von einem Punkte der Curve kann man also noch 4 Tangenten an dieselbe ziehen, gegeben durch:*

$$(2) \quad 4f \cdot D^2 f - 3(Df)^2 = 0.$$

Für diese Lage von y sind die Punkte der ersten Polare ebenso einfach geometrisch zu definiren, wie bei den Kegelschnitten. Es sei z der zweite Schnittpunkt eines von y ausgehenden Strahles mit der Polare, so dass $a_y a_z^2 = 0$. Sucht man dann die Schnittpunkte $y + \lambda z$ des Strahles mit der Grundcurve, so erhält man: $3 a_y^2 a_z + \lambda^2 a_z^3 = 0$, also eine reine quadratische Gleichung für λ, und es folgt:

Sucht man auf den durch einen Punkt y der Curve gelegten Strahlen zu y und den beiden anderen Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt, so beschreibt dieser die erste Polare von y. Es folgt dies auch unmittelbar aus unseren früheren allgemeinen Sätzen über Polarsysteme bei binären Formen (vgl. p. 205).

Ist endlich der Pol y einer der 9 Wendepunkte, so zerfällt die Polare, da y dann gleichzeitig auf der Hesse'schen Curve liegt; und zwar in die Wendetangente (da die Polare berühren muss*)) und in eine andere Linie, die dem Wendepunkte zugehörige „*harmonische Gerade.*" *Von einem Wendepunkte aus kann man daher nur noch 3 Tangenten an die Curve ziehen;* die Berührungspunkte derselben sind die 3 Schnittpunkte der ihm zugehörigen harmonischen Geraden mit der Curve. Nach dem vorigen Satze *ist ferner die harmonische Gerade selbst der Ort der vierten harmonischen Punkte zu dem Wendepunkte und den beiden andern Schnittpunkten der durch diesen gehenden Strahlen mit der Curve.*

Um nun die gegenseitige Lage der Wendepunkte näher zu discutiren, knüpfen wir an unser Fundamentaltheorem über Schnittpunktsysteme an, welches für Curven 3[ter] Ordnung aussagt, dass alle Curven der Art, welche 8 Punkte gemein haben, auch durch einen bestimmten 9[ten] Punkt gehen (vgl. p. 428), und welches uns früher einen einfachen Beweis für den Pascal'schen Satz lieferte. Wir machen hier eine andere Anwendung desselben Theorems. Auf der vorliegenden Curve nehmen wir drei Punkte A_1, A_2, A_3 auf der Geraden a, ebenso drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf einer anderen Geraden b und ziehen drei andere Linien, welche je einen Punkt A mit einem Punkte B verbinden, also z. B. die Linien $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$. Dieselben mögen bez. mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet werden und unsere Curve bez. noch in den Punkten C_1, C_2, C_3 schneiden. Wir behaupten, dass diese drei Punkte C ebenfalls auf einer Geraden c liegen. Wir haben nämlich drei Curven dritter Ordnung:

1) die gegebene Curve
2) die Linien d_1, d_2, d_3
3) die Linien a, b, c,

welche jedenfalls 8 Punkte gemein haben, nämlich A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, und folglich auch alle den neunten Punkt C_3 enthalten, q. e. d.

Verbindet man also je einen von den drei Schnittpunkten einer Gera-

*) Diese Berührung kann in der That keine uneigentliche sein, d. h. nicht etwa dadurch entstehen, dass der Doppelpunkt der zerfallenden Polare im Wendepunkte liegt; denn sonst würde man auch von dem Wendepunkte aus noch 4 Tangenten an die C_3 ziehen können, während doch offenbar eine von diesen zu der Wendetangente benachbart liegen muss.

den mit einer Curve dritter Ordnung mit je einem von den Schnittpunkten einer anderen Geraden, so schneiden diese Verbindungslinien die Curve noch in drei Punkten, welche wieder in einer Geraden liegen.

In dieser Weise kann man unendlich viele Gitter von je sechs Geraden construiren, von deren Ecken immer 9 auf der Curve 3ter Ordnung liegen. Durch besondere Wahl derselben werden wir nun wieder auf die Wendepunkte geführt. Lassen wir zunächst die Geraden a und b einander unendlich nahe rücken, so dass ein Punkt A_i zu B_i unendlich benachbart liegt. Alsdann sind die Linien d_1, d_2, d_3 die Tangenten der Curve in den Punkten A_1, A_2, A_3; und wir haben den Satz:

Liegen die Berührungspunkte dreier Tangenten einer Curve dritter Ordnung in gerader Linie, so liegen ihre drei weiteren Schnittpunkte ebenfalls in gerader Linie.

Gehen ferner die beiden benachbarten Geraden a und b durch zwei Wendepunkte, sind also A_1 ($= B_1$) und A_2 ($= B_2$) zwei Wendepunkte der Curve, so sind die Linien d_1, d_2 ihre Wendetangenten. Die weiteren Schnittpunkte C_1 und C_2 der letzteren fallen dann aber bez. mit A_1, A_2 zusammen, d. h. die Linie c fällt auch in die Linie a. Da nun die Punkte A_3, B_3, C_3 auch auf einer Geraden liegen müssen, hier aber einander unendlich nahe gerückt sind, so bilden sie auch einen Wendepunkt unserer Curve. Also:

*Eine gerade Linie, welche zwei Wendepunkte verbindet, geht immer noch durch einen dritten Wendepunkt.**)

Die 9 Wendepunkte haben also eine besondere Lage zu einander. Durch jeden gehen 4 „*Wendepunktslinien*“, von denen jede je 2 der anderen Wendepunkte enthält. Solcher Wendepunktslinien muss es also, da bei dieser Anordnung jede Linie dreimal auftritt, $\frac{1}{3}\, 9 \,.\, 4 = 12$ geben. — Wir bezeichnen im Folgenden die Wendepunkte durch die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

und durch L_{ikh} eine Wendepunktslinie, welche die Wendepunkte i, k, h enthält. Es sind sonach 1, 2, 3 z. B. die drei auf der Linie L_{123} liegenden Punkte. Durch jeden von ihnen gehen dann noch 3 Linien ausser L_{123}, so dass wir zusammen 10 Linien haben. Es gibt also noch zwei weitere Wendepunktslinien, welche die Punkte 1, 2, 3 nicht enthalten. Nehmen wir nun an, dass 4, 5, 6 auf einer Geraden L_{456} liegen, so muss es eine 12te Linie L_{789} geben, welche die Punkte 7, 8, 9 enthält. Eine solche Combination von drei Linien wie L_{123}, L_{456}, L_{789}, welche zusammen alle neun Wendepunkte enthalten, nennt

*) Vgl. Maclaurin a. a. O. — Einen rein algebraischen Beweis dieses Satzes werden wir weiter unten kennen lernen.

man ein *Wendepunktsdreieck.* Die Zahl dieser Dreiecke bestimmt sich, wie folgt: Durch jeden Wendepunkt gehen 4 Wendepunktslinien; jede muss Seite eines und nur eines Dreiecks sein. Da aber der betrachtete Wendepunkt in jedem Dreiecke vorkommen muss, so gibt es überhaupt nur 4 Wendepunktsdreiecke. Wir können somit den Satz aussprechen:

Die 9 Wendepunkte liegen zu dreien auf 12 Geraden, und diese Geraden ordnen sich in vier Gruppen zu drei (Wendepunktsdreiecke), so dass jede aus 3 Linien bestehende Gruppe sämmtliche 9 Wendepunkte enthält.

Dieser Satz bildet den Kern für die algebraische Behandlung des Wendepunktsproblems, welche wir später durchführen werden; wir skizziren hier nur kurz den dabei zu befolgenden Gedankengang. Aus dieser Gruppirung der 9 Punkte folgt nämlich, dass die Gleichung 9ten Grades, welche sie bestimmt, einen ganz besonderen Charakter hat, dass sie durch Wurzelziehen lösbar ist. Sie muss zuerst auf eine Gleichung vierten Grades führen, von welcher die 4 Wendepunktsdreiecke abhängen; zwei der letzteren je in ihre 3 Seiten zu zerlegen, erfordert dann nur je eine Gleichung 3ten Grades; die Schnittpunkte der einzelnen Seiten verschiedener Dreiecke sind dann die Wendepunkte. *Zur Bestimmung der letzteren hätte man also nach dieser vorläufigen Abzählung ausser linearen Gleichungen nur eine biquadratische und zwei cubische Gleichungen zu lösen.* Um die biquadratische Gleichung selbst aufzustellen, hat man noch folgende geometrische Ueberlegungen nöthig.

Die gegebene Curve $f = 0$ und ihre Hesse'sche $\Delta = 0$ bestimmen den Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$, dessen Grundpunkte die 9 Wendepunkte sind. Unter den Curven dieses Büschels müssen auch die 4 Wendepunktsdreiecke enthalten sein, denn jedes bildet eine zerfallende Curve 3ter Ordnung, welche durch die 9 Wendepunkte geht. Wir haben also eine biquadratische Gleichung für $\frac{\varkappa}{\lambda}$ zu bilden, welche diese vier besonderen Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ bestimmt. Durch einen Wendepunkt gehen nun vier Strahlen, welche je zwei weitere Wendepunkte enthalten. Zwei dieser Linien können wir dazu benutzen, um die harmonische Gerade des Wendepunktes zu construiren, indem wir auf ihnen die vierten harmonischen Punkte in der angegebenen Weise suchen; die Verbindungslinie der letzteren ist die gesuchte harmonische Gerade. Diese Construction hängt nur von den Wendepunkten, nicht von der gegebenen C_3 ab; geht also irgend eine C_3 durch die 9 Wendepunkte, so liegen immer die zu einem derselben in Bezug auf diese C_3 gehörigen vierten harmonischen Punkte in einer Geraden, d. h. die Polare des Punktes zerfällt. Letzteres tritt aber nur für die Wendepunkte ein; und somit haben wir den wichtigen Satz:

*Sind die 9 Fundamentalpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung Wendepunkte für eine Curve desselben, so sind sie es für alle Curven des Büschels;**) oder:

Alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ haben dieselben 9 Wendepunkte. (Die Wendetangenten dagegen sind natürlich verschieden.)

Insbesondere folgt hieraus, dass die Hesse'sche Curve von $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ wieder eine Curve des Büschels ist. Bezeichnen wir ihre Gleichung durch $\Delta_{\varkappa\lambda} = 0$, so haben wir also:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta, \tag{3}$$

wo K und L vom dritten Grade in $\varkappa$, λ sind, da die Hesse'sche Form immer vom dritten Grade in den Coëfficienten der Grundform ist. Die wirkliche Bestimmung dieser Functionen K, L geschieht mit Hülfe der Theorie der ternären cubischen Formen, auf welche wir später eingehen werden.

Unter den Curven des *„syzygetischen"* Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ sind nun, wie schon erwähnt, auch die vier Wendepunktsdreiecke enthalten. Dieselben können wir dadurch charakterisiren, dass ihre Hesse'sche Curve mit der Grundcurve zusammenfallen muss; denn auf einer aus drei Geraden bestehenden Curve ist jeder Punkt ein Wendepunkt, indem in jedem drei successive Punkte auf gerader Linie liegen. Soll also die Curve $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ in drei Gerade zerfallen, so muss von den Gleichungen:

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0, \quad Kf + L\Delta = 0$$

die eine eine Folge der andern sein. Durch Elimination der x_i ergibt sich daher als *die Gleichung vierten Grades, welche die Wendepunktsdreiecke bestimmt*:

$$\varkappa L - \lambda K = 0. \tag{4}$$

Aus der Vertheilung der Wendepunkte auf die Seiten dieser 4 Dreiecke können wir ferner Schlüsse auf die Realität derselben ziehen. Wir stellen zu dem Zwecke die Lage der 9 Punkte auf den 12 Seiten in einem Schema übersichtlich zusammen. Dabei benutzen wir den Satz: *Wenn durch einen Wendepunkt, etwa 1, zwei Wendepunktslinien, etwa L_{123} und L_{147} gehen, so schneiden sich die Verbindungslinien von 2, 3 mit je einem der Punkte 4, 7 niemals in einem Wendepunkte.* Denn wenn sich $\overline{24}$ und $\overline{37}$ in 6 schnitten und etwa 5 der Punkt wäre, welchen $\overline{16}$ noch enthält, so müssten 8, 9 (als die allein übrig bleibenden) sowohl mit 1, als mit 6 in gerader Linie liegen, was nicht möglich ist. Hiernach werden wir nun sogleich folgendes Schema

*) Vgl. hier und im Folgenden Hesse: a. a. O.

der auf den 12 Wendepunktslinien liegenden Tripel der 9 Punkte aufstellen:

	1) 1, 2, 3	2) 1, 4, 7	3) 1, 5, 9	4) 1, 6, 8
(5)	5) 4, 5, 6	6) 2, 5, 8	7) 2, 6, 7	8) 2, 4, 9
	9) 7, 8, 9	10) 3, 6, 9	11) 3, 4, 8	12) 3, 5, 7.

Wir können nämlich 1), 2), 3), 4) ganz beliebig wählen, da durch 1 jedenfalls vier Wendepunktslinien gehen. Ferner können wir, wie schon früher gezeigt wurde, annehmen, dass 4, 5, 6 und 7, 8, 9 je auf einer Geraden liegen, wodurch dann 5) und 9) festgelegt sind. Den Punkt 2 können wir dann noch mit 4, 5 und 6 verbinden; und weil die Zahlen 24, 25, 26 in 1), 2), 3), 4), 5), 9) noch nicht vereinigt vorkommen, dagegen 4 mit 7 schon in 2), 5 mit 9 in 3), 6 mit 8 in 4) vereinigt ist, so haben wir für jedes der drei Paare 24, 25, 26 nur noch die Wahl zwischen je zweien der Zahlen 7, 8, 9; andere Zahlen können dagegen nach obigem Satze nicht hinzugefügt werden. Ebenso erkennt man endlich, dass nach diesen Bestimmungen die von 3 ausgehenden Linien nur die in 10), 11), 12) bezeichneten Punkte enthalten können. In dem so entstandenen Schema bilden gleichzeitig je drei unter einander stehende Gruppen ein Wendepunktsdreieck; denn in ihnen kommt jedesmal jede der Zahlen 1, 2 . . . 9 nur einmal vor. Wir können das Gesetz dieser Gruppirung noch übersichtlicher in folgender Weise darstellen. Wir schreiben die 9 Zahlen in Determinantenform:

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9. \end{matrix} \tag{6}
$$

Bezeichnen wir nun die Dreiecke in der Reihenfolge, wie sie in obigem Schema (5) neben einander stehen, mit I, II, III, IV, so dass z. B. III aus den Linien L_{159}, L_{267}, L_{348} besteht, so erkennt man sofort die Richtigkeit der folgenden Regel.

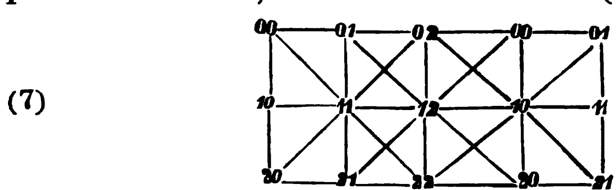
Es liegen immer auf gerader Linie:

in I je drei Punkte einer Horizontalreihe von (6),
„ II „ „ „ „ Verticalreihe von (6),
„ III „ „ „ , welche in (6) als Determinante ein positives Glied geben,
„ IV „ „ „ , welche in der Weise ein negatives Glied ergeben.

Aeusserlich noch einfacher gestaltet sich diese Gruppirung, wenn wir jeden Wendepunkt (wie ein Element einer Determinante) mit zwei Zahlen bezeichnen, also 00 für 1, 01 für 2 etc. schreiben. Wir haben dann die 9 Wendepunkte:

00	01	02
10	11	12
20	21	22,

und die einfache Regel: *Es liegen immer und nur drei solche Punkte in einer Geraden, bei denen sowohl die Summe der ersten als die der zweiten Zahlen durch 3 theilbar ist.* Diese Darstellung erscheint hier nur äusserlich bequemer; wir werden jedoch später mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen in der Lage sein, den Zahlenpaaren 00, 01 etc. eine reale Bedeutung beizulegen, wodurch wir dann direct auf den zuletzt ausgesprochenen Satz geführt werden. Um so mehr werden wir uns im Folgenden dieser Schreibweise bedienen. Bezeichnen wir also durch Verbindungsstriche die Wendepunktslinien, und zwar durch parallele Striche solche Linien, welche ein Wendepunktsdreieck bilden, so haben wir das Schema (vgl. p. 15):

(7) 

oder man hat die folgenden Linien und Dreiecke:

I	II	III	IV
00, 01, 02	00, 10, 20	00, 11, 22	00, 12, 21
10, 11, 12	01, 11, 21	01, 12, 20	01, 10, 22
20, 21, 22	02, 12, 22	02, 10, 21	02, 11, 20.

Man kann dies auch so aussprechen, dass in I je drei Punkte mit constantem ersten Index auf einer Geraden liegen, in II je drei mit constantem zweiten Index, in III je drei, bei denen jeder Index von Punkt zu Punkt um 1 wächst, in IV je drei, bei denen der eine Index von Punkt zu Punkt um 1 abnimmt, der andere aber um 1 wächst.

Eins der so gewonnenen Dreiecke, z. B. das erste, legen wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde und bezeichnen die Ecken desselben durch A_0, A_1, A_2, die gegenüberliegenden Seiten durch a_0, a_1, a_2, so dass auf a_i die Punkte $i0$, $i1$, $i2$ liegen. Betrachten wir etwa die beiden Punktreihen:

$$a_2)\quad A_0,\ 20,\ 21,\ 22,\ A_1,$$
$$a_1)\quad A_0,\ 10,\ 12,\ 11,\ A_2,$$

so folgt aus dem Vorstehenden, dass sie projectivisch liegen, denn je zwei unter einander stehende Punkte liegen mit 00 auf gerader Linie. Statt 00 können wir aber auch 01 oder 02 als Projectionscentrum wählen, wenn wir die Reihe a_1 nur bez. in folgender Weise ordnen:

a_1') A_0, 12, 11, 10, A_2, und:
a_1'') A_0, 11, 10, 12, A_2.

Die drei Punktreihen a_1, a_1', a_1'' sind also unter einander projectivisch, da sie alle zu a_2 projectivisch sind; sie unterscheiden sich aber nur durch cyclische Vertauschung der Elemente 10, 12, 11 und sind daher zu einander cyclisch-projectivisch (vgl. p. 201). Dasselbe gilt für die andern Dreiecke und Linien, so dass wir den Satz aussprechen können:

*Fasst man die drei auf einer Wendepunktslinie liegenden Wendepunkte als ein cyclisch-projectivisches System auf, so werden die beiden festen Grundelemente durch die auf der Linie liegenden Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks gegeben; und zwar kann man auf 36 Arten zwei Punktreihen so wählen, dass sie perspectivisch liegen, und dass ihr Projectionscentrum wieder ein Wendepunkt ist**), oder mit anderen Worten (vgl. p. 225):

Fasst man die drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkte als Verschwindungspunkte einer binären cubischen Form auf, so werden die Punkte ihrer Hesse'*schen Form durch die Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks dargestellt.* Jede solche Ecke bildet also mit den drei Punkten ein äquianharmonisches Doppelverhältniss.

Hieraus folgt schon, dass die beiden Ecken conjugirt imaginär sein müssen, wenn die drei Wendepunkte reell sind; denn vier Punkte mit äquianharmonischem Doppelverhältnisse können niemals sämmtlich reell sein. Sollen dagegen die beiden Ecken reell sein, so müssen zwei der drei Wendepunkte conjugirt imaginär werden. Dass in unserm Falle nun nicht alle 9 Wendepunkte reell sein können, erkennt man auch daraus, dass zwei projectivisch liegende Punktreihen, wie a_1 und a_2, nur ein reelles Projectionscentrum ergeben können. Des Näheren gestaltet sich die Vertheilung von reellen und imaginären Punkten in folgender Weise.

Schon früher haben wir gesehen, dass mindestens immer *drei reelle Wendepunkte* vorhanden sein müssen. Diese drei liegen alsdann auf einer Geraden, denn die reelle Verbindungslinie von zweien derselben muss die Curve in einem dritten *reellen* Punkte treffen; und dies ist dann nach dem obigen Satze ein Wendepunkt. Die zwei auf dieser Wendepunktslinie liegenden Dreiecksecken sind dann nothwendig conjugirt imaginär, und ebenso die beiden durch sie gehenden Linien, welche mit jener reellen Geraden ein Wendepunktsdreieck

*) Man schliesst aus diesen Verhältnissen leicht, dass jede Curve dritter Ordnung *18 lineare Transformationen* in sich selbst zulässt; und diese Transformationen führen zugleich alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ in sich über. Vgl. darüber Klein: Math. Annalen, Bd. 4, p. 353; Harnack: ib. Bd. 9, p. 42 ff.

bilden. Also sind alle die andern Wendepunkte imaginär, und zwar in dem betrachteten Dreiecke die Wendepunkte einer Seite conjugirt zu denen der andern. Verbindet man nun je zwei conjugirte Punkte, so entsteht ein zweites Dreieck, dessen Seiten sämmtlich reell sind, und wo auf jeder Seite ein reeller Wendepunkt liegt. Die beiden andern Dreiecke sind ganz imaginär und einander conjugirt, denn sonst müsste es mehr, als drei reelle Wendepunkte geben, was nicht möglich ist. *Reell sind also immer: 3 Wendepunkte, 4 Wendepunktslinien, 1 Wendepunktsdreieck, 4 Ecken von Wendepunktsdreiecken.**) Letzteres sind die drei Ecken des reellen Dreiecks, und die Ecke, welche der Verbindungslinie der drei reellen Wendepunkte in dem zugehörigen Dreiecke gegenüberliegt.

Diese Verhältnisse lassen sich algebraisch einfach darstellen, wenn wir eines der Wendepunktsdreiecke, etwa das reelle, als Coordinatendreieck einführen, d. h. uns einer (reell herstellbaren) *kanonischen Form für die Gleichung der Curve dritter Ordnung* bedienen. Während eine solche vereinfachte Gleichungsform bei den Kegelschnitten auf dreifach unendlich viele Weisen möglich war, gibt es für sie bei Curven dritter Ordnung nur vier verschiedene Fundamentaldreiecke. Bei höheren Curven jedoch wird die durch eine kanonische Form veranlasste Vereinfachung verhältnissmässig immer geringer; denn eine lineare Transformation enthält 8 Constante, und man kann diese so bestimmen, dass 8 Constante der Curve fortfallen, also in der kanonischen Form nur noch $\frac{1}{2} n (n + 3) - 8$ Constante vorkommen. Aber diese Zahl ist schon für $n = 4$ gleich 6, die erzielte Vereinfachung daher nicht mehr so bedeutend. Bei Curven dritter Ordnung muss hiernach eine kanonische Form möglich sein, in der nur noch *eine absolute Constante* vorkommt; und diese Constante hängt mit der einen absoluten Invariante der Curve, die wir später aufstellen werden, eng zusammen. In der That ergibt sich eine kanonische Form der Art durch die folgenden Ueberlegungen.

Ist z. B. durch $y_1 = 0$ eine Wendepunktslinie dargestellt, so haben wir auf ihr eine binäre Coordinatenbestimmung $y_2 : y_3$, deren Grundpunkte mit den auf $y_1 = 0$ gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks zusammenfallen. Diese Ecken sollen nun — so nehmen wir an — Ecken eines Wendepunktsdreiecks sein, also nach dem soeben bewiesenen Satze die Hesse'sche Form der binären cubischen Form darstellen, welche durch die drei auf $y_1 = 0$ gelegenen Wendepunkte gegeben ist. Die Gleichung der letzteren in dem binären Gebiete, bezogen auf die Grundpunkte der Hesse'schen Form $y_2 = 0$, $y_3 = 0$

*) Die Sätze über Gruppirung und Realität der Wendepunkte sind zuerst von Plücker entwickelt: System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 283 ff.

kann aber nach unsern früheren Untersuchungen in der Gestalt $y_2^3 + y_3^3 = 0$*) vorausgesetzt werden; und in diese Gleichung muss also die Curvengleichung für $y_1 = 0$ übergehen. Ebenso können von den Gliedern derselben für $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ bez. nur die Ausdrücke

$$y_1^3 + y_3^3 \quad \text{und} \quad y_1^3 + y_2^3$$

stehen bleiben. *Die Gleichung der Curve dritter Ordnung, bezogen auf ein Wendepunktsdreieck ist daher von der Form:*

$$f \equiv a\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6\,b y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{8}$$

wo dann $\frac{b}{a}$ eine für die Curve charakteristische absolute Constante ist, deren geometrische Bedeutung wir später erkennen werden. Diese Gleichungsform tritt nicht nur *immer* beim Wendepunktsdreieck ein, sondern kommt auch *ausschliesslich* demselben zu; denn wir können leicht zeigen, dass eine Curve von der Gleichung (8) ihre Wendepunkte immer auf den Seiten des Coordinatendreiecks hat. Zu dem Zwecke bilden wir die Gleichung der Hesse'schen Curve; dieselbe ist:

$$\tfrac{1}{6}\,\Delta \equiv \begin{vmatrix} a y_1 & b y_3 & b y_2 \\ b y_3 & a y_2 & b y_1 \\ b y_2 & b y_1 & a y_3 \end{vmatrix}$$

$$\equiv (a^3 + 2\,b^3)\, y_1 y_2 y_3 - a b^2\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) = 0,$$

oder wenn wir $\alpha = -\,6\,ab^2$, $\beta = a^3 + 2b^3$ setzen:

$$\Delta \equiv \alpha\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6\,\beta y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{9}$$

also von derselben Form wie die Curvengleichung. Für die Schnittpunkte der Curven (8) und (9) haben wir also entweder

$$a\beta - b\alpha = 0, \tag{10}$$

oder:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 y_2 y_3 = 0. \tag{11}$$

Die letzte Gleichung sagt aber unmittelbar aus, dass die Schnittpunkte von (8) und (9), d. i. die Wendepunkte auf den Seiten $y_1 = 0, y_2 = 0$, $y_3 = 0$ liegen.

Die Gleichung (10) wird im Allgemeinen nicht erfüllt sein; sie gibt vielmehr für $a : b$ die Gleichung ($\varepsilon^3 = 1$):

$$0 = a^4 + 8\,ab^3 = a\,(a + 2\,b)\,(a + 2\,\varepsilon b)\,(a + 2\,\varepsilon^2 b).$$

Wenn einer dieser vier Factoren verschwindet, ist die Curve immer ein Dreieck, hat also unendlich viele Wendepunkte und kommt für

---

*) Die auf p. 224 benutzte Form $y_2^3 - y_3^3 = 0$ geht offenbar in diese über, wenn man nur $-\,y_3$ statt y_3 schreibt.

uns jetzt nicht in Betracht. Für $a = 0$ gibt nämlich die Gleichung (8) direct $y_1 y_2 y_3 = 0$, und für $a = -2\varepsilon^i b$ oder $b = -\frac{1}{2} a \varepsilon^{2i}$ geht sie über in:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3\varepsilon^{2i} y_1 y_2 y_3 \equiv (y_1 + y_2 + y_3 \varepsilon^{2i})(y_1 + y_2 \varepsilon + y_3 \varepsilon^{2i+2})(y_1 + y_2 \varepsilon^2 + y_3 \varepsilon^{2i+1}) = 0.$$

Mit Hülfe obiger kanonischen Form beweisen wir auch leicht wieder den Hesse'schen Satz, dass alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ die Wendepunkte gemeinsam haben. Die Hesse'sche Curve der Curve

$$\varkappa f + \lambda \Delta \equiv (\varkappa a + \lambda \alpha)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6(\varkappa b + \lambda \beta) y_1 y_2 y_3 = 0$$

ist nämlich gegeben durch

$$\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv A(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6 B y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{12}$$

wo A, B von $\varkappa a + \lambda \alpha$, $\varkappa b + \lambda \beta$ ebenso abhängen, wie α, β von a, b, wo also:

$$A = -6(\varkappa a + \lambda \alpha)(\varkappa b + \lambda \beta)^2$$
$$B = (\varkappa a + \lambda \alpha)^3 + 2(\varkappa b + \lambda \beta)^3;$$

und da $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ und $y_1 y_2 y_3$ sich durch f und Δ ausdrücken lassen, so folgt wieder die Gleichung (3): $\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta$, was den Hesse'schen Satz involvirt.

Die Coordinaten der 9 Wendepunkte, sowie die Gleichungen der 12 Wendepunktslinien können wir nun auch leicht angeben. Nehmen wir an, die Linien $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ seien reell, so haben wir für $y_1 = 0$:

$$y_2^3 + y_3^3 = 0,$$

also, wenn $y_2 = 1$ gesetzt wird: $y_3 = -1, -\varepsilon$ oder $-\varepsilon^2$; *und so findet man für die Coordinaten der 9 Wendepunkte die Tafel* ($\varepsilon^3 = 1$):

Auf $y_1 = 0$:	$0,$	$1,$	$-1;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon^2;$
„ $y_2 = 0$:	$-\varepsilon^2,$	$0,$	$1;$	$-1,$	$0,$	$1;$	$-\varepsilon,$	$0,$	$1;$
„ $y_3 = 0$:	$1,$	$-\varepsilon,$	$0;$	$1,$	$-\varepsilon^2,$	$0;$	$1,$	$-1,$	$0.$

Und in dieser Anordnung stimmt die Tafel mit dem früheren Schema (7) vollkommen überein. Je dreimal drei neben oder unter einander stehende Punkte geben ein Dreieck, ebenso je dreimal drei Punkte eines aus dem Schema abgeleiteten positiven oder negativen Determinanten-Gliedes. Man überzeugt sich davon leicht direct, da die aus den Coordinaten je dreier solcher Punkte zu bildende Determinante verschwindet, dieselben also auf gerader Linie liegen. — Für die *Producte der Seiten der 4 Wendepunktsdreiecke* haben wir die Gleichungen:

I. $y_1 y_2 y_3 = 0$,

II. $(y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3) = 0$,

III. $(y_1 + \varepsilon y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^2 y_3) = 0$,

IV. $(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon y_3) = 0$.

Hier entsteht II aus den positiven Determinantengliedern der Tafel, es enthält eine reelle und zwei conjugirt imaginäre Seiten; III entsteht aus den Horizontalreihen und ist ganz imaginär; IV entsteht aus den negativen Determinantengliedern und ist zu III, Seite für Seite, conjugirt imaginär.

Ganz analog gestalten sich natürlich diese Verhältnisse, wenn man statt des reellen Dreiecks eines der imaginären zu Grunde legt. *Den Uebergang von einem Wendepunktsdreiecke zu einem andern* kann man in folgender Weise bewerkstelligen. Es sei die Curvengleichung $f = 0$ in der Form (8) gegeben, bezogen auf das Dreieck I ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$), dann setzen wir, um sie statt dessen z. B. auf das Dreieck II zu beziehen:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ z_2 &= y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3 \\ z_3 &= y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3 \end{aligned}$$

und zur Abkürzung:

$$\varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3, \quad \psi = y_1 y_2 y_3;$$

dann wird:

$$\begin{aligned} \varphi' = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 &= 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 18 y_1 y_2 y_3 \\ &= 3\varphi + 18\psi \\ \psi' = z_1 z_2 z_3 \quad &= y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 3(\varepsilon + \varepsilon^2) y_1 y_2 y_3 \\ &= \varphi - 3\psi, \end{aligned}$$

also: $$9\varphi = \varphi' + 6\psi', \quad 27\psi = \varphi' - 3\psi'$$

und die gesuchte Gleichung der Curve, bezogen auf das neue Dreieck:

$$9f \equiv 9a\varphi + 54b\psi \equiv (a + 2b)\varphi' + 6(a - b)\psi' = 0.$$

Zur wirklichen Lösung des Wendepunktsproblems bleibt uns nach diesen ausführlichen Erörterungen über die Gruppirung der neun Punkte übrig, die Transformationsformeln aufzustellen, mittelst deren eine beliebige Curve dritter Ordnung in die als möglich erkannte kanonische Form gebracht, d. h. auf ein Wendepunktsdreieck bezogen werden kann. Die Frage nach der Bestimmung der Wendepunkte ist also ebenso auf ein Transformationsproblem zurückgeführt wie die früher behandelte der Aufsuchung der gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte. Die biquadratische Gleichung (4) vertritt dabei die für letzteres Problem benutzte cubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ (vgl. p. 122 ff.).

II. Die zugehörigen Curven dritter Klasse.

Wir knüpfen wieder an die Betrachtung der zu den 9 Wendepunkten gehörenden 9 harmonischen Geraden an. Man kann eine solche, wie schon erwähnt, construiren, indem man auf den durch den zugehörigen Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien die vierten harmonischen Punkte zu den beiden andern Wendepunkten der Linie sucht. Zufolge unserer Untersuchungen über binäre cubische Formen (vgl. p. 225) haben wir den Satz:

Fasst man die drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkte als Grundpunkte einer binären cubischen Form auf, so bilden die Schnittpunkte der zugehörigen drei harmonischen Geraden mit der Wendepunktslinie die Grundpunkte der Covariante Q. Und da die binäre quadratische Covariante Δ durch die auf der Linie gelegenen Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks dargestellt wird (vgl p. 508), so folgt weiter:

Der Schnittpunkt der zu einem Wendepunkte gehörigen harmonischen Geraden mit einer durch ihn gehenden Wendepunktslinie ist der vierte harmonische Punkt zu den beiden auf dieser Linie liegenden Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks und dem Wendepunkte.

Diesen Satz können wir auch leicht direct einsehen: Die 9 harmonischen Geraden sind für alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ dieselben. Als Theile der Polaren der Wendepunkte in Bezug auf alle diese Curven erhält man sie daher auch, wenn man als Curve dritter Ordnung ein Wendepunktsdreieck zu Grunde legt und die Polare eines Wendepunktes in Bezug auf dasselbe construirt. Letztere besteht dann aber aus der durch den Wendepunkt gehenden Seite des Dreiecks und aus der Polare in Bezug auf die beiden andern Seiten desselben. Die harmonische Gerade entsteht also einfach, wenn man den betreffenden Wendepunkt mit der gegenüberliegenden Ecke eines der vier durch ihn gehenden Wendepunktsdreiecke verbindet und zu dieser Linie und zu den in jener Ecke zusammenlaufenden Seiten des Dreiecks den vierten harmonischen Strahl sucht. Die harmonischen Geraden gehen hiernach jede durch eine Ecke jedes Wendepunktsdreiecks:

Die 12 Ecken der Wendepunktsdreiecke liegen zu 4 auf den 9 harmonischen Geraden. Und ferner erkennt man aus der Construction sofort den Satz:

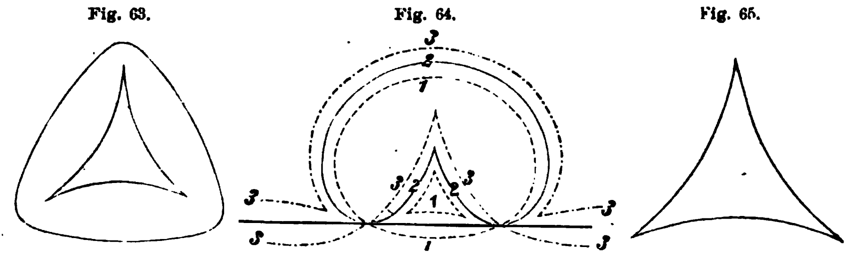
Die harmonischen Geraden, welche zu drei auf einer Wendepunktslinie gelegenen Wendepunkten gehören, schneiden sich in einer Dreiecksecke, welche dadurch jener Wendepunktslinie entspricht: Den Seiten eines Dreiecks entsprechen die gegenüberliegenden Ecken.

Die harmonischen Geraden bilden also hinsichtlich ihrer Gruppirung ein den Wendepunkten dualistisch genau entgegengesetztes System; sie müssen daher ebenso die gemeinsamen Rückkehrtangenten einer Schaar von Curven dritter Klasse sein, wie die Wendepunkte allen Curven eines Büschels von Curven dritter Ordnung gemeinsam sind. Die Theorie der Curven dritter Ordnung ist daher unzertrennlich von derjenigen der Curven dritter Klasse; die eine führt nothwendig auf die andere. Ehe wir auf die erwähnte Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten eingehen, wollen wir die bisher erhaltenen Sätze über Curven dritter Ordnung dualistisch auf Curven dritter Klasse übertragen und kurz zusammenstellen.

Was zunächst die Gestalt der letzteren anbetrifft, so können wir dieselbe erhalten, indem wir etwa die polaren Gegenbilder der in Fig. 62 dargestellten Curven in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt construiren. Aus einem Ovale wird dabei wiederum ein Oval, wie ein Kegelschnitt wieder in einen Kegelschnitt übergeht; aus dem Zuge mit drei Wendepunkten in gerader Linie dagegen ein Zug mit drei Rückkehrtangenten durch einen Punkt, und zwar ein geschlossener Zug*), denn derselbe muss ebenso aus einem Strahlbüschel durch allmählige Degeneration erzeugt werden können, wie jener Zug mit drei Wendungen aus einer Geraden. Wir haben demnach die folgenden *Typen von Curven dritter Klasse:*

1) *Eintheilige Curven*, bestehend aus einem einzigen Zuge mit drei Rückkehrtangenten (vgl. Fig. 65 und 3 in Fig. 64).
2) *Zweitheilige Curve*, bestehend aus einem solchen Zuge und einem ihn umschliessenden Ovale (vgl. Fig. 63, und 1 in Fig. 64).

Im letztern Falle kann das Oval nicht im Innern des dreispitzigen Zuges liegen, da es sonst Punkte geben würde, von denen aus man



fünf Tangenten an die Curve ziehen könnte. Zwischen beiden Curvenarten stellt sich als Uebergangsstufe**) die Curve mit Doppeltangente

*) Man erkennt dies auch daraus, dass die Curve dritter Klasse von der sechsten Ordnung ist, und dass eine Curve gerader Ordnung ohne Doppelpunkt nie einen unpaaren Zug enthalten darf; vgl. die Anmk. auf p. 499.

**) Vgl. dazu Fig. 53 auf p. 346.

(vgl. 2 in Fig. 64). Wie aus dieser Curve die zweitheilige von Fig. 63 entsteht, wird aus der Zeichnung unmittelbar klar sein; die Curve von Fig. 65 entsteht dagegen aus der Curve 3 in Fig. 64 durch passende Verzerrung und Projection.

Wir erhalten ferner durch dualistische Uebertragung sofort die folgenden Sätze:

Eine Curve dritter Klasse ist im Allgemeinen von der sechsten Ordnung und hat neun Rückkehrtangenten. *Die erste Polare einer Geraden v in Bezug auf die Curve* $\varphi \equiv u_\alpha^3 = 0$ ist ein Kegelschnitt $u_\alpha^2 v_\alpha = 0$, welcher die 6 in den Schnittpunkten von v mit $\varphi = 0$ an diese Curve gezogenen Tangenten berührt. Ist v insbesondere eine Tangente von $\varphi = 0$, so berührt der Kegelschnitt die Curve dritter Klasse in ihrem Berührungspunkte. Er zerfällt in ein Punktepaar, wenn die Gerade v der Bedingung

$$\Delta_\varphi \equiv (\alpha\beta\gamma)^2\, v_\alpha v_\beta v_\gamma = 0$$

genügt, d. h. die Hesse'sche Curve von $\varphi = 0$ berührt; und letztere Curve wird gleichzeitig von den Geraden berührt, welche je zwei Punkte eines solchen Paares verbinden. Diese Curve hat dieselben Rückkehrtangenten, wie $\varphi = 0$, und die gleiche Eigenschaft kommt allen Curven der Schaar $\varkappa\varphi + \lambda\Delta_\varphi = 0$ zu; doch sind ihre Rückkehrpunkte verschieden. Die Polare einer Rückkehrtangente zerfällt in zwei Punkte, von denen der eine der Rückkehrpunkt selbst ist, während der andere einer harmonischen Geraden dualistisch entspricht, und also für alle Curven der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten derselbe ist.

Von jedem Punkte einer Tangente der Curve dritter Klasse kann man noch zwei weitere Tangenten an dieselbe ziehen. Sucht man zu diesen und der ersteren die vierte harmonische Gerade, so umhüllen letztere Geraden einen Kegelschnitt; und dies ist die Polare jener ersten Tangente. Derselbe zerfällt, wie erwähnt, in ein Punktepaar, wenn die Tangente eine Rückkehrtangente war. Die 9 Punkte der so entstehenden 9 Paare, welche nicht in die Rückkehrpunkte fallen, bilden ein System von Punkten, welches gleichzeitig die Grundpunkte für einen syzygetischen Büschel von Curven dritter Ordnung liefert; u. s. w.

Wir werden nun zeigen, dass die Schaar von Curven dritter Klasse, welche zu dem Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ gehört, nichts anderes ist, als die Gesammtheit der Cayley'schen Curven dieses Büschels, dass darunter also insbesondere die Cayley'sche Curve von $f = 0$ selbst enthalten ist. Diese Curve müsste unsern allgemeinen Formeln zufolge von der Klasse 6 sein (vgl. p. 368), da aber bei Curven dritter Ordnung die Hesse'sche und Steiner'sche Curve zusammen-

fallen, so zählt jede Tangente, als Verbindungslinie entsprechender Punkte beider Curven, doppelt. *Die* Cayley'*sche ist daher von der dritten Klasse.*

Diese Curve wird auch gleichzeitig von den Linienpaaren umhüllt, in welche die ersten Polaren zerfallen können. Betrachten wir nämlich zwei einander conjugirte Punkte x und y der Hesse'schen Curve, so dass also die erste Polare von x in y, und die erste Polare von y in x einen Doppelpunkt hat. Die beiden so entstehenden Linienpaare schneiden sich in vier Punkten; und alle durch diese gehenden Kegelschnitte haben ihre Pole auf der Linie $\overline{xy}$. Unter letzteren Kegelschnitten ist noch ein drittes Linienpaar, dessen Doppelpunkt z ebenfalls auf der Hesse'schen Curve liegen muss, während der zugehörige Pol z' ebenfalls auf $\overline{xy}$ liegt. In z schneiden sich ferner die Tangenten der Hesse'schen Curve in x und y; denn die Tangente in y ist nach dem Früheren (p. 501) zugleich die lineare Polare von x in Bezug auf die Grundcurve; die letztere ist identisch mit der Polare von x in Bezug auf das zugehörige Linienpaar. Nun sind aber x, y, z die Ecken des Polardreiecks, welches den Kegelschnitten des erwähnten Büschels gemeinsam ist; und also ist die lineare Polare von x die gegenüberliegende Seite; sie geht somit durch z. Dies gibt den Satz:

Die Tangenten der Curve von Hesse *in zwei conjugirten Punkten x und y derselben schneiden sich auf dieser Curve in einem Punkte z, welcher der conjugirte Pol des dritten Schnittpunktes derselben Curve mit der Geraden $\overline{xy}$ ist.*

Da also die linearen Polaren von x und y sich in z schneiden, so muss die erste Polare von z durch x und y gehen; und weil z ein Punkt der Hesse'schen Curve, also die Polare von z ein Linienpaar ist, so folgt:

Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole x und y der Hesse'*schen Curve verbindet, d. h. eine Tangente der* Cayley'*schen Curve, bildet einen Theil der ersten Polare des Punktes z, welcher dem dritten Schnittpunkte der Linie $\overline{xy}$ mit der* Hesse'*schen Curve auf letzterer conjugirt ist.* Und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Mit Hülfe dieser neuen Definition der Cayley'schen Curve können wir ihre Gleichung leicht aufstellen. Sei

$$f = a_x^3 \equiv \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h = 0$$

die Gleichung der Grundcurve dritter Ordnung, und setzen wir:

$$f_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + a_{ik3} x_3,$$

so wird die Bedingung, dass die erste Polare eines Punktes x in zwei Linien u und v zerfalle, gegeben durch die Gleichungen:

$$f_{11} = u_1 v_1 \qquad 2 f_{23} = u_2 v_3 + v_2 u_3$$
$$f_{22} = u_2 v_2 \qquad 2 f_{31} = u_3 v_1 + v_3 u_1$$
$$f_{33} = u_3 v_3 \qquad 2 f_{12} = u_1 v_2 + v_1 u_2 .$$

Eliminiren wir hieraus die linear vorkommenden Grössen x_i und v_i, so erhalten wir die *Gleichung der* Cayley'*schen Curve* in der Form:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{231} & 2a_{232} & 2a_{233} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{311} & 2a_{312} & 2a_{313} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{121} & 2a_{122} & 2a_{123} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in der That eine Curve dritter Klasse; dieselbe Gleichung würde sich für die v_i durch Elimination der x_i und u_i ergeben. Setzen wir insbesondere die Curve dritter Ordnung in der kanonischen Form (8) als gegeben voraus, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$f_{11} = a x_1 = u_1 v_1 \qquad 2 f_{23} = 2 b x_1 = u_2 v_3 + v_2 u_3$$
$$f_{22} = a x_2 = u_2 v_2 \qquad 2 f_{31} = 2 b x_2 = u_3 v_1 + v_3 u_1$$
$$f_{33} = a x_3 = u_3 v_3 \qquad 2 f_{12} = 2 b x_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2 ,$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination der x_i die drei Gleichungen:

$$2 b u_1 v_1 - a (u_2 v_3 + v_2 u_3) = 0$$
$$2 b u_2 v_2 - a (u_1 v_3 + v_1 u_3) = 0$$
$$2 b u_1 v_3 - a (u_1 v_2 + v_1 u_2) = 0 .$$

Also wird nach Elimination der v_i *die Gleichung der* Cayley'*schen Curve in der kanonischen Form:*

$$\begin{vmatrix} 2 b u_1 & -a u_3 & -a u_2 \\ -a u_3 & 2 b u_2 & -a u_1 \\ -a u_2 & -a u_1 & 2 b u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$(2) \qquad a^2 b (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) + (a^3 - 4 b^2) u_1 u_2 u_3 = 0 .$$

Diese Gleichung ist genau von der Form, wie die Grundcurve selbst; die Cayley'sche Curve verhält sich daher ebenso zu den Ecken des Coordinatendreiecks, wie die Grundcurve zu den Seiten; und daraus folgt dann, dass die Cayley'sche Curve in der That die harmonischen Geraden der Wendepunkte der Grundcurve zu Rückkehrtangenten hat, also in der von uns betrachteten Curvenschaar enthalten ist. Dasselbe gilt für die Cayley'sche Curve einer beliebigen Curve des Büschels

$\varkappa f + \lambda \Delta = 0$; denn um ihre Gleichung zu erhalten, braucht man nur in (2) $\varkappa a + \lambda \alpha$, $\varkappa b + \lambda \beta$ statt a, b zu setzen, wodurch die Form der Gleichung nicht geändert wird.

Da nun bei denjenigen 9 Linienpaaren, welche den Wendepunkten als erste Polaren entsprechen, immer eine Gerade des Paares die Wendetangente ist, so werden auch letztere von der Cayley'schen Curve berührt und sie bestimmen dieselbe vollständig. Mit Hülfe dieser Bestimmungsstücke kann man dann die Cayley'sche Curve in später zu erörternder Weise construiren. — Mit den reciproken Betrachtungen vereinigt stellen wir diese Resultate in den folgenden Sätzen zusammen:

Die 9 Wendetangenten einer jeden Curve des Büschels mit gemeinsamen Wendepunkten bestimmen eine Curve 3ter Klasse, und diese sämmtlichen Curven 3ter Klasse haben gemeinsame Rückkehrtangenten.

Die durch die 9 Wendetangenten einer Curve 3ter Ordnung bestimmte Curve 3ter Klasse ist die Enveloppe der Linienpaare, in welche die Polaren gewisser Punkte in Bezug auf erstere Curve zerfallen können, und gleichzeitig die Enveloppe der Verbindungslinien dieser Punkte mit den Doppelpunkten der zugehörigen Linienpaare.

Die 9 Rückkehrpunkte einer jeden Curve der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten bestimmen eine Curve 3ter Ordnung, und diese sämmtlichen Curven 3ter Ordnung haben gemeinsame Wendepunkte.

Die durch die 9 Rückkehrpunkte einer Curve 3ter Klasse bestimmte Curve 3ter Ordnung ist der Ort der Punktepaare, in welche die Polaren gewisser Geraden in Bezug auf erstere Curve zerfallen können, und gleichzeitig der Ort der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Doppeltangenten der zugehörigen Punktepaare.

Unter den Curven 3ter Ordnung fanden sich indess 4 Systeme von 3 Geraden (Wendepunktsdreiecke); also sind unter den Curven dritter Klasse 4 Systeme von 3 Punkten (bez. die Ecken jener Wendepunktsdreiecke). Auch letztere Curven müssen von den Wendetangenten einer Curve des syzygetischen Büschels 3ter Ordnung berührt werden; es folgt also:

Unter den Curven mit gemeinsamen Wendepunkten gibt es vier solche, deren Wendetangenten sich dreimal zu drei in Punkten schneiden, welche die Ecken eines Wendepunktsdreiecks bilden.

Unter den Curven mit gemeinsamen Rückkehrtangenten gibt es vier solche, deren Rückkehrpunkte dreimal zu drei in geraden Linien liegen, welche die Seiten eines Wendepunktsdreiecks bilden.

Dadurch ist für die betreffenden Curven dritter Ordnung eine besondere Invarianteneigenschaft ausgesprochen; und wir werden

später auch die Invariante aufstellen, durch deren Verschwinden dieselbe bedingt wird. —

Die Hesse'sche Curve einer Curve dritter Ordnung konnten wir auch als Jakobi'sche Curve des Netzes der ersten Polaren auffassen. Wir haben gesehen, dass dies Netz gleichzeitig das allgemeinste Kegelschnittnetz ist (p. 384); und dies Resultat werden wir dadurch bestätigen, dass wir geradezu die Gleichung der zugehörigen Grundcurve 3ter Ordnung aufstellen. Wir können also die Hesse'sche Curve auch von einem solchen Netze ausgehend definiren: sie ist der Ort der Doppelpunkte zerfallender Curven desselben. Ebenso lässt sich aber auch die Cayley'sche Curve definiren als Enveloppe der Geraden, aus welchen diese zerfallenden Kegelschnitte bestehen; und unter diesem Gesichtspunkte pflegt man letztere Curve als Hermite'sche Curve des Systems zu bezeichnen.*) *Die Gleichung der* Jakobi'*schen oder* Hesse'*schen Curve des Kegelschnittnetzes:*

$$(3) \qquad \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 \equiv \varkappa \Sigma a_{ik} x_i x_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i x_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$$

ist nach dem Früheren:

$$(4) \qquad I(a, b, c) \equiv (abc)\, a_x b_x c_x = 0 .$$

Die Gleichung der Hermite'*schen Curve desselben* ergibt sich aus den Gleichungen:

$$2(\varkappa a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = u_i v_k + v_i u_k$$

durch Elimination von $\varkappa, \lambda, \mu, v_1, v_2, v_3$; sie ist also:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{31} & 2b_{31} & 2c_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Symbolisch lässt sich diese Determinante sehr einfach darstellen, wie wir sogleich sehen werden. Wir bezeichnen als *zwei zu einander in Bezug auf das Netz conjugirte Punkte* zwei Punkte der Jakobi'schen Curve der Art, dass sich die Polaren des einen in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes in dem andern schneiden (vgl. p. 377). Zwei solche conjugirte Punkte stehen hiernach zu einander in derselben

*) Vgl. Hermite in Crelle's Journal, Bd. 57. — Für die folgenden Untersuchungen über Kegelschnittnetze und conjugirte Gewebe vgl. Smith: Proceedings of the London Math. Society, Mai 1868 und Rosanes: Math. Annalen, Bd. 6, p. 264 ff. — Rein algebraisch sind diese Verhältnisse neuerdings von Gundelfinger dargestellt und erweitert: Crelle's Journal, Bd. 80, p. 73.

Beziehung, wie zwei Punkte der Hesse'schen Curve einer Curve dritter Ordnung, Pol und Doppelpunkt seiner Polaren, welche wir früher als conjugirt bezeichneten. Die Enveloppe der Verbindungslinien dieser Punkte war aber die Cayley'sche Curve; also haben wir den Satz (welchen man übrigens auch direct für Kegelschnittnetze leicht in obiger Weise ableitet):

Die Hermite'*sche Curve eines Kegelschnittnetzes ist die Enveloppe der Geraden, welche die in Bezug auf das Netz einander conjugirten Punkte paarweise verbinden.*

Betrachten wir eine Tangente der Curve, so müssen hiernach die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes des Netzes mit ihr harmonisch liegen zu den beiden conjugirten Punkten, deren Verbindungslinien die betrachtete Tangente ist. Letztere wird also von den Curven des Netzes in Punktepaaren einer Involution getroffen. Es ist aber die Bedingung dafür, dass drei binäre Formen

$$a_\xi^2 = 0, \quad b_\xi^2 = 0, \quad c_\xi^2 = 0$$

Punktepaare derselben Involution darstellen, leicht anzugeben. Alsdann nämlich müssen dieselben zu dem nämlichen vierten Paare gleichzeitig harmonisch liegen. Nun sind die Paare $a_\xi^2 = 0$, $b_\xi^2 = 0$ jedenfalls harmonisch zu dem Paare $\vartheta_x^2 \equiv (ab)\, a_\xi b_\xi = 0$ (vgl. p. 216); soll also auch $c_\xi^2 = 0$ zu letzterem Paare harmonisch liegen, so muss die Invariante $(\vartheta c)^2$ verschwinden. Die gesuchte Bedingung ist daher gegeben durch die Gleichung:

$$(\vartheta c)^2 \equiv (ab)\,(bc)\,(ac) = 0.$$

Nach unserm Uebertragungsprincipe (vgl. p. 276) ist also die Gleichung der Enveloppe der Geraden, welche die Kegelschnitte

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0$$

in Punktepaaren einer Involution schneiden, d. h. *die Gleichung der* Hermite'*schen Curve des Netzes**):

$$(6) \qquad H(a, b, c) \equiv (abu)\,(bcu)\,(acu) = 0.$$

Ganz ähnliche Ueberlegungen gelten für ein *Kegelschnittgewebe*, wenn wir unter diesem Ausdrucke das dem Netze dualistisch gegenüberstehende Gebilde verstehen, also ein System von Kegelschnitten, gegeben durch die Gleichung:

$$(7) \qquad \nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0.$$

Die Jakobi'*sche Curve des Gewebes,* der Ort der Doppeltangenten der in Punktepaare zerfallenden Curven, ist gegeben durch:

*) Die Vergleichung eines beliebigen Gliedes zeigt, dass sich der Ausdruck $H(abc)$ von der Determinante (5) durch den Factor $-\frac{1}{2}$ unterscheidet.

(8) $$I(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha\beta\gamma)\, u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

und *die* Hermite'*sche Curve des Gewebes*, der Ort der Punktepaare zerfallender Kegelschnitte, gegeben durch:

(9) $$H(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha\beta x)(\alpha\gamma x)(\beta\gamma x) = 0.$$

Ein solches Netz und Gewebe kann man nun direct in einfache Verbindung bringen, so dass das eine unmittelbar durch das andere bedingt ist. Alle Kegelschnitte, welche mit einer beliebigen Curve des Netzes (3) *vereinigt* liegen (vgl. p. 385 und 295), d. h. alle Kegelschnitte $u_\alpha^2 = 0$, für welche die Invarianten a_α^2, b_α^2, c_α^2 verschwinden, bilden offenbar ein Gewebe; denn die Gleichungen

$$a_\alpha^2 = 0, \quad b_\alpha^2 = 0, \quad c_\alpha^2 = 0$$

geben *drei lineare* Bedingungen für die Coëfficienten α_{ik} von u_α^2. Wir wollen das so erhaltene, mit dem Netze (3) vereinigt gelegene Gewebe kürzer als *dem Kegelschnittnetze* (3) *conjugirt bezeichnen*, und umgekehrt dieses als jenem conjugirt.

Zunächst entsteht die Frage nach dem Zusammenhange der Jakobi'schen und Hermite'schen Curve des Netzes mit den entsprechenden des conjugirten Gewebes; sie erledigt sich sehr einfach. Zwei in Bezug auf das Netz conjugirte Punkte, welche also auf der Jakobi'schen Curve desselben liegen, sind harmonische Pole in Bezug auf alle Curven des Netzes und bilden demnach einen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes; denn die Bedingung $a_\alpha^2 = 0$ geht für $u_\alpha^2 = u_x \,.\, u_y$ über in $a_x a_y = 0$. Wir haben also den Satz:

Die Jakobi'*sche Curve eines Kegelschnittnetzes ist identisch mit der* Hermite'*schen Curve des conjugirten Gewebes.* Und dualistisch entsprechend:

Die Jakobi'*sche Curve eines Kegelschnittgewebes ist identisch mit der* Hermite'*schen Curve des conjugirten Netzes.*

Hieraus können wir Schlüsse auf die Beziehungen zwischen der Hesse'schen und Cayley'schen Curve einer Curve dritter Ordnung ziehen. Die erstere ist gleichzeitig (in dualistisch übertragenem Sinne) die Cayley'sche Curve derjenigen Curve dritter Klasse der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten, deren Polarkegelschnitt-Gewebe zu dem Polaren-Netze der Grundcurve conjugirt ist. Und die Hesse'sche Curve dieser Curve dritter Klasse ist identisch mit der Cayley'schen Curve der Grundcurve dritter Ordnung. Wir können die Gleichung dieser Curve dritter Klasse selbst auch aufstellen, sobald es uns gelingt, die Gleichung der Curve dritter Ordnung anzugeben, deren Polarsystem mit dem Netze (3):

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0$$

zusammenfällt. Zu dem Zwecke müssen wir einen Satz voraussetzen,

den wir später bei Betrachtung der ternären cubischen Formen beweisen werden. Ist uns die Grundcurve dritter Ordnung gegeben durch

$$(10) \qquad p_x^3 = q_x^3 = r_x^3 = s_x^3 = 0\,,$$

wo p, q, r, s gleichbedeutende Symbole sind, und soll ihr System von ersten Polaren mit dem Netze (1) identisch sein, so ist die Gleichung ihrer Hesse'schen Curve:

$$I(a, b, c) \equiv (abc)\, a_x b_x c_x \equiv i_x^3 \equiv i'^3_x \equiv i''^3_x = 0\,.$$

und die Gleichung ihrer Cayley'schen Curve:

$$H(a, b, c) \equiv (abu)\,(acu)\,(bcu) \equiv u_h^3 \equiv u_{h'}^3 \equiv u_{h''}^3 = 0.$$

Zwischen p_x^3 und u_h^3 besteht nun — und das ist der erwähnte Satz aus der Formentheorie — die Relation:

$$(11) \qquad \tfrac{1}{2}\, p_h^2 u_h^2 p_x = S \,.\, u_x$$

wo S eine Invariante der Grundcurve ist, nämlich:

$$S = (pqr)\,(pqs)\,(prs)\,(qrs)\,,$$

Die Gleichung (11) sagt aber aus, dass (wenn nicht $S = 0$) *die Polare eines Punktes x in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit der Polaren einer Geraden u in Bezug auf die* Cayley'*sche Curve immer vereinigt liegt, wenn x und u vereinigt liegen.* Sind also u, v zwei Gerade, welche sich in y schneiden, so können wir den Kegelschnitt des Netzes (3), welcher Polarkegelschnitt von y in Bezug auf die Curve $p_x^3 = 0$ ist, dadurch bestimmen, dass er mit den Polarkegelschnitten von v und w in Bezug auf $H(a, b, c) = 0$ vereinigt liegen soll; d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 &= 0 \\ u_h\,(\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) &= 0 \\ v_h\,(\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ finden wir hieraus für den Polarkegelschnitt des Schnittpunktes y von u und v (d. i. für $p_x\,(puv) = 0$) die Gleichung:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_h^2 & b_h^2 & c_h^2 \\ a_{h'}^2 & b_{h'}^2 & c_{h'}^2 \end{vmatrix} u_h v_{h'} = 0.$$

Diese Determinante haben wir so umzuformen, dass in ihr die Coordinaten von y statt derer von u und v vorkommen; wenn wir dann $y_i = x_i$ setzen, so resultirt die gesuchte Gleichung der Grundcurve $p_x^3 = 0$. Zu dem Zwecke betrachten wir die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix},$$

welche in die linke Seite von (12) übergeht, wenn man $y_i = h_i$, $z_i = h_i'$ setzt und mit $u_h v_{h'}$ multiplicirt.

Die Determinante D verschwindet, sobald irgend zwei der Werthsysteme a, b, c oder x, y, z einander gleich werden; sie ist daher eine lineare Combination der beiden Bildungen

$$6\,(xyz)\,.\,i_x i_y i_z = (xyz)\,.\,(abc)\,.\sum_{x,y,z} a_x b_y c_z$$

$$6\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy) = \sum_{u,v,w} (abu)\,(acv)\,(bcw)\,,$$

wo sich die Summenzeichen auf alle verschiedenen Ausdrücke erstrecken, welche durch Vertauschung von x, y, z, aus $a_x b_y c_z$, bez. von u, v, w aus $(abu)\,(acv)\,(bcw)$ entstehen, und wo gesetzt ist:

$$u_1 = (yz)_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2\,, \text{ etc.}$$
$$v_1 = (zx)_1 = z_2 x_3 - x_3 z_2\,, \text{ etc.}$$
$$w_1 = (xy)_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2\,, \text{ etc.}$$

Wir haben sonach die Relation:

$$(13) \qquad D = m\,(xyz)\,.\,i_x i_y i_z + n\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy)\,,$$

wo m und n Zahlenfactoren sind. Zur Bestimmung derselben setzen wir insbesondere

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0; & u_1 = 1, & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ y_1 = 0, & y_2 = 1, & y_3 = 0; & v_1 = 0, & v_2 = 1, & v_3 = 0, \\ z_1 = 0, & z_2 = 0, & z_3 = 1; & w_1 = 0, & w_2 = 0, & w_3 = 1, \end{array}$$

und:

$$a_x^2 = x_1^2, \quad b_x^2 = x_2^2, \quad c_x^2 = x_3^2.$$

Dann wird, da $8\,I\,(a,\ b,\ c)$ gleich der Functionaldeterminante der drei Formen und $H\,(a,\ b,\ c)$ gleich der mit -2 multiplicirten Determinante (5) ist*):

$$(14) \qquad I\,(a,\ b,\ c) = x_1 x_2 x_3\,, \qquad H\,(a,\ b,\ c) = -\,u_1 u_2 u_3\,,$$

und also in (13):

$$(xyz) = 1, \quad i_x i_y i_z = \tfrac{1}{6}, \quad (hyz)\,(hzx)\,(hxy) = -\,\tfrac{1}{6}\,.$$

während die Determinante D vermöge unserer Substitution den Werth 1 annimmt. Wir haben also:

$$6 = m - n\,.$$

Zweitens setzen wir $a_x^2 = x_2 x_3$, $b_x^2 = x_3 x_1$, $c_x^2 = x_1 x_2$; dann wird in gleicher Weise:

$$(15) \qquad I\,(a,\ b,\ c) = \tfrac{1}{4}\,x_1 x_2 x_3\,, \quad H\,(a,\ b,\ c) = \tfrac{1}{2}\,u_1 u_2 u_3\,;$$

*) Vgl. die Anmk. auf p. 520.

während D jetzt den Werth 0 annimmt. Die Gleichung (13) geht sonach über in:

$$0 = m + 2n;$$

und aus den so erhaltenen Gleichungen für m, n findet man: $m = 4$, $n = -2$. Wir haben also das Resultat*):

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4\,(xyz)\,i_x i_y i_z - 2\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy)\;.$$

Setzen wir hierin endlich $y_i = h_i$, $z_i = h_i'$ und multipliciren mit u_h und $v_{h'}$, so erhalten wir links den Ausdruck (12) und rechts:

$$\left\{4(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - 2\,(h''hh')\,(h''h'x)\,(h''xh)\right\}\,.\,u_h v_{h'}\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von h und h' ist dies ferner gleich:

$$\left\{2\,(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')\,(h''h'x)\,(hh''x)\right\}\,(u_h v_{h'} - v_h u_{h'})\,.$$

Trägt man hierin $y_i = (uv)_i$ ein, so sind also *die Gleichung der Polare des Punktes y in Bezug auf die Curve dritter Ordnung, deren* Hesse*sche Curve durch* $I\,(a, b, c) \equiv i_x^3 = 0$, *deren* Cayley'*sche Curve durch* $H\,(a, b, c) \equiv u_h^3 = 0$ *gegeben ist:*

$$2\,(hh'y)\,(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - (hh'y)\,(h''h'x)\,(hh''x)\,(hh'h'') = 0\,.$$

Für $y_i = x_i$ erhalten wir also als *Gleichung der Curve dritter Ordnung, deren Polarennetz mit dem Netze* (3) *zusammenfällt:*

$$(16)\quad p_x^3 \equiv 2\,(hh'x)^2\,i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')\,(hh'x)\,(h'h''x)\,(h''hx) = 0.$$

Ganz in gleicher Weise können wir nun auch die Curve dritter Klasse $u_\pi^3 = 0$ finden, deren Polarkegelschnitte das zu (3) conjugirte Gewebe:

$$\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0$$

bilden. Die Jakobi'sche und die Hermite'sche Curve des letzteren seien gegeben durch die Gleichungen

$$I\,(\alpha, \beta, \gamma) \equiv u_I^3 = 0\,,\quad H\,(\alpha, \beta, \gamma) \equiv H_x^3 = 0\,.$$

Alsdann haben wir als Gleichung dieser Curve:

$$(17)\quad u_\pi^3 \equiv 2\,(HH'u)^2\,H_I H_I' u_I - (HH'H'')(HH'u)(H'H''u)(H''Hu) = 0.$$

Wir können auch hierin die Symbole von $I\,(a, b, c)$ und $H\,(a, b, c)$ einführen, denn die Curven $u_I^3 = 0$, $H_x^3 = 0$ sind bez. identisch mit den Curven $u_h^3 = 0$, $i_x^3 = 0$. Wir haben also, wenn c, c' Zahlenfactoren bedeuten:

---

*) Diese Formel kann man auch mit Hülfe der von Gordan für Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen (x, y, z) gegebenen Reihenentwicklungen ableiten: Math. Annalen, Bd. 5, p. 106.

$$I(a, b, c) = c \,.\, H(\alpha, \beta, \gamma)\,, \quad H(a, b, c) = c' \,.\, I(\alpha, \beta, \gamma)\,.$$

Um c, c' zu bestimmen, betrachten wir wieder das specielle Kegelschnittnetz, dessen Curven ein gemeinsames Polardreieck besitzen:

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0\,,$$

und für welches $I(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ durch (14) bestimmt sind.

Ein Kegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ des conjugirten Gewebes muss mit den Doppellinien $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$, $x_3^2 = 0$ vereinigt liegen, d. h. die Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren; dies Gewebe ist also dargestellt durch:

$$\nu u_1 u_2 + \varrho u_2 u_3 + \sigma u_3 u_1 = 0\,,$$

und wir haben daher wegen (14) und (15):

$$(18) \qquad \begin{cases} I(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{4} H(a, b, c)\,, \\ H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} x_1 x_2 x_3 = \quad \frac{1}{2} I(a, b, c)\,. \end{cases}$$

Es ist daher $c = 2$, $c' = -4$ zu setzen, und für die Symbole I, H, h, i bestehen die Beziehungen:

$$u_I^3 = -\tfrac{1}{4} u_h^3\,, \qquad H_x^3 = \tfrac{1}{2} i_x^3\,.$$

Führen wir mit Hülfe dieser Relationen die Symbole h, i in die Gleichung (17) ein, so erhalten wir endlich als *Gleichung der Curve dritter Klasse, deren Polarkegelschnitte das zu dem Netze* (3) *conjugirte Gewebe bilden, für welche also* $H(a, b, c) = 0$ *die* Hesse*'sche,* $I(a, b, c) = 0$ *die* Cayley*'sche Curve ist:*

$$(19) \quad -\tfrac{1}{8} u_\pi^3 \equiv (i i' u)^2 u_h i_h i'_h + (i i' i'')(i i' u)(i' i'' u)(i'' i u) = 0\,.$$

Die Polare eines beliebigen Punktes y in Bezug auf $p_x^3 = 0$ und die Polare einer beliebigen Geraden v in Bezug auf $u_\pi^3 = 0$ liegen vereinigt, wie aus der Ableitung der Gleichung (19) folgt; d. h. unabhängig von den y und v besteht die Relation:

$$(20) \qquad p_\pi^2 p_y v_\pi = 0\,.$$

Die gewonnenen Resultate können wir benutzen, um die *Resultante der drei Kegelschnitte* a_x^2, b_x^2, c_x^2 aufzustellen. Sollen dieselben nämlich einen Punkt y gemein haben, so ist dieser Punkt doppelt zählend ein Kegelschnitt, welcher mit allen C_2 des vorliegenden Netzes vereinigt liegt, d. h. er bildet einen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes; und wir dürfen $u_\gamma^2 = u_y^2$ setzen. Dann wird aber nach den Gleichungen (18):

$$I(a, b, c) = 2(\alpha\beta x)(\beta y x)(\alpha y x)\,, \quad H(a, b, c) = -4 u_y \,.\, (\alpha\beta y) u_\alpha u_\beta\,.$$

Die Jakobi'sche Curve $i_x^3 = 0$ hat also den Punkt y zum Doppelpunkte, und alle Polarkegelschnitte derselben gehen durch y. Hieraus folgt, dass der Kegelschnitt $u_y^2 = 0$ mit *allen* Kegelschnitten des

Systems der ersten Polaren von $i_x^3 = 0$ vereinigt liegt; d. h. man kann in dem Gewebe $\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0$ eine Curve (nämlich u_y^2) so bestimmen, dass die drei Gleichungen bestehen:

$$\nu i_\alpha^2 i_1 + \varrho i_\beta^2 i_1 + \sigma i_\gamma^2 i_1 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_2 + \varrho i_\beta^2 i_2 + \sigma i_\gamma^2 i_2 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_3 + \varrho i_\beta^2 i_3 + \sigma i_\gamma^2 i_3 = 0.$$

Und durch Elimination von ν, ϱ, σ ergibt sich:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} i_\alpha^2 i_1 & i_\beta^2 i_1 & i_\gamma^2 i_1 \\ i'_{\alpha'}{}^2 i'_2 & i'_{\beta'}{}^2 i'_2 & i'_{\gamma'}{}^2 i'_2 \\ i''_{\alpha''}{}^2 i''_3 & i''_{\beta''}{}^2 i''_3 & i''_{\gamma''}{}^2 i''_3 \end{vmatrix} \equiv \tfrac{1}{6}\,(i i' i'') \begin{vmatrix} i_\alpha^2 & i_\beta^2 & i_\gamma^2 \\ i'_{\alpha'}{}^2 & i'_{\beta'}{}^2 & i'_{\gamma'}{}^2 \\ i''_{\alpha''}{}^2 & i''_{\beta''}{}^2 & i''_{\gamma''}{}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun besteht dualistisch entsprechend zu der für die obige Determinante D gefundenen Relation die Gleichung:

$$D' = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix} = 4\,(uvw)\,u_l v_l w_l - 2\,(Hvw)\,(Hwu)\,(Huv)$$

oder wegen (18):

$$D' = -(uvw)\,u_h v_h w_h - (ivw)\,(iwu)\,(iuv).$$

D' aber gibt die in (21) auftretende Determinante, wenn wir darin u durch i, v durch i', w durch i'' ersetzen. *Die Bedingung dafür, dass die drei Kegelschnitte* $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ *einen Punkt gemein haben (oder dass im conjugirten Gewebe ein doppelt zählender Punkt auftritt) ist also:*

$$(22)\qquad (i i' i'')^2\, i_h i'_h i''_h - (i i' i'')\,(i i' i''')\,(i i'' i''')\,(i' i'' i''') = 0,$$

wo $i_x^3 = 0$ die Jakobi'sche, $u_h^3 = 0$ die Hermite'sche Curve des Netzes darstellt; und dualistisch entsprechend *die Bedingung für das Auftreten einer Doppellinie in dem Netze der Kegelschnitte* a_x^2, b_x^2, c_x^2 *(oder einer gemeinsamen Tangente der Curven des conjugirten Gewebes)**):

$$(23)\quad 2\,(h h' h'')^2\, i_h i_{h'} i_{h''} + (h h' h'')\,(h h' h''')\,(h h'' h''')\,(h' h'' h''') = 0.$$

Wir heben schliesslich noch als Resultat der soeben gelegentlich angestellten Ueberlegungen über das besondere Kegelschnittnetz:

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0$$

die Sätze hervor:

---

*) Die von uns hier betrachteten Bildungen sind sämmtlich (schon wegen ihrer Bedeutung) *Combinanten* des Netzes bez. Gewebes (vgl. p. 303 und 208). Der in Obigem hervortretende Zusammenhang derselben mit der Determinante D ist kein zufälliger; vielmehr hat Gordan nachgewiesen, dass *alle* Combinanten des Netzes als Functionalinvarianten dieser Determinante darstellbar sein müssen: Math. Annalen, Bd. 5, p. 116.

Das conjugirte Gewebe zu einem Netze, dessen Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck haben, besteht aus den die Seiten des Dreiecks berührenden Kegelschnitten.

Das conjugirte Gewebe zu einem Netze, dessen Kegelschnitte drei Punkte gemein haben, besteht aus den Kegelschnitten, welche das durch die Punkte gebildete Dreieck zum Polardreiecke haben.

III. Zur Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung. — Erzeugungsweisen derselben.

Zu jeder Curve dritter Ordnung des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ mit gemeinsamen Wendepunkten gehört eine andere Curve desselben Büschels als deren Hesse'sche, gegeben durch die Gleichung:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta = 0,$$

wo K, L vom dritten Grade in $\varkappa$, λ sind (vgl. Gleichung (3) p. 505). Diese Beziehung zwischen beiden Curven ist aber nicht umkehrbar. Soll nämlich die Hesse'sche Curve von $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ mit $f = 0$ zusammenfallen, so muss $L = 0$ sein, damit die Relation $\Delta_{\varkappa\lambda} = K \cdot f$ bestehen kann. Da aber L die Grössen $\varkappa$, λ in der dritten Dimension enthält, so haben wir den von Hesse gefundenen Satz:

Eine allgemeine Curve dritter Ordnung ist die Hesse'*sche Curve von drei anderen Curven dritter Ordnung.*

Fassen wir nun eine vorliegende Curve als Hesse'sche einer anderen auf, so sind damit die Punkte derselben paarweise einander zugeordnet, und zwar der Art, dass der Polarkegelschnitt des einen Punktes eines Paares im andern Punkte einen Doppelpunkt hat: Es sind, nach unserer früheren Bezeichnung, zwei conjugirte Pole in Bezug auf das Netz der Polarkegelschnitte der gewählten Grundcurve, oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, ein *Polepaar* der Hesse'schen Curve. Aus unserem letzten Satze folgt also:

Man kann eine allgemeine Curve dritter Ordnung $f = 0$ auf drei verschiedene Weisen in Punktepaare (Polepaare) auflösen, so dass die Punkte eines jeden Paares conjugirte Pole in Bezug auf das Netz der Polarkegelschnitte einer Curve $\varphi = 0$ sind, für welche $f = 0$ die Hesse'*sche Curve ist.*)*

Wir haben also auf der Curve drei verschiedene Systeme von Polepaaren. Für die Paare eines Systems gilt nun der folgende wichtige Satz:

Wenn man die Punkte zweier Polepaare desselben Systems kreuzweise verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien auf der Curve, und diese Schnittpunkte bilden ein drittes Polepaar desselben Systems.

*) Vgl. Maclaurin und besonders Hesse a. a. O.

Es seien die Polepaare 1, 1′ und 2, 2′ gegeben; es sollen dann die Linienpaare $\overline{12}$, $\overline{1'2'}$ und $\overline{12'}$, $\overline{1'2}$ sich in zwei Punkten 3 und 3′ schneiden, die wieder ein Polepaar sind. Wir nehmen zum Beweise die Nebenseiten des durch die Linien $\overline{12}$, $\overline{1'2'}$, $\overline{1'2}$, $\overline{12'}$ bestimmten vollständigen Vierecks zu Seiten des Coordinatendreiecks; ferner bestimmen wir die Constanten in den Coordinaten so, dass die Gleichung der einen Seite des Vierseits, etwa $\overline{12}$ wird:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

dann sind nach den Sätzen über das Vierseit (p. 56) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{von } \overline{1'2'}: &\quad x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \text{„ } \overline{1'2}: &\quad x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \text{„ } \overline{12'}: &\; - x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{aligned}$$

und von $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ bez:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Die Coordinaten der Punkte 1, 1′ sind in Folge dieser Festsetzungen:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1 \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = +1; \end{aligned}$$

damit sie also conjugirte Pole eines Kegelschnittes $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ sind, muss $a_{22} - a_{33} = 0$ sein, und ebenso damit 2 und 2′ conjugirte Pole in Bezug auf denselben Kegelschnitt sind: $a_{11} - a_{33} = 0$. Hieraus folgt aber die dritte Gleichung: $a_{11} - a_{22} = 0$, d. h. auch 3, 3′ sind conjugirte Pole für die Curve $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$. *Wenn also zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken eines vollständigen Vierseits conjugirte Pole für einen Kegelschnitt sind, so sind es auch die Punkte des dritten Paares.* Und hieraus ergibt sich unmittelbar der von uns aufgestellte Satz über die Polepaare auf einer Curve dritter Ordnung, da sie als conjugirte Pole in Bezug auf die Kegelschnitte eines Netzes definirt waren.

Aus diesem Satze können wir nun nach dem Vorgange von Schröter eine sehr einfache Construction der Curve dritter Ordnung ableiten. *Eine solche ist nämlich durch drei Polepaare desselben Systems vollständig und eindeutig bestimmt; und zwar kann man diese Polepaare beliebig annehmen.*

Ist für das betreffende System von Polepaaren $\varphi \equiv a_x^3 = 0$ die Gleichung der Grundcurve, auf deren Hesse'scher Curve $f = 0$ die Polepaare liegen sollen, und bezeichnen wir mit x_i, x_i'; y_i, y_i'; z_i, z_i' die Coordinaten der in den drei gegebenen Paaren vorkommenden Punkte, so bestehen die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_1 = 0 & \alpha_y \alpha_{y'} \alpha_1 = 0 & \alpha_z \alpha_{z'} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_2 = 0 & \alpha_y \alpha_{y'} \alpha_2 = 0 & \alpha_z \alpha_{z'} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_3 = 0 & \alpha_y \alpha_{y'} \alpha_3 = 0 & \alpha_z \alpha_{z'} \alpha_3 = 0 . \end{array}$$

Und dies sind 9 lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten von $\varphi = \alpha_x^3$; mit α_x^3 ist aber auch die zugehörige Hesse'sche Curve bestimmt, w. z. b. w. Um einzusehen, dass die Gleichungen (1) wirklich von einander unabhängig sind, d. h. nicht unendlich viele Lösungen zulassen, kann man folgenden Weg einschlagen. Wir wählen die drei Punkte x, y, z zu Ecken eines Coordinatendreiecks; durch die zugeordneten Punkte x', y', z' sind dann aus (1) die folgenden Gleichungen für φ gegeben:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \alpha_{x'} \alpha_1^2 = 0 & \alpha_{y'} \alpha_2 \alpha_1 = 0 & \alpha_{z'} \alpha_3 \alpha_1 = 0 \\ \alpha_{x'} \alpha_1 \alpha_2 = 0 & \alpha_{y'} \alpha_2^2 = 0 & \alpha_{z'} \alpha_3 \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{x'} \alpha_1 \alpha_3 = 0 & \alpha_{y'} \alpha_2 \alpha_3 = 0 & \alpha_{z'} \alpha_3^2 = 0 . \end{array}$$

In diesem Gleichungssysteme kommen die Coëfficienten α_{111}, α_{222}, α_{333} nur in den Diagonalgleichungen vor, werden also am Schlusse einzeln bestimmt. Die übrigen α bestimmen sich dann (abgesehen von α_{123}, durch welches alle anderen α sich ausdrücken) paarweise aus zwei der Gleichungen (2), z. B. α_{112} und α_{122} aus:

$$\begin{aligned} \alpha_{112} x_1' + \alpha_{122} x_2' + \alpha_{123} x_3' &= 0 \\ \alpha_{112} y_1' + \alpha_{122} y_2' + \alpha_{123} y_3' &= 0 . \end{aligned}$$

Dabei muss jedoch $x_1' y_2' - x_2' y_1'$ von Null verschieden sein; es darf also die Verbindungslinie der zu zweien der Punkte x, y, z gehörigen Punkte x', y', z' nicht durch den dritten Punkt gehen. *Alle Bedingungen für die Ausführbarkeit der Operationen sind somit erfüllt, wenn man festsetzt, dass von den 6 Punkten der 3 Paare niemals drei zusammengehörige auf einer Geraden liegen sollen.*

Geht man nun von den drei gegebenen Paaren 11', 22', 33' aus, so kann man beliebig viele neue Paare nach dem soeben gegebenen Satze construiren, dass die Verbindungslinien zweier Paare sich auf der Curve und zwar in einem neuen Paare schneiden.*) Man erhält also z. B. durch die Schnittpunkte der Linien 12, 1'2' und 12', 1'2 ein neues Paar 44'; ebenso aus den Paaren 11', 33' ein neues Paar 55', dann aus 33', 44' ein Paar 66', aus 55', 22' ein neues Paar 77', u. s. w.

Man kann hiernach, wenn drei Polepaare desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, beliebig viele Punkte der Curve construiren.

---

*) Diese Construction ist von Schröter angegeben: Ueber Curven 3ter Ordnung, Math. Annalen, Bd. V, p. 50; vgl. auch Clebsch: Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven 3ter Ordnung, ib. p. 422.

Und zwar leistet diese von Schröter angegebene Construction an Einfachheit das Aeusserste, was man verlangen kann: man erhält jeden neuen Punkt der Curve als Kreuzungspunkt zweier Geraden, ohne weiterer Hülfslinien zu bedürfen.

Gegenüber diesen drei Systemen von Polepaaren zeigen in Bezug auf das Reelle und Imaginäre die ein- und zweitheiligen Curven dritter Ordnung ein wesentlich verschiedenes Verhalten. Man übersieht dies leicht mit Hülfe des bei den Kegelschnittnetzen (p. 516) gegebenen Satzes, dass sich die Tangenten der Curve in den Punkten eines Polepaares wieder in einem Punkte der Curve, „dem zugehörigen *Tangentialpunkte*", schneiden; ein Satz, welcher sich übrigens aus dem Hesse-schen Satze über das von zwei Polepaaren gebildete Vierseit unmittelbar ergibt, wenn man die beiden Paare einander unendlich benachbart annimmt. Gehen wir umgekehrt von einem Punkte 0 als Tangentialpunkte aus, so gehören ihm vier Punkte 1, 2, 3, 4 zu: die Berührungspunkte der vier von ihm an die Curve gelegten Tangenten. Nehmen wir etwa den Punkt 1 heraus, so kann zu ihm als conjugirter Pol in einem der drei Systeme nur einer der Punkte 2, 3, 4 gehören. Also sind die Punkte 2, 3, 4 diejenigen, welche bez. mit 1 in den drei Systemen von Polepaaren ein Paar bilden; und wir haben den Satz:

Die vier Berührungspunkte der vier von einem Punkte der Curve an dieselbe zu legenden Tangenten bilden sechs Polepaare; und zwar gehören je zwei sich ergänzende Paare zu einem der drei möglichen Systeme.

Letzteres folgt daraus, dass immer zwei der sechs Polepaare 12, 13, 14, 23, 24, 34, die keinen Punkt gemeinsam haben, zu demselben Systeme gehören müssen, und man so die Paare nur in einer Weise einander zuordnen kann. Da in den vier Berührungspunkten der Tangenten die Grundcurve von dem Polarkegelschnitte des Tangentialpunktes geschnitten wird, können wir den Satz unter Berücksichtigung des Hesse'schen Satzes vom vollständigen Vierseit (p. 527) auch folgendermassen aussprechen:

Der Polarkegelschnitt eines Punktes der Curve dritter Ordnung schneidet dieselbe in vier Punkten, deren kreuzweise Verbindungslinien sich wieder auf der Curve treffen.

Von den betrachteten vier Tangenten gehen nun, wenn ihr gemeinsamer Schnittpunkt auf dem Zuge mit drei Wendungen liegt, immer zwei an das Oval, welches bei einer zweitheiligen Curve vorhanden ist, denn an ein Oval kann man, wie an einen Kegelschnitt, von jedem Punkte ausserhalb desselben zwei Tangenten ziehen: An den Zug mit drei Wendungen kann man also von einem Punkte desselben nur noch zwei Tangenten ziehen. Fehlt aber das Oval (also bei einer eintheiligen Curve), so werden zwei der vier Tangenten

imaginär. An eine eintheilige Curve dritter Ordnung kann man daher von einem ihrer Punkte aus nur zwei *reelle* Tangenten ziehen. Von einem Punkte des Ovals dagegen kann man überhaupt keine reelle Tangente an die Curve legen, denn eine solche müsste das Oval immer noch in einem zweiten reellen Punkte schneiden; was nicht möglich ist, da die Gerade dann 4 Schnittpunkte mit der C_3 haben würde. Aus diesen Ueberlegungen in Verbindung mit dem Vorhergehenden ergibt sich für die Vertheilung der Polepaare auf der Curve das Folgende.

Eine *zweitheilige* Curve kann man mittelst der Schröter'schen Construction auf drei Arten in reeller Weise erzeugen. Bei zweien derselben durchläuft ein Punkt des Polepaares das Oval, der andere den Zug mit drei Wendungen; bei der dritten Erzeugungsart bilden die Punkte des Ovals eine Schaar von Paaren, die Punkte des unendlichen Zuges eine andere. Bei einer *eintheiligen* Curve bleibt, indem das Oval fortfällt, nur die letzte Erzeugungsweise als einzig reelle bestehen; eine solche Curve kann daher nur auf *eine* Art aus reellen Polepaaren zusammengesetzt werden.*) —

Für den hier betrachteten Büschel der vier Tangenten gilt noch der folgende fundamentale Satz:

Das Doppelverhältniss der vier Tangenten, welche man von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe legen kann, ist constant für alle Punkte der Curve.

Wir geben hier einen einfachen geometrischen Beweis, der von Salmon herrührt, indem wir einen directen algebraischen auf später verschieben. Von einem Punkte 0 der Curve ziehen wir die vier Tangenten

$$01, \quad 02, \quad 03, \quad 04$$

an dieselbe; ihre Berührungspunkte 1, 3, 3, 4 liegen auf dem Polarkegelschnitte von 0. Auf denselben Kegelschnitt projiciren wir von einem zu 0 benachbarten Punkte 0′ der Curve aus die Berührungspunkte 1′, 2′, 3′, 4′ der vier von 0′ ausgehenden Tangenten. Diese Projectionspunkte (d. h. die Schnittpunkte letzterer vier Tangenten mit der C_2) sind dann von den Punkten 1, 2, 3, 4 nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden, wenn 0 von 0′ um eine Grösse erster Ordnung entfernt ist. Da ferner der Polarkegelschnitt von 0 die Grundcurve in 0 berührt, d. h. (bis auf Grössen zweiter Ordnung) auch durch 0′ geht, so haben die Strahlen von 0 nach 1, 2, 3, 4 (bis auf Grössen zweiter Ordnung) dasselbe Doppelverhältniss,

*) Es knüpfen sich hieran weitere Folgerungen über die Abhängigkeit der Gestalt der Cayley'schen Curve von der der Hesse'schen etc. Vgl. darüber Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 9 ff.

wie die Strahlen von $0'$ nach $1', 2', 3', 4'$, oder von $0'$ nach $1, 2, 3, 4$. Das Doppelverhältniss der vier Tangenten wird somit nicht geändert, wenn man von Punkt zu Punkt auf der Curve fortschreitet; es muss also für die ganze Curve constant sein, q. e. d.

In demselben finden wir somit eine für die Curve charakteristische Constante: Man wird nur solche Curven dritter Ordnung linear in einander transformiren können, bei denen dies Doppelverhältniss denselben Werth hat. Eine für die Curve ebenfalls charakteristische Constante haben wir schon bei anderer Gelegenheit gefunden; es ist die Zahl $\frac{b}{a}$ in der kanonischen Form der Curvengleichung (p. 510):

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0\,. \tag{3}$$

Daraus, dass von den Constanten der Curve durch Coordinatenveränderung alle bis auf diese eine $\frac{a}{b}$ zerstört werden können, folgt gleichzeitig, dass der Werth jenes Doppelverhältnisses nur von dieser Grösse $k = \frac{b}{a}$ abhängig sein kann. Dies wird in der That durch die folgende Betrachtung bestätigt. Wir bilden das Doppelverhältniss z. B. für die vier Tangenten, die von einem Wendepunkte ausgehen, und von denen eine mit der Wendetangente zusammenfällt. Ein reeller Wendepunkt ist z. B. gegeben durch die Coordinaten (vgl. p. 511): $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. Die Gleichung seiner ersten Polare zerfällt in die der Wendetangente:

$$x_1 + x_2 - 2kx_3 = 0 \tag{4}$$

und in die der zugehörigen harmonischen Geraden:

$$x_1 - x_2 = 0\,. \tag{5}$$

Die Schnittpunkte der letzteren Linie mit der Grundcurve, d. h. die Berührungspunkte der drei vom Wendepunkte ausgehenden Tangenten, erhält man also aus (3) für $x_1 = x_2$, d. i. durch die Gleichung:

$$2x_1^3 + x_3^3 + 6kx_1^2x_3 = 0\,. \tag{6}$$

Das gesuchte Doppelverhältniss ist nun gleich demjenigen, welches diese drei Punkte zusammen mit dem Schnittpunkte der harmonischen Geraden und der vierten Tangente, der Wendetangente, bilden. Für diesen Schnittpunkt haben wir aber wegen (4) und (5) die Coordinaten:

$$\varrho x_1 = \varrho x_2 = 1\,, \quad \varrho x_3 = \frac{1}{k}\,.$$

Die Coordinaten der vier Punkte sind nur von k abhängig, und somit auch ihr Doppelverhältniss, wie behauptet wurde. Besser gestaltet sich auch diese Darstellung in der Theorie der ternären cubischen Formen; das

Doppelverhältniss und die Constante k erscheinen dann beide abhängig von der *absoluten Invariante* der Curve.*) —

Die Untersuchungen über Polepaare auf der Curve dritter Ordnung, welche uns hier beschäftigten, unterscheiden sich wesentlich von den Betrachtungen, welche wir bisher über die Geometrie auf einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung angestellt haben. In der That lassen sie sich nicht unmittelbar auf Curven höherer Ordnung übertragen, denn eine solche kann im Allgemeinen nicht als Hesse'sche Curve einer anderen angesehen werden. Auf die Theorie der Schnittpunktsysteme einer Curve dritter Ordnung mit anderen Curven wollen wir hier auch nicht weiter eingehen, wir werden darauf später unter Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen zurückkommen. Wir behandeln hier nur zwei darauf bezügliche Probleme:

1) die Lage solcher Punkte auf der Curve, in denen Kegelschnitte mehrpunktig berühren können; und
2) die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curve aus einem Kegelschnittbüschel und einem ihm projectivischen Strahlbüschel, woran wir dann noch die Besprechung der sogenannten Grassmann'schen Erzeugungsweise anknüpfen.

Stellen wir die Forderung, dass ein Kegelschnitt die Curve dritter Ordnung berühre, wo er ihr begegnet, so haben wir zunächst folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Der Kegelschnitt berührt in 3 Punkten einfach,
2) „ „ „ „ „ 2 „ 2-punktig.

Alle anderen Möglichkeiten erscheinen als Grenzfälle dieser beiden. In letzteren sind je drei Bedingungen gegeben; es gibt also noch doppelt unendlich viele Kegelschnitte, welche ihnen genügen. Im ersten Falle können wir daher noch zwei Berührungspunkte willkürlich annehmen und nach der Lage des dritten fragen. Derselbe bestimmt sich durch den Satz:

Die Tangentialpunkte der drei Punkte, in denen ein Kegelschnitt die Curve dritter Ordnung einfach berührt, liegen auf einer Geraden.

Der Beweis ist folgender: Sind A, B, C die drei Berührungspunkte, A, B, Γ ihre Tangentialpunkte (Schnittpunkte ihrer Tangenten mit der Curve), so haben wir drei Curven dritter Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten, nämlich:

1) die gegebene Curve
2) ihre drei Tangenten in A, B, C,
3) den berührenden Kegelschnitt und die Linie $\overline{\mathsf{AB}}$.

*) Vgl. den Schluss des Abschnittes V in dieser Abtheilung. — Die absolute Invariante ist dann eine symmetrische Function der 6 verschiedenen Werthe, welche das Doppelverhältniss von vier Punkten annehmen kann.

Die 8 ihnen gemeinsamen Punkte sind: die Punkte A, B und die je doppelt zählenden Berührungspunkte A, B, C. Die drei Curven müssen daher auch den 9ten Punkt Γ gemein haben (vgl. p. 428), q. e. d. Sind nun die Punkte A, B gegeben, so ist es leicht, den Punkt C zu construiren. Wir ziehen die Tangenten in A und B, welche die Curve noch in A und B' treffen. Die Linie $\overline{AB}$ liefert dann als dritten Schnittpunkt den Punkt Γ, und von letzterem aus haben wir nur die vier Tangenten an die Curve zu legen: Jeder Berührungspunkt ist ein Punkt C. Doch nur drei von ihnen geben eine eigentliche Lösung. Bezeichnen wir nämlich durch D den dritten Schnittpunkt der Curve mit $\overline{AB}$, so liefert die Linie $\overline{AB}$, doppelt genommen, auch einen in den drei Punkten A, B, D berührenden Kegelschnitt; und dass die Tangente von D in der That auch durch Γ geht, folgt aus einem unserer ersten Sätze über Curven dritter Ordnung (vgl. p. 503).

Es gibt also drei verschiedene Systeme von je zweifach unendlich vielen Kegelschnitten, welche eine Curve dritter Ordnung in drei Punkten berühren. *)

Diese drei Systeme sind wegen des Zusammenhanges der Polepaare mit den Tangentialpunkten ebenso von einander vollkommen getrennt, wie die drei verschiedenen Systeme von Polepaaren auf der Curve. Ebenso wie wir hier wieder auf die Polepaare geführt werden, kommen wir bei den zweimal zweipunktig berührenden Kegelschnitten auf die Wendepunkte. Es seien A und B die beiden Berührungspunkte. Wir legen durch dieselben drei einander unendlich benachbarte Gerade, welche die Curve noch in drei weiteren, unendlich benachbarten Punkten schneiden; letztere müssen dann in gerader Linie liegen, d. h. einen Wendepunkt bilden. Denn wir haben wieder drei Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte und also auch den 9ten gemein haben, nämlich:

1) die gegebene Curve,
2) die drei benachbarten Geraden durch A und B,
3) die Wendetangente und den berührenden Kegelschnitt.

Hieraus folgt der Satz:

Jede durch einen Wendepunkt der Curve dritter Ordnung gehende Gerade bestimmt durch ihre beiden anderen Schnittpunkte mit derselben zwei solche Punkte, in denen gleichzeitig ein Kegelschnitt zweipunktig berühren kann; und weiter, da die Curve neun Wendepunkte hat:

---

*) Vgl. Plücker und Hesse a. a. O.; über die nähere Beziehung dieser Kegelschnitte zu der Curve z. B. Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

Es gibt neun verschiedene Systeme von Kegelschnitten, welche eine Curve dritter Ordnung in zwei Punkten zweipunktig berühren.

Die beiden Berührungspunkte A, B fallen insbesondere zusammen für die von dem Wendepunkte ausgehenden Tangenten an die Curve. Im Berührungspunkte einer solchen kann daher ein Kegelschnitt fünfpunktig berühren. Da es neun Wendepunkte gibt und von jedem drei Tangenten an die Curve, haben wir also den Satz:*)

Es gibt 27 Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung fünfpunktig berühren; ihre Berührungspunkte sind die 27 Schnittpunkte der 9 harmonischen Geraden mit der Curve. —

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der Chasles'schen Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung (vgl. p. 375). Nehmen wir auf derselben vier Punkte beliebig an, so können wir durch sie noch unendlich viele Kegelschnitte legen. Wir wählen zwei beliebige heraus: $\varphi = 0$ und $\psi = 0$; ein jeder von ihnen schneidet die Curve noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinien bez. $A = 0$ und $B = 0$ sein mögen. Wir haben dann wieder drei Curven dritter Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten, nämlich:

1) die Grundcurve,
2) den Kegelschnitt $\varphi = 0$ und die Gerade $B = 0$,
3) „ „ „ $\psi = 0$ „ „ „ $A = 0$.

Dieselben müssen auch den 9ten Punkt, d. h. den Schnittpunkt von $A = 0$ und $B = 0$ gemein haben. Wir erhalten somit den Satz:

Jeder Kegelschnitt eines Büschels, dessen vier Grundpunkte auf der Curve dritter Ordnung liegen, schneidet letztere in zwei beweglichen Punkten, deren Verbindungslinie immer durch einen festen Punkt der Curve geht: „den jenen vier Grundpunkten gegenüber liegenden Punkt".

Dieser Satz ist übrigens auch eine unmittelbare Folge des Restsatzes: der Strahlbüschel ist mit dem Kegelschnittbüschel äquivalent (vgl. p. 434). Beide Büschel sind aber auch zu einander projectivisch**), denn, ist $f = 0$ die Gleichung der Grundcurve, so muss sein:

$$f = \varkappa\varphi \, . \, B - \lambda\psi \, . \, A \, ,$$

wo $\varkappa$, λ Constante sind; die Gleichung $f = 0$ entsteht daher durch Elimination von μ aus den beiden anderen:

$$\varphi + \mu\psi = 0 \, , \quad \lambda A + \mu\varkappa B = 0 \, .$$

Nimmt man also vier beliebige Punkte einer Curve dritter Ordnung zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, so gibt ihr gegenüberliegender

---

*) Aus der auf p. 461 gegebenen Formel würde sich statt 27 zunächst 36 für die Zahl dieser C_2 ergeben; darunter sind aber die 9 Wendetangenten (jede doppelt zählend) mit als Kegelschnitte gezählt.

**) Dies folgt auch schon aus der eindeutigen Beziehung beider Büschel auf einander (vgl. p. 435, Anmerkung).

Punkt den Scheitel eines Strahlbüschels, welches mit dem Kegelschnittbüschel zusammen die Curve dritter Ordnung nach Chasles'*scher Weise erzeugt.*

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich nun *die Construction der Curve dritter Ordnung aus 9 gegebenen Punkten* ausführen.*) Die neun Punkte dürfen natürlich nicht so liegen, dass durch sie noch unendlich viele Curven dritter Ordnung hindurchgehen, denn sonst würde die Lösung unbestimmt werden. Wie dann die Lösung selbst zu geschehen hat, mag hier nur angedeutet werden. Vier der gegebenen Punkte wählt man zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels; man kann dann zunächst den diesen vier Punkten auf der zu construirenden Curve gegenüberliegenden Punkt M construiren; und zwar ergibt sich dieser als vierter Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, deren andere drei Schnittpunkte gegeben sind. Ist so der Punkt M gefunden, so kann man leicht einen Strahlbüschel durch M dem Kegelschnittbüschel derartig zuordnen, dass aus beiden die gesuchte Curve nach Chasles-scher Weise erzeugt wird, dass also je zwei Punkte als Schnittpunkte eines Strahles mit einem Kegelschnitte gefunden werden (vgl. p. 51).

An die hier behandelte Aufgabe schliesst sich sofort die folgende an: *Es sind 8 Punkte beliebig gegeben, man soll den zugehörigen neunten Punkt construiren, welcher mit ihnen zusammen eine Curve dritter Ordnung nicht bestimmt.* Die Lösung beruht wieder wesentlich darauf, dass man zu vier der gegebenen Punkte für zwei verschiedene Curven des durch die 8 Punkte gehenden Büschels den gegenüberliegenden Punkt construirt und dann den leicht zu erweisenden Satz anwendet, dass *der Ort der Punkte, welche vier Basispunkten eines Büschels von Curven 3. Ordnung auf den verschiedenen Curven dieses Büschels gegenüberliegen, ein Kegelschnitt ist, welcher durch die fünf andern Basispunkte geht.* —

Den von uns besprochenen Erzeugungsarten von Schröter und Chasles steht eine andere gegenüber, die von Grassmann**) gefunden und auch auf Curven beliebiger Ordnung angewandt wurde; dieselbe ist von wesentlich anderem, gewissermassen mechanischem Charakter. Wir wollen sie zunächst für Kegelschnitte aussprechen, für welche sie schon von Maclaurin und Taylor in der Form angegeben wurde. Wir haben hier den Satz***):

*) Vgl. Chasles: Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points, Comptes rendus, Mai 1853. Man findet die Lösung der Aufgabe auch eingehend behandelt in den erwähnten Werken von Cremona und Durège.

**) Grassmann: Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, sowie verschiedene Aufsätze in Crelle's Journal, Bd. 31, 36, 42, 52.

***) Vgl. auch Chasles: Aperçu historique, Note XI.

Wenn ein Punkt x sich so bewegt, dass seine Verbindungslinien mit zwei festen Punkten a, b bez. zwei feste Gerade α, β in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie immer durch einen festen Punkt c geht, so beschreibt der Punkt x einen Kegelschnitt (vgl. Fig. 66).

Fig. 66.

Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten der Punkte x, a, b, c bez. mit x_i, a_i, b_i, c_i und die der Geraden α, β bez. mit α_i, β_i, so sind die Coordinaten der Verbindungslinie von x und a:

$$u_1 = (xa)_1, \quad u_2 = (xa)_2, \quad u_3 = (xa)_3,$$

wo zur Abkürzung:

$$(xa)_1 = x_2 a_3 - x_3 a_2, \quad (xa)_2 = x_3 a_1 - x_1 a_3, \quad (xa)_3 = x_1 a_2 - x_2 a_1.$$

Ebenso sind die Coordinaten der Verbindungslinie von x und b:

$$v_1 = (xb)_1, \quad v_2 = (xb)_2, \quad v_3 = (xb)_3,$$

und also die des Schnittpunktes von u und α:

$$(7) \qquad \begin{aligned} y_1 &= (xa)_2\alpha_3 - (xa)_3\alpha_2 = [(xa), \alpha]_1 \\ y_2 &= (xa)_3\alpha_1 - (xa)_1\alpha_3 = [(xa), \alpha]_2 \\ y_3 &= (xa)_1\alpha_2 - (xa)_2\alpha_1 = [(xa), \alpha]_3, \end{aligned}$$

und ebenso die Coordinaten des Schnittpunktes von v und β:

$$(8) \qquad z_i = [(xb), \beta]_i.$$

Die Punkte y, z und c sollen nun in gerader Linie liegen; d. h. es besteht die Gleichung:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} [(xa), \alpha]_1 & [(xb), \beta]_1 & c_1 \\ [(xa), \alpha]_2 & [(xb), \beta]_2 & c_2 \\ [(xa), \alpha]_3 & [(xb), \beta]_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

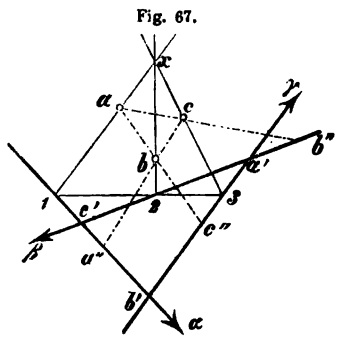
Diese ist aber von der zweiten Ordnung in x, stellt also in der That einen Kegelschnitt dar. Das Resultat kann man auch leicht geometrisch verificiren. Der Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte c nämlich schneidet auf α und β zwei perspectivisch liegende Punktreihen aus; die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte bez. mit a und b geben zwei projectivische Strahlbüschel mit den Scheiteln a, b; *der Schnittpunkt x zweier entsprechender Strahlen der letzteren beschreibt also in der That einen Kegelschnitt.* Man erkennt gleichzeitig, dass letzterer durch die Punkte a, b und den Schnittpunkt von α und β geht. Ferner muss er auch den Schnittpunkt von $\overline{ac}$ und β, sowie den von $\overline{bc}$ und α enthalten; denn für diese Punkte ist die Forderung

des Satzes jedenfalls erfüllt. Es sind so auch 5 Punkte für den Kegelschnitt unmittelbar gegeben.

Für Curven dritter Ordnung können wir die Grassmann'sche Erzeugungsweise folgendermassen aussprechen:

Ein Punkt x beschreibt eine Curve dritter Ordnung, wenn seine Verbindungslinien mit drei festen Punkten a, b, c einzeln drei feste Gerade α, β, γ in drei Punkten schneiden, welche auf einer (beweglichen) Geraden liegen. Diese Gerade umhüllt dabei eine Curve dritter Klasse (vgl. Fig. 67).

Fig. 67.



Der letzte Theil des Satzes ist nur eine Folge des ersten; denn die bewegliche Gerade bewegt sich eben so, dass ihre Schnittpunkte mit drei festen Geraden α, β, γ, verbunden mit drei festen Punkten a, b, c drei Gerade ergeben, welche sich in einem (beweglichen) Punkte x schneiden; und diese Eigenschaft entspricht dualistisch vollkommen der dem Punkte x auferlegten Forderung.

Die Gleichung der betreffenden Curve dritter Ordnung können wir direct aufstellen. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Linien $\overline{xa}$ und α, sowie $\overline{xb}$ und β sind wieder durch die Gleichungen (7) und (8) gegeben. Analog sind die Coordinaten des Schnittpunktes von $\overline{xc}$ und γ:

$$t_i = [(xc), \gamma]_i . \tag{10}$$

Da nun die Punkte y, z, t immer in gerader Linie liegen sollen, so folgt:

$$\begin{vmatrix} [(xa), \alpha]_1 & [(xb), \beta]_1 & [(xc), \gamma]_1 \\ [(xa), \alpha]_2 & [(xb), \beta]_2 & [(xc), \gamma]_2 \\ [(xa), \alpha]_3 & [(xb), \beta]_3 & [(xc), \gamma]_3 \end{vmatrix} = 0; \tag{11}$$

und dies ist die Gleichung unserer Curve dritter Ordnung. Wir können hier auch leicht neun Punkte angeben, durch welche die Curve bestimmt wird; es sind die folgenden (vgl. Fig. 67):

1) die Punkte a, b, c,
2) die Ecken a', b', c' des Dreiecks α, β, γ,
3) die Punkte a'', b'', c'', in welchen die Geraden α, β, γ beziehungsweise von den Geraden $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ getroffen werden.

Man erkennt in der That leicht bei Betrachtung der betreffenden Figur, dass die Forderungen unseres Satzes von selbst erfüllt sind, sobald x in einem dieser neun Punkte liegt. Die letzteren haben hier eine besondere Lage gegen einander, jedoch keineswegs der Art,

dass durch sie noch unendlich viele Curven dritter Ordnung gehen könnten. Es ergibt sich dies einfach daraus, dass wir in (11) eben auf eine ganz bestimmte Curve geführt sind, oder auch, wie folgt. Durch die acht Punkte

$$a'', b'', c''; \quad a', b', c'; \quad a, b$$

geht ausser einer allgemeinen Curve dritter Ordnung noch die aus den Geraden α, β, ab bestehende; der neunte Punkt, welchen beide gemein haben, ist aber der als Schnittpunkt von α und β doppelt zählende Punkt c', also *nicht* der Punkt c, q. e. d.

Von besonderem Interesse ist hier die Frage, wie man auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung diejenigen Elemente finden kann, aus welchen sie vermöge des Grassmann'schen Mechanismus entsteht.*) Hiermit wird dann zugleich gezeigt, dass *jede* Curve dritter Ordnung auf solche Weise erzeugt werden kann. Wir knüpfen an das soeben erwähnte System von neun Punkten an. Die charakteristische und ausreichende Eigenschaft desselben besteht darin, dass die Punkte a, b, c und a', b', c' zwei Dreiecke bilden, deren Ecken auf der Curve liegen und deren Seiten sich entsprechend in a'', b'', c'' auf der Curve schneiden. Sehen wir also die letzteren drei Punkte als beliebig auf der Curve gegeben an, so haben wir die Aufgabe zu lösen:

Es soll ein Dreieck gefunden werden, dessen Ecken a, b, c auf der Curve dritter Ordnung liegen, und dessen Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte a'', b'', c'' gehen.

Hat man zwei Dreiecke dieser Art gefunden, so begründen sie zusammen eine Grassmann'sche Erzeugung der Curve, und zwar auf doppelte Art; denn es ist noch gleichgültig, welches von ihnen man als Dreieck a, b, c und welches man als Dreieck α, β, γ ansieht. Wir werden zeigen, dass man zu drei Punkten a'', b'', c'' immer vier Dreiecke finden kann; diese bilden sechs Paare, und man hat also den Satz:

Drei beliebig auf der Curve dritter Ordnung gegebene Punkte führen auf zwölf Arten, die Curve nach Grassmann'*scher Methode zu erzeugen.*

Die erwähnten vier Dreiecke ergeben sich folgendermassen. Wir verbinden die Punkte b'' und c'' durch eine Gerade, welche die Curve noch in d treffen möge; ferner werde die Curve von der Linie $\overline{a''d}$ in a''' geschnitten. Von letzterem Punkte a''' aus ziehen wir eine Tangente an die Curve, deren Berührungspunkt a sei; die Verbindungslinien von a mit b'' und c'' mögen ferner die Punkte c und b auf ihr ausschneiden: Wir behaupten, dass alsdann auch die Gerade $\overline{a''b}$

---

*) Vgl. Clebsch: Math. Annalen, Bd. V, p. 424.

durch c geht, dass also die Punkte a, b, c ein Dreieck der gesuchten Art bilden. In der That haben wir drei Curven dritter Ordnung:

1) die gegebene Grundcurve,
2) die Linien $\overline{da''a'''}$, $\overline{b''ac}$, $\overline{c''ab}$,
3) die Linien $\overline{db''c''}$, $\overline{a'''aa}$, $\overline{a''b}$,

welche sich in den Punkten a'', b'', c'', d, b, a''' und dem doppelt zählenden a, also in acht Punkten schneiden; sie müssen daher auch den neunten Punkt c gemein haben. Da wir nun von a''' aus vier Tangenten an die Curve legen können, und da, wie sich in ähnlicher Weise leicht einsehen lässt, die Wiederholung der Construction von einem analog wie a''' gefundenen Punkte b''' oder c''' nichts Neues ergibt, so haben wir den Satz:

Es gibt vier Dreiecke, deren Ecken auf der Curve dritter Ordnung liegen, und deren Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte gehen.

Da ferner die Punkte a, b, c als Berührungspunkte der von a''', b''', c''' ausgehenden Tangenten gefunden waren, so folgt:

Aus einem Dreiecke der Art findet man die drei anderen, indem man zu den Ecken desselben die drei Systeme conjugirter Pole sucht, welche ihnen auf der Curve als Hesse*'scher dreier anderen Curven entsprechen.* Durch diese Beziehung der Grassmann'schen Erzeugungsweise zu den Systemen conjugirter Polepaare ist der Zusammenhang derselben mit der oben besprochenen Schröter'schen Erzeugungsweise gegeben. Man erkennt sofort, dass *dieselbe Curve, welche wir nach* Grassmann'*scher Weise aus den Punkten a, b, c und den Linien α, β, γ erhalten, auch nach* Schröter*'scher Weise aus den drei Punktepaaren a-a', b-b', c-c' construirbar ist.*

In der That überzeugt man sich auch leicht direct, dass diese Punktepaare conjugirte Polepaare sind. Zu dem Zwecke hat man nur zu zeigen, dass die Schnittpunkte der Linien ab' und $a'b$, oder ac' und $a'c$ oder bc' und $b'c$ wieder auf der Curve liegen; dies ist aber offenbar der Fall, denn verbindet man z. B. den Schnittpunkt der letzteren beiden Linien mit a, b, c, so liegen die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien auf einer Geraden, wie es die Grassmann'sche Erzeugung verlangt, nämlich der Geraden γ. Während also der Grassmann'sche Mechanismus die Curve durch einen continuirlichen Process entstehen lässt, gibt gleichzeitig die Schröter'sche Methode ein Mittel, um beliebig viele discrete Punkte der Curve linear zu construiren.

Wenn so der gegenseitige Zusammenhang zwischen diesen beiden Erzeugungsweisen hergestellt ist, wird man weiter verlangen, dieselben wieder auf die Chasles'sche Erzeugungsweise zurückzuführen; dies kann in folgender Weise geschehen. Man halte in Fig. 67 den

Punkt 3 fest und benutze die Punkte a, b, 3 und die Linien α, β, um einen Kegelschnitt nach Grassmann zu erzeugen, der Art dass die Verbindungslinien des erzeugenden Punktes x mit a, b die Linien α, β bez. in Punkten treffen, deren Verbindungslinie durch 3 geht. Dieser Kegelschnitt geht dann jedenfalls auch durch den Schnittpunkt d der Linien ab' und ba', denn dessen Verbindungslinien mit a, b schneiden die Linien α, β eben in b', a', welche, ebenso wie 3, auf γ liegen. Der Punkt d ist daher immer derselbe, wo auch 3 auf der Linie γ liegen mag; lässt man also 3 sich auf γ bewegen und construirt für jede Lage von γ in angegebener Weise einen Kegelschnitt, so bilden alle diese Kegelschnitte einen Büschel, dessen Basispunkte in a, b, c', d liegen. Jetzt nehmen wir noch den Punkt c hinzu. Jeder Lage von 3 entspricht auch ein Strahl durch c: die Verbindungslinie von 3 mit c, welche auch durch x geht. Durch Vermittlung des beweglichen Punktes 3 ist also der durch c gehende Strahlbüschel projectivisch auf den soeben erwähnten Kegelschnittbüschel bezogen; und *die Schnittpunkte x entsprechender Curven beider Büschel erzeugen wieder dieselbe Curve, welche wir vorhin auf andere Weise erhalten hatten.* Statt des Punktes c kann man dabei selbstverständlich auch den Punkt a oder b auszeichnen. Zu bemerken ist noch, dass der hier benutzte Kegelschnittbüschel zu dem Strahlbüschel in besonderer Lage ist, insofern ein Basispunkt des ersteren mit dem Träger des letzteren auf der construirten Curve ein Polepaar bildet; man wird also nicht umgekehrt aus den gegebenen Elementen einer beliebigen Chasles'schen Erzeugungsweise unmittelbar die Elemente einer Grassmann'schen oder Schröter'schen Erzeugungsweise für dieselbe Curve finden können.*)

*) Ganz analoge Ueberlegungen gelten übrigens für die Grassmann'sche und Chasles-Jonquières'sche Erzeugungsweise einer Curve beliebiger Ordnung. Lässt man z. B. in Fig. 67 den Punkt c sich auf einer neuen Geraden δ bewegen und construirt zu jedem Punkte dieser Geraden die ihm als Punkt c zugehörige C_3, so bilden alle diese ∞^1 C_3 einen Büschel, dessen 9 Basispunkte leicht anzugeben sind. Einen dazu projectivischen Strahlbüschel erhält man in folgender Weise: Man verbinde jeden Punkt c von δ mit einem festen Punkte d und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie und einer festen Geraden ε verbinde man mit einem neuen festen Punkte e. Der Büschel durch e ist dann projectivisch zu der Punktreihe auf δ, also auch zu obigem Curvenbüschel. Man erhält so die Erzeugung einer Curve C_4, welche sich auch leicht in Grassmann'scher Weise aussprechen lässt. Noch einfacher gestaltet sich dies, wenn man die Curve durch zwei C_2-Büschel bestimmt. Ein solcher entsteht aus Fig. 66, wenn man c sich auf einer Geraden γ bewegen lässt, ein zweiter aus einer entsprechenden Figur, in der a, b, c, α, β durch $a', b', c', \alpha', \beta'$ ersetzt sind, wenn c' auf γ' fortrückt. Die projectivische Beziehung zwischen beiden kann man dadurch herstellen, dass man vermöge eines beliebigen festen Punktes die Punktreihen auf γ und γ' perspectivisch auf einander bezieht. — Es lässt sich zeigen, dass man so jede Grassmann'sche Erzeugungsweise auf eine Chasles'sche zurückführen, d. h. aus den Elementen der einen die der andern bestimmen kann.

IV. Die ternären cubischen Formen.

Wir haben in Betreff der vollständigen algebraischen Erledigung gewisser Probleme über die Curven dritter Ordnung schon wiederholt auf die Theorie der ternären cubischen Formen verwiesen. In der That werden wir in ihr nicht nur eine algebraisch elegante Darstellung der von uns behandelten Fragen finden, sondern auch über die bisherigen Grenzen unserer Betrachtungen hinausgeführt werden; wie dies ja auch bei den ternären quadratischen Formen der Fall war. Während so die Formentheorie zunächst aus der Nothwendigkeit entsprang, die Probleme der projectivischen Geometrie algebraisch zu formuliren, tritt nunmehr überhaupt eine umgekehrte Wirkung der Algebra auf die Geometrie hervor: Es ist die Aufgabe der letzteren, die Begriffe der ersteren sich anzueignen und so den eigenen Gesichtskreis mannigfach zu erweitern, wie es z. B. besonders durch Aufnahme des Begriffes der Polaren bereits geschehen ist. Im Folgenden werden wir also die Theorie der cubischen Formen*) zunächst so weit verfolgen, als es zur Erledigung des Wendepunktproblems erforderlich ist; die weiteren Bildungen und deren Zusammenhang unter einander werden wir dann jedoch nur flüchtig berühren, zumal da ihre geometrische Bedeutung noch nicht vollkommen erfasst ist. Dass diese Theorie durch Gordan's Beweis von der Endlichkeit des zugehörigen Formensystems in sich einen gewissen Abschluss gefunden hat, haben wir schon früher hervorgehoben (p. 274).

Für die *ternären cubischen* Formen haben wir zunächst zwei Gruppen von Bildungen zu betrachten, von denen die eine aus der Theorie der *binären cubischen*, die andere aus der Theorie der *ternären quadratischen* Formen herübergenommen ist.

Bezeichnen wir eine binäre cubische Form symbolisch durch

---

*) Die Anfänge dieser Disciplin finden sich in den Arbeiten von Hesse über die Wendepunkte. Nachdem sodann Aronhold im 39. Bd. von Crelle's Journal (1849) besonders die beiden Invarianten gegeben hatte, wurden diese, sowie die Covarianten und zugehörigen Formen dritter und sechster Ordnung bez. Klasse von Cayley im dritten Memoir upon Quantics (1856) entwickelt. Die Grundlage einer einheitlichen Ausführung bildet jedoch die Arbeit von Aronhold (Crelle's Journal, Bd. 55, 1858), in der die Resultate von 1849 im Zusammenhange dargelegt und erweitert wurden. Für die Entwicklung der Theorie sind ferner zu erwähnen: Aufsätze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 1 und 6, Gordan, ib. Bd. 1, Gundelfinger, ib. Bd. 4 und 5, sowie Cayley: Seventh Memoir upon Quantics, Philos. Transactions 1861. — Vgl. eine Zusammenstellung der verschiedenen im Gebrauche befindlichen Bezeichnungsweisen: Math. Annalen, Bd. 6, p. 439, Anmerkung.

$f = a_\xi^3$, so besteht bekanntlich (vgl. p. 219) das Formensystem von f aus den Bildungen*):

$$(1)\quad \begin{cases} \tau = (ab)^2 a_\xi b_\xi = \tau_\xi^2, \qquad Q = (c\tau)\, c_\xi^2 \tau_\xi = (ab)^2 (ca)\, c_\xi^2 b_\xi, \\ \qquad\qquad B = (\tau\tau')^2 = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \end{cases}$$

Aus diesen Formen ergeben sich sofort solche, welche einer ternären cubischen Form

$$(2)\qquad f = a_x^3$$

angehören, durch Anwendung unseres Uebertragungsprincipes (vgl. p. 276); nämlich:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Theta = (abu)^2 a_x b_x \\ Q = (abu)^2 (cau)\, c_x^2 b_x \\ F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu). \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der durch Nullsetzen dieser Formen dargestellten Gebilde ergibt sich unmittelbar aus dem Uebertragungsprincipe und ist uns schon theilweise bekannt:

Die Gleichung $F = 0$ ist die Gleichung der Curve $f = 0$ in Liniencoordinaten (vgl. p. 278).

Die Gleichung $\Theta = 0$ gibt für constante x: die Gleichung der ersten Polare von x in Liniencoordinaten; für constante u: den Ort der Pole x, deren erste Polaren die Linie u berühren, „die Poloconik der Geraden u“ (vgl. p. 317).

Für die letztere Curve folgt ferner wegen der Bedeutung des Punktepaares $\tau = 0$ bei den binären Formen aus dem Uebertragungsprincipe der Satz: *Die Schnittpunkte der Poloconik einer Geraden u mit dieser Geraden liegen äquianharmonisch zu den Schnittpunkten von u mit der Grundcurve $f = 0$.*

Die Bedeutung von $Q = 0$ finden wir durch die Bemerkung, dass Q aus der Bildung

$$Q' = (abu)^2 (auv)\, b_x$$

für $v_i = c_i c_x^2$ entsteht. Es ist aber $Q' = 0$ die Bedingung, dass der Punkt x und der Schnittpunkt der Linien u, v einander conjugirt seien in Bezug auf die Poloconik der Geraden u; setzen wir also für v die Coordinaten $c_i c_x^2$ der linearen Polare von x, so folgt:

Vermöge der Gleichung $Q = 0$ wird jeder Geraden u eine Curve dritter Ordnung zugeordnet als Ort der Punkte x, deren lineare Polare von der Linie u in einem Punkte getroffen wird, welcher zu x in Bezug auf die Poloconik von u conjugirt ist; und ferner wegen der Bedeutung

*) Es sind die bei den binären Formen früher mit Δ und R bezeichneten Formen hier τ und B genannt, um Verwechslungen mit den bei den ternären cubischen Formen so genannten Bildungen zu verhüten.

des Punkte-Tripels $Q = 0$ bei binären Formen und dessen Beziehung zu $\tau = 0$: *Die Linie u wird von der ihr so zugehörigen Curve in drei Punkten geschnitten, welche in Bezug auf ihre Schnittpunkte mit ihrer Poloconik harmonisch sind zu ihren Schnittpunkten mit der Grundcurve.*

Von der Form Q werden wir jedoch im Folgenden keinen Gebrauch weiter machen. Von besonderer Wichtigkeit dagegen ist für uns die Form Θ. Wir bezeichnen dieselbe symbolisch durch:

$$\Theta = \Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = \Theta'_x{}^2 u_{\vartheta'}{}^2\,, \tag{4}$$

so dass nur das Product zweier Factoren Θ und zweier Factoren ϑ eine wirkliche Bedeutung erhält, nämlich:

$$2\,\Theta_i\Theta_k\vartheta_l\vartheta_m = (ab)_i\,(ab)_k\,(a_l b_m + b_l a_m)\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von a und b ist also:

$$(abu)^2\,a_i b_k = \Theta_i\Theta_k u_\vartheta{}^2\,,$$

und hieraus ergibt sich eine einfachere Darstellung der Formen Q und F; denn *man kann hiernach in einer Form mit dem Factor* $(abu)^2$ *denselben immer durch* $u_\vartheta{}^2$ *ersetzen, wenn man gleichzeitig die in der Form noch linear vorkommenden a und b beide durch Symbole* Θ *ersetzt.**) Es ist daher auch:

$$Q = u_\vartheta{}^2\,(c\Theta u)\,c_x{}^2\Theta_x\,, \quad F = u_\vartheta{}^2\,(cdu)^2\,(\Theta cu)\,(\Theta du)$$

und, da F noch den Factor $(cdu)^2$ enthält, nach Wiederholung desselben Verfahrens:

$$F = u_\vartheta{}^2 u_{\vartheta'}{}^2\,(\Theta\Theta' u)^2\,. \tag{5}$$

Dies ist aber, gleich Null gesetzt, nichts anderes, als die Gleichung des in Punktcoordinaten gegebenen Kegelschnittes $\Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = 0$ in Liniencoordinaten, also ist auch für $\Theta_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i \partial x_k}$ **):

$$F = -2\begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Θ (und damit auch F) können wir auch nicht symbolisch definiren, da Θ die Liniengleichung für den Kegelschnitt $a_y{}^2 a_x = \Sigma f_{ik} y_i y_k$ liefert, wo $f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$; es wird (vgl. p. 317):

*) Durch Polarenbildung folgt hieraus auch, dass: $(abu)\,(abv)\,a_i b_k = \Theta_i\Theta_k u_\vartheta v_\vartheta$.

**) Wegen des Zahlenfactors vgl. die Theorie der quadratischen Formen, p. 278 und 285.

$$(7) \qquad \Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Geometrisch können wir die Gleichung (5) in folgender Weise auffassen. $F = 0$ ist die Gleichung der Poloconik von u in Liniencoordinaten; da diese Liniencoordinaten aber selbst wieder gleich den u gesetzt sind, so ist es die Bedingung, dass die Poloconik von u diese Linie selbst berührt.

*Hiernach sind die Tangenten der Grundcurve dadurch definirt, dass sie von ihren Poloconiken berührt werden.**) —

Die andere Gruppe zunächst zu betrachtender Formen entspringt aus den ternären quadratischen nach dem Grundsatze, dass die Invarianten und zugehörigen Formen der Polaren bez. Covarianten und Zwischenformen der Grundform ergeben (vgl. p. 316). Das System einer ternären quadratischen Form a_x^2 besteht aus den Bildungen:

$$\varphi = (abu)^2, \qquad A = (abc)^2.$$

Beim Uebergange zu cubischen Formen haben wir nur jedem Symbole $a, b \ldots$ entsprechend einen linearen symbolischen Factor $a_x, b_x \ldots$ hinzuzufügen und erhalten demnach die Bildungen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Theta &= (abu)^2\, a_x b_x, \\ \Delta &= (abc)^2\, a_x b_x c_x, \end{aligned}$$

von denen die erstere mit der oben so bezeichneten Form übereinstimmt. Die zweite ist die uns bekannte Hesse'*sche Determinante*. Sie entsteht auch aus Θ, wenn man $u_i u_k = c_i c_k c_x$ setzt; sie kann daher mit Einführung der symbolischen Bezeichnung (4) durch

$$(9) \qquad \Delta = \Theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x$$

dargestellt werden.

Eine Covariante von niedrigerer Ordnung als Δ kann es überhaupt nicht geben, wovon man sich leicht durch allgemeinere Ueberlegungen überzeugt. Ist nämlich eine Covariante einer Form n^{ter} Ordnung vom Grade $\varkappa$ in den Coëfficienten, so enthält sie $\varkappa$ verschiedene Symbole, jedes n-mal, also $\varkappa n$ Symbolreihen. Dieselbe Zahl muss aber gleich $3\lambda + \mu$ sein, wenn μ die Ordnung der Covariante und λ die Zahl der in ihr vorkommenden symbolischen Determinantenfactoren bedeutet. Wir haben also:

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu.$$

*) Dies folgt auch direct aus der Theorie der binären cubischen Form, denn $\tau = 0$ hat immer und nur gleichzeitig mit $f = 0$ zwei gleiche Wurzeln.

Ebenso findet man für eine zugehörige Form von der Klasse ν und dem Grade $\varkappa$ mit λ Determinantenfactoren:

$$\varkappa n = 3\lambda - \nu,$$

und endlich für eine Zwischenform von der Ordnung μ, der Klasse ν, dem Grade $\varkappa$:

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu - \nu.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich für den Fall, dass n durch 3 theilbar ist, der Satz: *Ist die Ordnung einer ternären Grundform durch 3 theilbar, so besitzt sie nur solche Covarianten und zugehörige Formen, deren Ordnungs- bez. Klassenzahl auch durch 3 theilbar ist, und nur solche Zwischenformen, für welche dasselbe für die Differenz dieser beiden Zahlen gilt.* Aehnliches gilt überhaupt für die zu einer Grundform mit r homogenen Veränderlichen gehörigen invarianten Bildungen, wenn die Ordnung der Grundform durch r theilbar ist.

Analoge, allgemeine Betrachtungen können wir für Invarianten anstellen. Da eine solche sich immer aus Factoren des Typus (abc) zusammensetzt (vgl. p. 272), so muss sie wenigstens vom dritten Grade sein, in welchem Falle nur die Bildung $(abc)^n$ möglich ist. Dieselbe ändert aber, wenn n ungerade ist, ihr Zeichen durch Vertauschung zweier Symbole, verschwindet also dann indentisch: *Eine Form ungerader Ordnung besitzt keine Invariante dritten Grades.* Ferner muss für eine Invariante vom Grade $\varkappa$ mit λ Determinantenfactoren immer die Relation bestehen ($\mu = \nu = 0$ in obigen Gleichungen): $\varkappa n = 3\lambda$; d. h. *Eine Invariante vom Grade $\varkappa$ enthält $\frac{1}{3}\varkappa n$ Determinantenfactoren.*

Eine Invariante der cubischen Form muss also mindestens vom vierten Grade sein und vier Determinantenfactoren enthalten. In der That können wir eine solche aus vier Symbolen a, b, c, d direct bilden: Da kein Determinantenfactor dasselbe Symbol zweimal enthalten kann, ist der erste Factor jedenfalls (abc); die drei andern Factoren müssen jeder einmal d enthalten; und es bleibt mithin für die Vertheilung der übrigen Symbole a, b, c in denselben, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, nur eine Möglichkeit. Bezeichnen wir die so entstandene Invariante mit Aronhold durch S, so haben wir*):

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd). \tag{10}$$

---

*) Es ist dies die schon früher erwähnte Invariante (vgl. p. 522). Ausgerechnet findet man nach Aronhold für $f = \Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h$:

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2} S = {} & (a_{122} a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222} a_{333} - a_{223}^2)(a_{111} a_{133} - a_{113}^2) \\ & + (a_{223} a_{333} - a_{233}^2)(a_{111} a_{122} - a_{112}^2) + (a_{222} a_{333} - a_{223} a_{233})(a_{112} a_{113} - a_{111} a_{123}) \\ & + (a_{122} a_{333} + a_{223} a_{133} - 2 a_{123} a_{233})(a_{112} a_{123} - a_{113} a_{122}) \\ & + (a_{122} a_{233} + a_{133} a_{222} - 2 a_{123} a_{223})(a_{113} a_{123} - a_{112} a_{133}).\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Bedingung $S = 0$ werden wir erst später untersuchen.

Die so gefundene Invariante können wir aber auch aus der Form Θ ableiten; denn wegen (4) ist:

$$(abu)\,(abv)\,a_x b_x = \Theta_x{}^2 u_\vartheta v_\vartheta\,,$$

und wenn wir hierin die u durch c, die v durch d, die x durch die Unterdeterminanten von c und d ersetzen, so entsteht links wieder S; es ist also:

$$S = (\Theta c d)^2\, c_\vartheta d_\vartheta\,, \tag{11}$$

ein Ausdruck, welcher wieder aus $\Theta'_x{}^2 u_{\vartheta'}{}^2 = (cdu)^2 c_x d_x$ abgeleitet werden kann, indem man die x durch ϑ, die u durch Θ ersetzt. Es ist sonach auch:

$$S = \Theta_{\vartheta'}{}^2 \Theta'_\vartheta{}^2\,. \tag{12}$$

Hieraus können wir ferner für S eine nicht symbolische Definition ableiten. Es ist nämlich nach (12):

$$S = (\Theta_1\vartheta_1' + \Theta_2\vartheta_2' + \Theta_3\vartheta_3')^2\,(\Theta_1'\vartheta_1 + \Theta_2'\vartheta_2 + \Theta_3'\vartheta_3)^2,$$

worin:

$$\Theta_i\Theta_k\vartheta_m\vartheta_n\,.\,\Theta_m'\Theta_n'\vartheta_i'\vartheta_k' = \tfrac{1}{4}\,\frac{\partial^4\Theta}{\partial x_i\partial x_k\partial u_m\partial u_n}\cdot\tfrac{1}{4}\,\frac{\partial^4\Theta}{\partial u_i\partial u_k\partial x_m\partial x_n}\,.$$

Wir erhalten also für S auch die vierfache Summe:

$$S = \tfrac{1}{16}\sum_{ikmn}\frac{\partial^4\Theta}{\partial x_i\partial x_k\partial u_m\partial u_n}\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial x_m\partial x_n\partial u_i\partial u_k}\,. \tag{13}$$

Aus S entspringt nun eine zugehörige Form, wenn wir eine Symbolreihe, etwa d, durch Liniencoordinaten u ersetzen; es kommt wegen (10) und (11):

$$\begin{aligned}\Sigma &= (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu) = \tfrac{1}{4}\sum\frac{\partial S}{\partial a_{ikh}}\,u_i u_k u_h\\ &= (\Theta c u)^2 c_\vartheta u_\vartheta\,,\end{aligned} \tag{14}$$

also eine zugehörige Form dritter Klasse und dritten Grades. Eine solche war aber durch die linke Seite der Gleichung der Cayley'schen Curve gegeben ((1) auf p. 517); da es ferner wegen der nothwendigen Anordnung der Symbolreihen — ähnlich wie oben bei S — nur *eine* zugehörige Form dritten Grades geben kann, so stellt uns $\Sigma = 0$ die Gleichung der Cayley'schen Curve dar. Es wird dies dadurch bestätigt, dass dieselbe für ein Kegelschnittnetz:

$$\varkappa a_x{}^2 + \lambda b_x{}^2 + \mu c_x{}^2 = 0$$

durch $(abu)\,(acu)\,(bcu) = 0$ gegeben war (vgl. 520). Setzen wir hierin nämlich $a_1 a_x{}^2$ für $a_x{}^2$, $b_2 b_x{}^2$ für $b_x{}^2$, $c_3 c_x{}^2$ für $c_x{}^2$, wo dann a, b, c Symbole der Grundform sind, so erhalten wir für das Polarennetz von f:

$$a_1 b_2 c_3 (abu)(acu)(bcu) = 0;$$

und der links stehende Ausdruck ist in der That wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c gleich $\frac{1}{6}\Sigma$.

Die Gleichung $\Sigma = 0$ *stellt also die* Cayley*'sche Curve dar.*

Umgekehrt kann man natürlich auch S aus Σ ableiten: Setzen wir $\Sigma = u_s{}^3$, so ist:

$$S = a_s{}^3. \tag{15}$$

Die bisherigen Bildungen zeigen schon die besondere Bedeutung der Form Θ. Wir wollen zunächst für dieselbe noch zwei im Folgenden nützliche Sätze beweisen. Wir bemerken zuvor, dass aus einer Form φ von der μ^{ten} Ordnung und der ν^{ten} Klasse, immer eine neue mit φ' zu bezeichnende Form

$$\varphi' = \frac{1}{\mu\nu}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial u_3}\right\}$$

hergeleitet werden kann, welche die Invarianteneigenschaft besitzt. Denn setzen wir symbolisch $\varphi = r_x{}^\mu u_\varrho{}^\nu$, so haben wir:

$$\varphi' = r_\varrho r_x{}^{\mu-1} u_\varrho{}^{\nu-1};$$

und dasselbe gilt für die durch Fortsetzung des Processes entstehenden Formen:

$$\varphi'' = r_\varrho{}^2 r_x{}^{\mu-2} u_\varrho{}^{\nu-2}, \text{ u s. w.}$$

Unterwerfen wir nun Θ der angedeuteten Operation, so kommt wegen (4):

$$\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta = \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(aba)\, b_x + (abb)\, a_x\right\},$$

was identisch verschwindet. Also:

Die aus Θ *abgeleitete Form* Θ' *verschwindet identisch.*

Dann müssen aber wegen $\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta$ alle Coëfficienten $\Theta_\vartheta \Theta_i \vartheta_k$ verschwinden, und somit folgt:

Jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor Θ_ϑ *enthält, verschwindet identisch.*

Der zweite uns beschäftigende Satz über Θ bezieht sich auf die Bildung:

$$\begin{aligned} P = \Theta_{\vartheta'}{}^2 u_\vartheta{}^2 \Theta'_x{}^2 &= \tfrac{1}{4}\,\Sigma \frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u_i \partial u_k} \\ &= (abu)^2 a_{\vartheta'} b_{\vartheta'} \Theta'_x{}^2 = (cdu)^2 c_{\vartheta'} d_{\vartheta'} \Theta'_x{}^2 \\ &= (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x; \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die Identität an:

$$(cdu)\, b_x = (bcd)\, u_x + (bdu)\, c_x - (bcu)\, d_x.$$

Es wird dann:

$$P = (abc)(abd)(cdu)\, a_x \left[(bcd)\, u_x + (bdu)\, c_x - (bcu)\, d_x\right].$$

Hier hat rechts das erste Glied den wirklichen Factor u_x; das zweite aber ist mit dem dritten identisch, da beide durch Vertauschung der Symbole c, d in einander übergehen. Es ist also:

$$P = M \cdot u_x + 2\,Q,$$

wo:

$$M = (abc)(abd)(bcd)(cdu)\,a_x \tag{16}$$

$$Q = (abc)(abd)(cdu)(bdu)\,a_x c_x\,. \tag{17}$$

Vertauschen wir in Q die Symbole a und c und addiren den so entstehenden Ausdruck von Q zu dem obigen, so wird:

$$2\,Q = (abc)(bdu)\,a_x c_x\,[(abd)(cdu) - (cbd)(adu)]\,.$$

Der in der Klammer stehende Theil ist nach einer bekannten Identität gleich $(acd)(bdu)$, und daher wird:

$$2\,Q = (abc)(acd)(bdu)^2 a_x c_x\,.$$

Dies geht aber in $-P$ über, wenn man b mit c vertauscht; daher ist: $P = \frac{1}{2} M \cdot u_x$.

In dem Ausdrucke M vertauschen wir nun a mit c und mit d und addiren die so entstehenden Ausdrücke zu M; wir erhalten dann:

$$3\,M = (abc)(abd)(bcd)\,[(cdu)\,a_x - (adu)\,c_x - (cau)\,d_x]\,.$$

Hier ist der eingeklammerte Theil nach der bekannten Identität gleich $(acd)\,u_x$; daher wird:

$$3\,M = (abc)(abd)(bcd)(acd) \cdot u_x = S \cdot u_x\,, \tag{18}$$

und folglich:

$$P = \tfrac{1}{6}\,S \cdot u_x^2\,. \tag{19}$$

Wir sprechen dies in dem Satze aus:

Die aus Θ abgeleitete Form

$$P = \Theta_{\vartheta'}{}^2 \Theta'_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x$$

hat den Werth $\frac{1}{6} S \cdot u_x^2$.

Geometrisch können wir diese Formel leicht auffassen, wenn wir beachten, dass P nichts anderes ist als die Invariante a_α^2 für die beiden Kegelschnitte $a_x^2 \equiv \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0$, und $u_\alpha^2 \equiv \Theta'_x{}^2 u_{\vartheta'}{}^2 = 0$. Dabei ist a_x^2 und u_α^2 für dieselbe Form Θ geschrieben, aber in a_x^2 ist $\Theta = 0$ als Gleichung der Poloconik von u, in u_α^2 als Liniencoordinatengleichung des Polarkegelschnittes von x gedacht. In (19) liegt also der Satz (vgl. p. 385): *Der Polarkegelschnitt von x liegt mit der Poloconik von u vereinigt, sobald x mit u vereinigt liegt; dagegen auch ohne letztere Bedingung, wenn S verschwindet.*

Ganz ähnlich können wir die Gleichung (18) interpretiren. Aus (16) erkennt man nämlich, dass M nichts anderes als der Ausdruck $a_s^2 u_s a_x$ ist, denn wir haben ($\Sigma = u_s^3$ gesetzt):

$$3v_s{}^2u_s = (abc)\{(abv)(acv)(bcu) + (bcv)(abv)(acu) + (acv)(bcv)(abu)\},$$
$$= 3(abc)(abv)(bcv)(acu),$$

und dies geht in M über, wenn man a durch d, v durch a ersetzt und mit a_x multiplicirt. In (18) liegt daher der schon früher angewandte Satz*):

Der Polarkegelschnitt eines Punktes x in Bezug auf die Grundcurve und der einer Geraden u in Bezug auf die Cayley'*sche Curve sind in vereinigter Lage, wenn u und x vereinigt liegen; jedoch auch ohne diese Bedingung, wenn S verschwindet.*

Die Gleichungen (18) und (19) sind nur specielle Fälle einer allgemeineren Regel, welche folgendermassen lautet:

Enthält die symbolische Darstellung einer Form zwei Factoren von S, etwa (abc) (abd) und ausserdem die Reihen c, d in einem symbolischen Determinantenfactor vereinigt, so ist die Form durch S theilbar.

Jedes Product der bezeichneten Art nämlich besteht aus einer Summe von Gliedern der Form:

$$(abc)(abd)(cdu)\, a_i b_k c_l d_m \,.\, E$$

wo E die Symbole a, b, c, d nicht mehr enthält, und wo die u entweder eine andere Symbolreihe oder Liniencoordinaten bedeuten. Dieses Glied wird nun immer durch S theilbar sein, sobald dies mit dem Ausdrucke

$$L = (abc)\,(abd)\,(cdu)\, a_x b_y c_z d_t$$

der Fall ist. Da aber letzterer für a und b symmetrisch ist, so entsteht er durch Polarenbildung aus der Form

$$L' = (abc)\,(abd)\,(cdu)\, a_x b_x c_z d_t;$$

und wir haben daher nur zu beweisen, dass diese den Factor S enthält. In L' vertauschen wir c, d und addiren die so entstehende Bildung zu L'; dann kommt:

$$2L' = (abc)\,(abd)\,(cdu)\, a_x b_x\,(c_z d_t - d_z c_t)$$
$$= (abc)\,(abd)\,(cdu)\,(cdv)\, a_x b_x\,,$$

wenn $v_i = (zt)_i$ gesetzt wird. Dieser Ausdruck entsteht aber aus

$$P = (abc)\,(abd)\,(cdu)^2\, a_x b_x\,,$$

wenn wir die Gleichung des Poles der Geraden v in Bezug auf $P = 0$

*) Vgl. p. 522. Die aus den Kegelschnitten $a_x{}^2 = 0$, $b_x{}^2 = 0$, $c_x{}^2 = 0$ abgeleitete Form $H(a, b, c) = (abu)\,(acu)\,(bcu)$ ist gleich $a_1 b_2 c_3\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$, wenn man sie für die Polarkegelschnitte der Coordinatenecken in Bezug auf $a_x{}^3 =$ bildet, also gleich $\frac{1}{6}\Sigma$. Daher der Factor $\frac{1}{6}$ in Gleichung (11) auf p. 522 statt des Factors 3 in Gleichung (18).

bilden. Da nun P nach (18) den Factor S hat, so gilt dasselbe auch für L', q. e. d. —

Mit den Formen Θ, Q, F, S, Σ sind die einfachsten Bildungen erschöpft; wir sind durch ihre Betrachtung gleichzeitig in den Stand gesetzt, *den syzygetischen Büschel* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ näher zu studiren, wozu wir jetzt übergehen. Wir beginnen damit, die uns bekannten Formen (F und Q schliessen wir hier jedoch aus) statt für f, für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ zu bilden.

Zu dem Zwecke ist die Einführung des sogenannten *δ-Processes* nützlich, von dem wir schon früher nachgewiesen haben, dass er die Invarianteneigenschaft einer Form φ des zu f gehörigen Systems nicht stört (p. 268). Dieser Process besteht darin, dass man φ nach den Coëfficienten a_{ikh} von f differentiirt, mit den entsprechenden Coëfficienten α_{ikh} von Δ multiplicirt und die Producte addirt; d. h. *er ist definirt durch die Gleichung:*

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh},$$

wo sich die Summe auf alle Combinationen der Indices i, k, h bezieht. Bezeichnen wir nun mit $\varphi_{\varkappa\lambda}$ die Form, welche zu $\varkappa f + \lambda\Delta$ in derselben Beziehung steht wie φ zu f, so erhalten wir nach dem Taylor'schen Satze für $\varphi_{\varkappa\lambda}$ eine nach Potenzen von $\varkappa$, λ fortschreitende Reihenentwicklung, deren Coëfficienten φ_i aus einander in bekannter Weise durch Differentiationsprocesse entstehen. Diese letzteren aber werden wir später durch δ-Processe ersetzen lernen, und somit haben wir zunächst den Einfluss des Processes δ auf f, Δ, Θ, S, Σ zu untersuchen.*)

Der Definition nach ist nun:

$$\delta f = \Delta. \tag{20}$$

Um den Einfluss des δ-Processes auf einen complicirteren *symbolischen* Ausdruck φ festzustellen, bemerken wir, dass jede in φ enthaltene Symbolreihe ein lineares homogenes Vorkommen der Coëfficienten a_{ikh} in φ anzeigt. Man sieht daraus, dass der Process der Differentiation auf die Summe der Ausdrücke führt, welche entstehen, wenn man nur bezüglich nach einer solchen Reihe differentiirt; es ist:

$$\delta\varphi\,(a, b; c\ldots) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} + \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b_{ikh}} \alpha_{ikh} + \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial c_{ikh}} \alpha_{ikh} + \cdots$$

Also: *Aus einer Form φ entsteht die Form $\delta\varphi$, wenn man in der*

*) Beide Processe unterscheiden sich dadurch, dass bei jenen Differentiationen die α_{ikh} als von den a_{ikh} unabhängig angesehen werden, was beim δ-Processe nicht geschieht. Der letztere ist von Aronhold eingeführt.

symbolischen Form von φ der Reihe nach jede Symbolreihe durch eine Symbolreihe von Δ ersetzt und die Summe der erhaltenen Ausdrücke bildet.

Um dann statt der Symbole α von

(21) $$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x = \alpha_x^3 = \beta_x^3 \ldots$$

die Symbole a, b, c der Grundform f einzuführen, hat man zu beachten, dass wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c in Δ

$$\alpha_i \alpha_k \alpha_h = \tfrac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = \tfrac{1}{6} (abc)^2 \, \Sigma a_i b_k c_h$$
$$= (abc)^2 \, a_i b_k c_h$$

ist. *Kommt daher in einem symbolischen Producte das Symbol α vor, so geschieht die Einführung von Symbolen a, b, c der Grundform dadurch, dass man statt des dreimal vorkommenden α einmal a, einmal b und einmal c schreibt und mit $(abc)^2$ multiplicirt.*

Die Anwendung des δ-Processes auf Δ ergibt also nach der ersteren Regel zunächst:

$$\delta \Delta = \delta \left\{(abc)^2 a_x b_x c_x\right\} = 3\,(ab\alpha)^2 \, a_x b_x \alpha_x ,$$

und dann durch Anwendung der zweiten Regel, wenn wir für α Symbole c, d, e von f einführen:

$$\delta \Delta = 3\,(abc)\,(abd)\, a_x b_x e_x \,(cde)^2 .$$

Der hier rechts stehende Ausdruck entsteht aber aus P, wenn man $u_i = e_i$ setzt und mit e_x multiplicirt; es ist deshalb nach Gleichung (19), da $e_x^3 = f$:

(22) $$\delta \Delta = 3\,(ab\alpha)^2 \, a_x b_x \alpha_x = \tfrac{1}{2} S \,.\, f.$$

Die Anwendung des Processes δ auf die Covariante Δ führt also auf die Form f zurück, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ S.

Hieraus geht mit Rücksicht auf (20) hervor, dass auch die wiederholte Anwendung des Processes δ auf Δ zu keinen neuen Covarianten führen kann. Alle dadurch entstehenden Covarianten müssen lineare Functionen von f und Δ sein, und die Coëfficienten derselben sind Invarianten, welche durch wiederholte Anwendung des δ-Processes auf S erzeugt werden.

Der Ausdruck $(ab\alpha)^2 \, a_x b_x \alpha_x$ ist nun nichts anderes als die eine simultane Invariante der Polarkegelschnitte von x in Bezug auf $f = 0$ und $\Delta = 0$. In (22) liegt also der Satz: *Wenn x ein Punkt einer Curve dritter Ordnung ist, so kann man dem Polarkegelschnitte von x in Bezug auf dieselbe Dreiecke umschreiben, welche Polardreiecke des Polarkegelschnittes von x in Bezug auf die* Hesse'*sche Curve sind, und letzterem Dreiecke einschreiben, welche Polardreiecke des ersteren sind. Dies gilt für* j e d e n *Punkt x, wenn die Invariante S verschwindet.*

Gehen wir auf den Fall $S = 0$ etwas genauer ein. Zu den Kegelschnitten des Netzes $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ stehen nach unsern früheren Untersuchungen zweifach unendlich viele in der besagten Beziehung; und diese bilden „das conjugirte Gewebe", lassen sich also in der Form $\varkappa u_\beta^2 + \lambda u_\gamma^2 + \mu u_\delta^2 = 0$ darstellen, wenn $u_\beta^2 = 0$, $u_\gamma^2 = 0$, $u_\delta^2 = 0$ drei beliebige Curven des Gewebes sind. Die Kegelschnitte $\Theta \equiv (abu)^2 a_x b_x = 0$ hängen dagegen im Allgemeinen von zwei Parametern quadratisch ab, während ihre Gleichung in Punktcoordinaten $a_y^2 a_x = 0$ diese Parameter linear enthält. Wenn nun $S = 0$ ist, so muss daher das quadratische Vorkommen von x_1, x_2, x_3 nur scheinbar sein; letzteres wird aber nur möglich, wenn alle Kegelschnitte des Gewebes ein gemeinsames Polardreieck haben*); denn dann lassen sie sich in der Form darstellen:

$$\varkappa u_1^2 + \lambda u_2^2 + \mu u_3^2 = 0,$$

und in Punktcoordinaten für $\varkappa\lambda = m$, $\lambda\mu = k$, $\mu\varkappa = l$:

$$k y_1^2 + l y_2^2 + m y_3^2 = 0,$$

wo dann k, l, m drei neue, ebenfalls linear vorkommende Parameter sind. In diesem Falle besteht aber das conjugirte Netz $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ des Gewebes $\Theta = 0$ aus den Kegelschnitten durch die Ecken des dem Gewebe gemeinsamen Polardreiecks; dieselben haben also drei Punkte gemein, d. h. die Curve $\Delta \equiv \alpha_y^3 = 0$ hat drei Doppelpunkte, besteht aus drei Geraden (p. 382). Da ferner die Hesse'sche Curve des Gewebes $\Theta = 0$ zugleich Cayley'sche Curve des conjugirten Netzes ist (vgl. p. 521), so haben wir den Satz:

Die Bedingung $S = 0$ sagt aus, dass die Hesse*'sche Curve von $f = 0$ in drei Gerade zerfällt. Die* Cayley*'sche Curve besteht alsdann aus den drei Doppelpunkten der* Hesse*'schen; und das von letzterer gebildete Dreieck ist Polardreieck in Bezug auf alle Polarkegelschnitte der Grundcurve.* Aus dem letzten Theile dieses Satzes folgt ferner, *dass sich die Gleichung der Grundcurve, wenn S verschwindet, in die Form transformiren lässt:*

---

*) Genauer stellt sich der Beweis, wie folgt: Die Behauptung des Textes können wir auch dahin aussprechen, dass *es kein anderes C_2-Netz gibt, bei dem durch zwei beliebige Punkte nur eine Curve geht und auch zwei beliebige Gerade nur von einer Curve berührt werden, als dasjenige, in welchem alle C_2 ein gemeinsames Polardreieck haben.* Beweis: Alle durch einen beliebigen Punkt x gehenden C_2 bilden einen Büschel von C_2, die jedenfalls ein gemeinsames Polardreieck haben; eine beliebige Gerade u wird von zwei C_2 dieses Büschels berührt, denen dasselbe Polardreieck gemeinsam ist. Seien ihre Gleichungen in Liniencoordinaten $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so sollen alle anderen die Linie u berührenden C_2 des Netzes in der Form $\varphi + \lambda\psi = 0$ darstellbar sein, d. h. sie haben auch alle dasselbe Polardreieck gemeinsam. Da nun x und u ganz beliebig waren, so ist hiermit unsere Behauptung bewiesen.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 .$$

In diesem Falle ist ferner das Gewebe der Polarkegelschnitte der Cayley'schen Curve zu dem Netze derer der Grundcurve conjugirt, indem alle Curven des ersteren von den Seiten jenes Dreiecks berührt werden. Hieraus würde wieder folgen, dass der Ausdruck $M = a_s^2 u_s a_x$ bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Producte $S \,.\, u_x$ sein muss, wie wir es in Gleichung (18) gefunden haben. Umgekehrt hätten wir auch aus letzter Gleichung die Bedeutung des Verschwindens der Invariante S und die Nothwendigkeit der Relation (22) erschliessen können.

Ein analoger Satz wie für die aus f durch den Process δ entstehenden Bildungen gilt für die aus Θ durch denselben Process abgeleiteten. Aus Θ entspringt zunächst die Form

$$(23) \qquad \mathsf{H} = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\Theta = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\left\{(a\,b\,u)^2\,a_x b_x\right\} = (a\,\alpha\,u)^2\,a_x \alpha_x\,.$$

Wie man sofort sieht, *ist* $\mathsf{H} = 0$ *die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Tangenten u von den Polarkegelschnitten des Punktes x in Bezug auf* $f = 0$ *und* $\Delta = 0$ *in harmonischen Punktepaaren getroffen werden* (vgl. p. 281).

Wenden wir nun auf H abermals den Process δ an, so entstehen zwei Glieder, deren eines durch Anwendung der Operation auf die durch die Symbole a vertretenen Coëfficienten von f gebildet wird, während der andere aus der Anwendung der Operation auf die durch die α vertretenen Coëfficienten von Δ entspringt. Der erste Theil gibt eine neue Zwischenform

$$(24) \qquad \mathsf{K} = (\alpha\beta u)^2\,\alpha_x \beta_x\,.$$

Der zweite aber führt wegen (22) auf Θ zurück; denn letztere Gleichung sagt aus, dass:

$$(25) \qquad \delta\alpha_{ikh} = \tfrac{1}{2}\,S\,.\,a_{ikh} = \tfrac{1}{2}\,S\,.\,b_{ikh}\,.$$

Dieser zweite Theil wird sonach $\frac{1}{2}\,S\,(a\,b\,u)^2\,a_x b_x$, und es folgt:

$$(26) \qquad \delta\mathsf{H} = \mathsf{K} + \tfrac{1}{2}\,S\,.\,\Theta\,.$$

Mit der Form K ist aber diese Reihe von Bildungen auch abgeschlossen; denn mit Hülfe derselben Betrachtung erhält man sofort:

$$(27) \qquad \delta\mathsf{K} = S\,(a\,\alpha\,u)^2\,a_x\alpha_x = S\,.\,\mathsf{H}\,.$$

Die Formen Θ, H, K *bilden demnach, wie* f *und* Δ, *dem Processe* δ *gegenüber ein in sich geschlossenes System.*

Zwei ähnliche in der Weise begrenzte Gruppen gehen aus den Formen S und Σ hervor. Zunächst finden wir:

$$\delta S = \delta\,\left\{(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)\right\} = 4\,(abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha)$$

$$\delta\Sigma = \delta\,\left\{(abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)\right\} = 3\,(ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u).$$

Bezeichnen wir die beiden neuen Formen, abgesehen von den Zahlenfactoren bez. mit T und T, so haben wir also:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{4}\,\delta S &= T = (abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha) \\ \tfrac{1}{3}\,\delta\Sigma &= \mathsf{T} = (ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,. \end{aligned}$$

Um die Eigenschaften von T und T kennen zu lernen, geben wir zunächst ihre Ausdrücke in den ursprünglichen Symbolen von f, und zwar nach unserer früheren Regel über die Ersetzung der Symbole von Δ durch diejenigen von f. Wir ersetzen also die α einzeln durch d, e, f und multipliciren mit $(def)^2$; es wird dann:

$$(29)\qquad \begin{aligned} T &= (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcf)\,(def)^2 \\ \mathsf{T} &= (abd)\,(abu)\,(aeu)\,(bfu)\,(def)^2\,. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass T ebenso aus T entsteht, wie Σ aus S, indem man die c durch Liniencoordinaten u ersetzt; und dies ist zur Berechnung von δT wichtig. Bildet man aber den Ausdruck $\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ihk}}\, u_i u_k u_h$, so erhält man im Ganzen 6 Terme, welche dadurch entstehen, dass der Reihe nach jede der 6 in T vorkommenden Symbolreihen durch u ersetzt wird. Nun treten a, b, c in T symmetrisch auf; denn T ändert sich nicht, wenn man etwa a, b vertauscht, sobald nur gleichzeitig e, f vertauscht werden. Die Symbolreihen a, b, c liefern also drei gleiche Terme, welche nach (29) sämmtlich gleich T sind. Ebenso liefern die Reihen d, e, f drei gleiche Terme, denn auch sie kommen insofern symmetrisch vor, als sich T nicht ändert, wenn man etwa d mit e und zugleich b mit c vertauscht. Bezeichnen wir also die drei von den Reihen d, e, f herrührenden Terme mit T', so haben wir:

$$\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\, u_i u_k u_h = 3\,(\mathsf{T} + \mathsf{T}')\,.$$

Wir werden jedoch zeigen, *dass* T *und* T' *einander gleich sind.* Es ist:

$$\mathsf{T}' = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2,$$

und wenn wir in T c für das Symbol f schreiben und a mit d vertauschen:

$$\mathsf{T} = (abd)\,(bdu)\,(deu)\,(bcu)\,(ace)^2\,.$$

Die Differenz beider Ausdrücke gibt also:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = (abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)\,\big\{(abc)\,(deu) - (ace)\,(bdu)\big\}\,.$$

Die beiden in Klammern eingeschlossenen Glieder sind aber nach einer bekannten Identität gleich

$$(dau)\,(ebc) + (dcu)\,(abe)\,.$$

Setzt man dies ein, so folgt aus einem früheren Satze, dass $\mathsf{T}' - \mathsf{T}$ durch S theilbar ist; denn der erste Theil enthält $(ebc)\,(ace)$ und

a, b noch vereinigt, der andere enthält (abe) (abd) und d, e noch vereinigt. Es ist also:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = S \,.\, \mathsf{X}.$$

Aber der Factor X kann nur noch, ausser drei Reihen u, eine Symbolreihe von f enthalten; und da hieraus kein nicht verschwindender symbolischer Determinantenfactor zu bilden ist, so folgt:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Zwischen der Invariante T und der zugehörigen Form T bestehen also die Relationen:

$$(30) \qquad \begin{aligned} \mathsf{T} &= \tfrac{1}{6} \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = u_\iota^3 \\ T &= a_\iota^3 \,. \end{aligned}$$

Nun kann eine Curve dritter Ordnung nur *eine* absolute Invariante haben, denn man kann in ihrer Gleichung alle Constanten bis auf eine durch lineare Transformation zerstören. Es gibt daher auch nur zwei Invarianten, S und T; und der Process δ auf T angewandt muss auf S zurückführen. Um δT wirklich zu bilden, brauchen wir wegen (30) nur in $6\,\mathsf{T}$ oder $6\,\mathsf{T}'$ die u durch Symbole α von Δ zu ersetzen. Wir wählen T' und erhalten also:

$$\delta T = 6\,(abc)\,(abd)\,(ace)\,(bc\alpha)\,(de\alpha)^2 \,.$$

Nach (25) ist aber:

$$\tfrac{1}{3}\, \delta a_{ikh} = (de\alpha)^2\, d_i e_k \alpha_h = \frac{S}{6}\, a_i a_k a_h = \frac{S}{6}\, d_i d_k d_h \,;$$

wir haben also in δT statt d, e, α immer d und $\frac{S}{6}$ statt $(de\alpha)^2$ zu schreiben; d. h. es ist:

$$(31) \qquad \delta T = (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd) \,.\, S = S^2 \,.$$

Die Invarianten S und T bilden daher, wie f und Δ oder Θ, H und K, ein in sich geschlossenes System gegenüber dem δ-Processe.

Die geometrische Bedeutung der Bedingung $T = 0$, werden wir später bei Bildung von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ sofort erkennen; die der Curve $\mathsf{T} = 0$ ergibt sich durch folgende Betrachtung. Wir gehen von der mit T' bezeichneten Form von T aus:

$$\mathsf{T} = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2 .$$

Dieselbe kann aus den Coëfficienten von Θ und Σ zusammengesetzt werden. Denn da

$$\Theta = (deu)^2\, d_x e_x = \Theta_x^{\,2} u_\vartheta^{\,2} \,,$$

so folgt, wenn man nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und addirt, wegen der Vertauschbarkeit von d und e:

$$\Theta_x \Theta_y u_\vartheta^2 = (deu)^2 d_x d_y .$$

Ersetzt man nun links und rechts die x durch Determinanten der a, b, die y durch Determinanten der a, c und multiplicirt mit (abc) (bcu), so erhält man rechts die obige Form von $T' = T$; und es ist also:

$$T = (\Theta ab)(\Theta ac)(abc)(bcu)\, u_\vartheta^2 .$$

Nun ist ferner nach (20), wenn s_{ikh} die Coëfficienten von Σ bedeuten:

$$v_s^2 u_s = (abc)(abv)(acv)(bcu) ,$$

und demnach, wenn wir v durch Θ ersetzen und mit u_ϑ^2 multipliciren:

(32) $$T = u_t^3 = \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2 .$$

Hier steht aber rechts die eine simultane Invariante p_σ^2 der Poloconik $p_x^2 \equiv \Theta = 0$ von u und des Polarkegelschnittes $v_\sigma^2 \equiv v_s^2 u_s = 0$ von u in Bezug auf $\Sigma = 0$.

Die Curve dritter Klasse $T = 0$ wird also von denjenigen Linien u umhüllt, deren Polarcurve (zweiter Klasse) in Bezug auf $\Sigma = 0$ mit ihrer Poloconik (zweiter Ordnung) in Bezug auf $f = 0$ in vereinigter Lage ist.

Die in (32) gegebene Form von T führt uns auch zu dem Ausdrucke von δT; wir wollen die betreffende Rechnung aber nicht mehr durchführen, da wir die Form $T_{\varkappa\lambda}$ im Folgenden nicht weiter benutzen werden. Es seien hier nur die dabei benutzten Hülfsgleichungen angeführt, um zu zeigen, wie sich der Inhalt derselben auch geometrisch formuliren lässt. Mit Rücksicht auf die Werthe von $\delta\Theta$ und $\delta\Sigma$ in (23) und (28) folgt nämlich aus (32):

(33) $$\delta T = 2\, H_s^2 u_s u_\eta^2 + 3\, \Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 ;$$

und zu weiteren Umformungen dieses Ausdruckes beweist man dann die folgenden drei Gleichungen *):

(34) $$H = -\tfrac{1}{6} S \,.\, u_x^2 + u_s^2 d_s d_x^2$$

(35) $$H_s^2 u_s u_\eta^2 = \tfrac{1}{6} S \,.\, \Sigma$$

(36) $$\Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 = \tfrac{1}{6} S \,.\, \Sigma ,$$

Gleichungen, welche bez. zu den folgenden Sätzen Veranlassung geben:

Ist u eine Gerade, welche die ersten Polaren von x in Bezug auf f und Δ in harmonischen Punktepaaren trifft, so geht die lineare Polare von x in Bezug auf $f = 0$ durch den Pol von u in Bezug auf $\Sigma = 0$, wenn x und u vereinigt liegen; dagegen unabhängig davon, wenn S verschwindet.

Die Curve 2. Ordnung, welche einer Linie u durch die Gleichung $H = 0$ in bekannter Weise zugeordnet ist, liegt für die Tangenten u der Cayley'*schen Curve mit der Polare (2. Klasse) von u in Bezug auf*

---

*) Vgl. Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6.

letztere Curve vereinigt; dies gilt aber für jede Linie u, wenn S verschwindet.

Die Cayley'*sche Curve wird auch umhüllt von denjenigen Linien u, deren Polarkegelschnitt in Bezug auf* $\mathsf{T} = 0$ *mit ihrer Poloconik vereinigt liegt. Letzteres tritt aber beim Verschwinden von S für jede Linie u ein.* — Es liegt hierin nach der Definition von T durch (32) eine gewisse Reciprocität zwischen den Curven $\Sigma = 0$ und $\mathsf{T} = 0$.

Fasst man nun schliesslich die in (33), (35) und (36) gegebenen Resultate zusammen, so ergibt sich

$$\delta \mathsf{T} = \tfrac{1}{6} S . \Sigma . \tag{37}$$

Die Formen Σ und T bilden also in der That in Bezug auf den δ-Process ein ebenso in sich geschlossenes System, wie f und Δ. Wir werden später sehen, wie die Schaar $\varkappa \Sigma + \lambda \mathsf{T} = 0$ auch geometrisch dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ gegenübersteht; sie bildet eben die Schaar von Curven dritter Klasse, welche die 9 harmonischen Geraden zu gemeinsamen Rückkehrtangenten haben.

Durch die Formeln für $\delta\Delta$, $\delta\Theta$, $\delta\mathsf{H}$, $\delta\mathsf{K}$, $\delta\Sigma$, δS, $\delta\mathsf{T}$, δT haben wir nun das Material gewonnen, um diese Formen für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ zu bilden.

Die Form $\Theta_{\varkappa\lambda}$ können wir ohne Weiteres hinschreiben; es ist:

$$\begin{aligned} \Theta_{\varkappa\lambda} &= (a b u)^2 a_x b_x . \varkappa^2 + \left\{(\alpha b u)^2 \alpha_x b_x + (a \alpha u)^2 a_x \alpha_x\right\} . \varkappa\lambda + (\alpha\beta u)^2 \alpha_x \beta_x . \lambda^2 \\ &= \varkappa^2 \Theta + 2\varkappa\lambda \mathsf{H} + \lambda^2 \mathsf{K} . \end{aligned} \tag{38}$$

Für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ finden wir zunächst die Entwicklung:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \Delta \varkappa^3 + 3\Delta_1 \varkappa^2\lambda + 3\Delta_2 \varkappa\lambda^2 + \Delta_3 \lambda^3 , \tag{39}$$

wo nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Delta_1 = (a b \alpha)^2 a_x b_x \alpha_x , \quad \Delta_2 = (a \alpha \beta)^2 a_x \alpha_x \beta_x , \quad \Delta_3 = (\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x .$$

Jede von diesen Formen entsteht aus der vorhergehenden durch einen Differentiationsprocess, bei welchem die α_{ikh} von den a_{ikh} als unabhängig betrachtet werden, während der δ-Process sich immer auch auf die in den α_{ikh} enthaltenen Coëfficienten von f erstreckt. Deuten wir daher durch einen dem δ zugefügten Index α an, dass sich der δ-Process nur auf die in den α_{ikh} enthaltenen Coëfficienten der Grundform beziehen soll, so haben wir:

$$\delta\Delta = 3\Delta_1 , \quad \delta\Delta_1 = 2\Delta_2 + \delta_\alpha \Delta_1 , \quad \delta\Delta_2 = \Delta_3 + \delta_\alpha \Delta_2 .$$

Nun ist aber nach Gleichung (25): $\delta \alpha_{ikh} = \frac{1}{2} S . a_{ikh}$, also auch:

$$\delta_\alpha \Delta_1 = \tfrac{1}{2} S\Delta , \quad \delta_\alpha \Delta_2 = S\Delta_1 ,$$

und somit können wir aus obigen Gleichungen die Δ_i berechnen, es wird:

$$(40)\quad \begin{cases} \Delta_1 = \frac{1}{3}\,\delta\Delta = \frac{1}{6}\,Sf \\ \Delta_2 = \frac{1}{12}\,\delta(Sf) - \frac{1}{4}\,S\Delta = \frac{1}{3}\,Tf - \frac{1}{6}\,S\Delta \\ \Delta_3 = \frac{1}{3}\,\delta\,(Tf - \frac{1}{2}\,S\Delta) - \frac{S^2}{6}\,f = \frac{1}{12}\,S^2 f - \frac{1}{3}\,T\Delta\,. \end{cases}$$

Setzen wir die gefundenen Werthe in die Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ ein und ordnen nach f und Δ, so kommt*):

$$(41)\quad \Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\,\varkappa\,\lambda^2 - \frac{T}{3}\,\lambda^3\right)\Delta + \left(\frac{S}{2}\,\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\,\lambda^3\right)f\,.$$

Man übersieht sofort, dass die für die Ausdrücke Δ_i angestellten Betrachtungen für Coëfficienten einer jeden Entwicklung:

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa^n\varphi + n\varkappa^{n-1}\lambda\varphi_1 + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,\varkappa^{n-2}\lambda^2\varphi_2 + \dots + \lambda^n\varphi_n$$

Gültigkeit haben, wenn $\varphi_{\varkappa\lambda}$ die zu f gehörige Form φ, gebildet für $\varkappa f + \lambda\Delta$, bedeutet. *Für die Coëfficienten φ_i besteht immer das System von Gleichungen:*

$$(42)\quad \begin{cases} \delta\varphi = n\,\varphi_1\,, & \delta\varphi_1 = (n-1)\varphi_2 + \frac{1}{2}S.\,\varphi\,, \\ \delta\varphi_2 = (n-2)\varphi_3 + \frac{1}{2}S\,.\,2\,\varphi_1\,, & \delta\varphi_3 = (n-3)\,\varphi_4 + \frac{1}{2}S.3\,\varphi_2\,, \\ \cdots & \cdots \\ \delta\varphi_{n-1} = \varphi_n + \frac{1}{2}S.(n-1)\,\varphi_{n-2}\,, & \delta\varphi_n = \frac{1}{2}S.n\,\varphi_{n-1}\,. \end{cases}$$

Benutzen wir diese Gleichungen zu der Berechnung der Coëfficienten Σ_i in

$$\Sigma_{\varkappa\lambda} = \Sigma\varkappa^3 + 3\,\Sigma_1\varkappa^2\lambda + 3\,\Sigma_2\varkappa\lambda^2 + \Sigma_3\lambda^3$$

so erhalten wir:

$$(43)\quad \begin{aligned} &\Sigma_1 = \mathsf{T}\,,\quad \Sigma_2 = \tfrac{1}{6}\,S\Sigma\,,\quad \Sigma_3 = \tfrac{2}{3}\,T\Sigma - \tfrac{1}{2}\,S\mathsf{T} \\ &\Sigma_{\varkappa\lambda} = (\varkappa^3 + \tfrac{1}{2}\,S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2}{3}\,T\lambda^3)\,\Sigma + (3\,\varkappa^2\lambda - \tfrac{1}{2}\,S\lambda^3)\,\mathsf{T}\,. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $\Delta_3 = 0$ und $\Sigma_3 = 0$ geben bez. die Hesse'sche und Cayley'sche Curve von $\Delta = 0$; wir haben daher wegen der für Δ_3 und Σ_3 gefundenen Ausdrücke die Sätze:

Wenn S verschwindet, so fällt die Hesse'*sche Curve von Δ mit Δ zusammen, d. h. $\Delta = 0$ besteht aus drei geraden Linien, und die* Cayley'*sche Curve von $\Delta = 0$ fällt mit der von $f = 0$ zusammen, sie besteht aus drei Punkten;* wie wir schon früher fanden (p. 553 f.).

Wenn die Invariante T verschwindet, so ist die Hesse'*sche Curve der* Hesse'*schen wieder die Grundcurve $f = 0$; die* Cayley'*sche Curve der* Hesse'*schen fällt dagegen mit $\mathsf{T} = 0$ zusammen.*

In der Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ bemerkt man, dass die Coëfficienten von f und Δ die nach $\varkappa$ und λ genommenen Differentialquotienten der-

---

*) In dieser Formel liegt wieder der Hesse'sche Satz, vgl. p. 505.

selben biquadratischen binären Form $G(\varkappa, \lambda) = G$ sind, welche den Ausdruck hat*):

(44) $$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3} T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12} S^2\lambda^4 .$$

In der That wird:

(45) $$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \varkappa} &= G_1 = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3 \\ \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \lambda} &= G_2 = -\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda - T\varkappa\lambda^2 - \frac{S^2}{12}\lambda^3 , \end{aligned}$$

und folglich nimmt $\Delta_{\varkappa\lambda}$ die einfache Gestalt an:

(46) $$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f .$$

Diese Formel können wir benutzen, um die Bildungen $S_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, u. s. f. einfach herzustellen. Wir brauchen nur den Einfluss des δ-Processes auf eine Form $\varphi_{\varkappa\lambda}$ zu untersuchen, wenn sich derselbe statt auf die Coëfficienten von f und Δ, auf die von $\varkappa f + \lambda\Delta$ und $\Delta_{\varkappa\lambda}$ bezieht. Da die letzteren aber nach (46) durch

$$G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}$$

gegeben sind, so wird:

(47) $$\begin{aligned} (\delta\varphi)_{\varkappa\lambda} &= \sum \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_{ikh} + \lambda\alpha_{ikh})}(G_1 a_{ikh} - G_2\alpha_{ikh}) \\ &= G_1\frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} . \end{aligned}$$

Ist also φ eine aus f entstandene Form, so ist die für die zusammengesetzte Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildete Form $(\delta\varphi)_{\varkappa\lambda}$ gleich der Functionaldeterminante von G und $\varphi_{\varkappa\lambda}$.

Mit Hülfe dieses Satzes bilden wir aus (46) $S_{\varkappa\lambda}$, indem wir berücksichtigen, dass $\delta\Delta = \frac{S}{2}f$; es wird:

$$\tfrac{1}{2} S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = (\delta\Delta)_{\varkappa\lambda} = G_1\left(\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\lambda}f\right) - G_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\varkappa}f\right) .$$

Hierin führen wir die zweiten Differentialquotienten von G, dividirt durch 12, ein, nämlich die Ausdrücke:

(48) $$\begin{cases} G_{11} = \frac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\varkappa^2} = \varkappa^2 - \dfrac{S}{6}\lambda^2 \\ G_{12} = \frac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\varkappa\partial\lambda} = -\dfrac{S}{3}\varkappa\lambda - \dfrac{T}{3}\lambda^2 \\ G_{22} = \frac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2} = -\dfrac{S}{6}\varkappa^2 - \dfrac{2T}{3}\varkappa\lambda - \dfrac{S^2}{12}\lambda^2 . \end{cases}$$

Die Formel für $S_{\varkappa\lambda}$ wird dann zunächst:

---

*) Die Gleichung $G = 0$ ist also die früher durch $\varkappa L - \lambda K = 0$ bezeichnete Gleichung, vgl. p. 505.

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_1 & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_2 & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix},$$

oder nach den bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen:

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_{11}\varkappa + G_{12}\lambda & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_{12}\varkappa + G_{22}\lambda & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \Delta & -f \end{vmatrix}.$$

Dividiren wir also durch $\varkappa f + \lambda\Delta$, *so wird S proportional zu der* Hesse'*schen Form H der biquadratischen binären Form G:*

$$(49)\qquad \begin{aligned} S_{\varkappa\lambda} &= -6(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) = -3H_G \\ &= S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \tfrac{4}{3}ST\varkappa\lambda^3 + (\tfrac{4}{3}T^2 - \tfrac{1}{12}S^3)\lambda^4. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter, da $\delta S = 4T$:

$$(50)\qquad T_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4}\left(G_1\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right) = -3T_G,$$

wenn T_G die Covariante sechster Ordnung der biquadratischen Form $G(\varkappa, \lambda)$ bedeutet. Ferner haben wir wegen der Relationen $\mathsf{H} = \frac{1}{2}\delta\Theta$, $\mathsf{K} = \delta\mathsf{H} - \frac{S}{2}\Theta$ die Gleichungen:

$$(51)\qquad \mathsf{H}_{\varkappa\lambda} = G_1(\varkappa\mathsf{H} + \lambda\mathsf{K}) - G_2(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})$$

$$(52)\qquad \mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = G_1\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \tfrac{1}{2}S_{\varkappa\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda}.$$

Die letzte Gleichung können wir noch einfacher schreiben, wenn wir beachten, dass K entsteht, wenn man die Bildung Θ an der Form Δ vornimmt, dass also $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$ die Zwischenform Θ gebildet aus $\Delta_{\varkappa\lambda}$ ist. Wir finden dann wegen (46):

$$(52a)\qquad \mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = G_1^2\mathsf{K} - 2G_1G_2\mathsf{H} + G_2^2\Theta. -$$

Endlich folgt aus (43), da $\mathsf{T} = \frac{1}{3}\delta\Sigma$ ist:

$$(53)\qquad \begin{aligned} \mathsf{T}_{\varkappa\lambda} = {} & G_1\left[(\tfrac{1}{3}S\varkappa\lambda + \tfrac{2}{3}T\lambda^2)\Sigma + (\varkappa^2 - \tfrac{1}{2}S\lambda^2)\mathsf{T}\right] \\ & - G_2\left[(\varkappa^2 + \tfrac{1}{6}S\lambda^2)\Sigma + 2\varkappa\lambda\mathsf{T}\right]. \end{aligned}$$

Wir brechen hiermit diese algebraischen Untersuchungen zunächst ab, um die gewonnenen Resultate für einige Anwendungen zu verwerthen. Wir werden dabei dann von selbst genöthigt sein, noch weitere Bildungen aus der Theorie der ternären cubischen Formen in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen, ohne jedoch hierin Vollständigkeit zu erreichen oder anzustreben.*) Es sei hier nur noch der folgende sogleich zu verwerthende Satz bewiesen:

*) Wegen des Näheren vgl. besonders Clebsch und Gordan: Ueber cubische ternäre Formen, Math. Annalen, Bd. 6 und dazu das Druckfehlerverzeichniss des 8. Bandes; ferner den Schluss dieser Abtheilung.

Die cubische zugehörige Form $M = (a\alpha u)^3$ *verschwindet identisch.*

Es entsteht nämlich M aus $\Delta = \alpha_x^3 = (cde)^3 c_x d_x e_x$, wenn man die α durch die aus den u und a gebildeten Determinanten ersetzt; es ist also

$$M = (cde)^2 (cua) (dua) (eua).$$

Nun ist nach einer bekannten Identität:

$$(cde)(cua) = (cue)(cda) - (cud)(cea).$$

Führen wir dies in M ein, so wird:

$$M = (cde)(dua)(eua) \{(cue)(cda) - (cud)(cea)\},$$

oder, da beide Theile durch Vertauschung von d und e in einander übergehen, also identisch sind:

$$M = 2 (cde)(cda)(dua)(cue).$$

Dieser Ausdruck enthält den Factor S, denn er hat den symbolischen Factor $(cde)(cda)$, und die Symbole e, a kommen noch in einer Determinante vereinigt vor. Aber der nach Absonderung von S übrig bleibende Factor von M kann dann keine Symbole mehr enthalten, sondern nur noch die u, muss also, da aus letzteren nicht verschwindende Determinanten nicht mehr zu bilden sind, nothwendig gleich Null sein, q. e. d.

V. Fortsetzung. — Anwendungen der Formentheorie.

Die von uns in Vorstehendem durchgeführten formalen Entwicklungen geben uns im Wesentlichen die Mittel, um die Gleichungen vollständig aufzustellen, von denen das wichtigste der bei den Curven dritter Ordnung auftretenden Probleme abhängt: *die Bestimmung der Wendepunkte;* wir werden dabei auch einige neue Formen benutzen müssen, auf die wir dann später zurückkommen. Ueber die Natur der Gleichung neunten Grades, von welcher dies Problem abhängt, haben wir schon verschiedene Schlüsse aus der gegenseitigen Gruppirung der Wendepunkte gezogen; und letztere wieder gründete sich auf den einen Fundamentalsatz, dass *immer drei Wendepunkte auf einer geraden Linie liegen.* Wir wollen zunächst für denselben einen rein algebraischen Beweis erbringen.

Es seien x und y zwei Wendepunkte, dann bestehen gleichzeitig die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_x^3 &= 0, \quad a_y^3 = 0, \\ \alpha_x^3 &= 0, \quad \alpha_y^3 = 0; \end{aligned}$$

und wir haben nachzuweisen, dass auch für einen von 0 und ∞ verschiedenen Werth von λ die Gleichungen $a_{x+\lambda y}{}^3 = 0$, $\alpha_{x+\lambda y}{}^3 = 0$

zusammen bestehen müssen. Diese beiden Gleichungen geben aber entwickelt und mit Hülfe von (1) vereinfacht:

$$a_x^2 a_y + \lambda a_x a_y^2 = 0, \quad \alpha_x^2 \alpha_y + \lambda \alpha_x \alpha_y^2 = 0;$$

also durch Elimination von λ:

$$(2) \qquad a_x^2 a_y \,.\, \alpha_x \alpha_y^2 - a_x a_y^2 \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y = 0.$$

Diese Gleichung ist aber in der That eine unmittelbare Folge der Gleichungen (1), denn sie ergibt sich aus dem soeben bewiesenen Satze, dass die Form $(a\alpha u)^3$ identisch Null ist, wenn man $u_i = (xy)_i$ setzt. Wir erhalten zunächst die Salmon'sche Identität:

$$(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3 \equiv a_x^3 \alpha_y^3 - 3 a_x^2 a_y \alpha_x \alpha_y^2 + 3 a_x a_y^2 \alpha_x^2 \alpha_y - \alpha_x^3 a_y^3 = 0,$$

und hieraus folgt wegen (1) wieder Gleichung (2). Der Gang dieses Beweises lässt noch die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

Zwei Curven dritter Ordnung $a_x^3 = 0$ und $\alpha_x^3 = 0$ haben ihre neun Wendepunkte gemeinsam, sobald die simultane zugehörige Form $(a\alpha u)^3$ identisch verschwindet. Aus letzterem Umstande folgt nämlich zunächst wieder, dass je zwei der 9 Schnittpunkte mit einem dritten auf einer Geraden liegen, dass also die 9 Punkte gruppirt sind, wie die Wendepunkte einer C_3, d. h. dass durch sie 4 Dreiecke hindurchgehen; dann sind sie aber nach Früherem auch Wendepunkte für alle durch sie gehenden C_3. —

Aus der Gruppirung der Wendepunkte haben wir zunächst gefolgert, dass es in dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ vier in gerade Linien zerfallende Curven gibt: die vier Wendepunktsdreiecke; und zwar werden die zugehörigen Parameterwerthe als Wurzeln einer Gleichung vierten Grades gefunden, welche sich aus den Gleichungen

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0,$$
$$\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv Kf + L\Delta \equiv G_1 \Delta - G_2 f = 0$$

durch Elimination von f, Δ ergibt (vgl. p. 505). Dadurch kommen wir aber auch auf die Form $G(\varkappa, \lambda)$, welche durch Gleichung (44) auf p. 560 definirt war, also:

Die Gleichung vierten Grades $G(\varkappa, \lambda) = 0$ bestimmt die vier Wendepunktsdreiecke, d. h. die Parameterwerthe $\varkappa$, λ für die zerfallenden Curven des syzygetischen Büschels. Das Product der Gleichungen der vier Dreiecke ist daher gegeben durch:

$$(3) \qquad G(\Delta, -f) \equiv \Delta^4 - S\Delta^2 f^2 + \tfrac{4}{3} T\Delta f^3 - \tfrac{1}{12} S^2 f^4 = 0.$$

Untersuchen wir die für uns nunmehr besonders wichtige Form

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3} T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12} S^2 \lambda^4$$

etwas genauer. Wir bilden zunächst ihre beiden Invarianten i_G und j_G (vgl. p. 229); die erstere ist:

(4) $$i_G = 2\left\{-\tfrac{1}{12}S^2 + 3\,.\,\tfrac{1}{36}S^2\right\} = 0\,.$$

Die erste Invariante von G verschwindet also identisch.

Geometrisch können wir $\varkappa$, λ, zufolge der Bedeutung von $G = 0$, als Coordinaten in einem Strahlbüschel auffassen, dessen Mittelpunkt ein Wendepunkt von $f = 0$ ist; wo dann $G = 0$ durch die vier Wendepunktslinien repräsentirt wird, welche von dem gewählten Wendepunkte ausgehen. Die Gleichung (4) gibt also den Satz:

Die vier durch einen Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien sind zu einander äquianharmonisch (vgl. p. 239).

Wenn wir so in einem Wendepunkte unsere Constructionen ausführen, können wir die Bedeutung der Gleichung

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f = G_1\varkappa' + G_2\lambda'$$

(für $\varkappa' f + \lambda'\Delta = 0$) auch folgendermassen aussprechen:

Die Wendetangenten der drei Curven, deren Hesse'*sche Curve eine gegebene Curve dritter Ordnung* ($\varkappa' f + \lambda'\Delta = 0$) *ist, bilden die erste Polare der Wendetangente der letzteren in Bezug auf die vier Wendepunktslinien.*

Umgekehrt wird die Wendetangente der Hesse'*schen Curve durch die lineare Polare der Wendetangente der Grundcurve in Bezug auf die vier Wendepunktslinien gegeben.*

Dadurch sind in dem betrachteten Büschel besonders diejenigen Linien ausgezeichnet, deren Polare in Bezug auf $G = 0$ eine Doppellinie enthalten. Da aber die Invariante i_G verschwindet, so sind dies bekanntlich (vgl. p. 231) die Grundstrahlen von $G = 0$ selbst; und die erste Polare eines solchen besteht aus dem Strahle selbst und aus zwei in einen Strahl der Hesse'schen Form von G zusammenfallenden Strahlen. Jedes Wendepunktsdreieck ist daher Hesse'sche Curve seiner selbst und einer anderen Curve dritter Ordnung; und die Wendetangenten der den vier Dreiecken so zugeordneten Curven bilden in dem betrachteten Strahlbüschel die Hesse'sche Form H_G von $G(\varkappa, \lambda)$. Die Curven, deren Hesse'sche in ein Dreieck zerfällt, sind aber, wie wir wissen, durch das Verschwinden von S charakterisirt (p. 553), und somit folgt:

Die Invariante $S_{\varkappa\lambda}$ der zusammengesetzten Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ unterscheidet sich nur durch einen Zahlenfactor von der Hesse'*schen Form der binären Form $G(\varkappa, \lambda)$; wie es durch Gleichung* (49) *auf p.* 561 *bestätigt wird.*

In dem betrachteten Büschel von Wendetangenten gibt es ferner sechs Strahlen $T_G = 0$ (p. 244), die sich in drei Paare theilen, so dass die erste Polare eines Strahles in jedem Paare in Bezug auf $G = 0$ den andern Strahl enthält (gleichzeitig auch in Bezug auf $H_G = 0$, was uns aber jetzt nicht angeht). Ein solches Strahlenpaar

ist sonach wegen der soeben gegebenen Constructionen dadurch ausgezeichnet, dass von den zugehörigen Curven des Büschels die eine immer Hesse'sche Curve der andern ist. Da dies Verhältniss durch des Verschwinden von $T_{\varkappa\lambda}$ ausgedrückt wird (p. 559), so folgt:

Die Invariante $T_{\varkappa\lambda}$ unterscheidet sich nur durch einen Zahlenfactor von der Covariante sechster Ordnung T_G der binären Form $G(\varkappa, \lambda)$; wie es durch Gleichung (50) *auf p.* 561 *bestätigt wird.*

Bilden wir endlich noch die zweite Invariante von G; sie ist:

$$(5) \qquad j_G = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{S}{6} \\ 0 & -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} \\ -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} & -\frac{S^2}{12} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right).$$

Wenn auch diese Invariante verschwindet, so hat bekanntlich die Gleichung $G = 0$ drei gleiche Wurzeln, d. h. drei der vier durch einen Wendepunkt gehenden Linien fallen zusammen (p. 240). Dies ist aber nur möglich, wenn die Curve $f = 0$ einen Doppelpunkt hat, denn nur dadurch kann die Zahl der Wendepunkte nach den Plücker'schen Formeln reducirt werden. Bezeichnen wir also den in (5) rechts stehenden Ausdruck mit $-\frac{2}{3}R$, so haben wir:

Die Discriminante der Curve dritter Ordnung $f = 0$, d. h. die linke Seite der Doppelpunktsbedingung ist gegeben durch die Bildung):*

$$(6) \qquad R = T^2 - \tfrac{1}{6} S^3.$$

Die Invariante R hat die besondere Eigenschaft, dass sie sich von der Invariante $R_{\varkappa\lambda}$ nur um einen Factor unterscheidet: *sie ist, wie man sich ausdrückt, eine Combinante des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta$* (vgl. p. 208); ebenso wie die Form T_G einer binären Form G für das System $\varkappa G + \lambda H_G$. Zwischen den letztgenannten Formen besteht nämlich die bekannte Relation:

$$T_G^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{H_G^3 - \tfrac{1}{2} i_G H_G G^2 + \tfrac{1}{3} j_G G^3\right\};$$

---

*) Nach Aronhold ist ausgerechnet:

$$R = 36 \cdot \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\ \alpha_{111} & \alpha_{122} & \alpha_{133} & \alpha_{123} & \alpha_{113} & \alpha_{112} \\ \alpha_{211} & \alpha_{222} & \alpha_{233} & \alpha_{223} & \alpha_{213} & \alpha_{212} \\ \alpha_{311} & \alpha_{322} & \alpha_{333} & \alpha_{323} & \alpha_{313} & \alpha_{312} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinantenform von R erhält man bis auf einen Zahlenfactor sofort durch Elimination der x aus den 6 Gleichungen $a_x^2 a_i = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_i = 0$, welche bestehen müssen, wenn x ein Doppelpunkt von f ist.

und diese verwandelt sich in unserm Falle wegen (4) und (5), und da $T_G = -\frac{1}{3} T_{\varkappa\lambda}$, $H_G = -\frac{1}{3} S_{\varkappa\lambda}$, in:

(7) $$R_{\varkappa\lambda} = T_{\varkappa\lambda}^2 - \tfrac{1}{6} S_{\varkappa\lambda}^3 = (T^2 - \tfrac{1}{6} S^3) \cdot G^3 = R \cdot G^3 (\varkappa, \lambda).$$

In dem syzygetischen Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ sind daher keine Curven mit Doppelpunkt ($R_{\varkappa\lambda} = 0$) enthalten ausser den in drei Gerade zerfallenden ($G(\varkappa, \lambda) = 0$).

— *Die Auflösung der Gleichung $G = 0$* wird durch das Verschwinden ihrer ersten Invariante sehr vereinfacht, indem die Anwendung der Euler'schen Methode zum Ziele führt.*) Wir setzen $\frac{\varkappa}{\lambda} = x$, so dass wir die Gleichung haben:

(8) $$x^4 - Sx^2 - \tfrac{4}{3} Tx - \tfrac{1}{12} S^2 = 0.$$

Für x machen wir die Substitution:

$$x = u + v + w,$$

so dass:

$$x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(vw + wu + uv),$$
$$x^4 = (u^2 + u^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(vw + wu + uv) + 4(v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Führen wir diese Werthe von x, x^2, x^4 in Gleichung (8) ein, so wird dieselbe erfüllt, wenn wir setzen

$$v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = \tfrac{1}{12} S^2$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = \tfrac{1}{2} S$$
$$uvw = \tfrac{1}{6} T.$$

Dann sind aber u^2, v^2, w^2 die Wurzeln der cubischen Gleichung für z:

(9) $$z^3 - \tfrac{1}{2} Sz^2 + \tfrac{1}{12} S^2 z - \tfrac{1}{36} T^2 = 0,$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$\left(z - \frac{S}{6}\right)^3 = \frac{T^2}{36} - \frac{S^3}{6^3} = \tfrac{1}{36} R.$$

Für u^2, v^2, w^2 als Wurzeln dieser Gleichung haben wir somit die Werthe:

$$u^2 = \tfrac{1}{6}(S + \sqrt[3]{6R}), \quad v^2 = \tfrac{1}{6}(S + \varepsilon\sqrt[3]{6R}), \quad w^2 = \tfrac{1}{6}(S + \varepsilon^2\sqrt[3]{6R}),$$

wo ε eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bedeutet. *Die Wurzeln der Gleichung $G = 0$ sind also gegeben durch:*

$$x = \frac{\varkappa}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{S + \sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon\sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon^2\sqrt[3]{6R}}{6}},$$

*) Vgl. eine andere Behandlung der biquadratischen Gleichung mit verschwindendem i in Clebsch's Theorie der binären Formen, p. 171.

wo die Vorzeichen so zu wählen sind, dass das Product uvw der drei Quadratwurzeln gleich $+\frac{1}{6}T$ *wird.*

Es sind demnach in der That nur *vier* Vorzeichencombinationen möglich, entsprechend den vier Wurzeln von $G=0$. Von den Wurzeln u^2, v^2, w^2 der cubischen Gleichung (9) sind, wenn die Coëfficienten von f reell angenommen werden, zwei Wurzeln conjugirt imaginär; das Product derselben also ist positiv, und folglich die dritte reell und positiv, damit $u^2v^2w^2=\frac{1}{36}T^2$ sein kann. Die Grösse u ist daher immer reell, v und w einander conjugirt imaginär. Hieraus ergibt sich, dass von den vier Wurzeln der Gleichung (8) immer zwei reell und zwei conjugirt imaginär sind; und zwar geben die Vorzeichencombinationen

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & - & - \end{matrix}$$

reelle, die andern beiden imaginäre Werthe. Oder mit andern Worten: *Das Product der drei Seiten eines Wendepunktsdreiecks ist für zwei Dreiecke reell, für zwei conjugirt imaginär*, wie wir es schon früher auf anderem Wege gefunden haben.

Zur Bestimmung der Wendepunkte von $f=0$ würde es nunmehr noch nöthig sein, zwei der Wendepunktsdreiseite in ihre einzelnen linearen Factoren aufzulösen.*) Wir wollen diese Aufgabe jedoch auf einem anderen Wege durchführen, indem wir dieselbe an ein früher bezeichnetes Transformationsproblem anknüpfen**) (vgl. p. 512). Wird ein Wendepunktsdreieck als Coordinatendreieck eingeführt, so erscheint, sahen wir, die Gleichung der Curve dritter Ordnung in der Form:

$$(10) \qquad f \equiv a\,(y_1^3+y_2^3+y_3^3)+6\,b\,y_1y_2y_3=0\,.$$

Zunächst kommt es uns nur darauf an, die Coëfficienten a, b der transformirten Form in ihrer Abhängigkeit von den a_{ikh} der Grundform f darzustellen; ohne dabei die directe Berechnung der Transformationscoëfficienten zu verlangen. Wegen der vier vorhandenen Wendepunktsdreiecke würden wir vier Werthe für $\frac{b}{a}$ finden müssen. Aber die Gleichung (10) ändert sich nicht bis auf einen zu b hinzutretenden Factor ε oder ε^2, wenn wir den y_i beliebig dritte Wurzeln der Einheit als Factoren hinzufügen, während dadurch thatsächlich

*) Vgl. über diese directe Lösung des Problems Gundelfinger: Math. Annalen, Bd. 4, p. 567 ff., sowie den folgenden Abschnitt dieser Vorlesungen.

**) Vgl. im Folgenden Clebsch: Math. Annalen, Bd. 2, p. 382. Eine andere Behandlung des Problems gab Gundelfinger, ib. Bd. 5, p. 442. Vgl. ferner Clebsch's Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 234 ff., sowie den Schluss der 5. Abtheilung dieses Bandes.

doch nur die Beziehung geändert wird. Wir werden daher nicht für $\frac{b}{a}$, sondern für $\frac{b^3}{a^3}$ eine biquadratische Gleichung aufstellen, welche im Wesentlichen auf $G = 0$ zurückführen muss. Es geschieht dies durch Vergleichung der beiden Werthe der absoluten Invariante*), die wir einmal für die allgemeine, dann für die kanonische Form von f bilden. Wir setzen nun

$$\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$$

$$\Delta'_\chi = 6 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = 6 y_1 y_2 y_3 ,$$

so dass also $\chi = 0$ eine Curve des syzygetischen Büschels

$$f \equiv a\chi + b\Delta'_\chi = 0 \tag{11}$$

ist und Δ'_χ, deren Hesse'sche Form. Dieselbe ist, wie dies mit allen Bildungen in der kanonischen Form geschehen soll, durch einen oberen Strich von der entsprechenden Bildung in Bezug auf die ursprünglichen Variabeln x_i unterschieden. Da Δ'_χ in drei lineare Factoren zerfällt, so ist $\chi = 0$ dadurch ausgezeichnet, dass ihre Invariante S_χ verschwindet. Wir können ferner mit Hülfe der Formeln (49) und (50) p. 561 für $S_{\varkappa\lambda}$ und $T_{\varkappa\lambda}$ die Invarianten S' und T' (und auch die Substitutionsdeterminante r) für f berechnen, sobald wir die Form G, gebildet für χ kennen, welche mit Γ bezeichnet sein mag. Es ist aber nach Gleichung (46) auf p. 560:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 6 \begin{vmatrix} a y_1 & b y_3 & b y_2 \\ b y_3 & a y_2 & b y_1 \\ b y_2 & b y_1 & a y_3 \end{vmatrix} = (a^3 + 2\,b^3)\,\Delta'_\chi - 6\,a b^2 \chi \\ &= \tfrac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial a}\,\Delta'_\chi - \tfrac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial b}\,\chi , \end{aligned} \tag{12}$$

also durch Vergleichung beider Ausdrücke:

$$\Gamma_1 = \tfrac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = a^3 + 2 b^3 , \quad \Gamma_2 = \tfrac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial b} = 6 a b^2 .$$

und somit:

$$\begin{gathered} \Gamma = a^4 + 8\,a b^3 , \\ \Gamma_{11} = a^2 , \quad \Gamma_{12} = 2 b^2 , \quad \Gamma_{22} = 4\,a b . \end{gathered} \tag{13}$$

Hieraus folgt nach (49) und (50), wenn r die Substitutionsdeterminante bedeutet:

$$\begin{aligned} S' = r^4 \,.\, S &= -\,6\,(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) \\ &= 24\,b\,(b^3 - a^3) \end{aligned} \tag{14}$$

---

*) Vgl. das entsprechende Verfahren bei den biquadratischen binären Formen auf p. 248.

$$(15)\qquad \begin{aligned} T' = r^6 \,.\, T &= \tfrac{1}{4}\left(\Gamma_1 \frac{\partial S}{\partial b} - \Gamma_2 \frac{\partial S}{\partial a}\right) \\ &= 6\,(8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6)\,. \end{aligned}$$

Bilden wir hieraus die absolute Invariante, *so kommt für* $\frac{a^3}{b^3}$ *die Gleichung vierten Grades:*

$$(16)\qquad \frac{S^3}{T^2} = \frac{384\,b^3\,(b^3 - a^3)^3}{(8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6)^2}\,;$$

und gleichzeitig findet man die Transformationsdeterminante, wenn $\frac{a^3}{b^3} = \alpha$ *bekannt ist, aus der Gleichung:*

$$(17)\qquad r^2 = \frac{S}{T}\,\frac{8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6}{4\,b\,(b^3 - a^3)} = b^2\,\frac{8 + 20\,\alpha - \alpha^2}{4\,(1 - \alpha)}\,,$$

in der b noch willkürlich angenommen werden kann, was damit übereinkommt, dass die Substitutionscoëfficienten (also auch r) nur bis auf einen Proportionalitätsfactor bestimmt sind.

Die Gleichung (16) können wir leicht auf $G = 0$ zurückführen. Setzt man nämlich:

$$(18)\qquad \alpha = \frac{a^3}{b^3} = 1 - \tfrac{3}{2}\,S\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\,,$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{16\,\varkappa^2\,\lambda^6\,S^3}{9\,(\varkappa^4 - S\,\varkappa^2\lambda^2 - \frac{1}{12}\,S^2\lambda^4)^2}\,,$$

und hier braucht man nur auf beiden Seiten die Wurzel zu ziehen, um wieder die Gleichung $G\,(\varkappa,\ \lambda) = 0$ zu haben.

Die *wirkliche Berechnung der Ausdrücke* $y_1,\ y_2,\ y_3$ in Function der Coëfficienten von f erfordert etwas weitläufigere Betrachtungen. Durch die Formen χ und Δ_χ sind uns zwei symmetrische Functionen der gesuchten Grössen $y_1^3,\ y_2^3,\ y_3^3$ gegeben; denn aus (11) und (12) ergibt sich (da $\Delta' = r^2\,.\,\Delta$):

$$(19)\qquad \begin{aligned} y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = \chi \quad &= \frac{1}{\Gamma}\left\{f\,.\,\Gamma_1 - r^2\Delta\,.\,b\right\} \\ y_1 y_2 y_3 = \tfrac{1}{6}\,\Delta'_\chi &= \frac{1}{6\Gamma}\left\{f\,.\,\Gamma_2 + r^2\Delta\,.\,a\right\}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch den Werth der dritten symmetrischen Function $y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3$ angeben, so können wir eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln uns die Werthe von $y_1^3,\ y_2^3,\ y_3^3$ angeben. Aber diese dritte Function ist von der sechsten Ordnung, verlangt also die Benutzung von Covarianten sechster Ordnung, denen wir bisher noch nicht begegnet sind. Auf dieselben werden wir sogleich noch zurückkommen; wir erwähnen hier nur, dass der von uns

gewünschte Ausdruck aus Θ entsteht, wenn wir die u_i durch die Grössen $\Delta_i = \frac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}$ ersetzen, d. h. wir wählen die Covariante:

$$\varphi = \Theta_x^2 \alpha_\vartheta \beta_\vartheta \alpha_x^2 \beta_x^2 = (ab\alpha)(ab\beta)\, a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2$$

$$= -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

In der That finden wir für die kanonische Form:

$$(20) \quad \varphi_\chi' = -2 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 & 2y_2y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & 2y_3y_1 \\ 0 & 0 & y_3 & 2y_1y_2 \\ 2y_2y_3 & 2y_3y_1 & 2y_1y_2 & 0 \end{vmatrix} = 8(y_2^3y_3^3 + y_3^3y_1^3 + y_1^3y_2^3).$$

Die erwähnte cubische Gleichung, deren Wurzeln y_1^3, y_2^3, y_3^3 sind, würde also sein:

$$(21) \qquad z^3 - \chi z^2 + \tfrac{1}{8}\varphi_\chi' z - (\tfrac{1}{8}\Delta_\chi')^3 = 0.$$

Die Auflösung derselben wird dadurch vereinfacht, dass wir die Quadratwurzel aus ihrer Discriminante, d. h. das Differenzenproduct

$$(y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3),$$

wie sogleich gezeigt werden soll, durch eine Covariante neunter Ordnung von f darstellen können; man hat also eine Quadratwurzel weniger auszuziehen, als bei einer allgemeinen cubischen Gleichung.*)

Wir können jedoch die schliesslichen Ausdrücke für y_i^3 auch ohne directe Auflösung der Gleichung (21) finden, wenn wir auch noch die symmetrische Function $y_1^6 + y_2^6 + y_3^6$ mittelst Covarianten von f berechnen. Dass dies möglich ist, folgt aus der Bemerkung, *dass jede Covariante von f in der kanonischen Form eine ganze Function von y_1^3, y_2^3, y_3^3, $y_1y_2y_3$ und in y_1^3, y_2^3, y_3^3 symmetrisch sein muss.* Eine Covariante darf sich nämlich nicht ändern, wenn man zu y_1, y_2, y_3 je dieselbe dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzufügt, denn dadurch wird die Form f nicht afficirt. — Alle Covarianten sechster Ordnung lassen sich aber, wie man an der kanonischen Form leicht beweist, durch eine von ihnen und f und Δ rational ausdrücken. Unter ihnen ist die Form ψ besonders ausgezeichnet, welche durch die Gleichung

$$(22) \qquad \psi = N_{n'} N_n' N_x^3 N_x'^3$$

definirt ist, wo die Symbole N, n sich auf die uns ebenfalls neue Zwischenform beziehen:

---

*) Vgl. die Formeln (16) auf p. 223.

$$(23)\qquad N = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix} = (a\alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n .$$

Diese Covariante ψ werden wir als eine **Combinante** *des Systems $\varkappa f + \lambda\Delta$ erkennen, d. h. wir werden die Gleichung nachweisen:*

$$(24)\qquad \psi_{\varkappa\lambda} = G^2 . \psi .$$

Ferner besteht zwischen den Formen φ und ψ die sogleich zu beweisende Relation (p. 574):

$$(25)\qquad \psi = -\tfrac{3}{4}\varphi - \tfrac{1}{12} Tf^2 + \tfrac{1}{8} S\Delta f ,$$

aus welcher wir die kanonische Form von φ ableiten können. Da nämlich für die Form χ nach Früherem $S = 0$, $T = -6$*) ist, so gibt die Gleichung (25) wegen (20):

$$\begin{aligned} \psi_\chi' &= -\tfrac{3}{4}\varphi_\chi' + \tfrac{1}{2}\chi^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^2 - 6(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) ; \end{aligned}$$

und hieraus finden wir die Form ψ von f mit Hülfe von (24), es ist:

$$r^6 \psi = \psi'_{a\chi + b\Delta'\chi} = \Gamma^2 . \psi_\chi' ,$$

also schliesslich:

$$(26)\qquad r^6\psi = \tfrac{1}{2}\Gamma^2 . \{(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^2 - 12(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3)\} .$$

Dies in Verbindung mit (19) gibt uns die weiteren symmetrischen Functionen:

$$(27)\qquad \begin{cases} y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3 = -\frac{r^6\psi}{6\Gamma^2} + \frac{1}{12\Gamma^2}\{f . \Gamma_1 - r^2\Delta . b\}^2 \\ y_1^6 + y_2^6 + y_3^6 = \frac{r^6\psi}{3\Gamma^2} + \frac{5}{6\Gamma^2}\{f . \Gamma_1 - r^2\Delta . b\}^2 . \end{cases}$$

Ausser diesen symmetrischen Functionen können wir noch das schon erwähnte Differenzenproduct (unter Adjunction von r) rational darstellen mittelst einer Covariante Ω, definirt durch ($\psi = \psi_x^6$):

$$(28)\qquad \Omega = \frac{1}{54}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a\alpha\psi)\, a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5$$

$$= N_x^4 \psi_n \psi_x^5 = N_{n'} N'_n N'_{n''} N_x^3 N_x'^2 N_x''^4 .$$

Diese Covariante Ω ist ebenfalls eine Combinante, d. h. es ist: $\Omega_{\varkappa\lambda} = G^3 . \Omega$ (vgl. p. 575), also auch für die kanonische Form:

*) Man findet diesen Werth aus (15) für $a = 1$, $b = 0$.

$$r^9\Omega = \Omega' = \Gamma^3 . \Omega_\chi' = 6\,\Gamma^3 . \begin{vmatrix} y_1^2 & y_2y_3 & y_1^5 \\ y_2^2 & y_3y_1 & y_2^5 \\ y_3^2 & y_1y_2 & y_3^5 \end{vmatrix}$$

$$= -6\,\Gamma^3 . (y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) .^{*})$$

Das Differenzenproduct der Cuben y_1^3, y_2^3, y_3^3, d. h. die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung (21) *ist daher gegeben durch:*

$$(29) \qquad (y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) = -\frac{r^9\Omega}{6\,\Gamma^3} .$$

Dabei ist zu bemerken, dass das Vorzeichen auf der rechten Seite nicht bestimmt ist, weil durch Gleichung (17) nur r^2, nicht aber r selbst gefunden wurde. Der Ausdruck (29) enthält also noch den irrationalen Factor

$$r = \sqrt{\frac{S}{T}\,\frac{8b^6 + 20a^3b^3 - a^6}{4b(b^3 - a^3)}} ,$$

und der numerische Werth unter dem Wurzelzeichen besteht aus einer völlig gegebenen nur von $\frac{b^3}{a^3}$ abhängigen Grösse und aus einem willkürlich zu wählenden Factor b^2, welcher, wie man sieht, aus der Irrationalität als solcher ausscheidet.

Mit Hülfe der gefundenen Ausdrücke kann man nun die Cuben und das Product der beiden irrationalen Covarianten

$$(30) \qquad \mathsf{M} = y_1^3 + \varepsilon y_2^3 + \varepsilon^2 y_3^3 , \quad \mathsf{N} = y_1^3 + \varepsilon^2 y_2^3 + \varepsilon y_3^3$$

darstellen. Beachten wir bei Berechnung dieser Cuben die Relationen:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$$

$$y_1^9 + y_2^9 + y_3^9 = (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^3 - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3y_3^3 + y_3^3y_1^3 + y_1^3y_2^3) + 3y_1^3y_2^3y_3^3 ,$$

$$\mathsf{M}^3 + \mathsf{N}^3 = 2(y_1^9 + y_2^9 + y_3^9) - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3y_3^3 + y_3^3y_1^3 + y_1^3y_2^3) + 21\,y_1^3y_2^3y_3^3 ,$$

so finden wir unter Berücksichtigung von (19), (27) und (29) sofort:

$$(31) \quad \begin{cases} 8\,\Gamma^3(\mathsf{M}^3 + \mathsf{N}^3) = 12\,r^6\psi\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + 10\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b)^3 + (f\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 \\ 8\,\Gamma^3(\mathsf{M}^3 - \mathsf{N}^3) = 4\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)\,r^9\Omega \\ \Gamma^2\mathsf{MN} = \frac{1}{2}\,r^6\psi + \frac{3}{4}\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b)^2 . \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen sieht man, dass folgende beiden Covarianten neunter Ordnung vollständige Cuben sind:

*) Dass die Determinante bei der Ausrechnung in dies Product übergeht, erkennt man am einfachsten daraus, dass sie verschwindet, sobald zwei der y einander gleich werden und dass sie symmetrisch in den drei Cuben sein muss. Zur Bestimmung des Zahlenfactors braucht man dann nur ein Glied auszurechnen.

$$(32)\quad \begin{cases} 16\,\Gamma^3\,M^3 = (f\,\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b)^3 \\ \qquad + 12\,r^6\psi\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b) + 4\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,r^9\Omega \\ 16\,\Gamma^3\,N^3 = (f\,\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b)^3 \\ \qquad + 12\,r^6\psi\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b) + 4\,\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,r^9\Omega . \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (30) in Verbindung mit der Gleichung: $\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ können wir endlich die drei Cuben y_1^3, y_2^3, y_3^3 linear in M, N und χ berechnen, wo dann $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten eines Wendepunktsdreiecks sind.

Ziehen wir also aus den Grössen (32) *die Cubikwurzel, so erhalten wir eine der gesuchten Transformationen auf die kanonische Form durch die Cubikwurzeln aus den folgenden drei Ausdrücken:*

$$(33)\quad \begin{cases} 3\,y_1^3 = \frac{1}{\Gamma}\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b) + M + N \\ 3\,y_2^3 = \frac{1}{\Gamma}\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b) + \varepsilon M + \varepsilon^2 N \\ 3\,y_3^3 = \frac{1}{\Gamma}\,(f\,\Gamma_1 - r^2\Delta b) + \varepsilon^2 M + \varepsilon N , \end{cases}$$

wo nun $\frac{a^3}{b^3}$ eine Wurzel der biquadratischen Gleichung (16) ist*), wo ferner Γ durch (13), r durch (17), M und N durch (32) definirt sind, und in M, N die Form ψ durch (22), Ω durch (28).

Durch die Gleichungen (33) *ist das Wendepunktproblem vollständig erledigt.* Wir hatten dabei eine biquadratische und eine cubische Gleichung zu lösen; erstere war durch das Verschwinden der Invariante i ausgezeichnet, letztere dadurch, dass das Differenzenproduct der Wurzeln bekannt war. —

Wir haben noch einige Bemerkungen über die neuen von uns benutzten Bildungen hinzuzufügen, insbesondere die zwischen φ und ψ bestehende Identität sowie die Combinanteneigenschaft der Formen ψ und Ω nachzuweisen. Wir werden daran ferner einige Bemerkungen über das System $\varkappa\Sigma + \lambda T = 0$ von Curven dritter Klasse knüpfen.

Die von Brioschi eingeführte Covariante ψ hatten wir aus der Zwischenform (23):

$$N = (a\,\alpha\,u)\;a_x^2\,\alpha_x^2$$

abgeleitet; gleich Null gesetzt, ordnet letztere jeder Linie u die Curve 4. Ordnung der Punkte x zu, deren lineare Polaren in Bezug auf $f = 0$ und $\Delta = 0$ sich auf u schneiden. Um ψ zunächst durch Symbole a, α von f, Δ auszudrücken, bemerken wir, dass ψ nach (22) aus

*) Man erhält diese Wurzeln mittelst der Substitution (18) direct aus den Wurzeln $\frac{\varkappa}{\lambda}$ der Gleichung (8) $G = 0$.

$$N_x^3 N_y u_n = \frac{1}{2} (a\alpha u) a_x \alpha_x (a_x \alpha_y + a_y \alpha_x)$$

entsteht, wenn man y durch x, u durch N ersetzt und mit N_x^3 multiplicirt. Daher ist:

$$\psi = \frac{1}{2} (a\alpha N) (a_n \alpha_x + a_x \alpha_n) a_x \alpha_x N_x^3.$$

Hier entstehen beide Glieder wieder aus $N_x^3 N_y u_n$ (b, β für a, α geschrieben); das erstere, indem man u durch a, y durch Determinanten der a, α, das andere, indem man u durch α, y durch Determinanten der a, α ersetzt. Also ist:

$$\psi = \frac{1}{4} a_x \alpha_x b_x \beta_x \left\{a_x (b\beta\alpha) + \alpha_x (b\beta a)\right\} \left\{b_x (\beta a \alpha) + \beta_x (b a \alpha)\right\}.$$

Multiplicirt man aus, so entstehen vier Glieder, von denen aber zwei durch Vertauschung von Buchstaben in einander übergehen; es wird also:

$$\psi = -\frac{1}{4} (\varphi + 2\varphi' + \varphi'') \tag{34}$$

wo:

$$\begin{aligned} \varphi &= (ab\beta)(ab\alpha) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2 \\ \varphi' &= -(ab\beta)(\alpha\beta a) a_x \beta_x \alpha_x^2 b_x^2 \\ \varphi'' &= (\alpha\beta a)(\alpha\beta b) \alpha_x \beta_x a_x^2 b_x^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Wir werden nun zeigen, dass sich $2\varphi'$ sowohl auf φ als auf φ'' zurückführen lässt; man kann daher weiterhin alle φ durch ψ ausdrücken. Es ist nämlich (a, b vertauscht):

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x \left\{- b_x (\alpha\beta a) + a_x (\alpha\beta b)\right\} \\ &= (ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x \left\{\beta_x (ab\alpha) - \alpha_x (ab\beta)\right\} \\ &= \varphi - \Delta \,.\, (ab\beta)^2 a_x b_x \beta_x \\ &= \varphi - \tfrac{1}{6} S\Delta f; \qquad \text{(nach Gl. (22) auf p. 552)} \end{aligned}$$

aber auch (α mit β vertauscht):

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (\alpha\beta a) \alpha_x \beta_x a_x b_x^2 \left\{- \alpha_x (ab\beta) + \beta_x (ab\alpha)\right\} \\ &= (\alpha\beta a) a_x \beta_x a_x b_x^2 \left\{a_x (\alpha\beta b) - b_x (\alpha\beta a)\right\} \\ &= \varphi'' - \tfrac{1}{6} f (2Tf - S\Delta). \qquad \text{(vgl. Gl. (40) p. 559)} \end{aligned}$$

Tragen wir diese Ausdrücke von φ, φ'' in die Formel (34) ein, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= -\tfrac{4}{3}\psi - \tfrac{1}{9} Tf^2 + \tfrac{1}{6} S\Delta f \\ \varphi' &= -\tfrac{4}{3}\psi - \tfrac{1}{18} Tf^2 \\ \varphi'' &= -\tfrac{4}{3}\psi + \tfrac{2}{9} Tf^2 - \tfrac{1}{6} S\Delta f. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Die erste von diesen drei Gleichungen ist die vorhin benutzte.

Um nachzuweisen, dass ψ und Ω Combinanten sind, brauchen wir nur zu zeigen, dass dies für die Zwischenform N gilt, aus welcher beide nach (22) und (28) abgeleitet werden. Dass sich N und $N_{\varkappa\lambda}$ in der That nur um einen Factor unterscheiden, ersieht man schon

daraus, dass die linearen Polaren von x in Bezug auf die Curven $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ einen Strahlbüschel bilden, dessen Mittelpunkt eben durch $N = 0$ gegeben ist. Um diesen Factor als eine Potenz von G zu erkennen, gehen wir von der Form aus:

$$(37) \qquad H = a_x^3 \alpha_y^3 - a_y^3 \alpha_x^3 = f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y),$$

welche man, wie sich zeigen lässt*), allen Combinantenbildungen von f zu Grunde legen kann. Es ist aber:

$$\begin{aligned}[f(x)\Delta(y) - \Delta(x) f(y)]_{\varkappa\lambda} &= \begin{vmatrix} \varkappa f(x) + \lambda \Delta(x) & G_1 \Delta(x) - G_2 f(x) \\ \varkappa f(y) + \lambda \Delta(y) & G_1 \Delta(y) - G_2 f(y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ -G_2 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & \Delta(x) \\ f(y) & \Delta(y) \end{vmatrix} \\ &= G(\varkappa, \lambda) \cdot \{f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)\}.\end{aligned}$$

Also die Form H ist eine Combinante: $H_{\varkappa\lambda} = G \cdot H$.

Nach (37) ist aber auch

$$H = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + a_x \alpha_x a_y \alpha_y),$$

und es ist identisch (vgl. p. 563):

$$0 = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 - 2 a_x \alpha_x a_y \alpha_y) = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3;$$

der letzte Ausdruck entsteht nämlich aus der verschwindenden Form $(a \alpha u)^3$, wenn man die u durch Determinanten aus den x, y ersetzt. Daher ist auch:

$$H = \tfrac{1}{2}(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + 4\, a_x \alpha_x a_y \alpha_y).$$

Dies entsteht aber aus $N = (a \alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2$, wenn man N wiederholt nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und schliesslich für die u Determinanten der x, y setzt. Es ist also H eine aus N entstandene Form und zwar entstanden durch lineare Operationen. *Ebenso entsteht aber auch N aus H*; denn für N kann man den Werth setzen, welchen der Ausdruck**)

$$\tfrac{1}{18}\left\{u_1 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_2}\right) + u_2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_3}\right) + u_3 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1}\right)\right\}$$

annimmt, indem man die y den x gleich setzt. Hierdurch ist der Zusammenhang von N und H bewiesen, und es folgt:

Die Form N, und somit auch ψ und Ω sind Combinanten; es ist:

$$N_{\varkappa\lambda} = G \cdot N, \quad \psi_{\varkappa\lambda} = G^2 \cdot \psi, \quad \Omega_{\varkappa\lambda} = G^3 \cdot \Omega.$$

---

*) Vgl. Näheres über die Combinanten der ternären cubischen Formen in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 6 und den VIII. Abschnitt dieser Abtheilung; über Combinanten im Allgemeinen ib. Bd. 5, p. 95.

**) Derselbe lässt sich, wenn man symbolisch $H = h_x^3 k_y^3$ setzt, übersichtlicher in der Form $\frac{1}{2}(hku)\, h_x^2 k_y^2$ schreiben.

Damit haben wir die für Aufstellung der Transformationsformeln (33) benutzten Sätze sämmtlich bewiesen. —

Die Behandlung des Problems der Wendepunkte hätte man natürlich auch an das Studium der zugehörigen Formen Σ und T anknüpfen können. Statt der Wendepunkte gilt es dann, die neun gemeinsamen Rückkehrtangenten der Schaar $\varkappa\Sigma + \lambda\mathsf{T} = 0$ zu finden. *Dass diese Curven sämmtlich die harmonischen Geraden von $f = 0$ zu Rückkehrtangenten haben und also die früher erwähnte Schaar von Curven dritter Klasse bilden* (p 518), erkennt man sofort aus der kanonischen Form. Σ und T nämlich waren definirt durch:

$$\Sigma = \tfrac{1}{4}\,\Sigma\,\frac{\partial S}{\partial a_{ikh}}\,u_i u_k u_h\,, \quad \mathsf{T} = \tfrac{1}{6}\,\Sigma\,\frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\,u_i u_k u_h\,;$$

mithin erhält man aus (14) und (15):

$$\Sigma' = \tfrac{1}{12}\,\frac{\partial S'}{\partial a}\,(v_1^3 + v_2^3 + v_3^3) + \tfrac{1}{4}\,\frac{\partial S'}{\partial b}\,v_1 v_2 v_3\,;$$

denn es ist: $\dfrac{\partial S'}{\partial a_{111}} = \dfrac{\partial S'}{\partial a_{222}} = \dfrac{\partial S'}{\partial a_{333}} = \tfrac{1}{3}\,\dfrac{\partial S'}{\partial a}$.

Ebenso wird: $\mathsf{T}' = \tfrac{1}{18}\,\dfrac{\partial T'}{\partial a}\,(v_1^3 + v_2^3 + v_3^3) + \tfrac{1}{6}\,\dfrac{\partial T'}{\partial b}\,v_1 v_2 v_3$; und also durch Ausrechnung:

$$\Sigma' = 6\,(4b^3 - a^3)\,v_1 v_2 v_3 - 6\,b a^2\,(v_1^3 + v_2^3 + v_3^3)$$
$$\mathsf{T}' = 4\,(4b^3 + 5a^3)\,b^2 v_1 v_2 v_3 + 2\,(10b^3 - a^3)\,a^2\,(v_1^3 + v_2^3 + v_3^3).$$

Die Form der Gleichungen $\Sigma = 0$, $\mathsf{T} = 0$ ist also in der That dieselbe, wie die der Gleichungen $f = 0$, $\Delta = 0$. Um nun die invarianten Bildungen des Systems $\varkappa\Sigma + \lambda\mathsf{T}$ zu studiren, legt man jedoch zwei andere Formen Π und P dieses Systems zu Grunde, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass die Bildung $\Delta\Pi - f\mathsf{P}$ eine Combinante ist, und dass sie den Bedingungen

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^2\,.\,(\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P})\,, \quad \mathsf{P}_{\varkappa\lambda} = G^2\,.\,(G_1\mathsf{P} - G_2\Pi)$$

genügen. Sie sind definirt durch die Gleichungen*):

---

*) Die Einführung dieser Bildungen gestattet z. B. die früher gewonnenen Ausdrücke für $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ und $\mathsf{T}_{\varkappa\lambda}$ (p. 559 u. 561) übersichtlicher darzustellen; man findet:

$$R\,.\,\Sigma_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4}\left\{\mathsf{P}\,\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\,\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right\}, \qquad R\,.\,\mathsf{T}_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\left\{\mathsf{P}\,\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\,\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right\}.$$

Wegen des Näheren vgl. den angeführten Aufsatz von Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6. — Wir erwähnen hier nur noch einige Resultate, welche mit unseren früheren Untersuchungen über das einem Kegelschnittnetze conjugirte Gewebe zusammenhängen (p. 521). Wir haben damals die Gleichung einer Curve dritter Ordnung aufgestellt, deren Hesse'sche Curve durch $i_x^3 = 0$, deren Cayley'sche durch $u_h^3 = 0$ gegeben ist, und zwar in der Form

$$p_x^3 \equiv 2\,(h h' x)^2\,i_x\,i_h\,i_{h'} - (h h' h'')\,(h h' x)\,(h' h'' x)\,(h'' h x) = 0\,.$$

$$(38)\qquad \begin{aligned}\Pi &= S\mathrm{T} - T\Sigma\\ \mathrm{P} &= T\mathrm{T} - \tfrac{1}{6} S^2\Sigma.\end{aligned}$$

Für das System $\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P}$ gibt es nun entsprechend der Form ψ eine Form sechster Klasse, welche sich aus F, der linken Seite der Liniencoordinatengleichung von $f = 0$, Σ und T zusammensetzt*), und eine Form neunter Klasse, welche der Form Ω dualistisch gegenübersteht. Es ging aber nach (29) Ω in der kanonischen Form in

---

Die linke Seite dieser Gleichung darf sich nun von unserer Grundform f nur um einen Factor unterscheiden, wenn wir setzen (vgl. die Anmerkung auf p. 550):

$$(1)\qquad 6\, i_x{}^3 = \Delta = \alpha_x{}^3, \qquad 6\, u_h{}^3 = \Sigma = u_s{}^3.$$

Dann entsteht das erste Glied von $p_x{}^3$, wenn man die Form $\Theta^{(\Sigma)} = (ss'x)^2 u_s u_{s'}$ bildet, darin die u durch α ersetzt und mit α_x multiplicirt. Nun ist aber (vgl. Gleichung 90 a. a. O.):

$$\Theta^{(\Sigma)} = \mathrm{K} + \tfrac{1}{2} S\Theta$$

und also wird (nach Gleichung 40, p. 561):

$$(2)\qquad 6^2\,(hh'x)^2\, i_h i_{h'}\, i_x = \Delta_2 + \tfrac{1}{2} S\Delta_1 = -\tfrac{1}{3} T\Delta.$$

Das zweite Glied von $p_x{}^3$ gibt gleich Null gesetzt die Cayley'sche Curve $\Sigma^{(\Sigma)} = 0$ von $u_h{}^3 = 0$. Nun ist aber (a. a. O. Gl. 99):

$$\Sigma^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = \tfrac{2}{3} R^2 (G_2 f - G_1\Delta) = -\tfrac{2}{3} R^2 . \Delta_{\varkappa\lambda},$$

und hieraus ergibt sich, wenn man $\Sigma = 6\, u_h{}^3$ in der Form $\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P}$ mittelst der Gleichungen (38) darstellt:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\Sigma)} &= (ss's'')\,(ss'x)\,(ss''x)\,(s's''x)\\ &= -6^3\,(hh'h'')\,(hh'x)\,(hh''x)\,(h'h''x)\\ (3)\qquad &= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2} S^2 f + T\Delta\right).\end{aligned}$$

Die Gleichungen (2), (3) geben uns in der That für $p_x{}^3$ die verlangte Relation:

$$6^3\, p_x{}^3 = \tfrac{1}{3} S^2 . f.$$

Wir haben ferner die Gleichung der Curve dritter Klasse aufgestellt, deren Polarkegelschnitte mit denen von $p_x{}^3 = 0$ vereinigt liegen (p. 525); dieselbe war:

$$-\tfrac{1}{8} u_\pi{}^3 = (ii'u)^2\, i_h i_h'\, u_h + (ii'i'')\,(ii'u)\,(i'i''u)\,(i''iu) = 0.$$

Wegen (1) findet man aber (a. a. O. Gl. 92):

$$\begin{aligned}6^3\,(ii'u)^2\, i_h i_h'\, u_h &= (\alpha\beta u)^2\, \alpha_s \beta_s u_s = \mathrm{K}_s{}^2 u_k{}^2 u_s\\ &= \tfrac{1}{2} S\mathrm{T} - \tfrac{1}{3} T\Sigma,\end{aligned}$$

und ferner (wegen des Ausdruckes für $\Sigma_{\varkappa\lambda}$):

$$\begin{aligned}6^3\,(ii'i'')\,(ii'u)\,(i'i''u)\,(i''iu) &= -(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha\beta u)\,(\alpha\gamma u)\,(\beta\gamma u)\\ &= -\Sigma_\Delta = \tfrac{2}{3} T\Sigma - \tfrac{1}{2} S\mathrm{T};\end{aligned}$$

und somit erhalten wir:

$$-\frac{6^3}{8}\, u_\pi{}^3 = S\mathrm{T} - T\Sigma = \Pi.$$

Die Gleichung $\Pi = 0$ stellt daher die Curve dritter Klasse dar, deren Polarengewebe zu dem Polarennetze von $f = 0$ conjugirt ist (vgl. Aronhold a. a. O.).

*) Vgl. a. a. O. die Darstellung von Φ in § 18.

das Differenzenproduct von y_1^3, y_2^3, y_3^3 über. Ebenso unterscheidet sich die Form neunter Klasse von dem Producte:

$$(v_1^3 - v_2^3)(v_2^3 - v_3^3)(v_3^3 - v_1^3)$$

nur um einen Factor. Eine Gleichung $v_1^3 - v_2^3 = 0$ ist aber die Gleichung des Productes der drei auf der Seite $y_3 = 0$ gelegenen Wendepunkte; denn dieselhen genügen noch der Bedingung:

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)(y_1 + \varepsilon y_2)(y_1 + \varepsilon^2 y_2) = 0,$$

und die Gleichung des Schnittpunktes einer Linie $y_1 + \varepsilon^i y_2 = 0$ mit $y_3 = 0$ ist eben:

$$v_1 - \varepsilon^i v_2 = 0.$$

*Die zugehörige Form neunter Klasse stellt daher, gleich Null gesetzt, das Product der neun Wendepunkte vor.**)

Und dualistisch entsprechend:

Die Form neunter Ordnung (28) Ω *stellt, gleich Null gesetzt, das Product der neun harmonischen Geraden vor.*

— Den Umstand, dass die Curve dritter Ordnung nur *eine* absolute Invariante und also nur *zwei* Invarianten, haben kann (vgl. p. 556), wollen wir noch verwerthen, um den früher geometrisch erhaltenen Satz zu beweisen, dass *das Doppelverhältniss der vier von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe gelegten Tangenten constant ist*, und um die absolute Invariante in Function dieses Doppelverhältnisses der Curve auszudrücken.

Ist $a_y^3 = 0$, so ist die Gleichung des Productes der vier von y an die Curve $f \equiv a_x^3 = 0$ zu legenden Tangenten (vgl. p. 501):

$$\begin{aligned} 4f \,.\, D^2 f - 3(Df)^2 &\equiv 4\, a_x^3 \,.\, b_y^2 b_x - 3\, a_x^2 a_y \,.\, b_x^2 b_y = 0 \\ &= A_x^4 = B_x^4 = C_x^4, \end{aligned}$$

eine Curve vierter Ordnung, welche ihrer besonderen Natur nach von jeder Linie u in vier Punkten von demselben Doppelverhältnisse geschnitten wird. Die Curve vierter Klasse (vgl. p. 278):

$$i \equiv (A B u)^4 = 0,$$

deren Tangenten die Curve A_x^4 in vier äquianharmonischen Punkten treffen, wird daher entweder von *allen* Linien u berührt oder sie stellt wieder den Punkt y dar. Die Form $(ABu)^4$ muss also in zwei Factoren zerfallen, von denen der eine von den u, der andere von den A, B unabhängig ist. Der letztere kann aber nur u_y^4 sein, wie geometrisch sofort erhellt. Da nun $(ABu)^4$ eine invariante Bildung ist,

*) Ueber die Bildung des Productes der Gleichungen der 9 Wendetangenten vgl. Salmon's Lessons on higher algebra und Clebsch: Crelle's Journal, Bd. 58.

so bleibt für den ersteren nur noch ein von den Coëfficienten der Grundform f allein abhängiger invarianter Ausdruck, und zwar vom vierten Grade in diesen Coëfficienten, d. h. die Invariante S. Es ist daher*):

$$i = (ABu)^4 = c \,.\, S \,.\, u_y^4, \tag{39}$$

und ebenso:

$$j = (ABu)^2\,(ACu)^2\,(BCu)^2 = c' \,.\, T \,.\, u_y^6, \tag{40}$$

wo c, c' Zahlenfactoren bedeuten. Nun hängt das Doppelverhältniss der vier Strahlen $A_x^4 = 0$ bekanntlich von der absoluten Invariante

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{c^3}{c'^2} \cdot \frac{S^3}{T^2}$$

ab, ist also *in der That von y unabhängig***), w. z. b. w. Insbesondere haben wir den Satz:

Das Doppelverhältniss einer Curve dritter Ordnung ist äquianharmonisch, wenn die Invariante S, harmonisch, wenn die Invariante T verschwindet. Eine äquianharmonische Curve ist also nach dem Früheren dadurch charakterisirt, dass ihre Hesse'*sche Curve in drei Gerade zerfällt, und dass sich in den drei Doppelpunkten dieser Curve die Wende-*

---

*) Die Invarianten und Covarianten der durch die 4 von y ausgehenden Tangenten gegebenen binären Form sind neuerdings von Harnack durch die Functionalinvarianten von f vollständig dargestellt: Math. Annalen, Bd. 9, p. 218.

**) Eine ganz analoge Schlussweise führt bei Curven höherer Ordnung zu einem entsprechenden Satze. Das Product der $k-2$ von einem Curvenpunkte y einer Curve k^{ter} Klasse an dieselbe zu legenden Tangenten wird durch eine Gleichung $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $A_x^{k-2} = 0$ gegeben, welche aus der Liniencoordinatengleichung entsteht, wenn man $u_i = (xy)_i$ setzt und von der linken Seite derselben sodann vermöge $a_y^n = 0$ einen Factor $[a_y^{n-1} a_x]^2$ absondert. Die Gleichung $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, wo $k = n\,(n-1)$, ist dann vom Grade $2\,(n-1) - 2$ in den Coëfficienten von f (vgl. p. 279), und vom Grade $k - 2\,(n-1) = (n-1)\,(n-2)$ in den y. Eine Invariante p^{ten} Grades der binären Form $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche der Form A_x^{k-2} entspricht, enthält (nach p. 195) $\frac{1}{2} p\,(k-2)$ Determinantenfactoren; die aus ihr nach dem Uebertragungsprincipe zu bildende ternäre Form — entsprechend der obigen Form $(ABu)^4$ — enthält daher die u zur Dimension $\frac{1}{2} p\,(k-2)$. Dieselbe muss in zwei Factoren zerfallen, von denen der eine die u nicht enthält, der andere eine Potenz von u_y ist. Diese Invariante enthält nun die y im Ganzen zum Grade $p\,(n-1)\,(n-2)$; nach Absonderung des Factors $u_y^{1/2\,p\,(k-2)}$ kommen dieselben daher noch zur Dimension:

$$p\,(n-1)\,(n-2) - \tfrac{1}{2}\,p\,(k-2) = \tfrac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)\,p$$

vor; und wir haben den Satz: *Auf einer Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte gibt es $\frac{1}{2}\,p\,n\,(n-2)\,(n-3)$ Punkte, von denen $k-2$ Tangenten an die C_n zu ziehen sind, für welche, aufgefasst als Repräsentanten einer binären Form, eine Invariante p^{ten} Grades der letzteren verschwindet.*

tangenten zu dreien schneiden; eine harmonische dadurch, dass die Hesse*sche Curve ihrer* Hesse'*schen wieder die Grundcurve ist* (p. 518 u. 559).

Die absolute Invariante einer binären biquadratischen Form hatten wir früher als Function des Doppelverhältnisses α dargestellt; es war (s. Gl. (28) p. 239):

$$\frac{i^3}{j^3} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Insbesondere erhalten wir hieraus für $\alpha = 1$ die Bedingung für eine Doppelwurzel: $i^3 - 6j^2 = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung muss aber in unserem Falle mit der Discriminante von $f = a_x^3$ bis auf einen Factor C übereinstimmen, d. h mit

$$6R = 6T^2 - S^3.$$

Wir haben also wegen (39) und (40):

$$Ci^3 = c^3 S^3 u_y^{12}, \quad Cj^2 = c'^2 T^2 u_y^{12},$$

also $\frac{c^3}{c'^2} = 1$: *Die absolute Invariante hängt mit dem Doppelverhältnisse α der Curve dritter Ordnung zusammen durch die Gleichung:*

$$(41) \qquad \frac{S^3}{T^2} = \frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Ebenso ist natürlich für eine Curve des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$:

$$\frac{S_{\varkappa\lambda}^3}{T_{\varkappa\lambda}^2} = 24 \frac{(1-\alpha_{\varkappa\lambda}+\alpha_{\varkappa\lambda}^2)^3}{(1+\alpha_{\varkappa\lambda})^2(2-\alpha_{\varkappa\lambda})^2(1-2\alpha_{\varkappa\lambda})^2};$$

und da $\varkappa$, λ in S^3 und T^2 zum zwölften Grade vorkommen, so folgt:

Es gibt in dem syzygetischen Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ immer 12 *Curven von gleichem Doppelverhältnisse (jedoch nur vier äquianharmonische und sechs harmonische).*

VI. Curven dritter Ordnung mit Doppel- oder Rückkehrpunkt. — Ausartungen derselben.

Nachdem wir in Vorstehendem die wichtigsten Punkte aus der Theorie der allgemeinen Curven dritter Ordnung erörtert haben, bleibt uns übrig, die Modificationen zu untersuchen, welche die erwähnten Verhältnisse durch das Auftreten von Singularitäten (also insbesondere von Doppel- und Rückkehrpunkten und durch das Zerfallen der betrachteten Curve) erleiden. Dabei werden uns immer zwei wesentlich verschiedene Fragen beschäftigen:

1) Welche Relationen zwischen den Functionalinvarianten der cubischen Form sind nothwendig und hinreichend zur Charakterisirung der betreffenden Singularität?

2) Wie kann man, die Erfüllung dieser Relationen vorausgesetzt, die auftretenden singulären Punkte oder Tangenten etc. durch die Functionalinvarianten der Grundform darstellen?

Drittens endlich müsste man untersuchen, welche Besonderheiten bei den verschiedenen covarianten Curven etc. in den betrachteten Specialfällen auftreten. Doch würde uns letztere Frage hier zu weit führen; auch für die Beantwortung der beiden zuerst gestellten reichen die im Vorstehenden gegebenen Bruchstücke aus der Theorie der ternären cubischen Formen nicht aus; gleichwohl werden wir dieselben der Vollständigkeit halber behandeln, indem wir uns dabei eventuell auf andere Arbeiten beziehen.*) Ausserdem aber werden wir bei den Curven mit Doppel- sowie bei denen mit Rückkehrpunkt für die Behandlung der Geometrie auf der Curve neue Hülfsmittel kennen lernen, deren Erweiterung dann später zu den Anwendungen der elliptischen Functionen auf die Theorie der allgemeinen Curven dritter Ordnung führt.

Wir beginnen mit Betrachtung der *Curven mit einem Doppelpunkte.***) Dieselben sind charakterisirt durch das Verschwinden der Discriminante R, welche sich aus den beiden Invarianten

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd), \quad T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2$$

in folgender Weise zusammensetzt (p. 565):

$$R = T^2 - \tfrac{1}{6} S^3.$$

Es entsteht hier sofort die Frage nach der Bestimmung des Doppelpunktes y für den Fall $R = 0$. Wir haben uns also nach einer zugehörigen Form umzusehen, welche gleich Null gesetzt diesen Punkt darstellt, und zwar mindestens dreifach zählend, da es keine zugehörige Form niedrigerer Klasse gibt. Eine solche Form ist nun die früher mit Π bezeichnete (p. 577), welche durch die Gleichung:

$$\Pi = S\mathrm{T} - T\Sigma \tag{1}$$

definirt war.

Als Bedingung dafür, dass eine ternäre cubische Form $a_x{}^3$ die dritte Potenz einer linearen Form darstellt, werden wir nämlich weiterhin das identische Verschwinden der Zwischenform $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$ erkennen. Diese Form gebildet für $\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P}$ statt für $a_x{}^3$ gibt aber***):

$$\Theta^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = R \cdot \left\{G_{11}\mathrm{K} - 2\,G_{12}\mathrm{H} + G_{22}\Theta\right\},$$

*) Und zwar besonders auf den mehrfach erwähnten Aufsatz von Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6.

**) Ausführlicher findet man manche Punkte aus der Theorie dieser Curven in dem Werke von Salmon erörtert, sowie bei Weyr: Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde; Leipzig 1869.

***) Vgl. a. a. O. Gleichung (91).

und diese Bildung verschwindet in der That unabhängig von den u_i und x_i, sobald R Null ist, insbesondere ist also für $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$: $\Theta^{(\Pi)} = 0$, wie es sein sollte.*) Sonach können wir setzen

$$(2) \qquad \Pi = (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^3.$$

Um zu zeigen, dass die Grössen y_i mit den Coordinaten des Doppelpunktes zusammenfallen, haben wir nur nachzuweisen, dass für $\Pi = u_\pi^3$ sowohl a_π^3 als α_π^3 verschwindet (wo wieder $\alpha_x^3 = (abc)^2 a_x b_x c_x$), d. h. dass der Punkt y sowohl auf $f = 0$ als auf der Hesse'schen Curve $\Delta = 0$ liegt. Alsdann nämlich kann y nur der Doppelpunkt sein, denn einer der drei (nach den Plücker'schen Formeln noch möglichen) Wendepunkte von f, die doch symmetrisch auftreten, kann unmöglich allein für sich rational dargestellt werden. Nun ist aber für $\Sigma = u_s^3$, $\mathrm{T} = u_t^3$ (vgl. p. 548 und p. 556):

$$a_s^3 = S, \quad a_t^3 = T;$$

also nach (1) $a_\pi^3 = 0$ auch unabhängig von $R = 0$.**) Ferner ist nach p. 554 und wegen der Relation $\mathrm{T}' = \mathrm{T}$ auf p. 556:

$$\alpha_s^3 = \tfrac{1}{4}\delta S = T, \quad \alpha_t^3 = \tfrac{1}{6}\delta T = \tfrac{1}{6} S^2,$$

also:
$$\alpha_\pi^3 = \tfrac{1}{6} S^3 - T^2 = -R.$$

und sonach in der That $a_\pi^3 = 0$ und $\alpha_\pi^3 = 0$, q. e. d.

Wir haben also die Gleichung:

$$\Pi = u_\pi^3 = \Sigma\Sigma\Sigma \pi_{ikh} u_i u_k u_h = (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^3;$$

*und die Coordinaten des Doppelpunktes y bestimmen sich durch die laufende Proportion****):*

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = \pi_{111} : \pi_{112} : \pi_{113} : \ldots : \pi_{123},$$

wo für $\mathrm{T} = u_t^3$, $\Sigma = u_s^3$:

$$\pi_{ikh} = S t_{ikh} - T s_{ikh}.$$

---

*) In dem Büschel $\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P} = 0$ ist auch die Curve $\Sigma = 0$ enthalten und zwar nach p. 577 für $\varkappa = -\frac{T}{R}$, $\lambda = \frac{S}{R}$; für Σ verschwindet also Θ nicht, ebenso wenig für T; es ist vielmehr z. B. $\Theta^{(\Sigma)} = \mathrm{K} + \frac{1}{2} S\Theta$ nach Gleichung (90) a. a. O.

**) Diese Relation folgt auch aus der Identität $a_p^2 a_x u_p = 0$, welche nach Gleichung (20) p. 525 besteht; denn $u_\pi^3 = \Pi$ stimmt nach der Anmk. auf p. 577 mit der dort durch u_π^3 bezeichneten Form bis auf einen Zahlenfactor überein, und p_x^3 haben wir durch a_x^3 zu ersetzen. Bezeichnen wir aber die Form $a_\pi^3 a_x u_\pi$ mit P, so ist:

$$a_\pi^3 = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial u_3},$$

verschwindet also in der That mit P.

***) Vgl. Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 55, p. 165.

Nachdem so der Doppelpunkt gefunden ist, kann man die Curvengleichung in eine sehr einfache kanonische Form bringen. Zwei Seiten des einzuführenden Fundamentaldreiecks sind durch die beiden Tangenten des Doppelpunktes gegeben, werden also durch Zerfällung des Ausdruckes $a_y a_x^2$ in seine beiden linearen Factoren gefunden (vgl. p. 104); die dritte Seite ist die allein noch übrige Wendepunktslinie. Es sind nämlich nur noch drei Wendepunkte vorhanden, die anderen sechs fallen in den Doppelpunkt zusammen (vgl. p. 327 und 357), indem die Hesse'sche Curve $\Delta = 0$ in ihm ebenfalls einen Doppelpunkt hat, und ihre beiden Zweige die der Grundcurve berühren. Die drei Wendepunkte liegen natürlich wieder auf einer Geraden, und diese soll die dritte Seite unseres Coordinatendreiecks bilden. Um sie zu finden, haben wir die zerfallenden Curven des Büschels

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0 \tag{3}$$

zu suchen, welche im Allgemeinen durch die biquadratische Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben sind. Letztere hat aber, da wegen $R = 0$ ihre *beiden* Invarianten verschwinden (vgl. p. 564 und 240 f.), drei gleiche Wurzeln.

Es gibt daher in dem Büschel (3) *zwei in drei Gerade zerfallende Curven, von denen eine dreifach, die andere einfach zählt.*

Die erstere jedoch gibt kein eigentliches Dreieck, denn dieselbe besteht (wie man durch Grenzübergang von der allgemeinen zur speciellen Curve beweisen mag, indem man dabei berücksichtigt, dass im Doppelpunkte 6 Wendepunkte vereinigt liegen) aus den Verbindungslinien des Doppelpunktes mit den drei Wendepunkten. Die letztere dagegen besteht aus der Wendepunktslinie und den beiden Tangenten im Doppelpunkte; zwei Seiten sind uns also schon durch Zerlegung des Ausdrucks $a_y a_x^2$ in lineare Factoren bekannt, und so ist es leicht, die Coordinaten der dritten Seite zu finden. Sei nun die Gleichung der letzteren $x_3 = 0$, und seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte. Alsdann kann die Curvengleichung immer auf die Form

$$f \equiv \alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + 6\gamma x_1 x_2 x_3 = 0$$

gebracht werden; denn diese Curve hat in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einen Doppelpunkt und diese Coordinatenseiten selbst zu Tangenten; und $x_3 = 0$ schneidet die Wendepunkte aus, da die Gleichung der Hesse-schen Curve wird:

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \gamma x_3 & \gamma x_2 \\ \gamma x_3 & \beta x_2 & \gamma x_1 \\ \gamma x_2 & \gamma x_1 & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2 (2\gamma x_1 x_2 x_3 - \alpha x_1^3 - \beta x_2^3).$$

Dieselbe schneidet also $f = 0$ ausser im Doppelpunkte in der That nur noch in den Schnittpunkten von $x_3 = 0$. Aber auch die Constanten α, β, γ in f können wir durch Aenderung der Definition der Coordinaten x um passende Factoren fortschaffen, was dem Umstande entspricht, dass die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt keine absolute Invariante (d. h. keine für sie charakteristische Constante) mehr hat. Aus letzterem Umstande folgt dann auch, dass *jede* C_3 mit Doppelpunkt in obiger Form darstellbar ist; denn jede solche Curve kann in jede andere der Art transformirt werden. Wir haben also den Satz:

Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt kann immer auf eine Weise in die Form

$$(4) \qquad f \equiv x_1^3 + x_2^3 + 6\, x_1 x_2 x_3 = 0$$

transformirt werden; und die Gleichung der Hesse'*schen Curve ist dann:*

$$\tfrac{1}{6}\Delta = 2\, x_1 x_2 x_3 - x_1^3 - x_2^3 = 0\,.$$

Der Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ oder:

$$(5) \qquad (x_1^3 + x_2^3)(\varkappa - 6\,\lambda) + 6\, x_1 x_2 x_3 (\varkappa + 2\,\lambda) = 0$$

enthält nun in der That nur zwei zerfallende Curven, nämlich für $\varkappa = 6\,\lambda$ und für $\varkappa = -2\,\lambda$. Wir erkennen ferner, dass für die Lage der Ecken des Fundamentaldreiecks auf der Wendepunktslinie noch derselbe Satz gilt wie bei einer allgemeinen Curve (vgl. p. 508); dieselben werden nämlich ausgeschnitten durch die Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, während die Wendepunkte durch $x_2^3 + x_1^3 = 0$ bestimmt sind. Also:

Die Tangenten im Doppelpunkte schneiden die Wendepunktslinie in zwei Punkten, welche die Hesse'*sche Form für die durch die drei Wendepunkte gegebene binäre cubische Form darstellen. Die Covariante Q der letzteren wird durch die drei harmonischen Geraden der drei Wendepunkte ausgeschnitten.**)

*) Man kann überhaupt (vgl. die Fortsetzung des Textes) die Geometrie auf der Curve mit der Theorie der binären cubischen Form in Verbindung setzen, wenn man für letztere die Strahlen vom Doppelpunkte nach den drei Wendepunkten als Grundstrahlen annimmt, wie dies von Igel (Math. Annalen, Bd. 6, p. 633) und Rosenow (Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Breslau 1873) ohne Benutzung der kanonischen Form durchgeführt ist. Wir erwähnen hier nur noch den Satz:

Ist a_ξ^3 die binäre Form, welche die Wendepunkte darstellt, d. h. die Verbindungslinien des Doppelpunktes mit ihnen, so liegen drei Punkte der Curve in gerader Linie, wenn ihre Verbindungslinien ξ, η, ζ mit dem Doppelpunkte der Bedingung $a_\xi a_\eta a_\zeta = 0$ genügen.

Für $\eta = \zeta$ ergibt sich hieraus der Zusammenhang der Polarenbildungen von a_ξ^3 mit der Theorie der Tangentialpunkte. — Wir kommen hierauf später bei Behandlung der C_n vom Geschlechte Null zurück.

Diese drei Linien gehen, wie die Polare eines jeden Punktes, durch den Doppelpunkt; der eben ausgesprochene Satz gilt also ebenso für die Strahlen des durch den Doppelpunkt bestimmten Büschels, wie für die Punkte der Wendepunktslinie $x_3 = 0$. Ferner muss auch für die Realität der Wendepunkte dasselbe gelten, wie für die Grundpunkte einer cubischen Form in ihrer Beziehung zur Hesse'schen Form.

*Von den drei Wendepunkten sind daher zwei conjugirt imaginär und einer reell, wenn die Tangenten des Doppelpunktes reell sind, dagegen alle reell, wenn die Tangenten des Doppelpunktes imaginär sind, d. h. wenn letzterer ein isolirter Punkt ist.**)

Wir können aber überhaupt die Geometrie auf der Curve mit der Geometrie in dem durch den Doppelpunkt bestimmten Strahlbüschel in Verbindung setzen; denn jeder Strahl desselben trifft die Curve nur noch in *einem* Punkte: *Die Curve ist also eindeutig auf den Strahlbüschel und somit auf eine beliebige Gerade abgebildet.* Um dieser Beziehung einen algebraischen Ausdruck zu geben, um die Coordinaten eines Punktes der Curve durch diejenigen des entsprechenden Strahles im Büschel auszudrücken, knüpfen wir an die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung an, welche durch einen Strahl- und einen ihm projectivischen Kegelschnittbüschel vermittelt wurde (vgl. p. 535). *Eine solche Curve mit Doppelpunkt wird nämlich erzeugt, wenn man den Mittelpunkt des Strahlbüschels in einen Grundpunkt des Kegelschnittbüschels verlegt.* In der That, es sei ersterer gegeben durch: $x_1 + \lambda x_2 = 0$, dann ist die Gleichung eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels der beregten Art von der Form:

$$A x_1 + B x_2 + \lambda (C x_1 + D x_2) = 0,$$

wo A, B, C, D linear in den x sind; und durch Elimination von λ folgt:

$$(A x_1 + B x_2) x_2 - (C x_1 + D x_2) x_1 = 0,$$

eine Gleichung, in der jedes Glied mindestens von der zweiten Ordnung in x_1, x_2 ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieser Erzeugungsweise *lässt sich auch die Construction der Curve ausführen, wenn der Doppelpunkt* 0 *und sechs andere Punkte*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

gegeben sind. Wir benutzten etwa die Punkte 0, 1, 2, 3 als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, ordnen dann dem Kegelschnitte

*) Wie die erstere dieser Curven aus der allgemeinen C_3 entsteht, ist auf p. 499 gezeigt; die mit isolirtem Punkte kann man aus der Curve 3 in Fig. 62 dadurch entstanden denken, dass sich das Oval immer mehr auf einen Punkt zusammenzieht.

durch 4 den Strahl $\overline{04}$, dem durch 5 den Strahl $\overline{05}$, dem durch 6 den Strahl $\overline{06}$ zu, womit die projectivische Beziehung zwischen Strahl- und Kegelschnittbüschel festgelegt ist. Denkt man sich diese Beziehung wieder durch den Tangentenbüschel der Kegelschnitte in einem der Punkte 1, 2, 3 vermittelt (vgl. p. 375), so bietet die Construction des Schnittpunktes eines beliebigen Strahles durch 0 mit der Curve keine Schwierigkeiten mehr.

Um die Gleichung der Curve sofort in der Form (4) zu erhalten, brauchen wir den Kegelschnittbüschel nur in der Form:

$$(6) \qquad \lambda x_1^2 + x_2^2 + 6\lambda x_2 x_3 = 0$$

anzunehmen, wenn wieder $x_1 + \lambda x_2 = 0$ der Strahlbüschel ist. Aus (6) folgt aber weiter für $x_1 = -\lambda x_2$:

$$(7) \qquad x_2 - \lambda^2 x_1 + 6\lambda x_3 = 0.$$

Schreiben wir nun $\frac{\lambda}{\mu}$ statt λ, so finden wir hieraus:

$$\sigma x_1 = \lambda, \quad \sigma x_2 = -\mu, \quad \sigma x_3 = \frac{\mu^3 + \lambda^3}{6\lambda\mu},$$

oder wenn wir mit $6\lambda\mu$ multipliciren:

$$(8) \qquad \varrho x_1 = 6\lambda^2\mu, \quad \varrho x_2 = -6\lambda\mu^2, \quad \varrho x_3 = \lambda^3 + \mu^3.$$

Die Coordinaten der Punkte der Curve stellen sich also als Functionen dritten Grades eines Parameters $\frac{\lambda}{\mu}$ dar, wo λ, μ die Coordinaten der Strahlen des durch den Doppelpunkt bestimmten Büschels sind, bezogen auf die Tangenten des Doppelpunktes als Grundstrahlen; dabei entspricht jedem Punkte der Curve ein Strahl des Büschels und umgekehrt.

Diese Parameterdarstellung ist besonders zur Untersuchung der Geometrie auf der Curve nützlich. Wir wollen mit Hülfe derselben einige Probleme behandeln, welche wir später überhaupt für Curven vom Geschlechte Null in ähnlicher Weise erledigen werden. — Schneiden wir die Curve mit einer beliebigen Geraden u, so bestimmen sich die den Schnittpunkten entsprechenden Parameterwerthe aus der cubischen Gleichung:

$$6\lambda^2\mu u_1 - 6\lambda\mu^2 u_2 + (\lambda^3 + \mu^3) u_3 = 0.$$

Dividiren wir dieselbe durch $u_3\mu^3$, so haben wir eine Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$, deren constantes Glied stets gleich der Einheit ist, wie auch die Gerade gewählt sein mag. Bezeichnen wir also durch beigefügte Indices die Wurzeln der Gleichung, so ist immer:

$$(9) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -1;$$

und hieraus kann man den dritten Schnittpunkt jeder Geraden bestimmen, wenn die beiden anderen bekannt sind.

Wird insbesondere die Curve von der Geraden u berührt, so sind zwei der Wurzeln einander gleich, und wir haben

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} = -\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}. \tag{10}$$

Diese Gleichung bestimmt die beiden Berührungspunkte

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = +\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}}, \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = -\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}} \tag{10*}$$

der von einem Punkte λ_3, μ_3 der Curve an dieselbe zu ziehenden Tangenten, oder umgekehrt den Tangentialpunkt λ_3, μ_3 des Punktes λ_1, μ_1.

Ist die Linie u endlich Wendetangente, so wird:

$$\frac{\lambda^3}{\mu^3} = -1, \quad \text{oder} \quad \lambda^3 + \mu^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$, wie es sein muss. Die Gleichungen (10*) geben, da sich die beiden Werthe von $\lambda_1 : \mu_1$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden, unmittelbar den folgenden Satz:

*Wenn man die Berührungspunkte der beiden an die Curve von einem Punkte derselben zu legenden Tangenten mit dem Doppelpunkte verbindet, so liegen diese Verbindungslinien harmonisch zu den Tangenten im Doppelpunkte. Alle diese Strahlenpaare bilden also die quadratische Involution der ersten Polaren der durch die Linien nach den Wendepunkten dargestellten binären cubischen Form.**)

Hierdurch entspricht jedem Punkte der Curve ein zweiter; je zwei zusammengehörige Punkte haben denselben Tangentialpunkt, bilden also ein *Polepaar*, wenn wir dieses Wort, wie bei der allgemeinen Curve dritter Ordnung, gebrauchen wollen (vgl. p. 527). Beim Auftreten eines Doppelpunktes gibt es aber auf der Curve nur noch *eine* Schaar solcher Polepaare; und in der That lässt sich eine Curve dritter Ordnung des Büschels (5) nur für *eine* andere Curve desselben als Hesse'sche Curve auffassen, denn die Coëfficienten von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ werden durch Absonderung eines gemeinsamen quadratischen Factors linear in $\varkappa$, λ. Die Verbindungslinie der Punkte eines solchen Polepaares umhüllt die Cayley'sche Curve (vgl. p. 516); in Folge dessen können wir die Gleichung derselben leicht aufstellen. Die Gleichung einer solchen Verbindungslinie ist nämlich nach (10*):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda^2\mu & -\lambda\mu^2 & \lambda^3+\mu^3 \\ \lambda^2\mu & \lambda\mu^2 & \mu^3-\lambda^3 \end{vmatrix} = 0,$$

---

*) Vgl. p. 208. Dass die quadratischen Polaren einer binären cubischen Form in der That eine Involution bilden, deren Doppelelemente durch die betreffende Hesse'sche Form gegeben sind, ist sofort ersichtlich.

oder ausgerechnet:

$$\lambda\mu\,(\mu^4 x_1 - \lambda^4 x_2 - \lambda^2\mu^2 x_3) = 0.$$

Die Cayley'*sche Curve zerfällt also in den Doppelpunkt und in einen Kegelschnitt, dessen Tangenten gegeben sind durch:*

$$\varrho u_1 = -\mu^4,\quad \varrho u_2 = \lambda^4,\quad \varrho u_3 = \lambda^2\mu^2,$$

dessen Gleichung also ist:

$$u_1 u_2 + u_3^2 = 0.$$

Derselbe berührt somit die Tangenten des Doppelpunktes in ihren Schnittpunkten mit der Wendepunktslinie. Dieses Resultat lässt sich auch ganz allgemein nachweisen, denn wir werden sehen, dass die zugehörige Form:

$$\mathsf{P} = T\mathsf{T} - \tfrac{1}{6} S^2 \Sigma$$

identisch verschwinden muss, wenn die Form $f = a_x^3$ in einen quadratischen und einen linearen Factor zerfallen soll; und man findet*):

$$\mathsf{P}^{(\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P})} = -\tfrac{1}{486} R^7 S_{\varkappa\lambda}^2 \left(\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} f\right), \tag{11}$$

also für $\varkappa = -\frac{T}{R}$, $\lambda = \frac{S}{R}$ aus der Formel für $S_{\varkappa\lambda}$:

$$\tfrac{1}{4} R^3 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = 2\,TS\,.\,R,\quad \tfrac{1}{4} R^3 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} = (\tfrac{1}{2} S^3 - T^2)\,.\,R,$$

und es erhält $\mathsf{P}^{(\Sigma)}$ in der That den Factor R, verschwindet also identisch beim Auftreten eines Doppelpunktes. —

Wir wollen die Relation (10) noch zur Betrachtung gewisser der Curve eingeschriebenen Polygone benutzen. Wir gehen von einem beliebigen Curvenpunkte (λ_0) aus (es ist λ_0 für $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ gesetzt), ziehen von ihm eine Tangente an die Curve, deren Berührungspunkt λ_1 sei; von letzterem ziehen wir wieder eine Tangente, die in λ_2 berührt, u. s. f. Es fragt sich, wie muss der Punkt λ_0 liegen, damit sich das Polygon schliesst, d. h. damit die n^{te} Seite eines so construirten Polygons wieder durch ihn hindurchgeht.**) Es ist nun nach (10):

---

*) Vgl. Gleichung (108) in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 6.

**) Diese Polygone sind von Clebsch an einer Curve dritter Klasse mit Doppeltangente angegeben; vgl. dessen Note zu der Abhandlung des Hrn. Cremona „sur l'hypocycloïde à trois rebroussements", Crelle's Journal, Bd. 64, ferner Ausführlicheres (insbesondere auch in Rücksicht auf das Reelle und Imaginäre) bei Durège: Math. Annalen, Bd. 1, p. 509, und Rosenow (a. a. O.) — Die *Hypocykloïde* entsteht aus einer allgemeinen Curve 3ter Klasse, 4ter Ordnung, wenn man als Doppeltangente die unendlich ferne Gerade, als deren Berührungspunkte die imaginären Kreispunkte wählt. Aus den früheren Sätzen

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{\lambda_0}, \quad \lambda_2^2 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_3^2 = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \ldots \quad \lambda_n^2 = -\frac{1}{\lambda_{n-1}};$$

und also sind die Parameter dieser Punkte in umgekehrter Reihenfolge:

$$\lambda_n, \quad \lambda_{n-1} = \lambda_n^{-2}, \quad \lambda_{n-2} = \lambda_n^4, \ldots \lambda_{n-r} = \lambda_n^{(-2)^r}, \ldots \lambda_0 = \lambda_n^{(-2)^n}.$$

Zur Bestimmung der Punkte, von denen aus sich in der angegebenen Weise ein geschlossenes Polygon ($\lambda_0 = \lambda_n$) *construiren lässt, hat man also die Gleichung*:

$$(12) \qquad \lambda_0^{(-2)^n - 1} = 1.$$

Aber nur dann erhält man für *jede* Lösung dieser Gleichung ein wirkliches n-Eck, wenn n eine Primzahl ist. Ist dagegen etwa $n = m \,.\, p$, wo p eine Primzahl ist, so ist $(-2)^n - 1$ durch $(-2)^p - 1$ theilbar und also entsteht die Gleichung (12) aus der Gleichung:

$$\lambda^{(-2)^p - 1} = 1,$$

wenn man beide Seiten der letzteren in die α^{te} Potenz erhebt, wo $\alpha = \frac{(-2)^n - 1}{(-2)^p - 1}$. Wir erhalten daher nur ein p-Eck, welches α-mal durchlaufen wird, um ein n-Eck zu liefern. Man erkennt, dass eine genauere Behandlung dieser Aufgabe zahlentheoretische Ueberlegungen erfordert, mit Hülfe derselben sich dann aber leicht erledigt.*)

Wir behandeln noch ein ähnliches Problem, dessen Lösung (für Curven ohne Doppelpunkt) Steiner zuerst gegeben hat. Auf der Curve seien zwei feste Punkte mit den Parametern $\frac{\lambda}{\mu} = p$, $\frac{\lambda}{\mu} = q$ gegeben. Wir ziehen durch p eine beliebige Gerade, welche noch in den Punkten λ_1, λ_2 schneiden möge. Wir verbinden λ_2 mit q, erhalten als dritten Schnittpunkt dieser Linie λ_3, seine Verbindungslinie mit p schneide in λ_4 u. s. f. Wir construiren also *ein Polygon, dessen ungerade Seiten alle durch p, dessen gerade alle durch q gehen,* von dessen Ecken also immer zwei auf einander folgende mit p oder q in gerader Linie liegen. Wir fragen nach den Bedingungen der Möglichkeit, dass sich ein solches Polygon schliesst, d. h. dass eine Gerade desselben wieder durch λ_1 geht. Die Gleichung (9) gibt uns nun die Bedingungen:

---

des Textes folgt dann, dass zwei Tangenten der Hypocykloïde, deren Berührungspunkte auf einer dritten Tangente derselben liegen, zu einander senkrecht stehen, und dass die Schnittpunkte je zweier solcher Tangenten einen Kreis beschreiben, welcher zusammen mit der unendlich fernen Geraden die Cayley'sche Curve der Hypocykloïde bildet.

*) In ähnlicher Weise erledigt sich auch die Frage nach den Polygonen, welche der Curve 3. Ordnung, betrachtet als Hesse'scher Curve einer anderen, eingeschrieben und der zugehörigen Cayley'schen umgeschrieben sind. Vgl. Rosenow, a. a. O.

$$p\lambda_1\lambda_2 = -1\,,\quad p\lambda_3\lambda_4 = -1\,,\ \ldots\ p\lambda_{2n-1}\lambda_{2n} = -1\,,$$
$$q\lambda_2\lambda_3 = -1\,,\quad q\lambda_4\lambda_5 = -1\,,\ \ldots\ q\lambda_{2n}\lambda_1 \quad = -1\,.$$

Multipliciren wir alle Gleichungen, in denen p vorkommt, mit einander, und ebenso alle, in denen q vorkommt, so folgt:

$$p^n = q^n, \quad \text{oder} \quad p = q\sqrt[n]{1}\,.$$

Wenn p gegeben ist, so ist also q nicht mehr willkürlich; dagegen kann der Punkt λ_1 noch völlig beliebig gewählt werden: das Polygon schliesst sich immer, denn man kann aus den aufgestellten Gleichungen die Parameter seiner Ecken successive direct berechnen. Also:

Es gibt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte p der Curve treffen, und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt q derselben gehen. Ist p gegeben, so ist q dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten p, q gibt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste Seite ganz beliebig gewählt werden kann.

Es ist jedoch auch hier zu bemerken, dass die Natur der Zahl n für die Anzahl der *eigentlichen* Lösungen des Problems von Bedeutung ist. Wir gehen jetzt nicht näher auf diese Fragen ein, da wir das gleiche Problem später bei den allgemeinen Curven dritter Ordnung mit Hülfe der elliptischen Functionen behandeln werden. Ueberhaupt sollen die hier angeführten Betrachtungen nur als einfache Beispiele für eine Methode zur Behandlung der Geometrie auf einer Curve dienen, welche wir später für beliebige Curven vom Geschlecht Null und im Anschlusse an die Abel'schen Integrale auch für solche von beliebigem Geschlechte entwickeln werden. —

Wir wenden uns zur Betrachtung der *Curven mit Rückkehrpunkt*. Für dieselben bestehen nach Salmon gleichzeitig die Bedingungen:

$$(13) \qquad S = 0\,, \quad T = 0\,.$$

Denn S und T waren die beiden Invarianten der biquadratischen Form, welche durch die vier von einem Punkte der allgemeinen Curve dritter Ordnung an dieselbe möglichen Tangenten dargestellt wird (p. 579); und ihr Verschwinden sagt also aus, dass von den vier Tangenten drei zusammenfallen, wie es in der That nur beim Auftreten eines Rückkehrpunktes möglich ist. Zur Bestimmung der Coordinaten y des letzteren*) bemerken wir, dass T in Folge von (13) ein vollständiger Cubus wird; denn $\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ gibt für $\varkappa = -\frac{1}{6}\frac{S^2}{R}$, $\lambda = \frac{T}{R}$:

*) Vgl. hier und für die weiter unten behandelten Fälle des Zerfallens der Curve 3. Ordnung: Gundelfinger, Ueber die Ausartungen einer Curve 3. Ordnung, Math. Annalen, Bd. 4.

$$\Theta^{(T)} = \tfrac{1}{36} S^2 \Theta + \tfrac{2}{3} T H - \tfrac{1}{6} S K .$$

Diese Form verschwindet sonach mit S und T, und das ist, wie wir sogleich sehen werden, die Bedingung dafür, dass T die dritte Potenz eines linearen Ausdruckes ist; und zwar wird

$$T = u_t^2 = u_y^3 .$$

Um dies einzusehen, haben wir zu zeigen, dass die Gleichungen

$$a_x^3 = 0, \quad (a b u)^2 a_x b_x = 0,$$

welche für $x_i = y_i$ unabhängig von den u_i erfüllt sind, ebenso für $x_i = t_i$ befriedigt werden.

Nun ist aber (s. Gleichung (29) p. 555 und (36) p. 557):

$$a_t^3 = T, \ (a b u)^2 a_t b_t u_t = \tfrac{1}{6} S . \Sigma ,$$

also beide Ausdrücke verschwinden in der That unabhängig von den u_i in Folge von (13); und wir haben den Satz:

Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die Curve $f = 0$ einen Rückkehrpunkt besitze, sind $S = 0$ und $T = 0$. Die Coordinaten des Rückkehrpunktes bestimmen sich durch die laufende Proportion ($T = u_t^3$):

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = t_{111} : t_{112} : t_{113} : \ldots : t_{123} .$$

Die Hesse'sche Curve muss nach unseren allgemeinen Erörterungen (p. 327) im Rückkehrpunkte einen dreifachen Punkt haben, und zwar so, dass von ihren drei Tangenten in demselben zwei mit der Rückkehrtangente zusammenfallen. Sie besteht also in unserem Falle aus der Rückkehrtangente und der Verbindungslinie des Rückkehrpunktes mit dem *einen* noch vorhandenen Wendepunkte. Den letzteren kann man hiernach leicht algebraisch bestimmen, sobald die Coordinaten des Rückkehrpunktes bekannt sind. Denn man kann aus Δ den Factor $a_y a_x^2$ absondern; der andere lineare Factor gibt dann unmittelbar die Gleichung der erwähnten Verbindungslinie mit dem Rückkehrpunkte. — Ein *eigentliches* Wendepunktsdreieck ist in dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ nicht vorhanden. Denn auf der linken Seite der Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ bleibt, wenn $S = 0$ und $T = 0$, nur das Glied $\varkappa^4$; dieselbe hat also vier gleiche Wurzeln $\varkappa = 0$; das eine dadurch bestimmte Dreieck ist somit die Curve $\Delta = 0$ selbst. Ein naturgemässes Coordinatensystem zur Herstellung einer *kanonischen Form* ist uns jedoch durch die folgenden Linien gegeben (vgl. unten Fig. 68):

die Verbindungslinie von Rückkehr- und Wendepunkt, $x_2 = 0$,
die Rückkehrtangente, $x_1 = 0$,
die Wendetangente, $x_3 = 0$.

Unter Zugrundelegung desselben wird die Gleichung der Curve von der Form (vgl. p. 327):

$$(14) \qquad x_2^3 - 3x_1^2 x_3 = 0,$$

und, wie es sein muss, die Gleichung der Hesse'schen Curve:

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x_1^2 x_2 = 0.$$

Die Cayley'sche Curve wird von den ersten Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve umhüllt. Es ist aber die Polare eines auf $x_1 = 0$ gelegenen Punktes z:

$$x_2^2 z_2 + x_1^2 z_3 = 0,$$

also ein Linienpaar, dessen Scheitel im Rückkehrpunkte liegt, und die Polare eines Punktes z auf $x_2 = 0$:

$$x_1(2x_3 z_1 + x_1 z_3) = 0,$$

also ein Linienpaar bestehend aus der festen Rückkehrtangente und einer beweglichen Linie durch ihren Schnittpunkt mit der Wendetangente. Da nun jeder Punkt von $x_2 = 0$ als Punkt der Hesse'schen Curve doppelt zählt, so *besteht die* Cayley'*sche Curre aus dem doppelt zählenden Rückkehrpunkte und dem Schnittpunkte der Wende- und Rückkehrtangente.*

Aus Gleichung (14) erkennt man sofort, dass sich die Punkte der Curve auf folgende Weise in Function eines Parameters $\frac{\lambda}{\mu}$ darstellen lassen:

$$(15) \qquad \varrho x_1 = \mu^3, \quad \varrho x_2 = \mu^2 \lambda, \quad \varrho x_3 = \lambda^3.$$

Mit Hülfe dieser Darstellung wollen wir, wie bei den Curven mit Doppelpunkt, einige Probleme über die Geometrie auf der Curve behandeln. — Dieselbe wird von einer Geraden u in drei Punkten geschnitten, bestimmt durch die Gleichung:

$$u_1 \mu^3 + u_2 \mu^2 \lambda + u_3 \lambda^3 = 0.$$

In ihr fehlt das Glied mit dem Factor $\lambda^2 \mu$; *für die Parameter von drei auf einer Geraden gelegenen Punkten besteht daher immer die Relation:*

$$(16) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0.$$

Dieselbe ist von wesentlich anderer Natur als die entsprechende (9) bei den Curven mit Doppelpunkt. Wir werden später bei den allgemeinen Untersuchungen über die Curven vom Geschlechte $p = 0$ erkennen, wie die Gleichung (16) durch einen Grenzprocess aus der Gleichung (9) hervorgeht, indem wir letztere zunächst in der Form voraussetzen:

$$\log\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) + \log\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \log\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\pi i).$$

Ziehen wir nun von einem Punkte $\lambda_0 \left(= \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)$ die eine noch mögliche Tangente an die Curve, welche in λ_1 berühren möge, von λ_1 wiederum die Tangente mit dem Berührungspunkte λ_2, u. s. f., so haben wir:

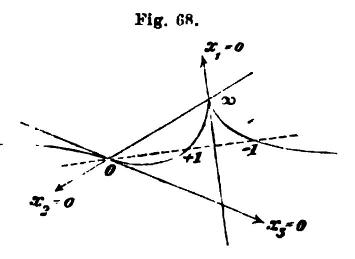
$$\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0,\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \dots \lambda_{r-1} + 2\lambda_r = 0, \dots$$

oder:

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\lambda_0,\quad \lambda_2 = \tfrac{1}{4}\lambda_0,\ \lambda_3 = -\tfrac{1}{8}\lambda_0, \dots \lambda_r = (-\tfrac{1}{2})^r\lambda_0, \dots$$

Die Parameter werden also immer kleiner, nähern sich bei Fortsetzung des Verfahrens unbegrenzt dem Werthe 0, welcher dem Wendepunkte entspricht. *Bei fortgesetztem Tangentenziehen an unsere Curve dritter Ordnung von einem beliebigen Punkte aus, nähert sich daher der Berührungspunkt ohne Aufhören dem Wendepunkte.* Es ist klar, dass man dabei niemals zum Ausgangspunkte zurückgelangt; man kann also in dieser Weise keine geschlossenen Polygone construiren. Mit Hülfe des letzten Satzes kann man die Vertheilung der reellen Parameterwerthe über die Curve leicht anschaulich darstellen, wie es Fig. 68 zeigt. Dabei kann der Punkt $\lambda_0 = 1$ noch beliebig auf der Curve gewählt werden; von ihm ausgehend kann man die Punkte $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, u. s. f. nach unserem Satze leicht construiren. Der Parameter durchläuft auf dem einen der beiden möglichen Wege zwischen Wende- und Rückkehrpunkt (d. i. zwischen 0 und ∞) alle positiven, auf dem anderen alle negativen Zahlenwerthe; und zwar folgt aus Gleichung (16), dass immer zwei Punkte, denen entgegengesetzt gleiche Parameterwerthe zukommen, mit dem Wendepunkte ($\lambda = 0$) in gerader Linie liegen.*)

Fig. 68.



Auch die Construction der Steiner'schen Polygone in angegebener Weise führt hier zu keinem Resultate. Gehen wir dabei

*) Es ist übrigens leicht, sich in ähnlicher Weise über die Parametervertheilung auf einer C_3 mit Doppelpunkt Rechenschaft zu geben. Aus (8) folgt, dass (für $\mu = 1$) dem Doppelpunkte, je nachdem er als auf dem einen oder auf dem andern Zweige der C_3 gelegen betrachtet wird, die Werthe $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ zukommen, während $\lambda = -1$ den einen reellen Wendepunkt bestimmt; aus (9) folgt dann, dass je zwei Punkte mit den Parameterwerthen λ und $\frac{1}{\lambda}$ mit dem Wendepunkte auf einer Geraden liegen. Der Werth $\lambda = +1$ gibt nach (10) den Berührungspunkt der einen vom Wendepunkte noch an die C_3 zu legenden Tangente, u. s. f.

nämlich von den Punkten p, q aus, so erhalten wir das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} p+\lambda_1 \quad +\lambda_2 \;=0 & q+\lambda_2 \;+\lambda_3=0 \\ p+\lambda_3 \quad +\lambda_4 \;=0 & q+\lambda_4 \;+\lambda_5=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p+\lambda_{2n-1}+\lambda_{2n}=0 & q+\lambda_{2n}+\lambda_1=0, \end{array}$$

und hieraus folgt $p=q$; dann erhält man aber keine eigentlichen Polygone. —

Weitere Singularitäten können neben einem Doppel- oder Rückkehrpunkte den Plücker'schen Formeln zufolge nicht vorkommen, ohne dass die Curve zerfällt. Es ist aber immerhin von Interesse die algebraischen Bedingungen für ein solches Zerfallen vollständig aufzustellen; und dies möge im Folgenden noch geschehen.

Soll die Curve zwei Doppelpunkte haben, so muss sie in einen Kegelschnitt $s_x^2=0$ und eine ihn in zwei getrennten Punkten schneidende Gerade zerfallen. Es wird also:

$$f=a_x^3=r_x \,.\, s_x^2=r_x \,.\, s'^2_x \ldots \tag{17}$$

Wir sahen, dass beim Auftreten eines Doppelpunktes die Form Π in den Cubus der linken Seite der Gleichung dieses Doppelpunktes überging. Wenn noch ein zweiter Doppelpunkt hinzutritt, wird daher Π identisch verschwinden müssen; und dies wird durch die folgende Ueberlegung bestätigt.*) Die Invarianten S und T verschwinden in diesem Falle offenbar nicht einzeln, denn sonst müsste die Curve mit zwei Doppelpunkten aus der Curve mit Rückkehrpunkt durch einen Grenzprocess ableitbar sein, was nicht möglich ist (p. 596). Dagegen besteht, wie bei *einem* Doppelpunkte, die Relation:

$$\tfrac{1}{6}\, S^3 = T^2.$$

Nun hat die Form $f=r_x \,.\, s_x^2$ nur noch die beiden Invarianten:

$$i=(rss')^2 \quad \text{und} \quad j=(ss's'')^2.$$

Von diesen sagt das Verschwinden der zweiten aus, dass noch ein dritter Doppelpunkt vorhanden sei; mit j kann also S nicht proportional sein, da dieser Fall ($j=0$) ebenfalls nicht aus dem Auftreten eines Rückkehrpunktes ableitbar ist. Wird dagegen $i=0$, so berührt die Linie r den Kegelschnitt, d. h. die C_3 erhält einen Rückkehrpunkt, und es muss auch $S=0$, $T=0$ sein. Letztere Invarianten werden also mit Potenzen von i proportional, und zwar haben wir, weil S vom vierten Grade ist, nur die Möglichkeit:

*) Vgl. Gordan: Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, Math. Annalen, Bd. 3 und Gundelfinger a. a. O.

(18) $$S = c \,.\, i^2,$$

wo c einen Zahlenfactor bedeutet, und also:

(19) $$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\, c^{\frac{3}{2}} \,.\, i^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\, c^{\frac{1}{2}} \,.\, i \,.\, S \,.$$

Da ferner Σ und T aus S und T durch den Differentiationsprocess $\Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h$ entstehen (vgl. p. 547 und 556), indem:

$$\Sigma = \tfrac{1}{4}\, \Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h\,, \qquad \mathrm{T} = \tfrac{1}{6}\, \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h\,,$$

so folgt auch, wenn wir diesen Process auf $R = 0$ anwenden:

(20) $$6\, T\mathrm{T} - S^2 \Sigma = 0, \quad \text{oder:} \quad \sqrt{6c}\, i\mathrm{T} = c i^2 \Sigma,$$

oder nach Multiplication mit $i\sqrt{c}$ auf beiden Seiten wegen (18) und (19):

(21) $$\Pi \equiv T\Sigma - S\mathrm{T} = 0\,.$$

Dass das identische Verschwinden von Π auch hinreichend ist, folgt daraus, dass es eintritt, ohne das Verschwinden von S und T vorauszusetzen und dass es, wie wir sehen werden, *nicht* hinreicht, um das Auftreten von drei Doppelpunkten zu bedingen, während doch der eine durch $R = 0$ bedingte Doppelpunkt unbestimmt wird.

Die Bestimmung des Zahlenfactors c führt man aus, indem man mit Hülfe der Gleichung:

$$3\, a_{ikh} = r_i s_{kh} + r_k s_{hi} + r_h s_{ik}\,,$$

die betreffenden Bedingungen direct berechnet. Wir theilen hier nur die Resultate mit, es wird:

(22) $$\begin{cases} 9\,\Theta = 9\,(abu)^2\, a_x b_x = 4\, r_x^2\, (ss'u)^2 - 2\, s_x^2\, (s'ru)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + i u_x^2 - 4 u_x r_x (rss')(ss'u) \\ 27\,\Delta = 27\,(abc)^2\, a_x b_x c_x = 4\, r_x^3 \,.\, j - 3\, i \,.\, f \\ 9\,\Sigma = 9\,(\Theta c u)^2\, c_\vartheta u_\vartheta = 2\,(rsu)^2 \,.\, (ss'u)\,(rss') \\ 9\,\mathrm{T} = 9\,(\Theta \alpha u)^2\, \alpha_\vartheta u_\vartheta = -\, i \,.\, \Sigma \\ 27\, S = 27\,(\Theta c d)^2\, c_\vartheta d_\vartheta = 2\, i^2 \\ 243\, T = 243\,(\Theta \alpha d)^2\, \alpha_\vartheta d_\vartheta = -\, 2\, i^3 \,.\text{*)} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen finden wir sofort $c = \frac{2}{27}$ und ferner:

(23) $$S\Delta - Tf = \tfrac{8}{729}\, j \,.\, i^2 \,.\, r_x^3\,,$$

und also haben wir den Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen einer Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende

*) Hieraus folgt, dass man in (19) rechts das negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen hat.

Gerade ist das identische Verschwinden der Form $\Pi = T\Sigma - S\mathrm{T}$; *die Coordinaten der Geraden berechnen sich alsdann aus der Gleichung:*

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \sigma_{111} : \sigma_{112} : \sigma_{113} : \ldots : \sigma_{123},$$

wo $(\Delta = \alpha_x^3)$: $\sigma_{ikh} = S \cdot \alpha_{ikh} - T a_{ikh}$;

die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung findet man durch Division mit r_x *in* f. —

Eine weitere Specialisirung tritt ein, *wenn der Kegelschnitt von der Geraden berührt wird.* Dann ist

$$i \equiv (s s' r)^2 = 0;$$

es verschwinden also nach (22) die Invarianten S und T, wie es sein muss, da dieses Vorkommniss auch aus dem Falle des Rückkehrpunktes durch Degeneration entsteht. Aber auch T ist nach (22) identisch Null, wenn i verschwindet, und es wird:

$$27\,\alpha_x^3 = 27\,\Delta = 4\,r_x^3 \cdot j. \tag{24}$$

Andererseits folgt aus dem Verschwinden von T wegen der Relationen:

$$T = \Sigma \frac{\partial^3 \mathrm{T}}{\partial u_i \partial u_k \partial u_h} a_{ikh}, \quad \delta T = S^2$$

immer, dass S und T Null sind, und wegen der Gleichung*):

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{K} = \tfrac{1}{12} S\Theta + \tfrac{1}{6} T u_x^2 - \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i}$$

immer, dass $\mathrm{K} = \Theta_\Delta$ identisch Null ist, d. h. (vgl. unten) dass Δ ein vollständiger Cubus ist. Ferner sehen wir aus (22), dass Σ bis auf einen Zahlenfactor gleich u_y^3 wird, wenn y_i die Coordinaten des Berührungspunktes von r sind; denn das Verschwinden von $(r s u)^2$ sagt aus, dass der Schnittpunkt von r und u auf $s_x^2 = 0$ liegt, und

$$(s s' u)\,(r s s') = 0$$

ist die Gleichung des Poles y von r, welcher hier mit jenem Schnittpunkte zusammenfällt. Wir haben somit:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Curve dritter Ordnung aus einem Kegelschnitte und einer ihn berührenden Geraden besteht, ist das identische Verschwinden von T. *Die Coordinaten* y_i *des Berührungspunktes bestimmen sich aus der laufenden Proportion* $(\Sigma = u_s^3)$:

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = s_{111} : s_{112} : s_{113} : \ldots : s_{123}.$$

und die Coordinaten r_i *der Tangente aus* $(\Delta = \alpha_x^3)$:

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \alpha_{111} : \alpha_{112} : \alpha_{113} : \ldots : \alpha_{123}. \text{ —}$$

---

*) Vgl. Gleichung (46) in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan.

Wenn die Curve dritter Ordnung drei Doppelpunkte haben soll, so muss der Kegelschnitt s_x^2 in dem durch $\Pi \equiv 0$ charakterisirten Falle in ein Linienpaar zerfallen, d. h. es ist:

$$j = 0$$

und:
$$s_x^2 = p_x \cdot q_x\,, \quad f = r_x \cdot p_x \cdot q_x\,.$$

Hier ist jeder Punkt der Curve ein Wendepunkt; es muss daher Δ zu f proportional werden, und in der That folgt aus (22) und (23) wegen $j = 0$:

(25)
$$9\,\Delta = -\,if \quad \text{und} \quad S\Delta - Tf \equiv 0\,.$$

Für das Zerfallen einer Curve dritter Ordnung in drei Gerade ist es daher nothwendig und hinreichend, dass f zu Δ proportional wird, d. h. dass die Zwischenform (vgl. p. 571)

$$N = (a\alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2$$

identisch verschwinde. Die Coordinaten der drei Geraden p_i, q_i, r_i bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\varrho\,(p_i q_k r_h + p_k q_h r_i + p_h q_i r_k) = 3\, a_{ikh}\,.$$

Um diese Gleichungen wirklich aufzulösen kann man folgendermassen verfahren. Es seien y und z zwei beliebige Punkte der Ebene; man bestimme die Schnittpunkte $y + \lambda z$ ihrer Verbindungslinie mit der Curve $f \equiv a_x^3 = 0$ mittelst der cubischen Gleichung:

$$a_y^3 + 3\,\lambda a_y^2 a_z + 3\,\lambda^2 a_y a_z^2 + \lambda^3 a_z^3 = 0\,.$$

Die Coordinaten dieser Punkte mögen mit ξ, ξ', ξ'' bezeichnet sein, so dass, wenn λ, λ', λ'' die Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$\xi_i = y_i + \lambda z_i\,, \quad \xi_i' = y_i + \lambda' z_i\,, \quad \xi_i'' = y_i + \lambda'' z_i\,.$$

Die Taugenten von $f = 0$ in den Punkten ξ, ξ', ξ'' fallen dann mit den drei Geraden zusammen, in welche $f = 0$ zerfällt, d. h. die p_i, q_i, r_i sind durch folgende linearen Gleichungen bestimmt*):

$$\varrho p_i = a_\xi^2 a_i\,, \quad \varrho q_i = a_{\xi'}^2 a_i\,, \quad \varrho r_i = a_{\xi''}^2 a_i\,. \; -$$

Insbesondere kann es ferner vorkommen, dass die drei geraden Linien durch einen Punkt gehen, d. h. dass die Determinante (pqr) verschwinde. Wir haben dann auch:

$$i^2 = (pqr)^2 = 0 \quad \text{und} \quad j = 0\,,$$

und somit nach (22):

$$\Pi = 0\,, \quad S = 0\,, \quad T = 0\,,$$

wie vorauszusehen war; denn dieser Fall entsteht, wenn in dem durch $\Pi \equiv 0$ bedingten der Kegelschnitt $s_x^2 = 0$ in ein Linienpaar zerfällt,

*) Ein ganz analoges Verfahren ist natürlich, wenn eine Form n^{ter} Ordnung in n lineare Factoren zerfällt, zur Bestimmung dieser Factoren anwendbar.

dessen Scheitel auf $r_x = 0$ liegt. Ferner folgt aus (23): $\Delta \equiv 0$, und in der That besteht die Polare eines *jeden* beliebigen Punktes nach unseren allgemeinen Gesetzen aus einem Linienpaare, dessen Scheitel im dreifachen Punkte von $f = 0$ liegt; und hieraus erkennt man geometrisch die Umkehrbarkeit unserer letzten Behauptung.*)

---

*) Es gilt überhaupt allgemein der Satz:

Wenn die Hesse'*sche Form einer ternären Form* n^{ter} *Ordnung identisch verschwindet, so stellt letztere, gleich Null gesetzt, n durch einen Punkt gehende Gerade vor.*

Derselbe wurde von Hesse (Crelle's Journal, Bd. 56, p. 263) aufgestellt; einen genaueren Beweis gab Sylvester: Philosophical Magazine 1853. Einen solchen kann man auch in folgender Weise führen. Setzt man;

$$(1) \qquad \alpha_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_1, \qquad \beta_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_2, \qquad \gamma_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_3,$$

so ist bekanntlich $\Delta \equiv (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 6 (\alpha\beta\gamma)\, \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2} \gamma_x^{n-2}$ (vgl. p. 312). Wegen der Identität:

$$(\alpha\beta\gamma)\, u_x = (\alpha\beta u)\, \gamma_x + (\alpha u \gamma)\, \beta_x + (u \beta\gamma)\, \alpha_x$$

folgt nun für beliebige Grössen u_i aus der Bedingung $\Delta \equiv 0$ die andere (vgl. p. 304 und 377 Anmk.):

$$(2) \qquad N_{\alpha\beta} \cdot \gamma_x^{n-1} = N_{\alpha\gamma} \cdot \beta_x^{n-1} + N_{\beta\gamma} \cdot \alpha_x^{n-1},$$

wo $N_{\alpha\beta} = (\alpha\beta u)\, \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2}$ u. s. f. Die Curve $\gamma = 0$ muss daher durch alle einfachen Schnittpunkte von $\beta = 0$, $\alpha = 0$ gehen, denn die u_i können immer so gewählt werden, dass $N_{\alpha\beta} = 0$ durch diese Punkte nicht hindurchgeht. Für einen gemeinsamen vielfachen Punkt von α und β verschwindet allerdings auch $N_{\alpha\beta}$, aber in einem solchen Punkte hat γ immer einen gleich vielfachen Punkt, denn man kann die Ecken des Coordinatendreiecks, deren Polaren doch α, β, γ sind, stets so wählen, dass diese Polaren keine anderen vielfachen Punkte haben. als die durch die Singularitäten von f in bekannter Weise bedingten. In Folge dessen kann man zwei Constante $\varkappa$, λ so bestimmen, dass: $\gamma = \varkappa\alpha + \lambda\beta$, oder wenn wir die Coordinatenecken durch drei beliebige Punkte y, z, t ersetzen, dass:

$$(3) \qquad a_x^{n-1} a_t = \varkappa\, a_x^{n-1} a_y + \lambda\, a_x^{n-1} a_z.$$

Andererseits kann man, wenn ξ ein beliebiger Punkt ist, immer Constante $\varkappa'$, λ', μ so bestimmen, dass: $t_i = \varkappa' y_i + \lambda' z_i + \mu \xi_i$, und also auch:

$$(4) \qquad a_x^{n-1} a_t = \varkappa' a_x^{n-1} a_y + \lambda' a_x^{n-1} a_z + \mu\, a_x^{n-1} a_\xi.$$

Soll aber diese Gleichung mit (3) zusammenbestehen, so muss

$$(\varkappa' - \varkappa)\, a_x^{n-1} a_y + (\lambda' - \lambda)\, a_x^{n-1} a_z + \mu\, a_x^{n-1} a_\xi = 0$$

sein. Es gibt also einen Punkt η, bestimmt durch:

$$\eta_i = (\varkappa' - \varkappa)\, y_i + (\lambda' - \lambda)\, z_i + \mu\, \xi_i,$$

für welchen die Gleichung $a_x^{n-1} a_\eta = 0$ unabhängig von x besteht, welcher sonach n-facher Punkt von f ist; oder mit anderen Worten: *$f = 0$ zerfällt in n durch η gehende Gerade*, q. e. d. — Die hier angewandte Schlussweise bleibt auch gültig, wenn man annimmt, dass f unendlich viele Doppelpunkte, d. i. einen mehrfach zählenden Zweig, besitzt. Das Verschwinden von Δ sagt dann aus, dass dieser Zweig aus einer mehrfach zählenden, durch η gehenden Geraden besteht.

Die hinreichende und nothwendige Bedingung für das Zerfallen der Curve in drei Gerade eines Büschels ist daher durch das identische Verschwinden von Δ gegeben. Die Coordinaten des dreifachen Punktes y berechnen sich aus der Gleichung:

$$F \equiv (abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = u_y^6.$$

Hat man dieselben gefunden, so führt man zur Bestimmung der p_i, q_i, r_i neue Veränderliche ein mittelst der Gleichungen:

$$\varrho x_1 = y_1 \xi_1 + a_1 \xi_2 + b_1 \xi_3$$
$$\varrho x_2 = y_2 \xi_1 + a_2 \xi_2 + b_2 \xi_3$$
$$\varrho x_3 = y_3 \xi_1 + a_3 \xi_2 + b_3 \xi_3,$$

wo die a_i, b_i völlig willkürlich sind. Alsdann geht f in eine binäre Form in ξ_2, ξ_3 über und lässt sich nach der Theorie der binären cubischen Formen bei gehöriger Bestimmung der a_i und b_i in der Form

$$\xi_2^3 + \xi_3^3$$

darstellen. — Man erkennt übrigens auch leicht, dass in diesem Falle die Form Σ, da sie den Factor (pqr) erhält, identisch Null ist. —

Fallen auch noch zwei der Geraden p und q zusammen, d. h. ist

$$f = r \,.\, q_x^2,$$

so wird die Curve $f = 0$ von *jeder* Linie u in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten, und *also verschwindet die Form F identisch.* Wir können dann in den Gleichungen (22) $s = s' = q$ setzen, und haben also:

$$9\,\Theta = -2\, q_x^2\, (qru)^2, \tag{26}$$

und *hieraus kann man gleichzeitig die Doppelgerade q und den Schnittpunkt von q und r bestimmen.* Letzteres geschieht in anderer Weise, wie im Falle $N \equiv 0$, nur dass die betreffende cubische Gleichung hier zwei gleiche Wurzeln hat. —

Fallen endlich alle drei Gerade zusammen, so wird in (26) $q_i = r_i$, und also identisch:

$$\Theta \equiv (abu)^2\, a_x b_x = 0.^{*})$$

*) Dies Resultat lässt sich zu folgendem Satze verallgemeinern: *Wenn für eine ternäre Form $f = a_x^n$ die Zwischenform $\Theta = (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ identisch verschwindet, so ist f die n^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks.* Nach dem Uebertragungsprincipe (p. 276) nämlich sagt die Bedingung $\Theta \equiv 0$ aus, dass *jede* Gerade die Curve $f = 0$ in einer Punktgruppe trifft, für welche, aufgefasst als binäre Form, die Hesse'sche Covariante identisch Null ist. Dies sagt aber aus, dass die binäre Punktgruppe aus einem n-fach zählenden Punkte besteht, q. e. d. Den Beweis für letztere Behauptung führt man ganz analog, wie den entsprechenden für das ternäre Gebiet in der Anmerk. auf p. 598.

Aus der Bedingung $f = q_x^3$ finden wir ferner unmittelbar *zur Berechnung der q_i* die fortlaufende Proportion:

$$q_1^3 : q_1^2 q_2 : q_1^2 q_3 : \ldots : q_1 q_2 q_3 = a_{111} : a_{112} : a_{113} : \ldots : a_{123}.$$

Die so gewonnenen Resultate stellen wir schliesslich in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammen, indem wir jeder Curvenart zugleich die Zahl der in ihr noch willkürlichen Constanten beifügen*):

Curven dritter Ordnung.

1) *Allgemeine Curve,* 9 Constante, mit Doppelverhältniss α, wenn:

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2 (2-\alpha)^2 (1-2\alpha)^2}$$

a) *Aequianharmonische Curve,* 8 Constante.

$$S = 0; \quad 1 - \alpha + \alpha^2 = 0$$

b) *Harmonische Curve,* 8 Constante.

$$T = 0; \quad \alpha = -1, 2, \tfrac{1}{2}$$

2) *Curve mit Doppelpunkt,* 8 Constante.

$$R \equiv T^2 - \tfrac{1}{6} S^3 = 0; \quad \alpha = 1, 0, \infty.$$

3) *Kegelschnitt und Gerade* 7 Constante.

$$\Pi \equiv S\mathrm{T} - T\Sigma = 0$$

4) *Drei einzelne Gerade* 6 Constante.

$$N \equiv (a \alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = 0$$

5) *Curve mit Rückkehrpunkt* 7 Constante.

$$S = 0, \qquad T = 0$$

6) *Kegelschnitt und Tangente* 6 Constante.

$$\mathrm{T} = 0$$

7) *Drei Gerade durch einen Punkt,* 5 Constante.

$$\alpha_x^3 \equiv \Delta = 0$$

8) *Einfache und Doppel-Gerade,* 4 Constante.

$$F = 0$$

9) *Dreifache Gerade,* 2 Constante.

$$\Theta \equiv (a b u)^2 a_x b_x = 0.$$

Zwischen 8) und 9) könnten wir noch eine von 3 Constanten abhängige Curve einschieben, bestehend aus einer dreifachen Geraden nud einem auf ihr gelegenen Punkte (sommet, Scheitel). Eine solche ist aber nicht durch *eine* Gleichung $f = 0$ in Punktcoordinaten dar-

*) Vgl. die entsprechende Tabelle für Kegelschnitte auf p. 119. — Die nachstehende Tabelle ist so gehalten, dass jede C_3 derselben aus der nächst vorhergehenden durch Grenzprocess abgeleitet werden kann.

stellbar, und deshalb hier zunächst übergangen. Betrachtet man hingegen Systeme von Curven 3. Ordnung, so hat man bei den Ausartungen die auftretenden Klassenscheitel mitzuzählen, obgleich dieselben durch eine Punktgleichung allein nicht mit dargestellt werden. Alsdann erhält man auch für die Fälle 8) und 9) fünf Constante; denn in 8) wird dann der Schnittpunkt der beiden unendlich benachbarten Geraden, welche sich zu der Doppelgeraden vereinigen, bei Verfolgung des Grenzüberganges vollkommen bestimmt sein, so dass auf der Doppelgeraden noch ein Klassenscheitel liegt. Ebenso können auf der dreifachen Geraden in 9) noch drei Klassenscheitel auftreten, wenn man sie aus drei einzelnen Geraden entstanden denkt, dagegen nur zwei solche Scheitel (von denen dann einer doppelt zählt), wenn man sie aus dem Falle 8) ableitet (vgl. die Anmk. auf p. 417).

Wenn man in der angedeuteten Weise die Entstehung einer Ausartung aus einer allgemeinen Curve verfolgt, so werden auch Wende- und Rückkehrtangenten für die Grenzcurve noch bestimmte Lagen haben, welche aber andere und andere sein können, je nach dem Systeme von C_3, in dem die betrachtete Ausartung vorkommt. Zerfällt die C_3 z. B. in einen Kegelschnitt und eine Tangente desselben (ein Fall, der nach Fig. 58 p. 410*) aus dem Falle einer C_3 mit Rückkehrpunkt abzuleiten ist), so besteht die Curve als Tangentengebilde aus dem Kegelschnitte und dem Berührungspunkte. In letzterem sind Rückkehr- und Wendepunkt vereinigt, während Rückkehr- und Wendetangente in die Tangente des Kegelschnittes zusammenfallen. Artet nun aber die C_2 noch in eine Doppellinie aus, so können Rückkehr- und Wendetangente in diesem Grenzfalle durch zwei getrennte Gerade dargestellt werden, welche durch den Schnittpunkt der Doppel- mit der einfachen Geraden gehen, doch so, dass zwischen diesen vier Linien und der Geraden, welche in der Grenze an Stelle der Verbindungslinie von Wende- und Rückkehrpunkt tritt, noch Relationen bestehen.**) Zählt man auch die so zu der Curve, insofern sie einem Systeme allgemeinerer Curven angehört, hinzutretenden Geraden als zu ihr wesentlich gehörig mit, so wird die Zahl der Constanten, von denen die Ausartung abhängt, natürlich in entsprechender Weise erhöht.

---

*) Ebenso kann man übrigens auch die anderen Ausartungen leicht zeichnend veranschaulichen.

**) Diese Vorkommnisse sind von Schubert für die Ausartungen einer C_3 mit Rückkehrpunkt vollständig untersucht; vgl. Göttinger Nachrichten 1875, p. 359, sowie einen demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Aufsatz desselben.

VII. Die Verwerthung der Theorie der elliptischen Functionen für die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung.

Bei Behandlung der Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt haben wir gesehen, dass sich die Coordinaten der Punkte der Curve in Function eines Parameters rational darstellen lassen, und dass diese Darstellung für das Studium gewisser Punktsysteme auf der Curve von besonderem Vortheile ist. Es liegt nun die Frage nahe, ob ein ähnliches Verfahren auch bei einer allgemeinen Curve dritter Ordnung, und weiterhin bei einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung möglich sein wird. *Es zeigt sich dies bei näherer Untersuchung von dem Geschlechte der betreffenden Curve abhängig:* Jede Curve vom Geschlechte $p = 0$ ist rational durch einen Parameter darstellbar; bei einer Curve vom Geschlechte $p = 1$ dagegen sind elliptische Functionen für die Parameterdarstellung einzuführen. Diese Sätze werden wir später ganz allgemein beweisen; für allgemeine Curven 3ter Ordnung, welche ebenfalls $p = 1$ haben, können wir die Richtigkeit unserer Behauptung, sowie die aus ihr fliessenden Folgerungen auch leicht direct nachweisen; und damit wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Wir gehen zunächst von einer speciellen Gleichungsform der Curve dritter Ordnung aus und zeigen an ihr den Charakter der vorliegenden Probleme. Dabei werden wir die möglichen Relationen zwischen den Schnittpunkten einer Geraden, die zu Fragen verschiedenster Art Veranlassung geben, ausführlicher studiren; insbesondere die Steiner'schen Polygone, wie bei den Curven mit Doppelpunkt. Für höhere Curven dagegen werden wir nur kurz die uns bekannten Sätze über ihre Schnittpunkte mit der C_3 neu begründen. Schliesslich mag dann noch gezeigt werden, wie die Einführung der elliptischen Functionen auch geschehen kann, wenn man die Gleichung der C_3 als in allgemeinster Form gegeben annimmt.

Die Gleichung einer jeden Curve dritter Ordnung kann in die Form gebracht werden:

$$F \equiv x_3^2 x_1 - x_2 (x_1 - x_2)(x_1 - k^2 x_2) = 0 . \tag{1}$$

Denn wir können zeigen, dass das Doppelverhältniss dieser Curve eben von der Grösse k^2 abhängig ist, dass $F = 0$ also in der That die allgemeine Curve dritter Ordnung darstellt. Für $x_1 = 0$ geht die Gleichung (1) über in $x_2^3 = 0$; die Coordinatenaxe $x_1 = 0$ schneidet also die Curve in drei unendlich nahen Punkten, d. h. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ist ein Wendepunkt und $x_1 = 0$ seine Wendetangente. Durch ihn gehen die drei Geraden

$$x_2 = 0 , \quad x_1 - x_2 = 0 , \quad x_1 - k^2 x_2 = 0 , \tag{2}$$

für welche die Gleichung der Curve immer in $x_3{}^2 x_1 = 0$ übergeht. Jene drei Geraden sind also die vom Wendepunkte an die Curve zu legenden Tangenten und $x_3 = 0$ ist die Gerade, auf welcher ihre Berührungspunkte liegen, d. h. die zu dem Wendepunkte gehörige harmonische Gerade. Ferner erkennt man sofort, dass k^2 eines der sechs Doppelverhältnisse der drei Geraden (2) und der Wendetangente $x_1 = 0$ ist, d. h. das Doppelverhältniss der Curve dritter Ordnung, welches in bekannter Weise mit der absoluten Invariante derselben zusammenhängt (vgl. Gleichung (41) auf p. 580).

Um also die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung in der Form (1) *zu erhalten, hat man die Constante k^2 aus der Gleichung**)

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{(1 + k^2)^2 (2 - k^2)^2 (1 - 2 k^2)^2} \tag{3}$$

zu berechnen, wenn S und T die Invarianten der Curve sind.

Die Gleichung (1) nun wird identisch erfüllt, wenn wir setzen:

$$\varrho x_1 = \mu^3, \quad \varrho x_2 = \mu, \quad \varrho x_3 = \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - k^2 \mu^2)};$$

und damit ist die Einführung der elliptischen Functionen von selbst gegeben. Nehmen wir nämlich $\mu = \sin \operatorname{am} u$, oder

$$u = \int_0^\mu \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)}}, \tag{4}$$

so wird unmittelbar:

$$\sqrt{1 - \mu^2} = \cos \operatorname{am} u, \qquad \sqrt{1 - k^2 \mu^2} = \Delta \operatorname{am} u,$$

wo nun die Wurzeln links immer mit bestimmtem Vorzeichen (also eindeutig) zu nehmen sind, und wo die bekannten Relationen erfüllt sind:

$$\sin^2 \operatorname{am} u + \cos^2 \operatorname{am} u = 1$$
$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \Delta^2 \operatorname{am} u = 1 .$$

Die Coordinaten der Curve (1) $F = 0$ *sind daher eindeutig als elliptische Functionen eines Parameters u dargestellt durch die Gleichungen:*

---

*) Die sechs Wurzeln dieser Gleichung lassen sich rational durch eine von ihnen (k^2) darstellen; sie sind bekanntlich (vgl. p. 39):

$$k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

Die Gleichung (3) ist daher algebraisch auflösbar; und in der That geht sie mittelst der Substitution $\frac{p}{q} = \frac{(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2}$ aus der cubischen Gleichung:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{2}{3} \frac{(3 p + q)^3}{q (\frac{1}{3} q - 3 p)^2}$$

hervor; vgl. oben die Theorie der binären biquadratischon Formen, p. 238 f.

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \sin^3 \mathrm{am}\, u \\ \varrho x_2 &= \sin \mathrm{am}\, u \\ \varrho x_3 &= \cos \mathrm{am}\, u\,.\,\Delta\, \mathrm{am}\, u\,. \end{aligned}$$

Jedem Werthe von u ist dadurch ein ganz bestimmter Punkt x der Curve zugeordnet

Aber nicht entspricht umgekehrt jedem Punkte x auch *ein* Werth von u, wie aus den Periodicitätseigenschaften der elliptischen Functionen hervorgeht. Das Integral (4) nämlich hat bekanntlich zwei Periodicitätsmodeln Ω und Ω', definirt als die Werthe des Integrals genommen über die beiden Querschnitte der zugehörigen Riemann'schen Fläche, und welche für die Normalform des Integrals erster Gattung in folgender Weise durch geradlinige Integrale gegeben werden*):

$$(6)\qquad \Omega = 4\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}\,,\qquad \Omega' = 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - 2\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}\,,$$

wo $R(\lambda) = (1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)$. Ist nun u ein Werth des Integrals (4), so unterscheiden sich alle anderen Werthe desselben von u um ganzzahlige Vielfache von Ω und Ω', d. h. sie sind von der Form:

$$u + p\Omega + q\Omega',$$

wenn p, q ganze Zahlen bedeuten. Diese Periodicitätsmoduln sind nun gleichzeitig Perioden für die Function sin am, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$\sin \mathrm{am}\,(u \pm \Omega) = \sin \mathrm{am}\,(u \pm \Omega') = \sin \mathrm{am}\, u\,,$$

während erst Ω und $2\Omega'$ gleichzeitig für die drei Functionen sin am u, cos am u, Δ am u Perioden liefern. Für die Verhältnisse der x_i erhält man aber aus (5) schon dieselben Werthe, wenn man das Argument u nur um $\frac{1}{2}\Omega$ oder um Ω' wachsen lässt; denn es ist auch:

$$\begin{aligned} \sin \mathrm{am}\,(u \pm \Omega') &= \sin \mathrm{am}\, u, & \sin \mathrm{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\sin \mathrm{am}\, u\,,\\ \cos \mathrm{am}\,(u \pm \Omega') &= -\cos \mathrm{am}\, u\,, & \cos \mathrm{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\cos \mathrm{am}\, u\,,\\ \Delta\, \mathrm{am}\,(u \pm \Omega') &= -\Delta\, \mathrm{am}\, u\,, & \Delta\, \mathrm{am}\left(u + \frac{\Omega}{2}\right) &= \Delta\, \mathrm{am}\, u\,. \end{aligned}$$

Jedem Punkte x der Curve entsprechen daher unendlich viele Argument-Werthe; dieselben setzen sich aus einem von ihnen (u) in der Form

$$u + \frac{p}{2}\Omega + q\Omega'$$

---

*) Vgl. z. B. Königsberger: Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, Bd. 1, p. 277 ff.

zusammen, wenn p, q ganze Zahlen sind. Oder wie wir uns ausdrücken wollen: *Die Curve hat die Perioden*

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,\Omega \quad \text{und} \quad \omega' = \Omega'. \tag{7}$$

Dass das elliptische Integral erster Gattung u hier in der bekannten Normalform auftritt, ist die Folge der speciellen Lage unseres Coordinatendreiecks; im Allgemeinen wird dies nicht der Fall sein. Alle anderen elliptischen Integrale erster Gattung jedoch kann man auf *eines* von ihnen zurückführen, und in der That ist es aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt, dass alle Integrale mit gleichem Modul k linear in einander transformirt werden können. Es hängt dies, wie später allgemeinere Untersuchungen lehren werden, damit zusammen, dass die Curve dritter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ ist und nur *eine* absolute Invariante besitzt.

Unter Zugrundelegung der Normalform (4) können wir die Vertheilung der Werthe des Integrals über die Punkte der Curve leicht im Einzelnen verfolgen, wie wir weiterhin sehen werden. Es führen dazu die folgenden Ueberlegungen, welche uns gleichzeitig zur Behandlung weiterer an sich wichtiger Fragen Veranlassung bieten werden.

Sind u_1, u_2, u_3 die Parameterwerthe für drei auf einer Geraden liegende Punkte, und setzen wir zur Abkürzung:

$$\sin\text{am}\, u_i = s_i, \quad \cos\text{am}\, u_i = c_i, \quad \Delta\,\text{am}\, u_i = \Delta_i,$$

so besteht wegen (5) die Relation:

$$\begin{vmatrix} s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ c_1\Delta_1 & c_2\Delta_2 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als dass die Summe der Agrumente u_1, u_2, u_3 verschwindet, resp. gleich einem ganzen Vielfachen der Perioden unserer Curve ist. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die Gleichungen für das Additionstheorem der elliptischen Functionen in der von Hermite gegebenen Form zu Grunde legt.*) Man hat dann:

$$\sin\text{am}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) = \frac{\pm\,\varphi\,(0)}{s_1 \,.\, s_2 \ldots s_{2n}}, \tag{9}$$

wo $\varphi\,(u)$ die folgende Function von $s = \sin\text{am}\, u$, $c = \cos\text{am}\, u$, $\Delta = \Delta\,\text{am}\, u$ ist:

$$\begin{aligned}\varphi\,(u) = s\,(s^{2n} + p_1 s^{2n-2} + p_2 s^{2n-4} + \ldots + p_n) \\ + c\,.\,\Delta\,(q_1 s^{2n-2} + q_2 s^{2n-4} + \ldots + q_n).\end{aligned} \tag{10}$$

*) Hermite: Note sur le calcul différentiel et le calcul intégral; extrait de la 6e édition du calcul diff. et int. de Lacroix, Paris 1862, p. 68. Vgl. auch Königsberger: Theorie der elliptischen Functionen, 2. Th., Leipzig 1874, p. 16.

Die hierin vorkommenden $2n$ Constanten p_i, q_i bestimmen sich aus den $2n$ linearen Gleichungen:

(11) $\varphi(u_1) = 0, \quad \varphi(u_2) = 0, \quad \varphi(u_3) = 0, \ldots \varphi(u_{2n}) = 0.$

Das Vorzeichen des in (9) rechts stehenden Ausdruckes wird durch einen speciellen Fall bestimmt, etwa indem man $u_2 = u_3 = \ldots = u_{2n} = 0$ nimmt, wodurch derselbe in $+ \sin \operatorname{am} u_1$ übergehen muss.

Setzen wir nun insbesondere $n = 2$ und $u_{2n} = 0$, so gibt Gleichung (9) den Werth von

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + u_3),$$

und die Gleichungen (10), (11) zur Bestimmung der Function $\varphi(u)$ geben $q_2 = 0$ und:

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= s^5 + p_1 s^3 + p_2 s + c \,.\, \Delta\, q s^2 \\
0 &= s_1^5 + p_1 s_1^3 + p_2 s_1 + c_1 \,.\, \Delta_1 q s_1^2 \\
0 &= s_2^5 + p_1 s_2^3 + p_2 s_2 + c_2 \,.\, \Delta_2 q s_2^2 \\
0 &= s_3^5 + p_1 s_3^3 + p_2 s_3 + c_3 \,.\, \Delta_3 q s_3^2 ,
\end{aligned}$$

also durch Auflösung, da die Determinante des Nenners nicht verschwindet:

$$\frac{\varphi(u)}{s} = \frac{\begin{vmatrix} s^4 & s^2 & 1 & c\,\Delta\, s \\ s_1^4 & s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^4 & s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^4 & s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Setzen wir hierin, um die Gleichung (9) zu bilden $u = 0$, so kommt wegen $\sin \operatorname{am} 0 = 0$, $\cos \operatorname{am} 0 = \Delta \operatorname{am} 0 = 1$ links $\frac{\varphi(0)}{0}$, und wir erhalten, da auch $u_{2n} = u_4 = 0$ war:

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + u_3) = \frac{\begin{vmatrix} s_1^3 & s_1 & c_1\Delta_1 \\ s_2^3 & s_2 & c_2\Delta_2 \\ s_3^3 & s_3 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Hier steht aber im Zähler die Determinante, deren Verschwinden nach (8) aussagt, dass die drei Punkte mit den Parametern u_1, u_2, u_3 in gerader Linie liegen. Da nun der rechts stehende Nenner nur für besondere Werthe der Argumente u_1, u_2, u_3 zugleich mit dem Zähler

verschwinden kann, während unsere Gleichung für ganz beliebige Argumente derselben gilt, so folgt aus (8):

$$\sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

oder:

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0,$$

wo das Zeichen $\equiv$ andeuten soll, dass die links stehende Summe entweder gleich Null selbst oder nur um einen Ausdruck der Form $p\omega + q\omega'$ von Null verschieden sein soll; p, q als ganze Zahlen vorausgesetzt und unter ω, ω' die beiden durch (6) und (7) definirten Perioden unserer Curve verstanden.

Dies Resultat sprechen wir in dem Satze aus:

Stellt man die Punkte einer Curve dritter Ordnung mittelst der Gleichungen (5) *als elliptische Functionen eines Parameters dar*), so ist für die Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve immer die Summe der Argumente congruent Null:*

$$(12) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

An diese Gleichung knüpfen wir die Lösung einer Reihe von Aufgaben, die wir früher zum Theil schon in anderer Weise behandelt haben. Lassen wir zunächst zwei der Punkte zusammenfallen, die Gerade also zur Tangente werden, so ist

$$(13) \qquad 2u_1 + u_2 \equiv 0,$$

oder:

$$u_1 = -\frac{u_2}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

wo p, q ganze Zahlen sind. Wir brauchen aber nur p, q gleich 0 und 1 zu nehmen, da dann jede höhere Zahl durch Addition ganzer Vielfacher von Perioden entstehen kann. Also:

Die Argumente der Berührungspunkte der vier von einem Punkte u der Curve an dieselbe zu legenden Tangenten sind:

$$(14) \qquad -\frac{u}{2}, \quad -\frac{u+\omega}{2}, \quad -\frac{u+\omega'}{2}, \quad -\frac{u+\omega+\omega'}{2};$$

und umgekehrt ist der Tangentialpunkt u eines Punktes v der Curve bestimmt durch:

$$u \equiv -2v \quad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

Wenn wir die Beziehungen der vier Berührungspunkte zu den drei auf der Curve vorhandenen Systemen von Polepaaren berücksichtigen (vgl. p. 530), so können wir den ersten Theil dieses Satzes auch in der folgenden Form aussprechen:

---

*) Dieser Satz ist übrigens, wie später gezeigt wird, unabhängig von der Form der Gleichungen (5). Die Darstellung muss nur so eingerichtet sein, dass dem Parameter $u = 0$ ein Wendepunkt entspricht; andernfalls würde auf der rechten Seite von (12) statt Null eine Constante stehen (vgl. p. 630 f.).

Die Argumente der drei Punkte, welche einen Punkt u der Curve in den drei Systemen von Polepaaren zu einem solchen Paare ergänzen, sind:

$$(15)\qquad u + \frac{\omega}{2},\quad u + \frac{\omega'}{2},\quad u + \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Verbinden wir nun den Punkt u mit einem beliebigen Punkte v, so ist das Argument w des dritten Schnittpunktes dieser Verbindungslinie bestimmt durch: $w \equiv -u - v$. Dasselbe Argument ergibt sich aber auch für den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie von $u + \frac{\omega}{2}$ mit $v + \frac{\omega}{2}$, während sich die Verbindungslinien von u mit $v + \frac{\omega}{2}$ und von v mit $u + \frac{\omega}{2}$ in dem Punkte mit dem Argumente $w + \frac{\omega}{2}$ schneiden. Somit folgt der bekannte Satz (p. 528):

Die Verbindungslinien von nicht entsprechenden Punkten zweier Polepaare desselben Systems schneiden sich auf der Curve in zwei Punkten, welche ein drittes Polepaar desselben Systems bilden.

Wir erkennen ferner aus (14) wieder die für die Realität der drei Systeme von Polepaaren früher gemachten Bemerkungen (p. 530). Ist die Curve nämlich zweitheilig, so sind die vier Tangenten und somit auch ihr Doppelverhältniss k^2 reell; und letzteres kann immer kleiner als 1 angenommen werden, da andernfalls doch einer der fünf übrigen Werthe des Doppelverhältnisses kleiner als 1 sein würde. Dann ist aber bekanntlich nach (6) Ω reell und Ω' rein imaginär $(i = \sqrt{-1})$:

$$2\omega = \Omega = 4K,\quad \omega' = \Omega' = 2iK',$$

wo für $k'^2 = 1 - k^2$:

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},\qquad K' = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k'^2\lambda^2)}}.$$

Das erste der Argumente (15) ist also selbst reell; aber auch die Einsetzung der andern Argumente in die Werthe der Coordinaten in (5) gibt für letztere reelle Grössen, denn es ist für $k'^2 = 1 - k^2$:

$$\sin\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm\frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\qquad \sin\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k\sin\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \mp\frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\qquad \cos\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \mp\frac{i\Delta\operatorname{am} u}{k\sin\operatorname{am} u},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u},\qquad \Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = \mp\frac{i\cos\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u},$$

$$\sin\operatorname{am}\left(u + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \pm\frac{\Delta\operatorname{am} u}{k\cos\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(u + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = -\frac{ik'}{k\cos\operatorname{am} u},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \pm\frac{ik'\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u}.$$

Ist dagegen die Curve eintheilig, so wird das Doppelverhältniss k^2 complex (mit dem absoluten Betrage Eins), und man erkennt aus diesen Gleichungen, dass nur der eine Punkt mit dem Argumente $u + \frac{\omega}{2}$ reelle Coordinaten erhält. —

Lassen wir ferner in (12) alle drei Argumente einander gleich werden, so erhalten wir die Bedingung für einen Wendepunkt:

$$3u \equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega, \omega'),$$

oder, wenn p, q ganze Zahlen sind:

$$(16) \qquad u \equiv \frac{p\omega + q\omega'}{3}.$$

Das Problem der Bestimmung der Wendepunkte ist sonach, wenn ein Wendepunkt ($u \equiv 0$) *bekannt ist, identisch mit dem Probleme der sogenannten speciellen Dreitheilung der elliptischen Functionen.* Dasselbe hängt also von einer Gleichung 4ten Grades ab; und letztere ist keine andere, als eben die Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$, mittelst deren wir früher die Wendepunkte bestimmten, wie wir später noch sehen werden.*) *Die Argumente der 9 Wendepunkte sind daher:*

$$0, \ \frac{\omega}{3}, \ \frac{\omega'}{3}, \ \frac{\omega + \omega'}{3}, \ \frac{2\omega}{3}, \ \frac{2\omega'}{3}, \ \frac{\omega + 2\omega'}{3}, \ \frac{2\omega + \omega'}{3}, \ \frac{2\omega + 2\omega'}{3}.$$

Auf einer geraden Linie liegen dann immer die Wendepunkte, für deren Argumente die Summe der p sowohl, als die Summe der q durch 3 theilbar ist. Ordnet man also die Werthepaare p, q wie die Elemente einer Determinante in das Schema:

$$\begin{matrix} 0,\,0 & 0,\,1 & 0,\,2 \\ 1,\,0 & 1,\,1 & 1,\,2 \\ 2,\,0 & 2,\,1 & 2,\,2, \end{matrix}$$

so liegen je auf einer Geraden solche Punkte, die derselben Horizontalreihe oder derselben Verticalreihe angehören, und endlich solche, die in der Determinante mit einander multiplicirt erscheinen würden. Wir haben sonach für die Gruppirung der Wendepunkte ohne weitere Ueberlegung dieselben Regeln, welche wir früher auf anderem Wege ableiteten (vgl. p. 507); und in der That stimmt unser Schema ganz mit dem damals aufgestellten überein: die in demselben benutzten Zahlen haben aber durch unsere jetzige Betrachtung eine unmittelbare Bedeutung gewonnen; es sind die Werthe der Zahlen p, q in (16). Man erkennt ferner, dass nur drei und immer drei reelle Wendepunkte auf einer reellen Curve vorhanden sind, nämlich diejenigen, welche durch die Parameterwerthe 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ gegeben werden. Hieraus kann man schliessen, dass die Argumente der Punkte

*) Vgl. den Schluss dieses und des folgenden Abschnittes.

des mit drei Wendepunkten versehenen Zuges alle in der Form $\frac{p}{q}\omega$ dargestellt werden können, wo p, q reelle Zahlen bedeuten; man kann auch direct die Vertheilung dieser Argumentwerthe durch fortgesetztes Tangentenziehen verfolgen. Zunächst sind die Berührungspunkte der von einem Wendepunkte $\frac{p\omega+q\omega'}{3}$ ausgehenden Tangenten nach (14) gegeben durch

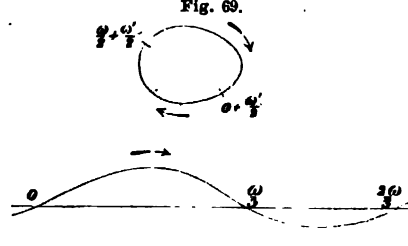
$$(17)\quad -\frac{p\omega+q\omega'}{6},\ -\frac{(p+3)\omega+q\omega'}{6},\ -\frac{p\omega+(q+3)\omega'}{6},\ -\frac{(p+3)\omega+(q+3)\omega'}{6}.$$

Setzt man hierin die Werthe von p, q ein, so erkennt man, dass einer dieser Punkte in den betreffenden Wendepunkt zurückfällt; z. B. für $p=1$, $q=0$ erhält man, wenn man alle Argumente um die Perioden ω und ω' vermehrt:

$$\tfrac{5}{6}\omega,\quad \tfrac{1}{3}\omega,\quad \tfrac{5}{6}\omega+\tfrac{1}{2}\omega',\quad \tfrac{1}{3}\omega+\tfrac{1}{2}\omega'.$$

Von den drei Berührungspunkten liegt also nur einer ($\frac{5}{6}\omega$) mit dem Wendepunkte $\frac{1}{3}\omega$ auf demselben Zuge; die beiden anderen dagegen auf dem Ovale. Wir können hieraus schliessen, dass die Argumente der Punkte des letzteren immer von der Form $m\omega+\frac{1}{2}\omega'$ sind, wo m eine reelle Zahl ist, und so überhaupt durch fortgesetztes Tangentenziehen ein Urtheil über die Vertheilung der Argumentenwerthe auf den reellen Zügen der Curve gewinnen, wie dies Fig. 69 veranschaulicht. *Auf den Zug mit den drei Wendepunkten fallen, wie erwähnt, die Werthe* $u=0$ *bis* $u=\omega$, *auf das Oval die Werthe* $u=0+\frac{1}{2}\omega'$ *bis* $u=\omega+\frac{1}{2}\omega'$.

Fig. 69.



Damit ist aber nur die Vertheilung der Parameter für die reellen Punkte der Curve gegeben; es fragt sich, ob für die imaginären Punkte eine ähnliche Versinnlichung derselben möglich wird. Letzteres ist nun in der That der Fall, wenn man sich der von Klein eingeführten Vorstellungsweise bedient.*) Diese Darstellung der imaginären Elemente der Curve schliesst sich an die Auffassung derselben als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten an; wir werden daher im Folgenden statt der Curve dritter Ordnung eine Curve dritter Klasse zu Grunde legen.

Zuvor betrachten wir jedoch das Entsprechende an einem Kegelschnitte. Jeder Tangente eines solchen, wie überhaupt einer alge-

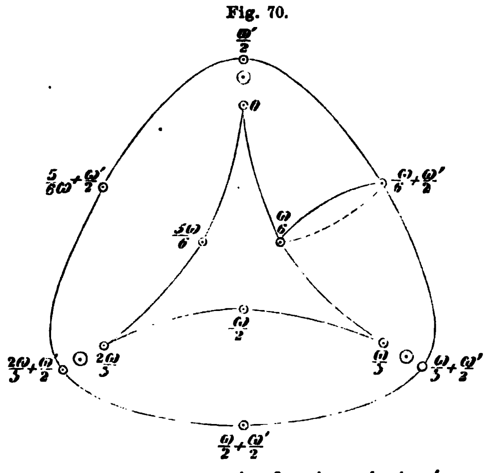
*) F. Klein: Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen; Math. Annalen, Bd. 7, p. 558.

braischen Curve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, kann man im Allgemeinen *einen* reellen Punkt der Ebene zuordnen. Ist die Tangente reell, so wählen wir als ihr entsprechenden Punkt den Berührungspunkt; ist sie imaginär, so wählen wir den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Beide Festsetzungen stimmen insofern mit einander überein, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Schnittpunkt mit der conjugirt imaginären Geraden; und, wenn diese beiden conjugirten Linien in eine reelle zusammenfallen, so geht ihr Schnittpunkt eben in den Berührungspunkt der letzteren über. Es sei nun zunächst ein reeller Kegelschnitt gegeben, den wir als *Ellipse* voraussetzen. Von jedem Punkte ausserhalb derselben kann man zwei reelle Tangenten an sie legen, dagegen von jedem Punkte im Innern der Ellipse zwei conjugirt imaginäre. Es gibt also immer *zwei* imaginäre Tangenten, welchen derselbe reelle Punkt zugehört: *Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere derselben doppelt, sie bilden eine Fläche von der Gestalt eines ellipsoidischen Doppelblattes.* Wenn wir dabei von einem Doppelblatte sprechen, so denken wir uns alle Punkte des Innern einmal zu einem Blatte vereinigt, insofern sie einer Tangente $G + iH = 0$ zugeordnet sind, und einmal, insofern sie zu einer Tangente $G - iH = 0$ gehören. Dieses Doppelblatt nun repräsentirt uns die Gesammtheit der imaginären Tangenten der Ellipse, d. h. die Vertheilung der complexen Werthe eines Parameters, von dem jene Tangenten rational abhängen. Beide Blätter sind durch die reellen Punkte der Ellipse mit einander verbunden.

Ganz analoge Ueberlegungen können wir nun auch an einer *Curve dritter Klasse* anstellen. Eine solche besteht bekanntlich entweder aus zwei geschlossenen Zweigen, von denen der eine drei Spitzen, der andere eine ovale Form hat, oder allein aus einem dreispitzigen Zuge (vgl. p. 514). Wir betrachten hier nur den ersten Fall. Die Tangenten einer Curve der beregten Art können wir ebenso als elliptische Functionen eines Parameters darstellen, als die Punkte einer zweitheiligen Curve dritter Ordnung; d. h. die eine Periode des betreffenden elliptischen Integrals erster Gattung ist reell, die andere rein imaginär (vgl. p. 608); und also ist die Parametervertheilung für die reellen Tangenten der beiden Züge dieselbe (nur dualistisch übertragen), wie in Fig. 69.

Setzen wir also einem Punkte der Curve dritter Klasse den Argumentwerth seiner Tangente bei, so erhalten wir die in Fig. 70 dargestellte Parametervertheilung: Längs des Zuges mit drei Spitzen

Fig. 70.



sind die reellen Zahlen von 0 bis ω in der Weise vertheilt, dass den drei Spitzen die Argumente 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ zukommen; und die entsprechenden drei Rückkehrtangenten schneiden die Curve noch in drei Punkten, welche den von einem Wendepunkte der Curve dritter Ordnung ausgehenden Tangenten entsprechen, und also bez. die folgenden Argumente haben:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\omega, & \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega', & 0 + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{5}{6}\omega, & \frac{5}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{1}{6}\omega, & \frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'. \end{array}$$

Für die Punkte des umschliessenden Ovals hat der imaginäre Theil des Arguments überhaupt gleichmässig den constanten Werth $\frac{1}{2}\omega'$, während er für die Punkte des dreispitzigen Zuges verschwindet.

In Betreff der *imaginären* Tangenten der Curve gilt das Folgende. Von jedem Punkte ausserhalb des Ovals, sowie von jedem Punkte innerhalb des dreispitzigen Zuges kann man, wie ein Blick auf die Figur lehrt, drei reelle Tangenten an die Curve legen; die reellen Punkte dagegen, welche conjugirt imaginären Tangenten der Curve entsprechen, von denen also nur noch eine reelle Tangente ausgeht, erfüllen den Raum zwischen beiden Curvenzügen doppelt. Denken wir uns demgemäss diese Punkte wie bei der Ellipse auf zwei verschiedene, über die Ebene zwischen beiden Curvenzügen ausgebreitete Blätter vertheilt, die längs der beiden reellen Curvenzüge an einander geheftet sein mögen, *so bilden sie eine Art Ringfläche,* d. h. eine Fläche, die durch continuirliche Deformation in einen gewöhnlichen Ring übergeführt werden kann.*) Jedem Punkte dieser Fläche gehört nun

*) Die von uns construirte Fläche hat also auch denselben *Zusammenhang*, wie eine Ringfläche, und somit auch wie die zum Studium der elliptischen Functionen zu benutzende Riemann'sche Fläche. Man kann nun überhaupt die letztere direct durch unsere Ringfläche ersetzen und auf dieser die Integrationswege des elliptischen Integrals verfolgen; es ist dies in mancher Beziehung bequemer und anschaulicher. Die beiden Perioden dieses Integrals entstehen dann dadurch, dass man dem zwischen bestimmten Grenzen geführten Integrationswege beliebig Meridiancurven und Breitencurven hinzufügen kann. — Aus der Zahl für den Zusammenhang der Ringfläche kann man ferner in Riemann'scher Weise schliessen, dass die Curve dritter Klasse vom Geschlechte 1 ist. Aehnliches gilt auch bei höheren Curven. Vgl. Klein a. a. O.

ein complexer Werth des Arguments u zu und dem gerade über ihm liegenden des andern Blattes der conjugirt imaginäre Werth. Insbesondere finden sich etwa an den drei Stellen, welche in Fig. 70 durch kleine Kreise bezeichnet sind, diejenigen Punkte der Fläche, welche die 6 paarweise conjugirt imaginären Rückkehrtangenten der Curve repräsentiren, denen also bez. die folgenden Argumente zukommen:

$$0 \pm \tfrac{1}{3}\omega', \quad \tfrac{1}{3}\omega \pm \tfrac{1}{3}\omega', \quad \tfrac{2}{3}\omega \pm \tfrac{1}{3}\omega';$$

denn diese Punkte müssen bez. zwischen den Punktepaaren 0 und $0 + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{3}\omega$ und $\frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{2}{3}\omega$ und $\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ symmetrisch liegen.

Auf der Fläche sind nun besonders zwei Curvensysteme von Wichtigkeit, die wir als *Breitencurven* und *Meridiancurven* unterscheiden wollen; sie sind dadurch definirt, dass auf ihnen bez. der imaginäre und der reelle Theil des Arguments einen constanten Werth hat. Die Meridiancurven werden, wie hier nur kurz bemerkt werden mag, durch die Tangenten des dreispitzigen Zuges gebildet, d. h. auf der Ringfläche durch eine Ebene ausgeschnitten, welche durch eine solche Tangente, etwa senkrecht zur Ebene der Zeichnung, gelegt wird. Eine Curve der Art ist in Fig. 70 durch Verbindung der Punkte $\frac{1}{6}\omega$ und $\frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ angedeutet. Die Breitencurven, auf denen immer der imaginäre Theil des Arguments constant ist, verlaufen gewissermassen senkrecht zu den Meridiancurven; zu ihnen gehören insbesondere die beiden reellen Züge der Curve selbst, indem auf dem Ovale der imaginäre Theil stets gleich $\frac{1}{2}\omega'$, auf dem dreispitzigen Zuge stets gleich Null ist. Eine nähere Untersuchung ergibt weiter, dass je zwei Breitencurven, für welche die constanten imaginären Werthe um $\frac{1}{2}\omega'$ differiren, zusammen die beiden reellen Züge einer algebraischen Curve vom Geschlechte $p = 1$ bilden.*) —

*) Diese Curven sind ferner durch die in folgenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften charakterisirt:

Das Doppelverhältniss der vier reellen Schnittpunkte jeder Curve mit den Tangenten am dreispitzigen Zuge der Grundcurve ist constant. Die Breitencurven bilden einen Theil eines Curvensystems, welches dadurch erhalten wird, dass man auf jeder Tangente der Curve dritter Klasse zu der binären biquadratischen Form f, gebildet durch ihre Schnittpunkte mit der Curve, die Hesse*'sche Form H und den Büschel $\varkappa f + \lambda H$ construirt.*

Für die Breiten- und Meridiancurven erwähnen wir schliesslich noch die Relation, *dass die beiden von jedem Punkte der Ringfläche ausgehenden conjugirt imaginären Tangenten harmonisch zu den Richtungen dieser Curven liegen.* Diese Beziehung gibt dann weiter einen bemerkenswerthen Zusammenhang des Systems der Breitencurven mit der zur Grundcurve gehörigen Zwischenform Q. — Vgl. Näheres über diese Verhältnisse bei Harnack: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades, Math. Annalen, Bd. 9; ferner unten p. 622.

Wir wollen nun mit Hülfe der Gleichung (12) einige weitere Probleme behandeln. Zunächst stellen wir eine Frage, auf deren Beantwortung wir schon bei Gelegenheit der Grassmann'schen Erzeugungsweise der Curve dritter Ordnung geführt wurden, nämlich (vgl. p. 539):

Es sind auf der Curve drei Punkte mit den Argumenten a, b, c gegeben, es sollen durch dieselben drei Gerade gelegt werden, welche sich auf der Curve schneiden.

Bezeichnen wir mit u, v, w diese drei Schnittpunkte, so haben wir die drei Bedingungen:

$$a + v + w \equiv 0,$$
$$b + w + u \equiv 0,$$
$$c + u + v \equiv 0,$$

und hieraus durch Addition:

$$u + v + w \equiv -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

also schliesslich ($P = p\omega + q\omega'$):

$$u \equiv \frac{a-b-c}{2} + \frac{P}{2},$$
$$(18)\qquad v \equiv \frac{b-c-a}{2} + \frac{P}{2},$$
$$w \equiv \frac{c-a-b}{2} + \frac{P}{2}.$$

Hier haben wir für p und q nur 0 oder 1 zu setzen und erhalten so wieder den bekannten Satz:

Es gibt vier Dreiecke, deren Ecken einzeln auf der Curve liegen, und deren Seiten durch drei gegebene Punkte der Curve gehen.

Ferner ergibt der Vergleich der Ausdrücke (18) mit (15) das uns ebenfalls bereits bekannte Resultat:

Wenn man zu den Ecken eines dieser Dreiecke die correspondirenden Punkte in den drei Systemen von Polepaaren construirt, so erhält man die Ecken der drei anderen Dreiecke.

Man leitet hieraus ferner leicht die früher gegebene Construction der vier Dreiecke ab. — Wenn die Punkte a, b, c in gerader Linie liegen, so ist:

$$a + b + c \equiv 0,$$

und es gibt eine Periode $\Pi = \pi\omega + \varkappa\omega'$, so dass:

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) \equiv \tfrac{1}{2}\Pi.$$

In Folge dessen gehen die Gleichungen (18) über in:

$$u \equiv a + \frac{P-\Pi}{2},\quad v \equiv b + \frac{P-\Pi}{2},\quad w \equiv c + \frac{P-\Pi}{2}.$$

Von den vier oben gefundenen Lösungen wird demnach eine ($P = \Pi$) uneigentlich, indem das entsprechende Dreieck in die Verbindungslinie der drei gegebenen Punkte übergeht.*)

Es lassen sich also einer Curve dritter Ordnung nur drei Dreiecke einschreiben, deren Seiten durch drei auf der Curve gegebene, in einer Geraden liegende Punkte gehen. Ihre Ecken sind die drei Punktetripel, welche den gegebenen Punkten als conjugirte Pole in den drei Systemen entsprechen. (Man kann auf diese Dreiecke noch sechs Grassmann-*sche Erzeugungsweisen der Curve begründen.)* —

Wir können ferner mit Hülfe der Gleichung (12) die Steiner-schen Polygone**) behandeln, die wir auch schon bei Curven mit Doppelpunkt betrachtet haben, wie denn überhaupt der Satz von dem Verschwinden der Integralsumme an Stelle des bei Curven mit Doppelpunkt geltenden vom Verschwinden der Summe der Logarithmen zu treten hat (vgl. Gleichung (9) auf p. 586 und p. 593).

Zur Construction eines Steiner'schen Polygons ziehen wir durch einen festen Punkt a der Curve eine beliebige Gerade, welche noch in zwei Punkten mit den Argumenten u_1, u_2 schneidet, u_2 verbinden wir mit einem beliebigen festen Punkte b der Curve durch eine Linie, welche noch durch u_3 geht, u_3 wieder mit a durch eine in u_4 schneidende Gerade, u. s. f.: Wir fragen, wie b liegen muss, damit ein *geschlossenes* Polygon von $2n$ Seiten entsteht, d. h. damit die $2n^{te}$ Seite wieder durch den Punkt u_1 geht. Diese Construction gibt uns nun unmittelbar die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} a + u_1 + u_2 \equiv 0, & b + u_2 + u_3 \equiv 0, \\ a + u_3 + u_4 \equiv 0, & b + u_4 + u_5 \equiv 0, \\ a + u_5 + u_6 \equiv 0, & b + u_6 + u_7 \equiv 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a + u_{2n-1} + u_{2n} \equiv 0, & b + u_{2n} + u_1 \equiv 0. \end{cases}$$

Durch Addition folgt also:

$$n \, . \, a + \Sigma u_i \equiv 0, \quad n \, . \, b + \Sigma u_i \equiv 0,$$

oder:

$$(20)\qquad a \equiv b + \frac{1}{n}(p\omega + q\omega').$$

Mittelst dieser Gleichung ist b mehrdeutig bestimmt, wenn a gegeben ist. Alsdann lassen sich aus (19) alle Ecken des Polygons

*) Vgl Clebsch: Math. Annalen, Bd. 5, p. 425, und für den besonderen Fall, dass a, b, c in gerader Linie liegen: Hesse, Crelle's Journal, Bd. 36.

**) Vgl. Steiner, Crelle's Journal, Bd. 32, p. 182, und Clebsch, ib. Bd. 63: Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. In letzterem Aufsatze wurden überhaupt zuerst die elliptischen Functionen für die Curven 3. Ordnung verwerthet.

successive berechnen, sobald eine, etwa u_1, willkürlich gewählt ist; und somit liegt in (20) der Beweis des Steiner'schen Satzes:

Es gibt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte a der Curve treffen und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt b der Curve gehen. Ist a gegeben, so ist b dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten a, b, „einem zur Zahl n gehörigen Steiner*'schen Punktepaare", gibt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste (durch a gehende) Seite ganz willkürlich ist.*

Was die Bestimmung von a aus b (oder b aus a) betrifft, so zeigt die Gleichung (20), dass dieselbe durch das Problem der n-Theilung der elliptischen Functionen geschieht; in der That hat man, um die Coordinaten des Punktes a anzugeben, nach (5) für $b = \frac{\beta}{n}$ die Aufgabe

$$\sin \operatorname{am} \left(\frac{\beta + p\omega + q\omega'}{n} \right) \quad \text{aus} \quad \sin \operatorname{am} \beta$$

zu finden. Dieselbe hat bekanntlich n^2 Lösungen, wenn n eine ungerade Primzahl ist, und diese lassen sich mit Hülfe von Wurzelzeichen durch die Wurzeln einer einzigen Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen. Unter jenen n^2 Lösungen ist aber eine für uns unbrauchbare enthalten, nämlich diejenige, wo $a = b$ wird.

Ist daher n eine Primzahl, so gibt es $n^2 - 1$ Punkte b, welche mit einem gegebenen Punkte a ein Steiner*'sches Punktepaar bilden.* Diese Punkte ordnen sich in $n+1$ Gruppen, entsprechend den Wurzeln jener Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades; und jede Gruppe besteht aus $n-1$ Punkten. Aus den später anzugebenden Beziehungen zwischen verschiedenen Steiner'schen Punktepaaren wird man ferner sehr einfache Beziehungen zwischen den Punkten einer solchen Gruppe ableiten.

Ist jedoch n keine Primzahl, so wird es vorkommen können, dass die Zahlen p, q in dem Ausdrucke

$$\varepsilon = \frac{p\omega + q\omega'}{n},$$

welche die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen können, mit n gleichzeitig denselben Factor gemein haben; und dann entsteht das $2n$-Eck offenbar durch wiederholte Umgänge eines Polygons von geringerer Seitenzahl.*) Man hat also allgemein den Satz:

Zu jedem Punkte a der Curve gehören so viele Punkte b, als Zahlenpaare p, q ($< n$) existiren, welche mit n keinen Factor gemein haben.

---

*) Vgl. die entsprechenden Ueberlegungen bei Curven mit Doppelpunkt auf p. 589.

Zu besonders ausgezeichneten Polygonen geben die Wendepunkte Veranlassung. Man erkennt nämlich aus (16), dass je zwei Wendepunkte ein Steiner'sches Punktepaar für $n = 3$, und aus (17), dass je zwei Berührungspunkte der von verschiedenen Wendepunkten ausgehenden Tangenten ein solches Punktepaar für $n = 6$ bilden. Man hat also den Satz, dessen ersten Theil schon Steiner angab:

Je zwei Wendepunkte können die Schnittpunkte der geraden und ungeraden Seiten eines Steiner'*schen Sechsecks und je zwei Berührungspunkte der von zweien unter ihnen ausgehenden Tangenten dergleichen Punkte für ein* Steiner'*sches Zwölfeck sein.*

Ferner können wir in folgender Weise Punktsysteme auf der Curve angeben, die für einen speciellen Fall ($n = 3$) auf die Wendepunkte zurückführen. Wir stellen die Forderung, dass von dem Systeme der zu einem Punkte a gehörigen Punkte b immer auf der Verbindungslinie zweier noch ein dritter liege. Sind zwei solche Punkte (b, b') durch die Gleichungen:

$$a \equiv b + \frac{p\omega + q\omega'}{n}, \quad a \equiv b' + \frac{p'\omega + q'\omega'}{n}$$

gegeben, so müssen sich alsdann zwei Zahlen p'', q'' angeben lassen, so dass

$$a \equiv b'' + \frac{p''\omega + q''\omega'}{n},$$

und $b + b' + b'' \equiv 0$, d. h.:

$$3a - \frac{1}{n}\{(p + p' + p'')\omega + (q + q' + q'')\omega'\} \equiv 0;$$

oder es muss sein, wenn r, s *ganze Zahlen sind:*

$$(21) \qquad a \equiv \frac{r\omega + s\omega'}{3} + \frac{1}{3n}\{(p + p' + p'')\omega + (q + q' + q'')\omega'\}.$$

Da nun der erste Theil der rechten Seite das Argument eines Wendepunktes ist, so hat man folgenden Satz:

Alle und nur diejenigen Punkte a, welche mit einem Wendepunkte ein zur Zahl $3n$ *gehöriges* Steiner'*sches Punktepaar bilden können, haben die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von irgend zwei Punkten, die mit a ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bilden, die Curve in einem dritten Punkte schneiden, welcher a zu einem ebensolchen Punktepaare ergänzt.*

Das nähere Studium der so definirten Punktsysteme a, b, welche von den Wendepunkten abhängen, und als deren speciellster Fall das System der Wendepunkte selbst erscheint, bietet grosses Interesse. Dieselben sind verschieden je nach der Natur der Zahlen

$$n, \quad p_0 = p + p' + p'', \quad q_0 = q + q' + q'',$$

und zwar in folgender Weise. Genügt a der Relation (21), so wollen wir einen Punkt, welcher mit a ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bildet, dessen Argument also von der Form $a + \frac{r\omega + s\omega'}{n}$ ist, kurz einen Punkt r, s nennen. Sollen dann also die Punkte r, s; r', s'; r'', s'' auf einer Geraden liegen, so muss man haben:

$$r + r' + r'' \equiv p_0, \quad s + s' + s'' \equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Wenn nun erstlich n durch 3 *theilbar ist, aber nicht* p_0 *und* q_0, so können die Punkte r, s; r', s'; r'', s'' nie in *einen* Punkt zusammenfallen. *Ist dagegen n nicht durch* 3 *theilbar*, so kann man, und zwar auf *eine* Art

$$3r \equiv p_0, \quad 3s \equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n)$$

machen; *dann gehört also ein Wendepunkt zu dem Systeme.* Ist endlich jede der Zahlen n, p_0, q_0 durch 3 theilbar, so gehört jeder der 9 Wendepunkte zu dem Systeme.

Ist ferner n ungerade, so bestehen die Congruenzen

$$r' + 2r \equiv p_0, \quad s' + 2s \equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n)$$

so zusammen, dass jedem Punkte r', s' ein Punkt r, s entspricht, und umgekehrt. In diesem Falle also kann man von jedem Punkte des Systems *eine* Tangente ziehen, deren Berührungspunkt dem Systeme angehört, und die Tangente in *jedem* Punkte des Systems geht noch durch einen anderen desselben. *Ist dagegen n gerade*, so gehört zwar zu jedem Punkte r, s ein Punkt r', s'; aber umgekehrt gehört zu einem Punkte r', s' nur dann ein Punkt r, s, wenn die Zahlen $p_0 - r'$, $q_0 - s'$ gerade sind; dann aber gehören zu demselben auch noch die Punkte

$$r + \frac{n}{2}, \; s; \quad r, \; s + \frac{n}{2}; \quad r + \frac{n}{2}, \; s + \frac{n}{2}.$$

Es geht also zwar noch die Tangente in jedem Punkte des Systems durch einen andern, aber immer vier durch denselben, so dass überhaupt nur durch den vierten Theil aller Punkte Tangenten anderer Punkte hindurchgehen.*) —

Die Untersuchung der Steiner'schen Punktepaare gibt uns noch zu einigen allgemeineren Erörterungen Veranlassung, insofern durch dieselben auf der Curve eine paarweise Zuordnung der Punkte (Correspondenz) gegeben wird. Ein solches zur Zahl n gehöriges Punktepaar ist durch die Relation (20) definirt, nämlich:

$$(22) \qquad a - b \equiv \frac{1}{n}(p\omega + q\omega'), \quad (\equiv \varepsilon).$$

*) Vgl. noch Näheres über diese Punktsysteme bei Clebsch a. a. O.

Lassen wir nun a die Curve durchlaufen und suchen zu jedem a den entsprechenden Punkt b, indem wir den Zahlen p, q bestimmte, constante Werthe beilegen, so werden wir alle auf der Curve denkbaren zur Zahl n gehörigen Paare erhalten, für welche die Zahlen p, q diese bestimmten Werthe haben; und es ist klar, dass alle diese Punktepaare a', b' aus dem einen gegebenen a, b durch Aenderung dieser Argumente um die gleiche Constante hervorgehen, so dass immer die Bedingung $a' - b' \equiv a - b$ erfüllt bleibt. Letzteres gibt die folgende geometrische Construction dieser Paare: Wir verbinden die Punkte a, b mit einem beliebigen Punkte c der Curve, so dass letztere von den Linien $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ in den Punkten b', a' getroffen wird, wo:

$$a' \equiv -(b+c), \quad b' \equiv -(a+c).$$

Dann folgt aber:

$$a' - b' \equiv a - b \equiv \varepsilon. \tag{23}$$

Um den Inhalt dieser Gleichung einfach auszusprechen, wollen wir nun die Punktepaare (22) in verschiedene *Klassen* eintheilen, indem wir zu derselben Klasse alle diejenigen vereinigen, für welche die Zahlen p, q dieselben Werthe haben. Die Gleichung (23) gibt dann den Satz:

Verbindet man ein Steiner'*sches Punktepaar mit irgend einem Punkte der Curve, so schneiden die Verbindungslinien die Curve in neuen Punktepaaren derselben Klasse, so dass man alle Punktepaare einer Klasse aus einem derselben erhält, indem man den willkürlichen Punkt sich über die ganze Curve bewegen lässt.*

Die verschiedenen Klassen von Punktepaaren ordnen sich nun weiter in *Gruppen*, insofern man alle Klassen zu einer Gruppe vereinigt, für welche die Grösse $\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$ sich nur um ganzzahlige Factoren unterscheidet, für welche also:

$$a - b \equiv \varepsilon, \quad 2\varepsilon, \; 3\varepsilon, \; \ldots \; (n-1)\varepsilon.$$

Es ist aber zu bemerken, dass die zu $h\varepsilon$ und $(n-h)\varepsilon$ gehörigen Klassen einer Gruppe nicht von einander verschieden sind, indem dieselben durch blosse Vertauschung von a mit b in einander übergehen. Jede Gruppe umfasst also nur $\frac{1}{2}(n-1)$ Klassen; und es gibt $(n+1)$ solche Gruppen entsprechend den Wurzeln der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, von welcher die n-Theilung abhängt.*) Ferner sind in jeder Gruppe, wenn n keine Primzahl ist, Klassen uneigentlicher Polygone enthalten, wie man durch ähnliche Ueberlegungen, wie oben, erschliesst;

*) Diese Gruppen entsprechen also den verschiedenen, nicht äquivalenten Klassen, welche man bei einer Transformation n^{ten} Grades unterscheidet.

doch gehen wir auf diese Fälle nicht weiter ein. Wir erwähnen nur noch einen Satz, mittelst dessen in Verbindung mit dem vorigen man, wie sofort ersichtlich ist, *auch alle Punktepaare einer Gruppe aus einem einzigen Paare linear ableiten kann.*

Bestehen nämlich die Gleichungen:

$$a - b \equiv h\varepsilon, \quad a' - b' \equiv h'\varepsilon$$

und sind die Punkte a'', b''; a''', b''' definirt durch:

$$a + b' + a'' \equiv 0, \quad b + a' + b'' \equiv 0,$$
$$a + a' + a''' \equiv 0, \quad b + b' + b''' \equiv 0,$$

so ist auch:

$$a'' - b'' \equiv (h' - h)\,\varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(h + h')\,\varepsilon.$$

Sind also zwei Paare a, b; a', b' derselben Gruppe gegeben, und verbindet man dieselben über Kreuz, so schneiden diese Verbindungslinien auf der Curve zwei neue Punktepaare aus, welche derselben Gruppe angehören. Nur wenn beide Paare auch von derselben Klasse sind ($h = h'$), fällt eines der neuen Paare in einen Punkt der Curve zusammen, während das zweite einer anderen Klasse angehört. Die letztere Bemerkung führt dazu, aus zwei Paaren derselben Klasse Paare anderer Klassen derselben Gruppe zu finden. Da aber nach dem vorhergehenden Satze alle Paare einer Klasse wieder durch ein Paar derselben gegeben sind, so kann man in der That auch alle Paare einer Gruppe aus einem Paare construiren.

Dagegen ist es nicht möglich, Punktepaare *verschiedener* Gruppen zu construiren, wenn ein einziges Paar gegeben ist. Vielmehr sind dazu zwei Paare nöthig,

$$a - b \equiv \varepsilon, \quad a' - b' \equiv \varepsilon',$$

welche nicht derselben Gruppe angehören. Wendet man nämlich auf sie dieselbe Construction an, so kommt man auf zwei Paare, für die:

$$a'' - b'' \equiv \varepsilon' - \varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(\varepsilon + \varepsilon').$$

Wir haben also den Satz:

Sind zwei Steiner'*sche Punktepaare verschiedener Gruppen gegeben* (a, b, ε; a', b', ε'), *und verbindet man a mit b', a' mit b oder a mit a', b mit b', so erhält man ein drittes Paar, welches einer anderen Gruppe angehört. Aus zwei gegebenen Paaren verschiedener Gruppen kann man überhaupt alle Paare construiren, welche einer Zahl n zugehören, wenn:*

$$\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega'), \quad \varepsilon' = \frac{1}{n}(p'\omega + q'\omega'),$$

und wenn weder p, q noch p', q' einen Factor mit n gemein haben.

Man kann nun ferner nach Beziehungen zwischen Punktepaaren

fragen, die zu verschiedenen Zahlen n gehören; wir unterlassen jedoch die weitere Ausführung dieser Theorien, um an das Vorstehende Untersuchungen anderen Charakters anzuknüpfen, indem wir die Beziehungen zwischen verschiedenen Punkten auf der Curve mit anderen geometrischen Gebilden der Ebene in Verbindung setzen. Legt man nämlich den Zahlen p, q in (22) constante Werthe bei, so werden die Verbindungslinien je zweier einander entsprechenden Punkte a, b eine bestimmte Curve umhüllen: und *diese Curve ist von der sechsten Klasse.**) Einem Punkte b entspricht nämlich vermöge (22) der Punkt $a \equiv b + \varepsilon$, wo ε eine Constante, und der dritte Schnittpunkt u der Verbindungslinie von a und b ist bestimmt durch:

$$2b + \varepsilon + u = 0.$$

Die Punkte b, deren Verbindungslinien mit dem entsprechenden $b + \varepsilon$ durch denselben Punkt u gehen, sind also bestimmt durch

$$b \equiv -\frac{\varepsilon + u}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2}; \tag{24}$$

d. h. ihre Zahl ist gleich 4, entsprechend den 4 Werthepaaren, welche p, q beizulegen sind; ausserdem aber geht noch durch n die Verbindungslinie von u (als Punkt b) mit dem entsprechenden Punkte $u + \varepsilon$ und die Verbindungslinie von u (als Punkt a) mit dem entsprechenden Punkte $u - \varepsilon$; so dass wir im Ganzen 6 Tangenten durch u haben. Die Relation (24) gibt durch Vergleichung mit (15) beiläufig den Satz:

Geht die Verbindungslinie des Punktes a mit dem ihm zugeordneten $a + \varepsilon$ durch u, so gehen auch die Verbindungslinien der drei Punkte, welche a zu einem Polepaare ergänzen, mit den ihnen zugeordneten Punkten durch u.

Nimmt man nun insbesondere in (22) $n = 2$, also $\varepsilon = \frac{1}{2}\omega$, oder $= \frac{1}{2}\omega'$ oder $= \frac{1}{2}(\omega + \omega')$, so bilden je zwei einander zugeordnete Punkte a, b ein Polepaar, und die Beziehung zwischen ihnen wird eine wechselseitige, das Umhüllungsgebilde ihrer Verbindungslinien daher nur noch von der dritten Klasse. Die drei so entstehenden Curven sind aber nach bekannten Sätzen (p. 516) keine anderen, als die drei Cayley'schen Curven bez. zu den drei Curven dritter Ordnung, denen die gegebene Grundcurve als Hesse'sche zugehört. *Unter den soeben definirten Curven 6ter Klasse sind also für $n = 2$ insbesondere die drei* Cayley'*schen Curven, je doppelt zählend, enthalten, welche der Grundcurve in bekannter Weise zugehören.*

Das Vorstehende kann man übrigens von der Betrachtung der Steiner'schen Punktepaare ganz unabhängig machen, indem man ε

*) Vgl. im Folgenden Harnack a. a. O., wo man insbesondere auch das Verhalten dieser Curven in Bezug auf Reell und Imaginär näher erörtert findet.

als continirlich veränderlichen Parameter auffasst ohne Rücksicht darauf, ob derselbe in der Form $\frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$ erscheint. Jedem Werthe von ε ist dann eine Curve 6[ter] Klasse in angegebener Weise zugeordnet; *und zwar wird jede Tangente der Ebene von drei Curven des durch Variation von ε entstehenden Systems berührt.* Denn man kann die drei Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der Grundcurve offenbar auf dreierlei Weisen zu je zweien als zugeordnete combiniren.*)

Statt durch die Relation $a - b \equiv \varepsilon$ kann man natürlich auch jedem Punkte a einen Punkt b durch die Bedingung $a + b \equiv \varepsilon$ zuordnen. *Dann geht die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte immer durch denselben Punkt $-\varepsilon$;* diese Art der Zuordnung ist daher von der vorhin besprochenen wesentlich verschieden. Von besonderem Interesse sind hier die Fälle, wo der Punkt $-\varepsilon$ in einem der neun Wendepunkte liegt. Jede durch einen solchen gehende Gerade wird nämlich von der Curve und der harmonischen Geraden des betreffenden Wendepunktes harmonisch getheilt. *Die durch die Relation $a + b \equiv \frac{1}{3}(p\omega + q\omega')$ auf der Curve gegebene paarweise Zuordnung ihrer Punkte wird also algebraisch durch eine Collineation in der Ebene dargestellt, und zwar durch eine perspectivische Transformation, deren Collineationscentrum in einem Wendepunkte liegt und deren Collineationsaxe mit der betreffenden harmonischen Geraden zusammenfällt.***)

Man kann endlich die allgemeinere Beziehung:

$$ma - nb \equiv \varepsilon$$

zwischen Punkten a, b auf der Curve untersuchen. *Jedem Punkte a entsprechen dann n^2 Punkte b und jedem b umgekehrt m^2 Punkte a,* wenn m und n ungerade Primzahlen sind. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen hier eine Curve der Klasse* $2(m^2 + mn + n^2)$, was man leicht in analoger Weise beweist, wie das Entsprechende im Falle $m = n = 1$. Man wird dagegen nicht mehr zu algebraischen Curven der Art als Umhüllungsgebilden geführt, wenn man zwei Punkte a, b durch die noch allgemeinere Relation

$$a = \varrho b + \varepsilon$$

*) Dies System von Curven ist dasselbe (nur in dualistisch übertragenem Sinne), welches bei einer Curve mit zwei reellen Zügen auf der Ringfläche die Breitencurven liefert; vgl. die Anmk. auf p. 613. Auf den Zusammenhang desselben mit dem Connexe $Q \equiv (abu)^2 (cau)\, c_x^2 b_x$ werden wir in der VII. Abtheilung dieser Vorlesungen noch zurückkommen.

**) Ausser diesen 9 gibt es 9 andere Collineationen der C_3 in sich, von denen jede durch Combination je zweier der ersteren entsteht; vgl. die Anmerkung auf p. 508. — Von den Wendepunkten ausgehend wird man mit Hülfe der elliptischen Functionen auch einfach zur Betrachtung der sogenannten *Inflexionstripel* geführt; vgl. darüber Gent: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 17.

in Verbindung setzt, wo ϱ eine *beliebige* Constante bedeutet. In jedem dieser Fälle kann man übrigens die Tangenten u_i der entstehenden Enveloppen leicht als elliptische Functionen eines Parameters darstellen; man hat nur aus (5) die Coordinaten x_i und y_i der Punkte mit den Argumenten u und $\varrho u + \varepsilon$ zu berechnen und dann $u_i = (xy)_i$ zu setzen. —

Wir wenden uns nunmehr zu wichtigen Verallgemeinerungen des Vorhergehenden, welche sich auf die Schnittpunkte der C_3 mit beliebigen anderen Curven beziehen Es seien zunächst $u_1, u_2 \ldots u_6$ die Argumente der 6 Schnittpunkte der C_3 mit einem Kegelschnitte. Die Verbindungslinien von u_1 und u_2, u_3 und u_4, u_5 und u_6 mögen die Curve noch in v_1, v_2, v_3 schneiden: Dann müssen nach unserem Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme (vgl. p. 428) die Punkte v_1, v_2, v_3 auf einer Geraden liegen; denn wir haben drei Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte gemein haben und sich also noch in einem 9ten Punkte schneiden müssen, und zwar sind dies:

1) die vorliegende C_3

2) die drei Linien $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$

3) der Kegelschnitt und die Verbindungslinie von v_1 und v_2.

Demnach besteht wegen (12) die Relation:

$$v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0;$$

und aus unserer Construction der Punkte v_i folgt:

$$u_1 + u_2 + v_1 \equiv 0,$$
$$u_3 + u_4 + v_2 \equiv 0,$$
$$u_5 + u_6 + v_3 \equiv 0,$$

folglich durch Addition:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega, \omega'). \tag{25}$$

Also: *Die Summe der Argumente der sechs Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer Curve dritter Ordnung ist congruent Null (bei der von uns benutzten Parameterdarstellung).*

In derselben Weise kann man nun weiter fortfahren, und man gelangt so unter fortgesetzter Anwendung der Sätze über Schnittpunktsysteme zu dem Resultate, dass für die Argumente der Schnittpunkte unserer C_3 mit einer C_n die Gleichung besteht:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{3n} \equiv 0.$$

Dies Resultat folgt aber auch direct aus dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen, wie wir es in Gleichung (9) ausgesprochen haben. Wir können nämlich die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung

$\Phi = 0$, insofern es uns nur auf ihre Schnittpunkte mit der C_3 $f = 0$ ankommt, durch eine jede Curve

$$\Phi + Mf = 0$$

ersetzen, wenn M eine homogene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in x_1, x_2, x_3 ist (vgl. p. 426). Die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ willkürlichen Coëfficienten von M können wir dann so wählen, dass eben so viele Coëfficienten des Ausdrucks $\Phi + Mf$ Null werden, dass letzterer also nur noch

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = 3n$$

Glieder enthält. Nehmen wir zunächst an, dass n gerade, $= 2m$ sei, so können wir insbesondere in $\Phi + Mf$ alle mit $x_3^3, x_3^4, x_3^5 \ldots x_3^n$ multiplicirten Glieder verschwinden lassen; denn die Zahl aller der hier bezeichneten Coëfficienten ist eben gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Setzen wir dann nach (5):

$$x_1 = s^3, \quad x_2 = s, \quad x_3 = c \,.\, \Delta,$$

wo wieder:

$$s = \sin \operatorname{am} u, \quad c = \cos \operatorname{am} u, \quad \Delta = \Delta \operatorname{am} u,$$

und berücksichtigen, dass:

$$c^2 = 1 - s^2, \quad \Delta^2 = 1 - k^2 s^2,$$

so wird $\Phi + Mf$ von der Form:

$$\begin{aligned}\Phi + Mf = s^{6m} + a_1 s^{6m-2} + a_2 s^{6m-4} + \ldots + a_{3m} \\ + c\Delta \,.\, (b_1 s^{6m-3} + b_2 s^{6m-5} + \ldots + b_{3m-1});\end{aligned}$$

und die Coëfficienten a_i, b_i dieses Ausdrucks setzen sich aus den Coëfficienten von Φ, f und dem Quadrate des Moduls k unserer C_3 zusammen.

Die Form $\Phi + Mf$ muss nun verschwinden, sobald man für u eines der Argumente $u_1, u_2 \ldots u_{3n}$ der $3n$ Schnittpunkte einsetzt. Dies gibt $3n = 6m$ homogene Gleichungen mit $3n$ Coëfficienten. Setzen wir also wieder:

$$s_i = \sin \operatorname{am} u_i, \quad c_i = \cos \operatorname{am} u_i, \quad \Delta_i = \Delta \operatorname{am} u_i,$$

so muss die Gleichung $R = 0$ bestehen, wenn R die folgende Determinante bedeutet: $R =$

$$\begin{vmatrix} s_1^{3n}, & s_1^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_1\Delta_1 s_1^{3n-3}, & c_1\Delta_1 s_1^{3n-5}, & \ldots & c_1\Delta_1 \\ s_2^{3n}, & s_2^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_2\Delta_2 s_2^{3n-3}, & c_2\Delta_2 s_2^{3n-5}, & \ldots & c_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{3n}^{3n}, & s_{3n}^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-3}, & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-5}, & \ldots & c_{3n}\Delta_{3n} \end{vmatrix}$$

Bildet man andererseits mit Hülfe der Gleichung (8) und (9) den Ausdruck

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = \frac{\pm \varphi(0)}{s_1 . s_2 \ldots \ldots s_{3n}},$$

so tritt in dessen Zähler gerade die Determinante R; es wird:

$$\varphi(0) = \frac{R}{S} s_1 . s_2 . s_3 \ldots s_{3n},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist: $S =$

$$\begin{vmatrix} s_1^{3n-1}, & s_1^{3n-3}, & \ldots & s_1, & c_1 \Delta_1 s_1^{3n-2}, & c_1 \Delta_1 s_1^{3n-4}, & \ldots & c_1 \Delta_1 \\ s_2^{3n-1}, & s_2^{3n-3}, & \ldots & s_2, & c_2 \Delta_2 s_2^{3n-2}, & c_2 \Delta_2 s_2^{3n-4}, & \ldots & c_2 \Delta_2 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ s_{3n}^{3n-1}, & s_{3n}^{3n-3}, & \ldots & s_{3n}, & c_{3n} \Delta_{3n} s_{3n}^{3n-2}, & c_{3n} \Delta_{3n} s_{3n}^{3n-4}, & \ldots & c_{3n} \Delta_{3n} \end{vmatrix}.$$

Man überzeugt sich nun leicht (wie in dem Falle $n = 1$), dass die Determinante S im Allgemeinen in Folge der $3n$ Gleichungen $\Phi + Mf = 0$ nicht verschwinden kann; und somit folgt aus (9):

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = 0.$$

oder endlich:

$$(26) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Betrachtung für ein ungerades n durchführen, wie schon das Beispiel der Geraden zeigt, und wie daher hier nicht ausgeführt zu werden braucht. So kommt man zu dem fundamentalen Satze:

Stellt man die Punkte einer Curve dritter Ordnung als elliptische Functionen eines Argumentes dar, der Art, dass dem Argumentenwerthe Null ein Wendepunkt entspricht, so ist die Summe der Argumente für die $3n$ Schnittpunkte mit einer Curve n^{ter} Ordnung immer congruent Null.

Durch diesen Satz wird gleichzeitig der uns schon bekannte bestätigt, dass von den Schnittpunkten einer C_3 mit einer C_n immer einer durch die übrigen bestimmt ist (p. 430); denn das Argument dieses einen drückt sich eben wegen (26) linear durch die der übrigen $3n - 1$ aus.

Wir wollen das letzte Theorem nur noch zur Ableitung einiger auf Berührungskegelschnitte bezüglichen Sätze verwerthen, die uns ebenfalls schon auf anderem Wege bekannt geworden sind (vgl. p. 533).

Soll zunächst ein Kegelschnitt die C_3 in 3 Punkten u_1, u_2, u_3 berühren, so fallen je zwei Schnittpunkte zusammen, und wir haben:

$$2(u_1 + u_2 + u_3) \equiv 0,$$

oder:

$$(27) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv \tfrac{1}{2}(p\omega + q\omega').$$

Der Fall $p = 0$, $q = 0$ gibt die Bedingung, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen, und in der That kann eine solche, doppelt zählend, auch als ein berührender Kegelschnitt aufgefasst werden. *Es gibt also nur drei Systeme von eigentlichen Berührungskegelschnitten, und sie unterscheiden sich dadurch, dass zwischen den Argumenten ihrer drei Berührungspunkte bez. die Gleichungen gelten:*

$$(28)\quad u_1+u_2+u_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega,\ u_1+u_2+u_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega',\ u_1+u_2+u_3 \equiv \tfrac{1}{2}(\omega+\omega').$$

Mit Hülfe dieser Relationen verificirt man auch leicht unter Berücksichtigung von (15) die früher für den dritten Berührungspunkt abgeleitete Construction, wenn die beiden anderen gegeben sind. Legt man durch u_1, u_2, u_3 einen anderen Kegelschnitt, der die C_3 noch in v_1, v_2, v_3 schneiden möge, so ist:

$$u_1 + u_2 + u_3 + v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0,$$

also wegen (28):

$$v_1 + v_2 + v_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega,\ \tfrac{1}{2}\omega',\ \tfrac{1}{2}(\omega + \omega');$$

und es folgt der von Hesse herrührende Satz:

Legt man durch die drei Berührungspunkte eines Kegelschnittes einen neuen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die Curve noch in drei Punkten, in denen ein weiterer demselben Systeme angehöriger Kegelschnitt berührt.

Soll der Kegelschnitt zweimal (in u_1 und u_2) zweipunktig berühren, so haben wir:

$$3(u_1 + u_2) \equiv 0,$$

oder:

$$u_1 + u_2 \equiv \tfrac{1}{3}(p\omega + q\omega').$$

Die beiden Berührungspunkte liegen also nach (16) *stets mit einem Wendepunkte in gerader Linie.*

Wir erwähnen schliesslich noch als letztes Beispiel die Bestimmung des vier Punkten (u_1, u_2, u_3, u_4) der Curve „gegenüberliegenden“ Punktes v (vgl. p. 535). Wir nehmen u_1, u_2, u_3, u_4 als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, dessen einzelne Curven die C_3 noch in den beweglichen Punkten u_5, u_6 schneiden mögen, dann ist:

$$u_5 + u_6 \equiv -(u_1 + u_2 + u_3 + u_4).$$

Setzen wir also $v \equiv u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, so besteht immer die Gleichung

$$u_5 + u_6 + v \equiv 0,$$

d. h. die Verbindungslinien der beweglichen Schnittpunkte gehen alle durch denselben Punkt mit dem Argumente v. In derselben Weise lassen sich überhaupt alle auf Schnittpunktsysteme bezüglichen Untersuchungen, insbesondere also der Restsatz hier durchführen, worauf wir um so weniger eingehen wollen, als uns die entsprechenden

Erörterungen bei höheren Curven noch beschäftigen werden. — Es sei nur noch bemerkt, dass die Sätze über Steiner'sche Polygone eine leichte *Verallgemeinerung* zulassen, indem man die geraden Linien durch Curven n^{ter} Ordnung ersetzt, welche die C_3 in drei beweglichen Schnittpunkten schneiden und also $3n - 3$ feste Schnittpunkte mit ihr gemein haben. Man kann also insbesondere statt der Polygonseiten, wie es schon Steiner gethan hat, Kegelschnitte wählen, welche durch drei feste Punkte der Curve hindurchgehen. —

Die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie einer Curve dritter Ordnung knüpften wir oben der Einfachheit wegen an eine kanonische Form ihrer Gleichung; man ist jedoch in der Lage, die betreffenden Rechnungen auch ganz unabhängig vom Coordinatensysteme durchzuführen, wie wir weiterhin noch sehen werden.*) Es soll hier zunächst nur kurz der Gang der dazu führenden Ueberlegungen bezeichnet werden. Wir legen das Coordinatendreieck so, dass die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ auf der Curve liegt, was die Kenntniss eines *beliebigen* Punktes derselben (nicht mehr eines Wendepunktes) voraussetzt. Die Gleichung der Curve wird dann von der Form:

$$\varphi_3 + \psi_2 x_3 + \chi_1 x_3^2 = 0,$$

wo φ_3, ψ_2, χ_1 homogene Functionen in x_1, x_2 bez. von der Ordnung ihres Index sind. Wir suchen die Coordinaten der Schnittpunkte eines Strahles des Büschels $x_1 - \lambda x_2 = 0$ mit der Curve. Setzen wir in φ_3, ψ_2, χ_1 demgemäss $x_1 = \lambda x_2$ und lassen die Indices fort, so geht unsere Gleichung über in:

$$x_3^2 \chi + x_1 x_3 \psi + x_1^2 \varphi = 0,$$

und also wird:

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{-\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}}{2\chi},$$

oder, wenn ϱ einen willkürlichen Factor bezeichnet:

$$(29) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = 2\chi, \qquad \varrho x_2 = 2\lambda\chi, \\ \varrho x_3 = -\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}. \end{cases}$$

Transformiren wir nun die Curve auf ein beliebiges anderes Coordinatendreieck, so werden die neuen Coordinaten lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, folglich die Coordinaten eines Punktes der Curve lineare Combinationen der in (29) rechts stehenden Ausdrücke. *Diese Coordinaten sind daher im Allgemeinen ganze Functionen zweiten Grades eines Parameters λ, vermehrt um die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke vierten Grades.* Bezeichnen wir also letzteren mit M und

*) Vgl. den folgenden Abschnitt dieser Abtheilung.

jene ganzen Functionen mit G_1, G_2, G_3, so wird für einen Punkt x der Curve:

$$(30) \qquad \varrho x_i = G_i \pm \alpha_i \sqrt{M},$$

wo die α_i Constante bedeuten. Dass die Function M in allen drei Ausdrücken dieselbe sein muss, ergibt sich auch daraus, dass die Bedingung $u_x = 0$ nur auf eine cubische Gleichung führen darf, was sonst nicht der Fall sein würde. Allerdings erhalten wir auch aus (30) die biquadratische Gleichung:

$$(u_1 G_1 + u_2 G_2 + u_3 G_3)^2 = M(u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^2;$$

die Gleichungen (30) werden daher, wenn G_1, G_2, G_3 und M von einander unabhängig sind, eine Curve vierter Ordnung darstellen*), welche sich nur (durch Absonderung einer Geraden durch den Scheitel des obigen Strahlbüschels) auf eine Curve dritter Ordnung reducirt, wenn diese biquadratische Gleichung eine von den u_i unabhängige Lösung zulässt. Letzteres ist aber hier in Folge der Gleichungen (29) der Fall; denn setzen wir in ihnen $\chi = 0$ und nehmen das Vorzeichen der Wurzel positiv, so werden die x_i unbestimmt, und die Coëfficienten der u_i in u_x verschwinden identisch.

Um nun elliptische Functionen einzuführen, denken wir uns für λ einen neuen Parameter $\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda}$ gesetzt und die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmt, dass die Function M abgesehen von einem constanten Factor in $\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)$ übergeht. Dann sind $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{k^2}$ die vier Wurzeln von $M = 0$; d. h. in dem Strahlbüschel $x_1 - \lambda x_2 = 0$ sind für die Strahlen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ zwei der vom Büschelscheitel an die Curve gehenden Tangenten gewählt; denn den Werthen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entspricht dann vermöge (29) oder (30) nur je *ein* Punkt der Curve. Dies vorausgesetzt, sei nun:

$$\sqrt{\lambda} = \sin \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-\lambda} = \cos \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-k^2\lambda} = \Delta \operatorname{am} u,$$

so dass die Gleichungen (30) übergehen in:

$$(31) \qquad \varrho x_i = \varphi_i(\sin^2 \operatorname{am} u) + \beta_i \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du},$$

wo jetzt die β_i Constante, die φ_i ganze rationale Functionen zweiten Grades ihres Arguments sind, während das zu einem Punkte x gehörige Argument selbst definirt ist durch:

$$(32) \qquad u = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}.$$

---

*) Jedoch eine solche mit zwei Doppelpunkten ($p = 1$), wie wir später sehen werden.

In den Gleichungen (31) ist gleichzeitig die Willkürlichkeit verschwunden, welche früher in dem zweifelhaften Vorzeichen der Wurzel lag; ein Paar auf demselben Strahle des Büschels $x_1 - \lambda x_2 = 0$ gelegener Punkte wird jetzt durch die Argumente u und $-u$ unterschieden.

Ausgehend von den Gleichungen (31) weist man man nun *die Identität der früheren Sätze über Schnittpunktsysteme auf einer Curve dritter Ordnung mit dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen* am einfachsten nach, indem man statt der Functionen s, c, Δ die sogenannten H-Functionen einführt und dann für letztere ein Theorem benutzt, aus dem das früher verwendete Additionstheorem für sin am wieder als specieller Fall abgeleitet werden kann. Ersteres geschieht mit Hülfe des aus der Theorie jener Functionen bekannten Satzes von Hermite*):

Jede doppelt periodische Function von der Form $F(s^2) + c\Delta f(s^2)$, wo F und f ganze Functionen bez. vom Grade n und $n-2$ in s^2 sind, lässt sich darstellen als Quotient eines Productes von H-Functionen, dividirt durch eine Potenz einer Θ-Function; und zwar ist:

$$F(s^2) + \frac{d \sin^2 \text{am}\, u}{du} f(s^2) = C \cdot \frac{\mathrm{H}(u-\alpha_1) \,.\, \mathrm{H}(u-\alpha_2) \ldots \mathrm{H}(u-\alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(u)},$$

wo C eine Constante bedeutet und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ die Verschwindungswerthe des Argumentes für die links stehende Function sind. Zwischen letzteren besteht dabei immer die Relation:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n} \equiv 0.$$

Selbstverständlich hätten wir auch schon bei unserer früheren Darstellung die Einführung von s, c, Δ ganz vermeiden und dafür direct H-Functionen benutzen können, wodurch die Berechnung von $\sin \text{am}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n})$ erspart wäre; immerhin ist jedoch in den einfachsten Fällen das Rechnen mit den gebräuchlicheren Functionen s, c, Δ übersichtlicher.

Unter Benutzung des angeführten Satzes erhalten wir nun statt der Gleichungen (31), wenn wir für $\varrho\Theta^4(u)$ wieder ϱ schreiben, Formeln der folgenden Art:

$$\varrho x_i = C_i \,.\, \mathrm{H}(u-\xi_i) \,.\, \mathrm{H}(u-\eta_i) \,.\, \mathrm{H}(u-\zeta_i) \,.\, \mathrm{H}(u-\vartheta_i),$$

wobei:
$$\xi_i + \eta_i + \zeta_i + \vartheta_i \equiv 0.$$

Es sind hier drei der Grössen ξ_i, η, ζ_i, ϑ_i, sagen wir die drei ersteren, die Argumentwerthe u für die Schnittpunkte der Linie $x_i = 0$ mit der Grundcurve. Nach unsern früheren Ueberlegungen muss es aber einen Werth von u geben, für den die drei Grössen ϱx_i unbestimmt werden; und deshalb können wir setzen:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta.$$

*) Vgl. Hermite a. a. O. p. 66.

Lassen wir dann auch den Factor $\mathsf{H}(u - \vartheta)$ in ϱ eingehen, so **wird**:

$$\varrho x_i = C_i \mathsf{H}(u - \xi_i) \,.\, \mathsf{H}(u - \eta_i) \,.\, \mathsf{H}(u - \zeta_i), \tag{33}$$

wo nun:

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 \equiv \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 \equiv \xi_3 + \eta_3 + \zeta_3 \equiv - \vartheta.$$

Durch eine lineare Transformation des Arguments:

$$u = v + \tfrac{1}{3}\vartheta \tag{34}$$

können wir aber immer erreichen, dass auf der rechten Seite dieser Relationen Null statt $-\vartheta$ steht; denn alsdann sind die Verschwindungswerthe der x_i gegeben durch die Werthe

$$v = \xi_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \xi_i', \quad v = \eta_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \eta_i', \quad v = \zeta_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \zeta_i';$$

und nach dem Hermite'schen Satze ist wieder:

$$\xi_i' + \eta_i' + \zeta_i' \equiv 0. \tag{35}$$

— Wir haben nun die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit einer Curve n^{ter} Ordnung:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zu betrachten. Führen wir in Φ mittelst der Gleichungen (33) die H-Functionen ein, so erhalten wir einen Ausdruck, der durch Multiplication mit $\left(\frac{\mathsf{H}(u - \vartheta)}{\Theta^4(u)}\right)^n$ zu einer doppelt periodischen Function werden muss, da jedes Product ϱx_i nach (33) durch Multiplication mit $\frac{\mathsf{H}(u - \vartheta)}{\Theta^4(u)}$ in eine solche übergeht; und diese doppelt periodische Function hat $3n$ Verschwindungswerthe:

$$u = u_1, \quad u = u_2, \quad \ldots \quad u = 3n,$$

entsprechend den $3n$ Schnittpunkten von $\Phi = 0$ mit der Grundcurve, und einen n-fachen Verschwindungswerth $u = \vartheta$, entsprechend dem Factor $(\mathsf{H}(u - \vartheta))^n$. Wenden wir also wieder den Hermite'schen Satz an, so muss sich Φ in folgender Form darstellen lassen:

$$\varrho^n \,.\, \Phi(x_1, x_2, x_3) \left(\frac{\mathsf{H}(u - \vartheta)}{\Theta^4(u)}\right)^n = \frac{C' \,.\, \mathsf{H}(u - u_1) \,.\, \mathsf{H}(u - u_2) \ldots \mathsf{H}(u - u_3) \,.\, \mathsf{H}^n(u - \vartheta)}{\Theta^{4n}(u)},$$

wo wieder:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv - \vartheta n. \tag{36}$$

Die letztere Relation erscheint wieder, wie in Gleichung (35) in der Form:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{3n} \equiv 0, \tag{37}$$

wenn wir mittelst (34) ein neues Argument v statt u einführen. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass *die wirkliche Ausführung letzterer Transformation, d. i. die Bestimmung der Constanten ϑ auf die Bestimmung*

eines Wendepunktes der Grundcurve zurückkommt. Für die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der letzteren nämlich folgt aus (36):

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv -\vartheta,$$

und hieraus für einen Wendepunkt u:

$$3u \equiv -\vartheta \quad \text{oder} \quad u \equiv -\tfrac{1}{3}\vartheta + \tfrac{1}{3}P,$$

wenn P eine lineare Combination von Vielfachen der Perioden bedeutet. Die Argumente der Wendepunkte sind also bekannt, sobald der Werth der Constanten ϑ bekannt ist. Gleichzeitig erkennt man, dass durch die Transformation (34) einem Wendepunkte der Argumentwerth $v \equiv 0$ beigelegt ist, was mit unseren obigen Festsetzungen bei Benutzung der kanonischen Form übereinstimmt (p. 609). Wie man nun in der That die Grösse ϑ ganz allgemein in ihrer Abhängigkeit von den Coëfficienten der Gleichung der Grundcurve und von dem Scheitel des bei der Parameterdarstellung benutzten Strahlbüschels bestimmen kann, werden wir erst später sehen.*)

Wir sind somit, unabhängig von einer kanonischen Form, wieder zu folgendem Satze geführt:

Die Coordinaten der Punkte einer Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt lassen sich als elliptische Functionen eines Arguments darstellen; und dann ist die Summe der Argumente ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen anderen Curve congruent Null, vorausgesetzt, dass dem Argumente Null ein Wendepunkt zugehört. —

Durch diesen Satz ist eine Eigenschaft der Curven dritter Ordnung ausgesprochen, welche in gleicher Weise allen Curven vom Geschlechte $p = 1$ zukommt, wie spätere allgemeinere Untersuchungen lehren werden. Wir werden dann auch weiterhin erkennen, dass jede Curve vom Geschlechte $p = 1$ eindeutig in eine Curve dritter Ordnung durch algebraische Substitutionen übergeführt werden kann.

VIII. Die typische Darstellung einer ternären cubischen Form und die allgemeine Parameterdarstellung der Curve dritter Ordnung.

Die allgemeinste Herstellung der Parameterdarstellung für die Curven dritter Ordnung, die im Vorstehenden nicht wirklich durchgeführt wurde, erfordert speciellere Untersuchungen aus der Theorie der ternären cubischen Formen, die hier nur noch so weit mitgetheilt sein mögen, als es zur Aufstellung der Schlussformeln erforderlich ist. Es sind dabei etwas weitläufigere Rechnungen nöthig, welche wir hier zuerst zusammenstellen, und welche die Erreichung der sogenannten typischen Darstellung der ternären Grundform $f = a_x^3$ zum Zwecke

*) Vgl. den Schluss des folgenden Abschnittes, p. 650 ff.

haben; unter Benutzung der aufzustellenden Formeln gestaltet sich dann jedoch die Einführung der elliptischen Functionen sehr einfach.

Wir knüpfen zunächst wieder an die Zwischenform:

(1) $$N = (a \alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n\,,$$

an, welche wir als Combinante des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta$ erkannten. Man ersieht sofort (unter Berücksichtigung von Gleichung (22) auf p. 552), dass die sogleich zu benutzende Relation besteht:

(2) $$\delta N = 0\,,$$

wenn mit dem Buchstaben δ wieder der bekannte durch $\delta f = \Delta$ definirte Process bezeichnet wird (p. 551). Die Gleichung (2) ist aber auch eine Folge des allgemeinen Satzes, dass *für jede Combinante* Π *identisch* $\delta \Pi = 0$ *ist.* Eine Combinante Π ist nämlich definirt durch die Bedingung

(3) $$\Pi(\varkappa a + \lambda \alpha) = M \,.\, \Pi(a)\,.$$

Es sei nun nach Potenzen von $\varkappa$, λ geordnet:

(4) $$M = M_0 \varkappa^\nu + M_1 \varkappa^{\nu - 1} \lambda + \ldots,$$

so hat man zunächst für $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$:

(5) $$\Pi(a) = M_0 \,.\, \Pi(a)\,,$$

also $M_0 = 1$. Vergleicht man aber beiderseits die Coëfficienten von $\varkappa^{\nu-1}\lambda$, so erhält man nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi(a)}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} = M_1 \Pi(a) \quad \text{oder} \quad \delta \Pi = M_1 \Pi\,.$$

Nun ist $\delta \Pi$ nur um zwei Grade höher in den Coëfficienten von f als Π, daher muss M_1 eine Invariante von f sein, welche vom zweiten Grade in den a ist. Eine solche gibt es aber nicht (p. 546); daher hat man $M_1 = 0$, und also auch $\delta \Pi = 0$. Der somit bewiesene Satz ist umkehrbar, d. h. es besteht auch der folgende:

Jede Form Π, *für welche die Form* $\delta \Pi$ *verschwindet, ist eine Combinante.*

Ist nämlich $\delta \Pi = 0$, so verschwindet auch die entsprechende Bildung $(\delta \Pi)_{\varkappa\lambda}$, d. h. die Form $\delta \Pi$ gebildet für $\varkappa f + \lambda \Delta$ statt für f. Es ist aber (nach p. 560):

$$(\delta \Pi)_{\varkappa\lambda} = G_1 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa}\,,$$

und man hat daher für $\Pi_{\varkappa\lambda}$ die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial G}{\partial \varkappa} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} = 0\,.$$

Dieselbe gibt integrirt:

(6) $$\Pi_{\varkappa\lambda} = F(G)\,,$$

wo F eine willkürliche Function bedeutet. Da aber $\Pi_{\varkappa\lambda}$ eine ganze homogene rationale Function von $\varkappa$, λ ist, so kann man nur haben: $\Pi_{\varkappa\lambda} = C \,.\, G^{\varrho}$, wo ϱ eine ganze Zahl, C eine von $\varkappa$, λ unabhängige Grösse ist. Setzt man nun $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, so wird $G = 1$, also $C = \Pi$. Die Gleichung (6) verwandelt sich daher in:

$$(7) \qquad \Pi_{\varkappa\lambda} = G^{\varrho} \,.\, \Pi,$$

d. h. Π ist eine Combinante, q. e. d. Zugleich erkennt man hieraus, dass *der Factor M in* (3) *stets eine Potenz des Ausdrucks* $G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4$ *ist.* Der Umstand, dass in der Entwicklung (4) das zweite Glied fehlen muss, wird hier dadurch bestätigt, dass in G, mithin auch in jeder Potenz von G, das zweite Glied fehlt. —

Neben N betrachten wir nun die beiden folgenden Zwischenformen, welche ebenfalls von der vierten Ordnung und der ersten Klasse sind:

$$(8) \qquad \begin{aligned} L &= b_n\, N_x^3 b_x\, (bNu) = L_x^4 u_l \\ M &= \beta_n N_x^3 \beta_x\, (\beta N u) = M_x^4 u_m \,. \end{aligned}$$

Wegen (2) und wegen $\delta\Delta = \frac{1}{2} Sf$ stehen dieselben offenbar in der Beziehung zu einander, dass:

$$(9) \qquad \delta L = M, \quad \delta M = \tfrac{1}{2} S \,.\, L \,.$$

Drücken wir nun L und M in Symbolen von f und Δ aus. Es entsteht L aus

$$N_x^3 N_y u_n = \tfrac{1}{2}(a\alpha u)\, a_x\alpha_x\, (a_x\alpha_y + a_y\alpha_x)\,,$$

wenn man die y durch die Determinanten der u und b, u aber durch b ersetzt und mit b_x multiplicirt. Demnach ist:

$$L = \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{a_x (b\alpha u) + \alpha_x (bau)\right\}.$$

Von den beiden Theilen rechts kommt der erste auf den zweiten zurück, wenn man a, b vertauscht und die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks bildet. Dann ist:

$$\begin{aligned} (a\alpha b)(b\alpha u)\, a_x^2 \alpha_x b_x &= \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{(b\alpha u)\, a_x - (a\alpha u)\, b_x\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{(bau)\,\alpha_x - (a\alpha b)\, u_x\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(abu)\,\alpha_x^2 a_x b_x - \tfrac{1}{12} u_x \,.\, Sf, \end{aligned}$$

denn nach p. 552 ist $(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \frac{1}{3}\delta\Delta = \frac{1}{6} Sf$. Tragen wir dies in den obigen Ausdruck für L ein, so wird:

$$(10) \qquad L = \tfrac{3}{4}(abu)(ab\alpha)\, a_x b_x \alpha_x^2 - \tfrac{1}{24} Sf \,.\, u_x \,.$$

Ganz ebenso ist: $M = \frac{1}{2}(a\alpha\beta)\, a_x\alpha_x\beta_x \left\{(\beta\alpha u)\, a_x + (\beta a u)\,\alpha_x\right\}$; aber wenn man hier mit dem zweiten Gliede ähnlich verfährt, wie soeben mit dem ersten von L, so hat man:

$$(a\alpha\beta)(\beta a u)a_x\alpha_x^2\beta_x = -\tfrac{1}{2}(a\alpha\beta)(u\alpha\beta)a_x^2\alpha_x\beta_x + \tfrac{1}{2}u_x(a\alpha\beta)^2 a_x\alpha_x\beta_x .$$

Der Factor von u_x ist der bei der Entwicklung von $\Delta_{x\lambda}$ mit Δ_3 bezeichnete (p. 558), und hat also den Werth $\frac{1}{12}S^2 f - \frac{1}{8}T\Delta$. Trägt man alles in den Ausdruck von M ein, so wird:

$$(11) \qquad M = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta u)\, a_x^2\alpha_x\beta_x + \tfrac{1}{24}u_x(2\,Tf - S\Delta).$$

Wir müssen nun zunächst gewisse simultane Bildungen aus den Formen f, Δ, L, M, N berechnen, die zu verschiedenen Gruppen von Gleichungen Veranlassung geben. Zur Abkürzung wollen wir dabei gelegentlich die Zwischenformen nur durch die betreffenden kleinen Buchstaben bezeichnen, d. h. die symbolischen Factoren L_x^4, M_x^4, N_x^4 fortlassen, so dass wir schreiben

$$u_l \text{ statt } L_x^4 u_l, \quad u_m \text{ statt } M_x^4 u_m, \quad u_n \text{ statt } N_x^4 u_n,$$

wo dann die l, m, n wirkliche Grössen sind, indem:

$$l_i = \frac{\partial L}{\partial u_i}, \qquad m_i = \frac{\partial M}{\partial u_i}, \qquad n_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}.$$

Die zu berechnenden Bildungen sind dann folgende*):

1) $a_x^2 a_l$, $\alpha_x^2\alpha_l$, $a_x^2 a_m$, $\alpha_x^2\alpha_m$, $a_x^2 a_n$, $\alpha_x^2\alpha_n$;
2) $a_x a_l^2$, $\alpha_x\alpha_l^2$, $a_x a_m^2$, $\alpha_x\alpha_m^2$, $a_x a_n^2$, $\alpha_x\alpha_n^2$;
3) $a_x a_l a_m$, $a_x a_m a_n$, $a_x a_n a_l$, $\alpha_x\alpha_l\alpha_m$, $\alpha_x\alpha_m\alpha_n$, $\alpha_x\alpha_n\alpha_l$;
4) (lmx), (mnx), (nlx), (lmn).

Für das System 1) haben wir nach (10) und (11):

$$(12)\quad \begin{cases} c_x^2 c_l = \tfrac{3}{4}(abc)(ab\alpha)\, a_x b_x \alpha_x^2 c_x^2 - \tfrac{1}{24}Sf^2 \\ \gamma_x^2\gamma_l = \tfrac{3}{4}(ab\gamma)(ab\alpha)\, a_x b_x\alpha_x^2\gamma_x^2 - \tfrac{1}{24}S\Delta f \\ c_x^2 c_m = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta c)\,\alpha_x\beta_x a_x^2 c_x^2 + \tfrac{1}{24}f(2\,Tf - S\Delta) \\ \gamma_x^2\gamma_m = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta\gamma)\,\alpha_x\beta_x a_x^2\gamma_x^2 + \tfrac{1}{24}\Delta(2\,Tf - S\Delta). \end{cases}$$

Die ersten Glieder rechts in der zweiten und dritten Gleichung sind direct die früher bez. mit φ, φ'' bezeichneten Formen (p. 574), lassen sich also durch f, Δ und die Combinante ψ ausdrücken (p. 575). Das erste Glied rechts der ersten Gleichung ist wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c:

$$= \tfrac{1}{4}(abc)\,\alpha_x^2 a_x b_x c_x \left\{(ab\alpha)c_x - (ac\alpha)b_x - (cb\alpha)a_x\right\}$$
$$= \tfrac{1}{4}(abc)^2 a_x b_x c_x \,.\, \alpha_x^3 = \tfrac{1}{4}\Delta^2.$$

Ebenso findet man das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung wegen der Vertauschbarkeit von α, β, γ gleich $-\frac{1}{4}\Delta_3 f$,

---

*) Vgl. im Folgenden: Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 1, p. 56 ff. Hier sind die Zwischenformen L und M zuerst eingeführt und die Formeln für die typische Darstellung abgeleitet.

wo Δ_3 nach p. 559 gleich $\frac{1}{12} S^2 f - \frac{1}{3} T\Delta$ zu setzen ist. Die Gleichungen (12) gehen daher in folgende über:

$$\begin{aligned}
a_x^2 a_l &= \tfrac{1}{4}\Delta^2 - \tfrac{1}{24} Sf^2 \\
\alpha_x^2 \alpha_l &= -\psi - \tfrac{1}{12} Tf^2 + \tfrac{1}{12} S\Delta f \\
a_x^2 a_m &= \psi - \tfrac{1}{12} Tf^2 + \tfrac{1}{12} S\Delta f \\
\alpha_x^2 \alpha_m &= \tfrac{1}{6} T\Delta f - \tfrac{1}{48} S^2 f^2 - \tfrac{1}{24} S\Delta^2.
\end{aligned}$$

Die jetzt rechts stehenden Ausdrücke lassen sich aber sehr einfach durch die zweiten Differentialquotienten der binären biquadratischen Form $G(\varkappa, \lambda)$ ausdrücken, wenn man darin $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ setzt und die auf p. 560 gegebenen Werthe von G_{11}, G_{12}, G_{22} berücksichtigt. Setzt man zur Abkürzung:

$$\Gamma = G(\Delta, -f), \quad \Gamma_i = G_i(\Delta, -f), \quad \Gamma_{ik} = G_{ik}(\Delta, -f), \tag{13}$$

und fügt die evidenten Gleichungen $a_x^2 a_n = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_n = 0$ hinzu, so hat man also *für die unter* 1) *genannten Bildungen die Werthe:*

$$\left\{\begin{aligned}
a_x^2 a_l &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{11}, & \alpha_x^2 \alpha_l &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{12} - \psi, \\
a_x^2 a_m &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{12} + \psi, & \alpha_x^2 \alpha_m &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{22}, \\
a_x^2 a_n &= 0, & \alpha_x^2 \alpha_n &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Wir gehen zur Betrachtung der Bildungen 2) über. Es ist offenbar:

$$a_x a_n^2 = \Sigma\Sigma f_{ik} n_i n_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \Delta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die f_i zerstört:

$$= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & \Delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -f & -\Delta \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & -\Delta & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} f\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta^3,$$

oder, wenn man wieder φ durch ψ, Δ, f ausdrückt (p. 575):

$$\begin{aligned}
a_x a_n^2 &= -\tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{2} f\left(-\tfrac{4}{3}\psi - \tfrac{1}{9} Tf^2 + \tfrac{1}{6} S\Delta f\right) \\
&= -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 - \tfrac{2}{3}\psi f,
\end{aligned} \tag{15}$$

wo wieder Γ_1 durch (13) definirt ist. Wendet man auf diese Gleichung den δ-Process an und berücksichtigt, dass nach obigem Satze über Combinanten (p. 632) $\delta N = 0$ und $\delta\psi = 0$, so findet man weiter:

$$\alpha_x \alpha_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_2 - \tfrac{2}{3}\Delta\psi. \tag{16}$$

Bei der Berechnung von $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$, $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$, finden wir zugleich die Formen $a_x a_l a_m$ und $\alpha_x \alpha_l \alpha_m$, und zwar mittelst sehr einfacher symbolischer Rechnungen. Es ist nach (10) und nach (40), p. 559:

$$(17) \qquad a_x a_l^2 = \tfrac{3}{4}(bc\alpha)(bca)\, a_x b_x c_x \alpha_x^2 a_l - \tfrac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_l .$$

Vertauschen wir im ersten Gliede rechts die Symbole a, c oder a, b und schreiben statt dieses Gliedes die Summe der entstehenden Ausdrücke, dividirt durch 3, so tritt an Stelle von $3(bc\alpha)\, a_l$ das Aggregat:

$$(bc\alpha)\, a_l - (ac\alpha)\, b_l - (ba\alpha)\, c_l = (abc)\, \alpha_l ,$$

und es ist also nach (14):

$$(18) \qquad a_x a_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Delta\psi - \tfrac{1}{16}\Delta_1 \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta\Gamma_{12} .$$

Vertauscht man ferner in (17) die griechischen mit den lateinischen Buchstaben, so verwandelt sich l in $-m$, Δ_1 in Δ_2, f in Δ, und man hat also:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \alpha_x \alpha_m^2 &= -\tfrac{3}{4}(\beta\gamma a)(\beta\gamma\alpha)\, \alpha_x \beta_x \gamma_x a_x^2 \alpha_m + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 \,.\, a_x^2 a_m + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_3 \Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta_2 \Gamma_{22} . \end{aligned}$$

Aus (17) erhält man sogleich $a_x a_l a_m$, wenn man rechts l durch m ersetzt; man findet dann:

$$(20) \qquad \begin{aligned} a_x a_l a_m &= \tfrac{1}{4}\Delta \alpha_x^2 \alpha_m - \tfrac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_1 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_1 \Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta\Gamma_{22} . \end{aligned}$$

Ersetzt man hingegen in (19) ein m durch l, so findet man:

$$(21) \qquad \begin{aligned} \alpha_x \alpha_l \alpha_m &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 a_x^2 a_l + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_l \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_2 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_3 \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta_2 \Gamma_{12} . \end{aligned}$$

Um endlich $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$ zu finden, unterwirft man $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$ dem δ-Processe, wo dann neben den bekannten Functionen $a_x a_l a_m$, $\alpha_x \alpha_l \alpha_m$ die gesuchten entstehen. Dabei hat man die folgenden früher abgeleiteten Formeln zu benutzen (p. 552 ff.):

$$\delta f = \Delta, \quad \delta\Delta = 3\Delta_1 = \tfrac{1}{2} Sf, \quad \delta\Delta_1 = 2\Delta_2 + \tfrac{1}{2} S\Delta, \quad \delta\Delta_2 = \Delta_3 + S\Delta_1$$
$$\delta\Delta_3 = \tfrac{3}{2} S\Delta_2, \quad \delta S = T, \quad \delta T = S^2, \quad \delta\psi = 0 .$$

Man findet alsdann zunächst:

$$(22) \qquad \begin{cases} \delta\Gamma_{11} = \delta(\Delta^2 - \tfrac{1}{6} Sf^2) & = 2\,\Gamma_{12} \\ \delta\Gamma_{12} = \delta(\tfrac{1}{3} S\Delta f - \tfrac{1}{3} Tf^2) & = \Gamma_{22} + \tfrac{1}{2} S\Gamma_{11} \\ \delta\Gamma_{22} = \delta(-\tfrac{1}{6} S\Delta^2 + \tfrac{2}{3} T\Delta f - \tfrac{1}{12} S^2 f^2) & = S \,.\, \Gamma_{12} . \end{cases}$$

und also wegen (9):

$$\begin{aligned}\delta a_x a_l^2 &= \alpha_x \alpha_l^2 + 2\, a_x a_l a_m \\ &= -\tfrac{3}{4}\Delta_1 \psi - \tfrac{1}{8}\Delta_2 \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta_1 \Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta \Gamma_{22}, \\ \delta \alpha_x \alpha_m^2 &= \tfrac{1}{2} S a_x a_m^2 + S \alpha_x \alpha_l \alpha_m \\ &= -\tfrac{3}{8} S \Delta_2 \psi - \tfrac{1}{32} S \Delta_2 \Gamma_{12} - \tfrac{1}{32}\Delta_3 S \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16} S \Delta_1 \Gamma_{22}.\end{aligned}$$

In diesen Formeln wollen wir noch statt der Γ_{ik} die Formen Δ_i einführen (p. 559) mittelst der Gleichungen:

$$\Gamma_{11} = \Delta^2 - f\Delta_1, \quad \Gamma_{12} = \Delta\Delta_1 - f\Delta_2, \quad \Gamma_{22} = \Delta\Delta_2 - f\Delta_3;$$

dann geben dieselben wegen (20) und (21) die beiden gesuchten Bildungen bez. in der Gestalt:

$$(23)\quad \begin{aligned}\alpha_x \alpha_l^2 &= -\tfrac{1}{4}\Delta_1 \psi + \tfrac{1}{16} f\,(\Delta_3 \Delta - \Delta_1 \Delta_2) + \tfrac{3}{16}\Delta\,(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2), \\ a_x a_m^2 &= -\tfrac{1}{4}\Delta_2 \psi + \tfrac{1}{16}\Delta\,(\Delta_3 \Delta - \Delta_1 \Delta_2) + \tfrac{3}{16} f\,(\Delta_2^2 - \Delta\Delta_3).\end{aligned}$$

Diese Formen lassen sich übersichtlicher schreiben, wenn man noch die zweiten Differentialquotienten von $S_{\varkappa\lambda}$ nach $\varkappa$ und λ, dividirt durch 12, und die dritten Differentialquotienten von $G(\varkappa, \lambda)$, dividirt durch 24, für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ einführt, d. h. die Ausdrücke (p. 561):

$$(24)\quad S_{11} = 6(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2), \quad S_{12} = 3(\Delta_1\Delta_2 - \Delta\Delta_3), \quad S_{22} = 6(\Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_3).$$

$$(25)\quad \Gamma_{111} = \Delta, \quad \Gamma_{112} = \Delta_1, \quad \Gamma_{122} = \Delta_2, \quad \Gamma_{222} = \Delta_3.$$

Alsdann erhält man unter Hinzunahme der Gleichungen (15), (16), (18) und (19) *für die unter 2) genannten Formen folgende Darstellungen:*

$$(26)\left\{\begin{aligned} &a_x a_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 - \tfrac{2}{3}\psi f, \qquad \alpha_x \alpha_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_2 - \tfrac{2}{3}\psi\Delta, \\ &a_x a_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{111}\psi + \tfrac{1}{96} S_{11} f, \quad \alpha_x \alpha_m^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{222}\psi + \tfrac{1}{96} S_{22}\Delta, \\ &\qquad a_x a_m^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{222}\psi + \tfrac{1}{32} S_{22} f - \tfrac{1}{48} S_{12}\Delta, \\ &\qquad \alpha_x \alpha_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{112}\psi - \tfrac{1}{48} S_{12} f + \tfrac{1}{32} S_{11}\Delta. \end{aligned}\right.$$

Von den oben unter 3) genannten Bildungen haben wir schon zwei in den Gleichungen (20) und (21) gefunden. Von den vier übrigen bestimmt man zunächst $a_x a_n a_l$ dadurch, dass man in (10) die u_i durch c_i ersetzt und mit $c_x\,(c\,a\,\alpha)\,a_x^2\alpha_x^2 = c_x c_n$ multiplicirt. Hierdurch geht L in $a_x a_n a_l$ über; der aus u_x entstehende Ausdruck $(c\,a\,\alpha)\,c_x^2 a_x^2 \alpha_x^2$ verschwindet, und es geht $(a\,b\,u)\,(a\,b\,\alpha)\,a_x b_x \alpha_x^2$ über in:

$$\begin{aligned}&(abc)\,(ab\alpha)\,(cd\beta)\,a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\,(abc) a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \left\{(ab\alpha)(cd\beta) - (cb\alpha)\,(ad\beta) - (ac\alpha)\,(bd\beta)\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}\,(abc)^2\, a_x b_x c_x \,.\, (\alpha d\beta)\,\alpha_x^2 \beta_x^2 d_x^2 = 0;\end{aligned}$$

und somit hat man die Formel:

$$(27)\qquad a_x a_n a_l = 0,$$

und hieraus durch wiederholte Anwendung des δ-Processes nach (9):

$$\alpha_x \alpha_n \alpha_l + a_x a_n a_m = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_x \alpha_n \alpha_m = 0. \tag{29}$$

Die Ausdrücke $\alpha_x \alpha_n \alpha_l$ und $a_x a_n a_m$ selbst endlich, welche nach (28) einander gleich und entgegengesetzt sind, erhält man durch Betrachtung der aus $\varphi' = \varphi'^6_x$ zu bildenden ersten Polare (p. 574):

$$\begin{aligned} 6\varphi'^5_x \varphi'_y = (a\beta b)(a\alpha\beta)\{\beta_x \alpha_x^2 b_x^2 a_y + \beta_y \alpha_x^2 b_x^2 a_x + 2\beta_x \alpha_x^2 b_x b_y a_x \\ + 2\beta_x \alpha_x \alpha_y b_x^2 a_x\} \\ = A + A' + 2B + 2B'. \end{aligned} \tag{30}$$

Die Bedeutung der Grössen A, A', B, B' wird hieraus leicht zu ersehen sein. Wegen der Vertauschbarkeit von α, β findet man nun:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} a_y b_x^2 \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \{(a\beta b)\,\alpha_x - (a\alpha b)\,\beta_x\} \\ &= \tfrac{1}{2} a_y b_x^2 \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \{(\alpha\beta b)\,a_x - (a\alpha\beta)\,b_x\}, \end{aligned} \tag{31}$$

oder wenn man den ersten Theil nach (11) umformt, und berücksichtigt, dass sich der Factor von $b_x^3 = f$ im zweiten Gliede nicht ändert, wenn man die x, y permutirt (was man leicht beweist) für $(\Delta_2)_x^3 = \Delta_2$:

$$A = -\tfrac{2}{3} a_m a_x a_y + \tfrac{1}{6} \Delta_2 \,.\, a_x^2 a_y - \tfrac{1}{2} (\Delta_2)_x^2 (\Delta_2)_y \,.\, f$$

Der Term A' in (30) entsteht aus A, indem man die a, b mit den β, α vertauscht; dabei vertauscht sich f mit Δ, Δ_2 mit Δ_1, M mit $-L$; und es ist also:

$$A' = \tfrac{2}{3} \alpha_l \alpha_x \alpha_y + \tfrac{1}{6} \Delta_1 \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y - \tfrac{1}{2} (\Delta_1)_x^2 (\Delta_1)_y \,.\, \Delta\,.$$

Für den Ausdruck B finden wir durch Vertauschung von α, β:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2} \alpha_x \beta_x b_x b_y a_x (a\alpha\beta) \{(a\beta b)\,\alpha_x - (a\alpha b)\,\beta_x\} \\ &= \tfrac{1}{2} \alpha_x \beta_x b_x b_y a_x (a\alpha\beta) \{(\alpha\beta b)\,a_x - (a\alpha\beta)\,b_x\}. \end{aligned}$$

Hier ist der erste Theil gleich dem ersten Theile von A in (31), denn er geht durch Vertauschung von a mit b in denselben über, während der zweite Theil von B gleich $\frac{1}{2} \Delta_2 b_x^2 b_y$ ist. Es wird daher:

$$B = -\tfrac{2}{3} a_m a_x a_y - \tfrac{1}{3} \Delta_2 a_x^2 a_y\,.$$

Denkt man sich hierin wieder die a, b mit den β, α vertauscht, so erhält man:

$$B' = \tfrac{2}{3} \alpha_l \alpha_x \alpha_y - \tfrac{1}{3} \Delta_1 \alpha_x^2 \alpha_y\,.$$

Trägt man schliesslich die für A, A', B, B' gefundenen Werthe in (30) ein und drückt noch Δ_1, Δ_2 durch f, Δ aus, so kommt:

$$6\varphi'^5_x \varphi'_y = -2 a_m a_x a_y + 2 \alpha_l \alpha_x \alpha_y - \tfrac{1}{3} T f\, a_x^2 a_y\,.$$

Drückt man noch φ durch ψ aus (p. 575), so hebt sich auch der in T multiplicirte Term fort, und es bleibt:

$$(32) \qquad 2\,\psi_x{}^5\psi_y = a_m a_x a_y - \alpha_l \alpha_x \alpha_y .$$

Aus dieser Formel ergibt sich endlich, wenn man $y_i = n_i = (a\alpha)_i\, a_x{}^2 \alpha_x{}^2$ setzt und die auf p. 572 gegebene Definition der Combinante Ω beachtet:

$$(33) \qquad 2\,\Omega = a_x a_m a_n - \alpha_x \alpha_n \alpha_l .$$

Unter Hinzunahme von (20), (21), (24), 25), (27), (28), (29) *findet man also für die unter* 3) *genannten Formen das folgende Gleichungssystem:*

$$(34) \qquad \begin{cases} a_x a_l a_m = -\frac{1}{4}\Gamma_{112}\psi + \frac{1}{48} S_{12} f - \frac{1}{96} S_{11}\Delta, \\ \alpha_x \alpha_l \alpha_m = -\frac{1}{4}\Gamma_{122}\psi - \frac{1}{96} S_{22} f + \frac{1}{48} S_{12}\Delta, \\ \quad a_x a_m a_n = \Omega, \qquad \alpha_x \alpha_m \alpha_n = 0, \\ \quad a_x a_n a_l = 0, \qquad \alpha_x \alpha_n \alpha_l = -\Omega . \end{cases}$$

Die Berechnung der unter 4) auf p. 634 genannten Formen gestaltet sich nunmehr sehr einfach. Aus (10) ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}(l y x) &= \tfrac{3}{4}(a b \alpha)\, a_x b_x \alpha_x{}^2 \left\{a_y b_x - b_y a_x\right\} \\ &= \tfrac{3}{2}(a b \alpha)\, a_x b_x{}^2 \alpha_x{}^2 a_y = \tfrac{3}{2}\, a_n a_x a_y .\end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die y_i bez. durch m_i und n_i, so findet man nach (26) und (34):

$$(35) \qquad \begin{aligned}(l n x) &= \tfrac{3}{2}\, a_x a_n{}^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_1 - \psi f, \\ (l m x) &= \tfrac{3}{2}\, a_x a_m a_n = \tfrac{3}{2}\Omega ;\end{aligned}$$

und aus der ersten dieser Gleichungen durch Anwendung des δ-Processes:

$$(36) \qquad (m n x) = \tfrac{3}{2}\, \alpha_x \alpha_n{}^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_2 - \psi\Delta .$$

Zur Berechnung von $(l m n)$ benutzen wir die Identität:

$$\begin{aligned}(l m n)\, u_x &= (l m x)\, u_n + (m n x)\, u_l + (l x n)\, u_m \\ &= \tfrac{3}{2}\Omega N + \tfrac{1}{4}(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) + \psi\,(f M - \Delta L).\end{aligned}$$

Nun ist aber nach (35) und (14):

$$\tfrac{3}{2}\Omega N = (l m x).(a\alpha u)\, a_x{}^2\alpha_x{}^2 = \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & a_x{}^2 a_l & a_x{}^2 a_m \\ \Delta & \alpha_x{}^2 \alpha_l & \alpha_x{}^2 \alpha_m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & \frac{1}{4}\Gamma_{11} & \frac{1}{4}\Gamma_{12} + \psi \\ \Delta & \frac{1}{4}\Gamma_{12} - \psi & \frac{1}{4}\Gamma_{22} \end{vmatrix}$$

$$(37) \qquad = u_x\left\{\psi^2 - \tfrac{1}{96} S_{\Delta,-f}\right\} - \tfrac{1}{4}(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) - \psi\,(M f - L\Delta);$$

denn nach Gleichung (49), p. 561 ist:

$$S_{\Delta,-f} = -6\,(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{22}^2)$$

$$(38) \qquad = S\Delta^4 - 4\,T\Delta^3 f + S^2\Delta^2 f^2 - \tfrac{4}{3}\,ST\Delta f^3 + (\tfrac{2}{3}\,T^2 - \tfrac{1}{12}\,S^3)\,f^4.$$

Trägt man den gefundenen Werth für ΩN in die Gleichung für $(lmn)\,u_x$ ein, so bleiben rechts auch nur in u_x multiplicirte Glieder, so dass man direct (lmn) findet. Nimmt man die Gleichungen (35) und (36) hinzu, so *hat man für die vier aus den vier linearen Zwischenformen L, M, N, u_x zu bildenden Functionaldeterminanten folgende Werthe:*

$$(39) \qquad \begin{cases} (lmx) = \tfrac{3}{2}\,\Omega, & (nlx) = \tfrac{1}{4}\,\Gamma_1 + \psi f, \\ (mnx) = -\tfrac{1}{4}\,\Gamma_2 - \psi\Delta, & (lmn) = \psi^2 - \tfrac{1}{96}\,S_{\Delta,-f}, \end{cases}$$

wo $S_{\Delta,-f}$ durch (38) *definirt ist.* — Damit hätten wir die für das Folgende nöthigen simultanen Bildungen aus f, Δ, L, M, N vollständig berechnet.

Die hier entwickelten Formeln geben noch ein bemerkenswerthes Resultat, welches wir mehrfach benutzen werden*), und daher sogleich noch ableiten wollen. Setzt man nämlich in (32) $y_i = l_i$ oder $y_i = m_i$ und wendet die Gleichungen (26) und (34) an, so erhält man:

$$(40) \qquad \psi_x^5\psi_l = \tfrac{1}{48}\,S_1, \quad \psi_x^5\psi_m = -\tfrac{1}{48}\,S_2,$$

wo S_1, S_2 die durch 4 dividirten Differentialquotienten von $S_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ bedeuten. Setzt man nun in Gleichung (37) $u_i = \psi_x^5\psi_i$, so geht dieselbe über in:

$$\Omega^2 = \tfrac{2}{3}\,\psi\,(\psi^2 - \tfrac{1}{96}\,S_{\Delta,-f}) - \tfrac{1}{6}\,\psi_x^5\psi_m(\Gamma_1 + 4\psi f) + \tfrac{1}{6}\,\psi_x^5\psi_l\,(\Gamma_2 + 4\psi\Delta)$$
$$= \tfrac{2}{3}\,\psi\,(\psi^2 - \tfrac{1}{96}\,S_{\Delta,-f}) + \tfrac{1}{288}\,(\Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1) - \tfrac{1}{72}\,\psi\,(S_1\Delta - S_2 f).$$

Hier kann man endlich noch die Invariante $T_{\varkappa\lambda}$, genommen für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$, einführen; denn es ist (p. 561):

$$(41) \qquad T_{\Delta,-f} = \Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1.$$

Man erkennt so, *dass sich das Quadrat der Form Ω (d. i. der Functionaldeterminante von f, Δ und ψ, dividirt durch* 54) *durch die Formen f, Δ, ψ selbst ausdrücken lässt, und zwar mittelst der Gleichung***):*

$$(42) \qquad 24^2\,\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,\psi S_{\Delta,-f} + 2\,T_{\Delta,-f},$$

wo $S_{\Delta,-f}$ und $T_{\Delta,-f}$ bez. durch (38) *und* (41) *definirt sind.* —

Aus den Zwischenformen L, M und u_x, setzen wir nun eine neue Zwischenform erster Klasse und siebenter Ordnung zusammen, welche die Combinanteneigenschaft hat, nämlich:

$$(43) \qquad K = L\Delta - fM + 2\,\psi\,.\,u_x = u_k K_x^7.$$

---

*) Vgl. auch den unten folgenden Abschnitt über die zu einer Curve gehörigen algebraischen Integrale.

**) Vgl. Brioschi: Comptes rendus 1863, erste Hälfte, p. 305.

In der That wegen (9) $\delta K = 0$, wodurch nach Obigem *K als Combinante gekennzeichnet ist.**) Für diese neue Zwischenformen haben wir nun wegen des Folgenden wieder die Bildungen

$$a_x^2 a_k, \quad \alpha_x^2 \alpha_k, \quad a_x a_k^2, \quad \alpha_x \alpha_k^2, \quad a_x a_n a_k, \quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k$$

zu berechnen. Dieselben findet man leicht, wenn man beachtet, dass nach der Definition von K:

$$(43^*) \qquad k_i = \frac{\partial K}{\partial u_i} = \Delta l_i - f m_i + 2\psi x_i .$$

Man findet hieraus sofort wegen (14):

$$(44) \qquad a_x^2 a_k = \tfrac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f, \quad \alpha_x^2 \alpha_k = \tfrac{1}{4}\Gamma_2 + \psi\Delta,$$

ferner aus den letzten Gleichungen (34):

$$(45) \qquad a_x a_n a_k = -\Omega f, \quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k = -\Omega\Delta,$$

und endlich:

$$\begin{aligned} a_x a_k^2 &= \Delta^2 a_x a_l^2 - 2\Delta f a_x a_l a_m + f^2 a_x a_m^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta a_x^2 a_l - f a_x^2 a_m) + 4\psi^2 f, \\ \alpha_x \alpha_k^2 &= \Delta^2 \alpha_x \alpha_l^2 - 2\Delta f \alpha_x \alpha_l \alpha_m + f^2 \alpha_x \alpha_m^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta \alpha_x^2 \alpha_l - f \alpha_x^2 \alpha_m) + 4\psi^2 \Delta, \end{aligned}$$

oder wegen der letzten Gleichungen des Systems (26) und der ersten des Systems (34) unter Anwendung des Euler'schen Theorems über homogene Functionen:

$$(46) \quad a_x a_k^2 = \tfrac{3}{4}\psi\Gamma_1 + \tfrac{1}{32} f \cdot S_{\Delta,-f}, \quad \alpha_x \alpha_k^2 = \tfrac{3}{4}\psi\Gamma_2 + \tfrac{1}{32}\Delta S_{\Delta,-f}.$$

— Die Elimination, welche schliesslich die gesuchte Parameterdarstellung der Grundcurve liefert, gestaltet sich nun sehr einfach, wenn wir ein neues Coordinatendreieck einführen, dessen Ecken durch einen festen Punkt x und durch die beiden (von x abhängenden) Punkte

$$N \equiv u_n = 0 \quad \text{und} \quad K \equiv u_k = 0$$

gegeben sind, deren geometrische Bedeutung wir sogleich erkennen werden. Bezeichnen wir die laufenden Veränderlichen mit y_i, so haben wir also statt derselben neue Veränderliche ξ, η, ζ einzuführen mittelst der Gleichungen:

$$(47) \qquad \begin{aligned} \Gamma y_1 &= \xi x_1 + \eta n_1 + \zeta k_1, \\ \Gamma y_2 &= \xi x_2 + \eta n_2 + \zeta k_2, \\ \Gamma y_3 &= \xi x_3 + \eta n_3 + \zeta k_3, \end{aligned}$$

*) Die Combinanteneigenschaft von K ergibt sich auch daraus, dass K aus N abgeleitet werden kann mittelst der Gleichung

$$K = 3\, N_{x'} u_n N_x^3 N'^4_x;$$

vgl. Math. Annalen, Bd. 6, p. 483, Gleichung (71).

wo wieder $\Gamma = G(\Delta, -f)$. Die Transformationscoëfficienten hängen allein von der Curve $f(y) = 0$ und dem beliebigen Punkte x ab; da nun u_n und u_k Combinanten sind, so *müssen auch die Coëfficienten der transformirten Gleichung von den Combinanten des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ abhängen.* Um die neue Curvengleichung zu erhalten, thut man daher besser, zuerst die Form:

$$H(y) = \Delta(x) f(y) - f(x) \Delta(y) = \Delta f(y) - f \Delta(y),$$

welche selbst Combinante ist und gleich Null gesetzt die durch x gehende Curve des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ darstellt, in den ξ, η, ζ auszudrücken, anstatt direct $f(y)$ als Function der letzteren Grössen darzustellen. Zunächst ist nach einer bekannten Identität, welche aus $(a \alpha u)^3 = 0$ für $u_i = (xy)_i$ entsteht (vgl. p. 563 und 575):

$$H(y) = 3\,(a_x a_y^2 \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y - a_x^2 a_y \,.\, \alpha_x \alpha_y^2), \tag{48}$$

wo nun die Factoren der einzelnen Glieder nicht mehr vom dritten, sondern nur noch vom ersten und zweiten Grade in den y sind. Aus den Formeln (47) hat man sofort:

$$(49)\quad \begin{cases} \Gamma \,.\, a_x^2 a_y = \xi f + \eta a_x^2 a_n + \zeta a_x^2 a_k \\ \Gamma \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y = \xi \Delta + \eta \alpha_x^2 \alpha_n + \zeta \alpha_x^2 \alpha_k \\ \Gamma \,.\, a_x a_y^2 = \xi^2 f + 2\,\xi\eta a_x^2 a_n + 2\,\xi\zeta a_x^2 a_k + \eta^2 a_x a_n^2 \\ \qquad\qquad + 2\,\eta\zeta a_x a_n a_k + \zeta^2 a_x a_k^2 \\ \Gamma \,.\, \alpha_x \alpha_y^2 = \xi^2 \Delta + 2\,\xi\eta \alpha_x^2 \alpha_n + 2\,\xi\zeta \alpha_x^2 \alpha_k + \eta^2 \alpha_x \alpha_n^2 \\ \qquad\qquad + 2\,\eta\zeta \alpha_x \alpha_n \alpha_k + \zeta^2 \alpha_x \alpha_k^2. \end{cases}$$

In Folge der Gleichungen (14), (26), (44), (45) und (46) lassen sich nun die hier rechts auftretenden Coëfficienten immer in folgender Weise ausdrücken:

$$(50)\quad \begin{cases} a_x^2 a_n = \sigma_1 f + \tau_1 \Gamma_1, & \alpha_x^2 \alpha_n = \sigma_1 \Delta + \tau_1 \Gamma_2, \\ a_x^2 a_k = \sigma_2 f + \tau_2 \Gamma_1, & \alpha_x^2 \alpha_k = \sigma_2 \Delta + \tau_2 \Gamma_2, \\ a_x a_n^2 = \sigma_{11} f + \tau_{11} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_n^2 = \sigma_{11} \Delta + \tau_{11} \Gamma_2, \\ a_x a_n a_k = \sigma_{12} f + \tau_{12} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_n \alpha_k = \sigma_{12} \Delta + \tau_{12} \Gamma_2, \\ a_x a_k^2 = \sigma_{22} f + \tau_{22} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_k^2 = \sigma_{22} \Delta + \tau_{22} \Gamma_2, \end{cases}$$

wo die Grössen σ, τ definirt sind durch:

$$(51)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 0, & \sigma_2 = \psi, & \sigma_{11} = -\tfrac{2}{3}\psi, & \sigma_{12} = -\Omega, & \sigma_{22} = \tfrac{1}{32} S_{\Delta \cdot -f} \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = \tfrac{1}{4}, & \tau_{11} = -\tfrac{1}{6}, & \tau_{12} = 0, & \tau_{22} = \tfrac{3}{4}\psi. \end{cases}$$

Bildet man also die in (48) rechts stehende Determinante der Ausdrücke (49), so zerfällt dieselbe in zwei Factoren, deren einer

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Gamma_2 \\ f & \Gamma_1 \end{vmatrix} = \Gamma = G(\Delta, -f)$$

ist; und indem man diesen Factor durch Division fortschafft, bleibt:

$$\Gamma^2 . H(y) = 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_1 \eta + \sigma_2 \zeta, & \xi^2 + 2\sigma_1 \eta \xi + 2\sigma_2 \zeta \xi + \sigma_{11} \eta^2 + 2\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_1 \eta + \tau_2 \zeta, & 2\tau_1 \eta \xi + 2\tau_2 \zeta \xi + \tau_{11} \eta^2 + 2\tau_{12} \eta \zeta + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix},$$

oder wenn man die zweite Verticalreihe mit Hülfe der ersten reducirt und $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_{12} = 0$ setzt:

$$\Gamma^2 H(y) = 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_2 \zeta, & -\xi^2 + \sigma_{11} \eta^2 + 2\,\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_2 \zeta, & \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,\xi\,(\tau_2 \xi \zeta + \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2) + 3\,\zeta \begin{vmatrix} \sigma_2, & \sigma_{11} \eta^2 + 2\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_2, & \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix}.$$

Führt man hierin endlich auch für die übrigen Grössen σ, τ die Werthe (51) ein, so kommt:

$$(52) \quad \Gamma^2 H(y) = \tfrac{3}{4} \xi^2 \zeta - \tfrac{1}{2} \xi \eta^2 + \tfrac{9}{4} \psi \xi \zeta^2 + \tfrac{3}{2} \Omega \eta \zeta^2 + \tfrac{3}{4} (3\psi^2 - \tfrac{1}{32} S_{\Delta,-f}) \zeta^3.$$

Dies ist die *sogenannte typische Darstellung von* $H(y)$; die Form $H(y)$ ist dadurch rational (aber nicht ganz) mittelst der Functionalinvarianten von f dargestellt (vgl. p. 248 f.), und zwar mittelst der Grössen f, Δ, ψ und Ω, wo jedoch f und Δ nur in der Combinante $S_{\Delta,-f}$ vorkommen, so dass in (52) alle Coëfficienten Combinanten sind.

Aus der Gleichung (52) erkennt man, dass die Gerade $\zeta = 0$ in ihrem Schnittpunkte mit $\eta = 0$, d. h. im Punkte x, die Curve $H(y) = 0$ berührt, während der Schnittpunkt von $\zeta = 0$ mit $\xi = 0$, d. i. $u_n = 0$, ebenfalls auf der Curve liegt und also mit dem Tangentialpunkte von x zusammenfällt (p. 530). Gleichzeitig ist aber in dem Punkte $u_n = 0$ die Linie $\xi = 0$ Tangente der Curve $H(y) = 0$. Da ferner die erste Polare von x in Bezug auf $H = 0$ in der Form

$$\tfrac{1}{2} \xi \zeta - \tfrac{1}{6} \eta^2 + \tfrac{3}{4} \psi \zeta^2 = 0$$

erscheint, so ist $\eta = 0$ die Polare des Punktes $N = 0$ (d. i. $\zeta = 0$, $\xi = 0$) in Bezug auf die erste Polare des Punktes x, gebildet für $H = 0$. Damit hätten wir die geometrische Bedeutung der Transformation (47) erkannt; das Resultat können wir auch in folgenden Sätzen aussprechen:

*Ist x ein beliebiger Punkt der Ebene, so stellt $N \equiv u_n = 0$ den Tangentialpunkt von x auf der durch x gehenden Curve des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ dar; $K \equiv u_k = 0$ dagegen gibt den Schnittpunkt der Tangente dieser Curve im Punkte $N = 0$ mit der Polare von $N = 0$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt von x.**)

*) Man hätte dies auch direct durch Auflösung der Gleichungen (47) und einige Umformungen der für ξ, η, ζ resultirenden Werthe erkennen können, vgl. Clebsch und Gordan a. a. O. — Die Bedeutung von $N = 0$ ergibt sich übrigens direct aus der Salmon'schen Identität. Der Tangentialpunkt muss unbestimmt werden, wenn H in ein Dreieck zerfällt, was mit den Resultaten auf p. 597 übereinstimmt.

Die Form von $H(y)$ lässt weiter sogleich die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

Die Curve $\psi = 0$ *ist der Ort der Punkte* x, *für welche die Ecke* $K = 0$ *des zu* x *gehörigen Dreiecks* $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ *auf dem Polarkegelschnitte von* x *liegt;* $\xi = 0$ *wird dann Tangente des letzteren in* $K = 0$.

Die Gleichung $3\psi^2 - \frac{1}{32} S_{\Delta, -f} = 0$ *stellt eine Curve 12ter Ordnung dar, für deren Punkte* x *die Ecke* $K = 0$ *jenes Dreiecks ebenfalls auf der durch* x *gehenden Curve des syzygetischen Büschels liegt.*

Für die 72 Schnittpunkte x *von* $\psi = 0$ *mit den vier durch* $S_{\Delta, -f} = 0$ *gegebenen äquianharmonischen Curven des Büschels* $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ *ist das zu* x *gehörige Dreieck* $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ *der durch* x *gehenden Curve des Büschels gleichzeitig ein- und umgeschrieben:* N *ist Tangentialpunkt von* x, x *von* K *und* K *von* N.

Und endlich, da nach (42) für $\psi = 0$, $T_{\Delta, -f} = 0$ auch $\Omega = 0$ wird:

Für die 108 Schnittpunkte von $\psi = 0$ *mit den sechs durch* $T_{\Delta, -f}$ *gegebenen harmonischen Curven des syzygetischen Büschels fällt der zu* x *gehörige Punkt* $K = 0$ *in einen Wendepunkt; und die Wendetangente des letzteren ist durch* $\xi = 0$ *gegeben.*

Für einen Punkt x der 12 durch $\Gamma \equiv G(\Delta, -f) = 0$ dargestellten Wendepunktslinien wird unsere typische Darstellung illusorisch, in der That verschwindet alsdann auch die Determinante unserer Transformation (47), denn es ist nach (43*) und (39):

$$(53) \qquad \begin{aligned} (xnk) &= \Delta\,(xnl) - f\,(xnm) \\ &= \tfrac{1}{4}(\Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 f) = \tfrac{1}{4}\Gamma\,. \end{aligned}$$

— Aus (52) kann man nun typische Darstellungen für alle Functionalinvarianten von $H(y)$ ableiten, d. h. dieselben so darstellen, dass ihre Coëfficienten rationale Functionen von f, Δ, ψ und Ω werden. Wir wollen hier nur noch die Hesse'sche Form Δ_H von $H(y)$ berechnen. Dies geschieht, indem man zunächst die Hesse'sche Determinante von H in Bezug auf die ξ, η, ζ, d. h. die Determinante aus den Grössen:

$$H_{11} = \tfrac{1}{4}\zeta, \quad H_{22} = -\tfrac{1}{6}\xi, \quad H_{33} = \tfrac{3}{4}\xi + \tfrac{1}{2}\Omega\eta + \tfrac{3}{4}(3\psi^2 - \tfrac{1}{32}S_{\Delta, -f})\zeta,$$
$$H_{12} = -\tfrac{1}{6}\eta, \quad H_{23} = \tfrac{1}{2}\Omega\zeta, \quad H_{31} = \tfrac{1}{4}\xi + \tfrac{3}{4}\psi\zeta$$

bildet, und dieselbe mit 6 und dem Quadrate der Determinante der aus (47) sich durch Auflösung ergebenden Transformationsgleichungen multiplicirt. Nun findet man aber aus den Gleichungen (47) wegen (53):

$$\xi = 4\,(ynk)\,, \quad \eta = 4\,(xyk)\,, \quad \zeta = 4\,(xny)\,.$$

Nach dem Satze über die adjungirte Determinante ist aber die Determinante dieser Gleichungen gleich $4^3\,(xnk)^2 = 4\,\Gamma^2$. Bilden wir

andererseits die Hesse'sche Form für die linke Seite von (52), also für $\Gamma^2 H$, so wird dieselbe gleich $\Gamma^6 \Delta_H$. Durch Division mit Γ^4 auf beiden Seiten und Ausrechnen der Determinante der H_{ik} findet man daher unter Berücksichtigung der Gleichung (42) für Ω^2*):

$$\begin{aligned}(54)\qquad \Gamma^2 \Delta_H = \xi^3 + 3\,\psi \xi^2 \zeta - 2\,\psi \xi \eta^2 - 6\,\Omega \xi \eta \zeta + \tfrac{3}{32} S_{\Delta,-f} \xi \zeta^2 \\ - \tfrac{4}{3}\Omega \eta^3 - (6\psi^2 - \tfrac{1}{16} S_{\Delta,-f})\eta^2 \zeta - 12\,\psi \Omega \eta \zeta^2 \\ - \left\{4\psi^3 - \tfrac{1}{8}\psi S_{\Delta,-f} + \tfrac{1}{48} T_{\Delta,-f}\right\}\zeta^3 . -\end{aligned}$$

Um nun schliesslich die Coordinaten eines Punktes y auf der Curve $f(y) = 0$ als Functionen eines Parameters auszudrücken, betrachten wir den durch den Tangentialpunkt $N = 0$ eines Punktes x der Curve gehenden Strahlbüschel

$$(55)\qquad \varkappa\, a_x^2 a_y - \lambda\, \alpha_x^2 \alpha_y = 0$$

und berechnen die beiden übrigen Schnittpunkte eines Strahles aus diesem Büschel mit $f(y) = 0$, was durch eine quadratische Gleichung geschieht. Da in unserm Falle $f(x) \equiv f = 0$ ist, so wird $H(y) = \Delta . f(y)$ und (vgl. p. 560):

$$\Delta_H = \Gamma_1 \alpha_y^3 - \Gamma_2 a_y^3 = \Gamma_1 \alpha_y^3 ,$$

oder wegen $f \equiv a_x^3 = 0$: $\Delta_H = \Delta^3 \alpha_y^3$. Die Gleichung (55) zusammen mit $f(y) \equiv a_y^3 = 0$ können wir daher ersetzen durch die Gleichungen:

$$\varkappa \Delta^2 H_x^2 H_y - \lambda\, (\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = 0 , \quad H(y) = 0 ,$$

wo symbolisch: $H_y^3 = H(y)$, $(\Delta_H)_y^3 = \Delta_H$. Es ist aber, da den Werthen $y_i = x_i$ die Werthe $\xi = \Gamma$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ entsprechen:

$$H_x^2 H_y = \tfrac{1}{6} \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \tfrac{1}{6}\Gamma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} ,$$

$$(\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = \tfrac{1}{6} \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \tfrac{1}{6}\Gamma^2 \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2} .$$

Indem man sich also Alles in den Variabeln ξ, η, ζ ausgedrückt denkt, hat man die beiden Gleichungen:

---

*) Andererseits ist nach der bekannten Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$:

$$\Delta_H = \Gamma_1 \Delta(y) - \Gamma_2 f(y) .$$

Nimmt man die Definitionsgleichung für H hinzu, so findet sich:

$$\Gamma . f(y) = f \Delta_H + \Gamma_1 H(y) ;$$

und *dies ist die typische Darstellung für die Grundform $f(y)$ selbst.* Hieraus schliesst man weiter, *dass jede Functionalinvariante von f mit einer solchen Potenz von Γ multiplicirt werden kann, dass sie eine ganze Function der 7 Grundformen f, Δ, ψ, Ω, u_x, N, K wird.* Zwischen letzteren besteht die einzige Relation (42). *Alle* Relationen zwischen den Functionalinvarianten von f sind damit auf diese Gleichung und auf die Ausdrücke derselben durch die 7 Grundformen zurückgeführt. Vgl. Clebsch und Gordan a. a. O.

$$H(y) = 0, \quad \varkappa\Delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2} = 0.$$

Wenn man aus ihnen und der Gleichung:

$$u_y = 0 \quad \text{oder} \quad u_x \xi + N\eta + K\zeta = 0$$

die ξ, η, ζ eliminirt, so erhält man das Product der Gleichungen aller Punkte y, in denen ein Strahl des Büschels (55) die Grundcurve $f(y) = 0$ trifft. Unter diesen ist der Scheitel jenes Büschels ($N = 0$); die Form N muss daher ein Factor des Eliminationsresultates sein. Nun sind von den drei gegebenen Gleichungen zwei linear, nämlich:

$$0 = u_x \xi + N\eta + K\zeta$$
$$0 = \frac{\Gamma^2}{6}\left(\varkappa\Delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2}\right) = \tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 \zeta - \lambda(\xi + \psi\zeta).$$

In Folge dieser beiden Gleichungen kann man also setzen:

$$\xi = N(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi), \quad \zeta = N\lambda,$$
$$\eta = -K\lambda - u_x(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi).$$

Führt man diese Werthe in $H(y)$ ein und bemerkt noch, dass $S_{\Delta, -f}$, $T_{\Delta, -f}$ für $f = 0$ bez. in $S\Delta^4$ und $T\Delta^6$ übergehen, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{3}{4} N \{ & N^2[(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)^2\lambda + 3\psi(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)\lambda^2 + (3\psi^2 - \tfrac{1}{32}S\Delta^4)\lambda^3] \\ & - \tfrac{4}{3}(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)[K\lambda + u_x(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)]^2 \\ & - 2\Omega N[K\lambda + u_x(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)]\lambda^2\}. \end{aligned}$$

Lassen wir den für die vorliegende Frage irrelevanten Factor $\tfrac{3}{4}N$ fort, so ändert sich diese Gleichung wegen der Relation (42) nicht, wenn man nach Multiplication derselben mit $\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)$ auf der rechten Seite $\tfrac{9}{4}\Omega^2 N^2\lambda^4$ subtrahirt und gleichzeitig den Ausdruck

$$(\tfrac{3}{2}\psi^3 - \tfrac{3}{64}\psi S\Delta^4 + \tfrac{1}{128}T\Delta^6)N^2\lambda^4$$

addirt. Man erhält dann, indem sich alle in $\Delta^4\psi$, $\Delta^2\psi^2$ und ψ^3 multiplicirten Terme, welche aus der ersten Klammer hervorgehen, fortheben, die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = & \tfrac{3}{128}\Delta^6\lambda\{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3\}N^2 \\ & - \{(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)[K\lambda + u_x(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)] + \tfrac{3}{2}\Omega N\lambda^2\}^2, \end{aligned}$$

die man auch in der Form schreiben kann:

$$\begin{aligned} (56) \qquad & (\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)[K\lambda + u_x(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)] + \tfrac{3}{2}\Omega N\lambda^2 \\ & \pm \tfrac{1}{4}\Delta^3 N\sqrt{\tfrac{3}{8}\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)} = 0. \end{aligned}$$

Die ersten Glieder dieses Ausdruckes vereinfachen sich noch, wenn man für K und ΩN ihre Werthe in L, M einsetzt. In Rücksicht auf $f = 0$ hat man nämlich wegen (37) und (43):

$$K = L\Delta + 2\psi u_x,$$
$$\tfrac{3}{2}\Omega N = u_x(\psi^2 - \tfrac{1}{96}S\Delta^4) - \tfrac{1}{4}M\Delta^3 + \psi\Delta L.$$

Indem man diese Werthe einführt, geht die Gleichung (56) nach Auslassung des Factors $\frac{1}{16}\Delta^3$ über in:

$$(56^*)\quad 0 = (\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)\Delta u_x - 4\lambda^2 M + 4\varkappa\lambda L \pm N\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda^2 S + \tfrac{1}{3}\lambda^3 T)}$$

Dieses ist die Gleichung $u_y = 0$ eines Punktes y, in welchem ein Strahl des Büschels $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ die Curve $f(y) = 0$ schneidet; dabei ist x ein beliebiger Punkt von f; der Tangentialpunkt desselben ($N = 0$) ist der Scheitel jenes Büschels; die Formen L und M sind durch (10) und (11) definirt; Δ, S, T haben die bekannten Bedeutungen. Die beiden verschiedenen Schnittpunkte eines Büschelstrahles erhält man durch die beiden Vorzeichen der Quadratwurzel. Die Coëfficienten von u_1, u_2, u_3 in dem vorliegenden Ausdrucke sind also die Coordinaten des auf der Curve variabeln Punktes selbst; *man hat daher, wenn ϱ einen willkürlichen Factor bezeichnet, diese Coordinaten in Function des Parameters $\varkappa : \lambda$ dargestellt durch folgende Gleichungen, in denen $M = u_m$, $L = u_l$, $N = u_n$ gesetzt ist*):*

$$(57)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_1 - 4\lambda^2 m_1 + 4\varkappa\lambda l_1 \pm n_1\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)} \\ \varrho y_2 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_2 - 4\lambda^2 m_2 + 4\varkappa\lambda l_2 \pm n_2\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)} \\ \varrho y_3 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_3 - 4\lambda^2 m_3 + 4\varkappa\lambda l_3 \pm n_3\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)}. \end{cases}$$

Unter dem Wurzelzeichen**) erscheint hier der Ausdruck $G_1(\varkappa, -\lambda)$ multiplicirt in 6λ. Da nun durch das Verschwinden dieser Irrationalität die vier von $N = 0$ ausgehenden Tangenten des Büschels $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ bestimmt werden, so erkennt man, dass *die Gleichung $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$ die übrigen drei von diesen Tangenten bestimmt, wenn eine von ihnen, entsprechend dem Werthe $\lambda = 0$ (also die in x berührende Tangente), bekannt ist.* Insbesondere kann man nun den Punkt x mit einem Wendepunkte zusammenfallen lassen, wo dann der Scheitel des von uns betrachteten Büschels ebenfalls in dem betreffenden Wendepunkte liegt. Dem Werthe $\lambda = 0$ entspricht dann die Wendetangente von x und die Wurzeln der Gleichung $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$ liefern die drei von x noch ausgehenden Tangenten der Grund-

*) In anderer Form ist eine solche Parameterdarstellung gegeben von Aronhold: Monatsberichte der Berliner Academie, 25. April 1861. Daran knüpfte dann Clebsch die Verwerthung der elliptischen Functionen, insbesondere ihres Additionstheorems, für die Schnittpunktsätze an: Crelle's Journal, Bd. 63 a. a. O. — In den entsprechenden Gleichungen bei Clebsch und Gordan (Math. Annalen, Bd. 1 a. a. O.) sind die Glieder mit den Coëfficienten m_i ausgelassen.

**) Ausser dieser Wurzel ist in (57) noch eine Irrationalität enthalten, insofern ein Punkt x der Curve als bekannt angenommen ist; die Aufsuchung eines solchen Punktes verlangt eben noch die Lösung einer cubischen Gleichung.

curve.*) Für die hier über die Lage von x gemachten Voraussetzungen würden allerdings unsere Formeln für die typische Darstellung von $H(y)$ ihre Gültigkeit verlieren; denn für $f = 0$, $\Delta = 0$ würde auch Γ, d. h. die linke Seite der jene Darstellung liefernden Gleichung (52) Null sein. In der That wird auch das von uns benutzte Coordinatendreieck $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ in diesem Falle unbrauchbar, indem die drei Seiten desselben zusammenfallen. Gleichwohl aber bleiben die Endgleichungen (57) bestehen. Die Gleichung (56*) nämlich, aus welcher (57) abgeleitet wurde, ist nichts anderes als das Resultat der Elimination der y_i aus den Gleichungen:

$$\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0, \quad a_y^3 = 0, \quad u_y = 0;$$

und dies Resultat muss vollkommen unabhängig von der Wahl des Coordinatendreiecks bestehen bleiben; das oben benutzte Dreieck war nur zur Herleitung desselben passend gewählt, indem so die Coëfficienten der Potenzen von $\varkappa$, λ in (56*) sofort als Functionalinvarianten der Grundcurve gegeben waren. Setzt man nun aber in (57) $\Delta = 0$, so kommt:

$$(58) \qquad \varrho y_i = -4\lambda^2 m_i + 4\varkappa\lambda l_i \pm n_i \sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3} T\lambda^3)}.$$

In die Gleichungen (57) führt man nun leicht wieder die elliptischen Functionen sin am, cos am, Δ am ein; es sollen die dazu nothwendigen Rechnungen hier zunächst mitgetheilt werden; weiterhin wird sich dann aber ergeben, dass sich die betreffenden Ueberlegungen weit übersichtlicher gestalten, wenn man sich statt der Functionen sin am, etc. einer neuen doppelt periodischen Function bedient, die sich selbstverständlich durch sin am, cos am, Δ am ausdrücken lässt. Die Einführung der letzteren Functionen nämlich wird hier dadurch umständlicher, dass in (57) unter dem Wurzelzeichen ein Ausdruck dritter Ordnung steht, multiplicirt in λ, welcher zuvor auf die für sin am brauchbare Normalform $\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)$ gebracht werden muss. Insbesondere soll uns dann noch die Bestimmung der Wendepunkte beschäftigen, d. h. die Bestimmung der neun Strahlen des Büschels $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$, welche den Scheitel $N = 0$ des letzteren mit jenen neun Punkten verbinden; wir werden sehen, wie sich dies rein algebraische Problem mit Hülfe der elliptischen Functionen lösen lässt.

*) Da andererseits $G_1 = 0$ die drei Curven des syzygetischen Büschels bestimmt, deren Hesse'sche Curve $f = 0$ ist (p. 527), so folgt hieraus beiläufig, dass *jede Curve des syzygetischen Büschels von den Wendetangenten der drei Curven berührt wird, zu denen sie als* Hesse'*sche Curve gehört.* Man beweist dies übrigens auch leicht direct. Vgl. Clebsch: Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung, Crelle's Journal, Bd. 58.

Zur Erreichung des angegebenen Zweckes führen wir nun den Parameter $\varkappa$ statt $\varkappa : \lambda$ ein und bezeichnen mit $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ die Wurzeln der Gleichung:

$$G_1(\varkappa, -1) \equiv \varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = 0, \tag{59}$$

d. h. wir setzen: $\varkappa = \varkappa$, $\lambda = 1$ und:

$$\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = (\varkappa - \varkappa')(\varkappa - \varkappa'')(\varkappa - \varkappa''').$$

Ferner machen wir die Substitution:

$$\varkappa = \mu(\varkappa'' - \varkappa''') + \varkappa''';$$

durch letztere wird:

$$\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = (\varkappa''' - \varkappa'')^2 (\varkappa''' - \varkappa')\, \mu\, (1 - \mu)(1 - k^2\mu),$$

wenn:
$$k^2 = \frac{\varkappa''' - \varkappa''}{\varkappa''' - \varkappa'}.$$

Wir brauchen jetzt nur noch durch die Gleichung

$$\mu = \sin^2 \operatorname{am} u \tag{60}$$

einen neuen Parameter u einzuführen, um die folgenden Relationen zu erhalten:

$$\varkappa = \varkappa'' \sin^2 \operatorname{am} u + \varkappa''' \cos^2 \operatorname{am} u, \tag{61}$$

$$\sqrt{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T} = (\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'} \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} u$$

$$= \tfrac{1}{2}(\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}\, \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du}; \tag{62}$$

und dadurch wird das zu unserer Curve gehörige elliptische Integral erster Gattung, d. h. der neue Parameter u gegeben durch:

$$u = \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - k^2\mu^2)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu(1 - \nu)(1 - k^2\nu)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}{2} \int_{\varkappa'''}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T}} \text{*)}. \tag{63}$$

Unsere Formeln (57) endlich gehen über in:

$$\varrho y_i = \varphi_i(\sin^2 \operatorname{am} u) + m\alpha_i \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du},$$

---

*) Eine andere, elegante Methode, um das elliptische Integral mit *allgemeiner* binärer Form 4ter Ordnung unter dem Wurzelzeichen des Nenners durch rationale Transformation so umzuformen, dass statt dessen die allein von den Invarianten i und j $\left(\text{oder wenn man } \varkappa \frac{j}{i} \text{ statt } \varkappa \text{ setzt, allein von der absoluten Invariante } \frac{i^3}{j^2}\right)$ abhängende cubische Form auftritt, ist von Hermite angegeben: Crelle's Journal, Bd. 52, p. 8. Vgl. auch Cayley, ib. Bd. 53 und Clebsch: Theorie der binären Form, p. 233.

wo die α_i Constante, die φ_i ganze rationale Functionen zweiten Grades ihres Arguments sind, und wo:

$$m = \tfrac{1}{2}(\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\frac{\varkappa''' - \varkappa'}{6}};$$

dieselben werden also in der That von der Form der Gleichungen (31) p. 628. Um von den letzten Gleichungen aus (durch Vermittlung der H-Functionen) die Sätze über Schnittpunktsysteme wieder durch das Verschwinden entsprechender Integralsummen darzustellen, ist es nach dem Obigen noch nothwendig, den Werth des Integrals u für einen Wendepunkt oder den zugehörigen Werth von sin am u zu bestimmen. Letzteres geschieht im Anschlusse an folgende Ueberlegungen.

Wir wollen die Bedingung dafür aufstellen, dass *drei Punkte der Curve mit den Parametern* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ *oder bez. mit den zugehörigen Integralwerthen* u_1, u_2, u_3 *auf einer Geraden liegen.* Zur Abkürzung schreiben wir die Gleichungen (57) in der Form

$$\text{(64)} \qquad \varrho y_i = p_i + q_i\varkappa + r_i\varkappa^2 + \alpha_i\sqrt{\varphi(\varkappa)},$$

woraus die Bedeutung der p_i, q_i, r_i, α_i leicht zu ersehen ist, und wo $\varphi(\varkappa) = G_1(\varkappa, -1)$. Sollen drei Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ in gerader Linie liegen, so muss die aus ihren Coordinaten gebildete Determinante verschwinden. Letztere aber ist wegen (64) gleich der Summe der Producte aus entsprechenden Determinanten der unvollständigen Systeme:

$$\left\|\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 & \alpha_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & \alpha_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & \alpha_3 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \end{matrix}\right\|;$$

d. h. man hat die Gleichung:

$$\text{(65)} \qquad 0 = \left|\begin{matrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \\ (qr\alpha) & (r\alpha p) & (\alpha pq) & -(pqr) \end{matrix}\right|.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutungen der Grössen p, q, r, α, wie sie aus (57) und (64) folgen, erhält man nun für die in der letzten Horizontalreihe von (65) stehenden dreigliedrigen Determinanten folgende Werthe:

$$(qr\alpha) = 4\sqrt{6}\,(lxn)\,\Delta, \qquad (r\alpha p) = 4\sqrt{6}\,(xnm)\,\Delta,$$

$$(\alpha pq) = 16\sqrt{6}\,(lmn) + \frac{4}{\sqrt{6}}(nlx)\,S\Delta, \quad -(pqr) = -16\,(lmx)\,\Delta,$$

oder wegen der Gleichungen (39) p. 640 und wegen $f = 0$:

$$(q r \alpha) = \sqrt{6}\,\Delta^4, \qquad (r \alpha p) = 4\sqrt{6}\,\psi \Delta^2,$$
$$(\alpha p q) = 16\sqrt{6}\,\psi^2, \quad -(p q r) = -24\,\Omega\Delta.$$

Setzen wir also:

$$\varkappa_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}, \tag{66}$$

so resultiren in Rücksicht auf die für Ω bestehende Identität (p. 640) *die folgenden Formeln, auf denen im Wesentlichen unsere späteren Erörterungen beruhen:*

$$\frac{(r\alpha p)}{(q r \alpha)} = \varkappa_0, \quad \frac{(\alpha p q)}{(q r \alpha)} = \varkappa_0^2, \quad \frac{(p q r)}{(q r \alpha)} = \pm\sqrt{\varkappa_0^3 - \tfrac{1}{2} S \varkappa_0 + \tfrac{1}{3} T}.$$

Die Gleichung (65) geht also über in*):

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \\ 1 & \varkappa_0 & \varkappa_0^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_0)} \end{vmatrix}. \tag{67}$$

Die jetzt rechts stehende Determinante endlich formt man mittelst der Substitution (61) leicht noch in der Art um, dass *die Bedingung dafür, dass die Punkte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in gerader Linie liegen, in der Form erscheint:*

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1^2 & s_1^4 & s_1 c_1 \Delta_1 \\ 1 & s_2^2 & s_2^4 & s_2 c_2 \Delta_2 \\ 1 & s_3^2 & s_3^4 & s_3 c_3 \Delta_3 \\ 1 & s_0^2 & s_0^4 & s_0 c_0 \Delta_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{68}$$

wo wieder s_i, c_i, Δ_i bez. für sin am u_i, etc. geschrieben ist, oder nach dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen (p. 606):

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_0 = \equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega, \omega'). \tag{69}$$

Damit hätten wir für die Schnittpunkte der Grundcurve mit einer Geraden wieder die Gleichung (36) p. 630 erhalten; gleichzeitig ergibt sich aber, dass die Grösse u_0 mit der dort durch ϑ bezeichneten Grösse identisch ist. *Die Argumente der neun Wendepunkte sind daher durch die Werthe*

$$-\tfrac{1}{3} u_0 + \tfrac{1}{3}(p\omega + q\omega') \tag{70}$$

---

*) Das Vorzeichen in den Gliedern der letzten Horizontalreihe kann man noch beliebig wählen. Man muss aber ein bestimmtes Vorzeichen nehmen, sobald man elliptische Functionen einführt; und zwar ist dasselbe dann durch die Gleichungen (60) und (62) völlig gegeben.

gegeben, wo u_0 bestimmt ist durch die Gleichungen):*

$$(71)\qquad \begin{aligned} &\varkappa'' \sin^2 \text{am}\, u_0 + \varkappa''' \cos^2 \text{am}\, u_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2} \\ &\sin \text{am}\, u_0 \cos \text{am}\, u_0 \Delta\, \text{am}\, u_0 = \frac{4\sqrt{6}}{(\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}} \frac{\Omega}{\Delta^3}. \end{aligned}$$

Hier sind $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ die Wurzeln der Gleichung (59); *Δ, ψ, Ω bezeichnen die bekannten Covarianten der Grundcurve, geschrieben in den Coordinaten des Punktes x, dessen Tangentialpunkt bei der Parameterdarstellung* (57) *zum Büschelscheitel gewählt wurde.*

Um die Bestimmung der Wendepunkte auszuführen, hat man sonach nur noch die Dreitheilungsgleichung zu lösen, welche sin am $\frac{1}{3}u_0$ durch sin am u_0 bestimmt; d. h. *die Werthe, welche die Function sin am u für die Argumente* (70) *der neun Wendepunkte annimmt, sind die Wurzeln der Gleichung 9ten Grades für s:*

$$(72)\qquad \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{4\psi - \varkappa'''\Delta^3}{\varkappa'' - \varkappa'''}} = s \cdot \frac{3 - 4(1 + k^2)s^2 + 6k^2s^4 - k^4s^8}{1 - 6k^2s + 4k^2(1 + k^2)s^6 - 3k^4s^8},$$

wo k^2 sich in der oben angegebenen Weise aus $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ bestimmt. Die Auflösung dieser Gleichung lässt sich auf die Auflösung der Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ zurückführen, mit deren Hülfe wir früher die Wendepunkte bestimmten, wie weiterhin noch gezeigt werden soll. —

Wie schon früher hervorgehoben, gestalten sich nun alle diese Untersuchungen über die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie der Curven dritter Ordnung bedeutend durchsichtiger, wenn man statt der Functionen s, c, Δ eine andere gewöhnlich mit $p(u)$ bezeichnete doppelt periodische Function von u und deren Differentialquotienten nach u einführt.**) Es ist dies die Function, aus welcher direct die Umkehrung des folgenden Integrals erwächst:

$$(73)\qquad u = \int_\infty^\varkappa \frac{d\varkappa}{\sqrt{4\varkappa^3 - 2S\varkappa + \frac{4}{3}T}} \text{ für } \varkappa = p(u).$$

Dieselbe ist sonach dadurch ausgezeichnet, dass sie in verhältnissmässig rationaler Form von den Invarianten S und T der Curve abhängt, und dass *ihre Einführung nicht die Lösung der cubischen Gleichung $\varphi(\varkappa) = 0$ voraussetzt.* Die Differentialquotienten von

*) Vgl. für diese Umformungen auch den mehrfach erwähnten Aufsatz von Clebsch über die Steiner'schen Polygone, Crelle's Journal, Bd. 63.

**) Es ist dies die Function, welche Weierstrass in seinen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen benutzt, und welcher manche Vorzüge vor den Jacobi'schen Functionen s, c, Δ zukommen. Ueber die für diese Function geltenden Fundamentalformeln vgl. die in Berlin erschienenen Inauguraldissertationen von Müller, Simon (1867) und Kiepert (1870).

$p(u)$ nach u sollen im Folgenden immer durch $p'(u)$, $p''(u)$ ... bezeichnet werden; für letztere bestehen dann nach (73) folgende Relationen, wenn das Argument u der Kürze wegen fortgelassen wird:

$$(74)\quad \begin{cases} p'^2 = 4p^3 - 2Sp + \frac{4}{3}T \\ p'' = 6p^2 - S \\ p''' = 6(pp' + p'p) = 12pp' \\ p^{(4)} = 6(pp'' + 2p'^2 + p''p) = 30p^2 - 9Sp + 4T \\ p^{(5)} = 6(pp''' + 3p'p'' + 3p''p' + p'''p) = 36p'(7p^2 - S) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p^{(n+2)} = 6\left(pp^{(n)} + \frac{n}{1}p'p^{(n-1)} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}p''p^{(n-2)} + \cdots + p^{(n)}p\right). \end{cases}$$

Setzen wir also in (57) jetzt $x = p(u) = p$, $\lambda = 1$, so erhalten wir *die Parameterdarstellung der Grundcurve in folgender Form:*

$$(75)\qquad \varrho y_i = -4m_i + 4l_i p + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, n_i p' + \tfrac{1}{6}\Delta x_i p''.$$

Man kann nach dem Früheren die Function p leicht mit sin am u in Zusammenhang bringen; und zwar geschieht dies (in analoger Weise, wie oben x durch $\sin^2$ am u vermöge (61) ausgedrückt wurde) durch die Substitution:

$$(76)\quad \begin{aligned} p(u) &= (x'' - x''')\sin^2 \mathrm{am}\left(u\sqrt{x''' - x'} + \tfrac{1}{2}\omega'\right) + x''' \\ &= \frac{x''' - x'}{\sin^2 \mathrm{am}\left(u\sqrt{x''' - x'}\right)} + x'''. \end{aligned}$$

In der That wird dann $p(u) = \infty$ für $u = 0$, wie es nach (73) sein muss. Ferner erkennt man, dass der Function p die Perioden $\frac{\omega}{\sqrt{x''' - x'}}$ und $\frac{\omega'}{\sqrt{x''' - x'}}$ zukommen, wenn letztere Grössen wie auf p. 605 definirt sind; und durch Umkehrung ergibt sich aus (76) nach (61) und (63):

$$u = \int_{x'''}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2Sx + \frac{4}{3}T}} - \frac{\omega'}{2\sqrt{x''' - x'}}.$$

Nun ist aber bei passender Wahl des Integrationsweges*):

$$\omega + \frac{\omega'}{2} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)}} = -\sqrt{x''' - x'}\int_{x'''}^{\infty} \frac{dx}{p'}.$$

und da $p(u)$ die Perioden $\frac{\omega}{\sqrt{x''' - x'}}, \frac{\omega'}{\sqrt{x''' - x'}}$ hat, können wir also setzen:

$$u = \int_{x'''}^{x} \frac{dx}{p'} - \int_{x'''}^{\infty} \frac{dx}{p'} = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{p'},$$

*) Vgl. z. B. Königsberger, a. a. O., Theil I, p. 312.

wie es nach Gleichung (73) sein soll. Als Fundamentalperioden von $p(u)$ erkannten wir die Grössen:

$$w = \frac{\omega}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}, \quad w' = \frac{\omega'}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}};$$

für sie ergeben sich aus (76) die einfachen Relationen:

$$p\left(\frac{w}{2}\right) = \varkappa', \quad p\left(\frac{w'}{2}\right) = \varkappa''', \quad p\left(\frac{w+w'}{2}\right) = \varkappa''.$$

Setzt man die Theorie der Function $p(u)$ als bekannt voraus, so gestaltet sich nun die Aufstellung der Wendepunktsgleichung äusserst einfach. Durch ein Verfahren, welches dem bei Aufstellung der Gleichungen (65) und (67) benutzten analog ist, erhält man zunächst, ausgehend von den Gleichungen (75), *die Bedingung dafür, dass drei Punkte* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ *in einer Geraden liegen, für* $p_i = p(u_i)$ *in der Form*:

$$(77) \qquad \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_1' & p_1'' \\ 1 & p_2 & p_2' & p_2'' \\ 1 & p_3 & p_3' & p_3'' \\ 1 & p_0 & p_0' & p_0'' \end{vmatrix} = 0,$$

wo analog wie in (66) und (67):

$$p_0 = \varkappa_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}, \quad p_0' = -16\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{\Omega}{\Delta^3}, \quad p_0'' = \frac{96\psi^2}{\Delta^4} - S,$$

so dass die zwischen p_0, p_0', p_0'' bestehenden Relationen (74) in Folge der zwischen Ω, f, Δ, ψ bestehenden Identität erfüllt sind. Hiermit ist uns der Werth von $p_0 = p(3u)$, wo u das Argument eines Wendepunktes ist, rational gegeben; zur Bestimmung der Wendepunkte selbst haben wir also nur noch $p(3u)$ durch $p(u)$, d. h. $p(u_0)$ durch $p(\frac{1}{3}u_0)$ auszudrücken. Nun ist aber allgemein:

$$(78) \qquad p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n-1}(u) \cdot \psi_{n+1}(u)}{\psi_n(u) \cdot \psi_n(u)}.$$

wenn die Function $\psi_\varrho(u)$ durch folgende Determinante definirt ist*):

$$\psi_\varrho(u) = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{[2!\,3!\ldots(\varrho-1)!]^2} \begin{vmatrix} p' & p'' & \ldots & p^{(\varrho-1)} \\ p'' & p''' & \ldots & p^{(\varrho)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{(\varrho-1)} & p^{(\varrho)} & \ldots & p^{(2\varrho-3)} \end{vmatrix}.$$

Für $n = 3$ erhält man hieraus unter Benutzung von (74):

$$(79) \qquad p(3u) = p + p'^2\,\frac{12pp'^2p'' - 3p'^4 - p''^3}{12pp'^2 - p''^2},$$

---

*) In dieser Form sind die Theilungsgleichungen von Kiepert aufgestellt: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 21.

oder nach einer einfachen Umformung für $p(3u) = p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$:*)

$$\left(\frac{4\psi}{\Delta^2} - p - p'^2 p''\right)\left(12pp'^2 - p''^2\right) + 4p'^6 = 0. \tag{80}$$

Dies ist, wenn man für p'^2, p'' nach (74) *ihre in p rationalen Ausdrücke einführt, die Gleichung neunten Grades in p [oder für das Verhältniss $\varkappa : \lambda$ in den Gleichungen* (57)], *welche die vom Punkte $N = 0$ nach den neun Wendepunkten gehenden Strahlen des Büschels $p a_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ bestimmt, wenn x ein beliebiger Punkt der Curve ist.* Die Coëfficienten derselben sind allein von den Invarianten S, T und den Covarianten ψ, Δ^2 abhängig. *Die Gleichung* (79) *kann also auch als das Resultat der Elimination der y_i aus den drei Gleichungen:*

$$f(y) \equiv a_y^3 = 0, \quad \Delta(y) \equiv \alpha_y^3 = 0, \quad p a_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0$$

aufgefasst werden.

Es sei hier noch bemerkt, dass *der Parameterwerth $p = p_0$ selbst dem Mittelpunkte $N = 0$ unseres Strahlbüschels zukommt.* Setzt man nämlich in (57) $\varkappa = 4\psi$, $\lambda = \Delta^2$, so wird:

$$\varrho y_i = \Delta \left\{(16\psi^2 - \tfrac{1}{6} S\Delta^4) x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i + 24 n_i \Omega\right\};$$

nach Gleichung (37) ist aber für $f = 0$:

$$24\Omega n_i = (16\psi^2 - \tfrac{1}{6} S\Delta^4) x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i,$$

so dass die y_i in der That zu den n_i proportional werden. Es folgt dies übrigens auch wieder aus dem Additionstheoreme. Da nämlich dem Punkte x das Argument Null zukommt ($p = \infty$), so hat man, wenn v das Argument von $N = 0$ ist, für die Schnittpunkte der Tangente von x mit $f = 0$:

$$0 + 0 + v + u_0 \equiv 0;$$

also $v \equiv -u_0$, und $p(v) = p(-u_0) = p(u_0)$.

Die Auflösung der Gleichung (80) *oder* (79) hängt nun bekanntlich von der Lösung der speciellen Dreitheilungs-Gleichung ab, welche für $u_0 = 0$, d. i. $p_0 = \infty$ aus (79) erhalten wird, d. h. von der Gleichung:

$$12pp'^2 - p''^2 = 0, \tag{81}$$

oder wegen (74) von der Gleichung:

$$p^4 - Sp^2 + \tfrac{4}{3} Tp - \tfrac{1}{12} S^2 = 0. \tag{81*}$$

*) Man könnte diese Gleichung auch durch Grenzübergang aus (77) herleiten; doch würde man dann zunächst eine Gleichung 12ten Grades für p erhalten, aus der noch ein cubischer Factor abzusondern wäre. — Die Einführung der elliptischen Functionen macht aber eben solche directe Rechnungen und Eliminationen überflüssig; und besonders ist hier die Benutzung der Function $p(u)$ wegen deren Zusammenhang mit der in (57) vorkommenden Irrationalität von Vortheil.

In letzterer aber braucht man nur $p = -\frac{\varkappa}{\lambda}$ *zu setzen, um wieder die Gleichung* $G(\varkappa, \lambda) = 0$ *zu erhalten, welche uns früher zur Bestimmung der Wendepunkte diente* (vgl. p. 566 ff.). Die vier Wurzeln p_1, p_2, p_3, p_4 dieser Gleichung geben uns die Werthe:

$$p_1 = p\left(\frac{w}{3}\right), \quad p_2 = p\left(\frac{w'}{3}\right), \quad p_3 = p\left(\frac{w + w'}{3}\right), \quad p_4 = p\left(\frac{w + 2w'}{3}\right).$$

Für $p_0 = \infty$ oder $u_0 = 0$ wird $\Delta = 0$, d. h. die Punkte x und N liegen in einem Wendepunkte; und dann gibt die Gleichung (81) vier der anderen acht Wendepunkte, von denen keine zwei mit jenem ersten Wendepunkte in gerader Linie liegen dürfen. Wie nun die Wurzeln der Gleichung (80) aus den Grössen p_1, p_2, p_3, p_4 wirklich zu bilden sind, wird in der Theorie der elliptischen Functionen gelehrt und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.*)

Man führt die Auflösung der Gleichung (80) auch leicht in anderer Weise auf die Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ zurück; und es gelingt dann, die Wurzeln von (80) an der Hand geometrischer Ueberlegungen wirklich anzugeben. Setzt man nämlich in (80) $p = \frac{\alpha_x^2 \alpha_y}{a_x^2 a_y}$, so stellt diese Gleichung in den Veränderlichen y eine Curve 9ter Ordnung dar, welche in die Verbindungslinien von $N = 0$ mit den 9 Wendepunkten zerfällt. Je drei dieser Geraden nun, welche $N = 0$ mit drei in gerader Linie liegenden Wendepunkten verbinden, schneiden f noch in drei weiteren Punkten; und es ist sofort ersichtlich, dass diese letzteren drei Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher die Grundcurve im Punkte $N = 0$ zweipunktig berührt. Entsprechend den vier Wendepunktsdreiecken, welche nach dem Früheren durch

$$p_1 f - \Delta = 0, \quad p_2 f - \Delta = 0, \quad p_3 f - \Delta = 0, \quad p_4 f - \Delta = 0$$

dargestellt sind, gibt es auch vier Systeme ($\Phi_i = 0$) von je drei Kegelschnitten, so dass jedes solche System zusammen mit dem zugehörigen Wendepunktsdreiecke durch alle Schnittpunkte beregter Curve neunter Ordnung mit $f = 0$ hindurchgeht. Die linke Seite der Gleichung (80) kann daher mit Hülfe von $f(y) = 0$ auf vier verschiedene Weisen in zwei Factoren

---

*) Ueber die Lösung der Theilungsgleichungen für $p(u)$ vgl. Kiepert: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 34 ff.; über die entsprechenden (von Abel behandelten) Probleme bei sin am u vgl. z. B. Königsberger, a. a. O., Th. II, p. 210. — Die Dreitheilungsgleichung ist auch ein besonderer Fall der von Hesse (Crelle's Journal, Bd. 34) behandelten Gleichungen 9ten Grades. Verfolgt man die zur Lösung der letzteren nöthigen Operationen an dem geometrischen Bilde einer C_3, so erkennt man ebenfalls, dass die aufzustellende Gleichung 4. Grades hier durch $G(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben ist. Ueber diese Hesse'schen Gleichungen vgl. auch Clebsch: Binäre Formen, p. 234 ff.

$$(p_i f - \Delta) \, . \, \Phi_i$$

zerspalten werden, entsprechend den vier Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung (81). *Letztere gibt also auch hier wieder die Bestimmung der Wendepunktsdreiecke.* Um nun die Wurzeln von (80) zu finden, hat man zwei dieser Dreiecke in lineare Factoren aufzulösen, was nach den Angaben auf p. 597 geschieht. Wir bestimmen also zunächst die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden, für welche wir die Tangente von x wählen, mit den Seiten eines Dreiecks: $p_i f(y) - \Delta(y) = 0$; d. h. wir setzen in letzterer Gleichung $y = \Delta x + \varrho n$ und bilden die so entstehende cubische Gleichung für ϱ, welche in Rücksicht auf die Relationen (p. 635 ff.):

$$f=0,\ a_x^2 a_n=0,\ \alpha_x^2\alpha_n=0,\ a_x a_n^2=-\tfrac{1}{6}\Delta^3,\ \alpha_x\alpha_n^2=-\tfrac{2}{3}\Delta\psi,\ a_n^3=0$$

folgende Gestalt annimmt:

$$\varrho^3\alpha_n^3 - \varrho^2\Delta^2(2\psi - \tfrac{1}{2}\Delta^2 p_i) + \Delta^4 = 0. \tag{82}$$

In ihr haben wir noch den Term α_n^3 zu berechnen. Aus der Gleichung

$$a_x a_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 - \tfrac{2}{3}f\psi$$

ergibt sich aber durch Polarenbildung für $u_n = N_x'^4 u_{n'}$:

$$a_y a_n^2 + 8 a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_y' = -\tfrac{1}{6}\Sigma\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x_i} y_i - 4f\psi_x^5\psi_y - 2\psi a_x^2 a\ .$$

Für $y_i = n_i$ verschwinden wegen $a_x^2 a_n = 0$, $\alpha_x^2\alpha_n = 0$ die aus Γ_1 entstehenden Glieder der rechten Seite, und es wird nach Gleichung (28) p. 571:

$$a_n^3 = -4f\Omega - 8\, a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_n'\ .$$

Hierin ist:

$$2\, a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_n' = a_x a_n (ab\alpha)(\alpha_x b_n + \alpha_n b_x) b_x \alpha_x\,. \tag{83}$$

Das erste Glied des rechts stehenden Ausdruckes ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung von a und b, verschwindet also identisch; das zweite Glied ist ebenfalls Null, denn man hat:

$$\begin{aligned}(ab\alpha)\, a_x b_x^2 \alpha_x a_n \alpha_n &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(b_x a_n - a_x b_n)\, a_x b_x \alpha_x \alpha_n \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{(ac\beta)\, b_x - (bc\beta)\, a_x\right\} a_x b_x \alpha_x \alpha_n c_x^2 \beta_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{(ab\beta)\, c_x - (abc)\, \beta_x\right\} a_x b_x \alpha_x \alpha_n c_x^2 \beta_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(Pf - Q\Delta)\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c:

$$\begin{aligned}Q &= \tfrac{1}{3}(abc)\left\{(ab\alpha)\, c_x - (ac\alpha)\, b_x - (cb\alpha)\, a_x\right\} a_x b_x c_x \alpha_n \\ &= \tfrac{1}{3}\Delta\,\alpha_x^2\alpha_n = 0\,.\end{aligned}$$

Es verschwindet daher auch der Ausdruck

$$\delta Q = \{(ab\alpha)(ab\beta)\beta_x b_x + 2(a\beta\alpha)(a\beta c)c_x^2\} a_x\beta_x\alpha_x\alpha_n$$
$$+ \tfrac{1}{2} S (abd)(abc) a_x b_x c_x^2 d_x d_n .$$

Auf der rechten Seite hat das letzte Glied den Werth $\frac{1}{6} S\Delta d_x^2 d_n$ verschwindet also; das zweite Glied entsteht (bis auf den Factor -2) aus dem auf p. 638 mit B' bezeichneten Terme, wenn man $y_i = n_i$ setzt, und hat somit den Werth (vgl. Gleichung (34) p. 639):

$$-\tfrac{4}{3}\alpha_l\alpha_x\alpha_n + \tfrac{2}{3}\Delta_1\alpha_x^2\alpha_n = \tfrac{4}{3}\Omega .$$

Das erste Glied von δQ ist aber P, und somit haben wir $\delta Q = P + \frac{4}{3}\Omega = 0$; d. h. die rechte Seite von (83) ist gleich $-\frac{4}{3}\Omega f$, und wir haben:

(84) $$a_n^3 = -\tfrac{4}{3} f\Omega ;$$

und hieraus wegen $\delta N = \delta\Omega = 0$:

(85) $$\alpha_n^3 = -\tfrac{4}{3}\Delta\Omega .$$

Unsere cubische Gleichung (82) *geht daher über in:*

(86) $$8\Omega\varrho^3 + 3\Delta(4\psi - \Delta^2 p_i)\varrho - 6\Delta^3 = 0,$$

eine Gleichung, deren Coëfficienten nur noch von den Grössen $p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$ und $p_0' = -16\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\Omega}{\Delta^3}$ abhängen. Bezeichnen wir entsprechend der Wurzel p_i von (81) die Wurzeln dieser Gleichung mit $\varrho_i', \varrho_i'', \varrho_i'''$, so erhält man die Gleichungen der Seiten des zu p_i gehörigen Dreiecks, wenn man in der Gleichung $p_i a_z^2 a_y - \alpha_z^2\alpha_y = 0$ für z_k die Werthe $\Delta x_k + \varrho_i^{(h)} n_k$ einsetzt. Die Gleichungen dieser drei Seiten sind also gegeben durch:

(87) $$p_i(\Delta^2 a_x^2 + 2\varrho_i^{(h)}\Delta a_x a_n + \varrho_i^{(h)2} a_n^2) a_y$$
$$-(\Delta^2\alpha_x^2 + 2\varrho_i^{(h)}\Delta\alpha_x\alpha_n + \varrho_i^{(h)2}\alpha_n^2)\alpha_y = 0,$$

wenn man bez. $\varrho_i^{(h)} = \varrho_i', \varrho_i'', \varrho_i'''$ setzt. Durch drei eben solche Gleichungen, in denen nur p_i durch p_k, $\varrho_i^{(h)}$ durch $\varrho_k^{(h)}$ ersetzt sind, werden die Seiten des zur Wurzel p_k gehörigen Dreiecks dargestellt, wenn $\varrho_k^{(h)}$ die Wurzeln der aus (86) durch Vertauschung von p_i mit p_k entstehenden Gleichung bezeichnen. Der Schnittpunkt irgend einer Seite des einen mit irgend einer Seite des andern Dreiecks ist dann immer ein Wendepunkt, dessen Coordinaten t_i man in Function von $p_i, p_k, \varrho_i^{(h)}, \varrho_k^{(l)}$ berechnen kann; *aus diesen Coordinaten findet man dann eine Wurzel der Gleichung neunten Grades mittelst der Substitution:*

$$p = \frac{\alpha_x^2\alpha_t}{a_x^2 a_t}.$$

Zähler und Nenner in dem rechts stehenden Ausdrucke werden dabei ganze rationale Functionen zweier Wurzeln von (81) *und zweier Wurzeln der beiden zugehörigen Gleichungen* (86)*; die Coëfficienten dieser Wurzeln*

erscheinen nach (87) *als Covarianten 18ter Ordnung von f, geschrieben in den Coordinaten des festen Punktes x, und lassen sich daher sämmtlich durch Δ, ψ und Ω ausdrücken.* Die wirkliche Berechnung dieser Coëfficienten kann mit Hülfe einiger symbolischen Rechnungen geschehen.

Nach diesen ausführlichen Erörterungen über die Dreitheilungs-Gleichung wird es kaum noch nöthig sein zu bemerken, dass in derselben Weise überhaupt die Theilungsgleichungen der elliptischen Functionen zur wirklichen Durchführung algebraischer Eliminationsprobleme benutzt werden können; denn sie geben das Resultat der Elimination sofort in fertiger Form, wenn nur die betreffende Function für das vielfache Argument, d. i. $p\,(n u)$, in ihrer Abhängigkeit von dem Punkte x und von anderen etwa noch vorkommenden willkürlichen Punkten dargestellt ist. Letzteres kann aber immer mit Hülfe des Additionstheorems für $p\,(u)$ geschehen, d. h. mit Hülfe der Formel:

$$(88)\quad p\,(u+v) = \frac{[p(u)+p(v)]\,[2\,p(u)\,p(v) - S] + \frac{4}{3}\,T - p'(u)\,p'(v)}{2\,[p(u) - p(v)]^2}\,.$$

Es mag dies hier nur noch an dem Beispiele der Fünftheilung erläutert werden. Stellen wir uns also die Aufgabe, diejenigen Kegelschnitte zu bestimmen, welche durch einen festen Punkt v gehen und $f = 0$ in einem andern Punkte u vierpunktig berühren, so dass u bestimmt ist durch (vgl. p. 630):

$$5\,u + v + 2\,u_0 = 0\,.$$

Hier wird für $p\,(v) = q$, da p eine gerade Function ist:

$$p\,(5\,u) = p\,(2\,u_0 + v) = \frac{[p\,(2\,u_0) + q]\,[2\,p\,(2\,u_0)\,q - S] + \frac{4}{3}\,T - p'(2\,u_0)\,q'}{2\,[p\,(2\,u_0) - q]^2}\,,$$

wo:

$$p\,(2\,u_0) = p_0 - \frac{1}{4}\,\frac{12\,p_0\,p_0'^2 - p_0''^2}{p_0'^2}$$
$$= -\frac{8\,\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\,\psi^2 - S\Delta')^2}{384\,\Omega^2\,\Delta^2}\,.$$

Auf der rechten Seite kann man noch setzen:

$$q = \frac{\alpha_x^{\,2}\,\alpha_z}{a_x^{\,2}\,a_z}\,,\quad q' = \sqrt{4\,q^3 - 2\,S q + \tfrac{4}{3}\,T}\,,$$

wenn wir annehmen, dass z_i die ternären Coordinaten des Punktes q sind, und dass dem letzteren das positive Vorzeichen der Quadratwurzel zukommt. Insbesondere kann man den völlig beliebigen Punkt z mit x zusammenfallen lassen; dann wird $q = \infty$, also $v = 0$, und wir erhalten:

$$p\,(5u) = p\,(2\,u_0) = -\frac{8\,\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\,\psi^2 - S\Delta^4)^2}{384\,\Omega^2\,\Delta^2}\,.$$

Setzt man dies in die Theilungsgleichung (78) für $n = 5$ ein, so

resultirt eine Gleichung vom Grade 25 in p. *Die letztere ist das Resultat der Elimination der y_i, dy_i, d^2y_i, d^3y_i, d^4y_i aus den Gleichungen:*

$$p\,a_x{}^2 a_y - \alpha_x{}^2 \alpha_y = 0\,, \quad a_y{}^3 = 0\,, \quad a_y{}^2 a_{dy} = 0\,,$$

$$a_y{}^2 a_{d^2y} + 2\, a_y a_{dy}{}^2 = 0\,,$$

$$a_y{}^2 a_{d^3y} + 6\, a_y a_{dy} a_{d^2y} + 2\, a_{dy}{}^3 = 0\,,$$

$$a_y{}^2 a_{d^4y} + 8\, a_y a_{dy} a_{d^3y} + 12\, a_{dy}{}^2 a_{d^2y} + 6\, a_y a_{d^2y}{}^2 = 0$$

und derjenigen Gleichung, welche aussagt, dass der Punkt x mit y und den vier zu y benachbarten Punkten auf einem Kegelschnitte liegt (welche in bekannter Weise in Gestalt einer sechsgliedrigen Determinante geschrieben werden kann). Für $p = \frac{\alpha_x{}^2 \alpha_y}{a_x{}^2 a_y}$ erhält man so eine Curve 25[ter] Ordnung, welche in die 25 Verbindungslinien von $N = 0$ mit den Berührungspunkten der durch x gehenden Kegelschnitte zerfällt.

Wenn in der geschilderten Weise mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen die algebraischen Gleichungen vollständig aufgestellt werden können, auf welche die oben behandelten Berührungsaufgaben führen, so lassen sich auch die Eliminationen, welche zur Bestimmung der Steiner'schen Punktepaare führen, in gleicher Weise erledigen; denn auch sie führten auf die Theilung der elliptischen Functionen: alle Punkte u, welche mit v ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bilden, waren bestimmt durch (p. 615):

$$u \equiv v + \frac{1}{n}(pw + qw')\,.$$

Es ist hier nur zu bemerken, dass diese Bedingung von dem Argumente u_0 unabhängig ist; man kann aber der Einfachheit wegen den Punkt v immer mit dem völlig beliebigen Punkte $N = 0$ zusammenfallen lassen, d. h. $v = u_0$ annehmen (vgl. p. 655). Bezeichnen wir nun mit y_i die Coordinaten von v, mit z_i die von w, so ist sofort ersichtlich, dass die n-Theilungsgleichung der Function $p(u)$ hier das Resultat der Elimination der Grössen $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots x_i^{(2n)}, z_i$ aus den folgenden Gleichungen darstellt:

$$(x^{(1)}x^{(2)}y) = 0\,, \quad (x^{(3)}x^{(4)}y) = 0\,, \ldots (x^{(2n-1)}x^{(2n)}y) = 0\,,$$

$$(x^{(2)}x^{(3)}z) = 0\,, \quad (x^{(4)}x^{(5)}z) = 0\,, \ldots (x^{(2n)}x^{(1)}z) = 0\,,$$

$$a_{x^{(1)}}{}^3 = 0\,, \quad a_{x^{(2)}}{}^3 = 0\,, \ldots a_{x^{(2n)}}{}^3 = 0\,,$$

$$a_z{}^3 = 0\,, \quad p\,a_x{}^2 a_z - \alpha_x{}^2 \alpha_z = 0\,.$$

Die Endgleichung für dieses Problem ist sonach von der betreffenden Gleichung bei den Berührungsaufgaben dadurch unterschieden, dass die Function $p(nu)$ nicht von Functionen $p(mu_0)$ abhängt, sondern (für $v = u_0$) nur von der Grösse $p(u_0)$.

Sechste Abtheilung.

Die Geometrie auf einer algebraischen Curve und deren Zusammenhang mit der Theorie der Abel'schen Integrale.

I. Die eindeutigen Transformationen einer algebraischen Curve.

In den sogenannten Cremona'schen Transformationen (p. 474) haben wir ein Mittel kennen gelernt, zwei Ebenen durch eine nicht lineare Transformation so auf einander zu beziehen, dass bis auf einzelne Ausnahmepunkte jedem Punkte der einen nur ein Punkt der anderen entspricht, und umgekehrt. Andererseits erkannten wir an dem Beispiele der Beziehung zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve einer beliebigen Fundamentalcurve die Möglichkeit, zwei einzelne Curven eindeutig auf einander zu beziehen, ohne dass diese Beziehung für die ganze Ebene eindeutig gewesen wäre. Das Studium solcher Transformationen einer einzelnen algebraischen Curve soll uns nun zunächst beschäftigen. Wir werden dabei weiterhin von selbst zu mancherlei Anwendungen des Gefundenen auf früher berührte Punkte geführt werden, sowie auf manche Ergänzungen zu früheren Untersuchungen über die Geometrie auf einer Curve. Besonders aber sollen uns verschiedene Beweise für die Erhaltung des Geschlechtes bei diesen eindeutigen Transformationen eingehend beschäftigen.

Eine Transformation

$$\rho x_1 = \varphi_1(y), \quad \rho x_2 = \varphi_2(y), \quad \rho x_3 = \varphi_3(y), \tag{1}$$

wo die φ_i homogene Functionen gleicher Ordnung von y_1, y_2, y_3 sind, möge eine Curve $f(x) = 0$ in eine andere $F(y) = 0$ überführen. Soll dies nun durch eine wechselseitig *ein*deutige Beziehung möglich sein, so muss man durch Verbindung der Gleichungen (1) mit $F(y) = 0$ wieder zu der Gleichung $f = 0$ zurückkehren können und im Laufe des dazu nöthigen Eliminationsprocesses die y mit ganzen rationalen Functionen der x proportional finden, so dass:

$$\mu y_1 = \Phi_1(x), \quad \mu y_2 = \Phi_2(x), \quad \mu y_3 = \Phi_3(x). \tag{2}$$

Die Gleichung $F = 0$ ist dann das Resultat der Elimination der Grössen μ, x_1, x_2, x_3 aus diesen Gleichungen (2) und der Gleichung

$f(x) = 0$; und wenn man umgekehrt die Substitution (2) in F ausführt, so muss $F(y)$ bis auf einen Factor in $f(x)$ übergehen, d. h. es ist:

$$(3) \qquad \mu^\nu F(y_1, y_2, y_3) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = M \cdot f,$$

wo ν *die Ordnung von F bedeutet.* Die letztere lässt sich sehr einfach bestimmen. Den Schnittpunkten einer Curve des Netzes:

$$(4) \qquad u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 = 0$$

mit $f = 0$, die nicht allen Curven des Netzes gemeinsam sind, entsprechen nämlich die Schnittpunkte der Geraden

$$u_y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

mit $F(y) = 0$. Ist aber die Zahl der ersteren (welche allein von gegebenen Elementen abhängt) gleich ν, so muss die der letzteren wegen der Eindeutigkeit unserer Transformation ebenso gross sein: *Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Curven des Netzes* (4) *mit $f(x) = 0$ bestimmt also die Ordnung der Curve $F(y) = 0$.*

Die in solcher Weise hergestellte, für die Punkte von f eindeutige Transformation kann man sich auf ähnliche Art geometrisch vermittelt denken, wie die Cremona'schen Transformationen. Zunächst nämlich wollen wir uns die ganze Ebene E_x der Punkte x vermöge der Gleichungen (2) in eine Ebene E_y der Punkte y übergeführt vorstellen. Dann entspricht offenbar jedem Punkte von E_x *ein* Punkt von E_y; umgekehrt aber sind jedem Punkte von E_y, den wir als Schnittpunkt zweier Linien $v_y = 0$, $w_y = 0$ bestimmt annehmen, die s^2 Schnittpunkte der beiden Curven

$$v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3 = 0 \quad \text{und} \quad w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 0$$

in E_x zugeordnet, wenn s die Ordnung der Curven $\Phi_i = 0$ bedeutet. Insbesondere kann es eintreten, dass allen Curven des Netzes (4) eine Zahl von Punkten gemeinsam ist; dann werden diese gemeinsamen Punkte eine gewisse Anzahl von jenen s^2 Schnittpunkten absorbiren, und man wird (wie bei den Cremona'schen Transformationen) nur die übrigen, beweglichen Schnittpunkte der beiden Curven $\Sigma v_i \Phi_i = 0$, $\Sigma w_i \Phi_i = 0$ dem Schnittpunkte der Geraden $v_y = 0$, $w_y = 0$ entsprechend setzen. Ist die Zahl dieser beweglichen Schnittpunkte gleich Eins, so hat man eine Cremona'sche Transformation. Die gemeinsamen Punkte der Curven Φ treten nun wieder — wie wohl kaum noch einmal ausgeführt zu werden braucht — als *Fundamentalpunkte* für die Abbildung auf (vgl. p. 481), und jedem solchen Punkte entspricht in E_y eine *Fundamentalcurve* vom Geschlechte Null; und letztere ist von der r^{ten} Ordnung, wenn der betreffende Fundamentalpunkt in E_x r-facher Punkt für jede der Curven Φ war.

Einer beliebigen Curve $f = 0$ n^{ter} Ordnung in E_x entspricht nun eine Curve in E_y, deren Gleichung sich durch Elimination der x_i und

der Grösse μ aus den Gleichungen (2) und aus $f = 0$ ergibt; von ihr wird sich aber eine Fundamentalcurve h^{ter} Ordnung i-fach absondern, wenn $f = 0$ durch einen entsprechenden Fundamentalpunkt i-mal hindurchging. Durchläuft umgekehrt ein Punkt in E_y eine Curve $F(y) = 0$, so entsprechen jedem Punkte dieser Curve F β Punkte in E_x, wenn β die Zahl der beweglichen Schnittpunkte je zweier Curven des Netzes (4) ist; und dieses Aggregat von β Punkten durchläuft diejenige Curve $\chi = 0$, welche in E_x der Curve F zugeordnet ist. Ist aber $F(y) = 0$ geradé wieder die aus einer Curve $f(x) = 0$ in angegebener Weise entstandene Curve, so muss auch umgekehrt die zu $F(y) = 0$ gehörige Curve $\chi(x) = 0$ auf $f(x) = 0$ zurückführen, d. h. χ muss einen Factor f enthalten; und *dieses Vorkommniss ist für uns von besonderer Wichtigkeit.*

Der zu x gehörige Punkt y war als Träger des Strahlbüschels bestimmt, welcher in E_y dem durch x gehenden Büschel von Curven Φ zugeordnet ist. Man erkennt daher aus dem Vorstehenden sofort, dass *die Transformation einer Curve $f(x) = 0$ nur eine eindeutige sein kann, wenn alle Curven des Netzes* (4), *welche durch einen beliebigen Punkt von f gehen, sich ausserdem nicht mehr auf f schneiden**), es sei denn in solchen Punkten, die *alle* Curven des Netzes mit f gemein haben. *Ferner darf selbstverständlich die Functionaldeterminante der Φ_i nicht identisch verschwinden;* denn sonst würden die Curven im Allgemeinen kein Netz bilden.**) Während also ein Basispunkt eines aus dem Netze herausgehobenen Büschels die Curve f durchläuft, beschreiben die übrigen beweglichen Basispunkte dieses Büschels eine andere Curve; und zwar wird letztere, wie sofort ersichtlich, durch Nullsetzen des in (3) mit M bezeichneten Ausdrucks dargestellt.

Insbesondere kann es nun eintreten, dass sich in x alle Curven des betreffenden Büschels berühren (wo dann eine dieser Curven in x einen Doppelpunkt hat); in dem Falle liegt früheren Sätzen zufolge x auf der Jacobi'schen Curve des Netzes (p. 382). Zugleich rückt auch einer jener übrigen auf $M = 0$ gelegenen Basispunkte des Büschels unendlich nahe an x heran, d. h. *die Curve $M = 0$ geht durch alle Schnittpunkte von $f = 0$ mit der* Jacobi'*schen Curve des Netzes* (4)*;* ein Satz, der für uns weiterhin von Wichtigkeit werden wird. Wir leiten hier sogleich noch einige andere ebenfalls später zu benutzende Sätze über die Curve $M = 0$ ab. Aus (3) folgt, dass *$M = 0$ von der Ordnung $\nu s - n$ ist,* wenn wieder ν die Ordnung von

*) Dies tritt jedoch z. B. immer ein, wenn die drei Curven $\Phi_i = 0$ adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung für eine sogenannte *hyperelliptische* Curve n^{ter} Ordnung sind; man kann daher bei letzteren ein Netz solcher Curven nicht zur eindeutigen Transformation derselben benutzen, vgl. die beiden folgenden Abschnitte.

**) Vgl. die erste Anmerkung auf p. 377.

F, s die der Φ_i bedeutet. Ferner verschwindet die linke Seite von (3) für einen gemeinsamen r-fachen Punkt der Φ_i νr-fach; dasselbe muss für die rechte Seite gelten. Ist also dieser Punkt i-facher Punkt von f, so erkennt man, dass $M = 0$ *in jedem* i*-fachen Punkte von* f*, welcher* r*-facher Punkt für* ***jede*** *Curve* Φ_i *ist, einen* $(\nu r - i)$*-fachen Punkt hat.*

Die Curve $M = 0$ wird nun auch von Wichtigkeit für die Bestimmung der vielfachen Punkte von $F(y) = 0$. Zunächst nämlich ist aus dem bei den Cremona'schen Transformationen Gesagten sofort klar, dass jeder vielfache Punkt von f, welcher nicht in einem Fundamentalpunkte der Ebene E_x liegt, zu einem in gleicher Weise vielfachen Punkte von F Veranlassung gibt, und weiter, dass jeder in einem Fundamentalpunkte von E_x gelegene i-fache Punkt von f (dessen Zweige getrennt verlaufen) in i einfache Punkte von F aufgelöst wird. Ist der betreffende Fundamentalpunkt in E_x von der r^{ten} Ordnung, so sind jene i einfachen Punkte auf F Schnittpunkte der zugehörigen Fundamentalcurve r^{ter} Ordnung mit F. Von dieser Fundamentalcurve wird F ausserdem noch in $\nu r - i$ Punkten getroffen, entsprechend dem $(\nu r - i)$-fachen Punkte, welchen $M = 0$ in jenem Fundamentalpunkte r^{ter} Ordnung besitzt; denn in E_x ist das Bild der Curve F nicht durch f allein, sondern durch f zusammen mit M gegeben. Alle diese Betrachtungen werden wir übrigens sogleich noch rein algebraisch bestätigt finden. Es können nun aber auf F auch neue Doppelpunkte entstehen, denen je zwei getrennte Punkte von f entsprechen; und zwar wird dies eintreten, wenn sich die durch einen (dadurch ausgezeichneten) Punkt x von f gehenden Curven Φ von selbst in einem zweiten Punkte von f treffen, d. h. wenn ein zweiter Basispunkt des Curvenbüschels, von dessen Grundpunkten einer auf f beweglich gedacht wurde, ebenfalls auf f liegt; und dies tritt eben in den Schnittpunkten von f mit dem Orte der übrigen Basispunkte, also mit M ein. Unter diesen Schnittpunkten sind, wie soeben gezeigt wurde, auch die Schnittpunkte der Jacobi'schen Curve des Netzes der Φ enthalten, in welchen zwei Basispunkte des Netzes einander benachbart sind, ohne dass beide genau auf f liegen; diese Punkte geben daher nicht zu Doppelpunkten von F Veranlassung.*) Somit haben wir den Satz:

Die Schnittpunkte von $M = 0$ *mit* $f = 0$*, welche nicht in gemeinsamen Punkten der Curven des Netzes* (4) *liegen, und welche nicht in die*

*) Dies würde nur eintreten, wenn die Verbindungslinie der beiden benachbarten Basispunkte, d. i. die gemeinsame Tangente der daselbst sich berührenden Curven Φ, mit der Tangente von f zusammenfallen sollte; man erkennt leicht aus den weiteren Entwicklungen des Textes, dass dann auf F ein Rückkehrpunkt entstehen würde.

Schnittpunkte der Jacobi'*schen Curve dieses Netzes mit* $f = 0$ *fallen, sind einander derartig paarweise zugeordnet, dass die Punkte eines jeden Paares sich bei der Transformation* (2) *zu einem Doppelpunkte der neuen Curve* $F = 0$ *vereinigen.*

Es bleibt uns nun nur noch übrig, die Anzahlen für die verschiedenen hier genannten Schnittpunktsysteme zu bestimmen, um dann sofort alle Hülfsmittel für einen directen Beweis des Geschlechtssatzes bereit zu haben, wie er weiterhin geführt werden soll. Wir werden dabei dann den letzterwähnten Satz auch noch algebraisch ableiten.

In derselben Weise treten in der Ebene E_y Fundamentalpunkte und in E_x Fundamentalcurven auf, wenn man von den Gleichungen (1) ausgeht; dieselben stehen aber nicht an sich zu den bei den Gleichungen (2) auftretenden, soeben besprochenen Fundamentalgebilden in Beziehung, sondern nur in Rücksicht auf die Curve $f = 0$; denn nur vermöge $f = 0$ kann man aus den Gleichungen (1) die y in Function der x rational berechnen (und umgekehrt), es sei denn, dass man es überhaupt mit einer Cremona'schen Transformation zu thun hat. *Die wirkliche Herleitung der Gleichungen* (1) *aus* (2), *sowie der Gleichung* $F = 0$ *aus* $f = 0$ kann man in folgender Weise bewerkstelligen. Man eliminire zuerst x_3 aus jeder der Gleichungen (2) vermöge $f = 0$; dadurch ergeben sich drei Gleichungen der Form ($i = 1, 2, 3$):

$$\psi_i(x_1, x_2, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0. \tag{5}$$

Ferner eliminire man x_2 einmal aus $\psi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$, einmal aus $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$; dies gibt zwei Gleichungen der Form:

$$\chi_1(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0, \quad \chi_2(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0; \tag{6}$$

und die Elimination von x_1 hieraus gibt die gesuchte Gleichung $F(y) = 0$, zunächst jedoch noch mit einem überflüssigen Factor behaftet; denn durch eine directe Abzählung würde man (nach p. 313 f.) die Ordnung ν von F grösser finden, als sie nach den weiterhin folgenden Angaben sein kann. Die Gleichungen (6) können wir nun auffassen als Gleichungen für die eine Veränderliche x_1, deren Resultante F verschwindet, die also eine gemeinsame Wurzel haben. Die letztere aber kann man in bekannter Weise rational berechnen*) in der Form:

$$\mu_1 x_1 = X_1(y_1, y_2, y_3),$$

wo μ_1 eine Function der y_i und von μ ist. In ähnlicher Weise lassen sich x_2 und x_3 finden:

$$\mu_2 x_2 = X_2(y_1, y_2, y_3), \quad \mu_3 x_3 = X_3(y_1, y_2, y_3).$$

*) Vgl. z. B. Salmon's introductory lessons, p. 73 ff. in Fiedler's Uebersetzung.

Man hat schliesslich diese Gleichungen nur noch durch Hinzufügen passender bez. durch Fortschaffen überflüssiger Factoren so einzurichten, dass auf den linken Seiten statt der μ_i immer *derselbe* Proportionalitätsfactor auftritt, wodurch dann die Gleichungen (1) vollständig hergestellt sind. —

Von besonderer Wichtigkeit in der Theorie der eindeutigen Transformationen ist nun der von Riemann aufgestellte, von uns schon mehrfach erwähnte und benutzte *Satz von der Erhaltung des Geschlechts einer Curve bei eindeutiger Umformung derselben* (vgl. p. 368). Wir haben für denselben schon früher einen Beweis erbracht, indem wir nach dem Vorgange Zeuthens überhaupt eine Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier Curven aufstellten, die mehrdeutig auf einander bezogen sind (p. 459). Dabei hatten wir aber die betrachteten Curven höchstens mit einfachen Doppel- und Rückkehrpunkten vorausgesetzt, während unser Satz auch auf Curven mit vielfachen Punkten anwendbar ist. Man wird überdies bei der Wichtigkeit des Satzes einen directen Beweis verlangen müssen. Andere Beweise sind im Laufe der Zeit in grosser Zahl gegeben worden; wir führen im Folgenden jedoch nur zwei solche an und beschränken uns darauf, am Schlusse dieses Abschnittes auf die übrigen kurz hinzuweisen.

Der Einfachheit halber wollen wir zunächst wieder voraussetzen, dass die Curve $f = 0$ d Doppel- und r Rückkehrpunkte habe, sonst aber keine Singularitäten. Die Curven $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ seien von der Ordnung s; und wir nehmen der Allgemeinheit wegen an, dass alle drei eine Reihe von festen Punkten mit der Curve $f = 0$ gemein haben. Die Anzahl dieser gemeinsamen Punkte bezeichnen wir mit $\sigma + \tau$, wo σ die Zahl solcher Punkte ist, welche einfache Punkte von $f = 0$, τ die Zahl derjenigen, welche Doppel- oder Rückkehrpunkte von $f = 0$ sind. Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve des Netzes (4) mit f, und somit nach Obigem (p. 662) *die Ordnung von F ist dann:*

$$\nu = ns - \sigma - 2\tau,$$

wenn n die Ordnung von $f = 0$ bedeutet. Unter den Curven des Netzes (4), welche durch einen beliebigen Punkt x gehen, sind nun $2(\nu + p - 1)$ Curven enthalten, welche $f = 0$ in 2 benachbarten Punkten treffen, nämlich die $2(\nu + p - 1) - r$ berührenden Curven*) und die r durch die Rückkehrpunkte gehenden Curven des durch den Punkt x festgelegten Büschels. Zwei benachbarten Punkten auf f

*) Vgl. p. 375, 460 und 474. Eine diese Berührungspunkte auf f ausschneidende Curve kann man leicht nach der Anmerkung auf p. 460 bilden. — Vgl. auch Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 499.

entsprechen aber offenbar wieder zwei benachbarte Punkte auf F. Jenen $2(\nu + p - 1)$ Curven des Büschels entsprechen also in der Ebene E_y ebensoviele Gerade des durch y gehenden Strahlbüschels, welche F in zwei benachbarten Punkten treffen, wenn y dem Punkte x entspricht. Andererseits ist die Zahl dieser Geraden gegeben durch die Zahl der von y an F gehenden Tangenten und die Zahl der Verbindungslinien von y mit den Rückkehrpunkten von F; d. h. sie ist gleich $2(\nu + p - 1)$, wenn π das Geschlecht von F bedeutet. Aus der Gleichheit beider Zahlen folgt aber in der That:

$$p = \pi, \quad \text{q. e. d.*)}$$

Wir geben ferner einen *directen algebraischen Beweis***) für den Riemann'schen Satz, indem wir geradezu die Anzahl der vielfachen Punkte der Curve F bestimmen, und so das Geschlecht derselben berechnen. Die Mittel zur Durchführung desselben sind im Wesentlichen schon durch die obigen geometrischen Betrachtungen gegeben (p. 662 ff.), sollen hier aber zum Theil noch einmal abgeleitet werden.

Die bisher über die Natur der Curve f gemachten Annahmen wollen wir gleichzeitig dahin verallgemeinern, dass dieselbe α_i i-fache Punkte haben möge, deren Tangenten jedoch alle getrennt verlaufen; ausserdem mögen wieder r Rückkehrpunkte vorhanden sein. Als Geschlecht von f definiren wir dann die Zahl (vgl. p. 429 f.)

$$(7) \qquad p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\sum_i \alpha_i i(i-1) - r.$$

Sehen wir zuerst, wie sich die singulären Punkte von $f = 0$ bei der

---

*) Bei diesem Beweise ist der Satz als bekannt vorausgesetzt, dass für die Zahl der berührenden Curven des Netzes in der That nur die *beweglichen* Schnittpunkte der Φ_i mit f in Betracht kommen. Diesen Satz werden wir zwar erst später mit Hülfe desjenigen von der Erhaltung des Geschlechtes beweisen, indem wir zeigen, dass für die Zahl der Coincidenzen einer Correspondenz überhaupt nur die beweglichen Schnittpunkte zu berücksichtigen sind. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich indess bei vorliegendem Falle leicht direct; denn nach p. 456 werden die Berührungspunkte der durch x gehenden Curen Φ ausgeschnitten durch die Curve

$$(f\Phi_2\Phi_3)\,\Phi_1(x) + (f\Phi_3\Phi_1)\,\Phi_2(x) + (f\Phi_1\Phi_2)\,\Phi_3(x) = 0;$$

wobei die Functionaldeterminanten in Variabeln y geschrieben sein mögen; oder z. B., wenn x auf $\Phi_3 = 0$ und $\Phi_2 = 0$ liegt, durch $(f\Phi_2\Phi_3) = 0$ (vgl. p. 460 Anmk.). Diese Curve aber schneidet f in der That nur in $2(\nu + p - 2) - r$ brauchbaren Punkten, wie man aus den Sätzen auf p. 380 erkennt.

**) Derselbe lehnt sich an den von Clebsch und Gordan gegebenen an (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 54 ff.); hier sind überhaupt die von Riemann untersuchten eindeutigen Transformationen zuerst geometrisch behandelt.

Transformation verhalten. Wir setzen $f = a_x^n$; dann ist für einen ϱ-fachen Punkt x von f (unabhängig von den z):

(8) $$a_x^{n-\varrho+1} a_z^{\varrho-1} \equiv 0,$$

und die ϱ von x ausgehenden Fortschreitungsrichtungen sind bestimmt durch die Gleichungen:

(9) $$a_x^{n-\varrho} a_{dx}^{\varrho} = 0, \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0,$$

wenn $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1$ in bekannter Weise die zwischen den absoluten Werthen der x_i bestehende Identität ist (vgl. p. 447). Nehmen wir nun an, dass die Curven $\Phi_i = 0$ nicht durch x hindurchgehen, dass also μ für den Punkt x nicht Null ist, so entspricht dem Punkte x vermöge (2) ein ganz bestimmter Punkt y auf F, und zwar wieder ein ϱ-facher Punkt. Letzteres folgt daraus, dass vermöge der aus (2) fliessenden Gleichungen:

(10) $$\mu \,.\, dy_i + y_i \,.\, d\mu = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3} dx_3$$

jedem Werthsysteme der dx_i ein ganz bestimmtes Werthsystem der dy_i zugehört, solange μ nicht Null ist; und dies gilt auch unabhängig davon, ob die aus (9) sich ergebenden Werthe der dx_i von einander verschieden sind, oder nicht, sowie auch, wenn zwei sich in x berührende Zweige von f auch noch in höheren Differentialen übereinstimmen. Wir haben also den Satz (vgl. p. 489 f.):

Einem singulären Punkte von f, durch welchen die zur Transformation benutzten Curven nicht sämmtlich hindurchgehen, entspricht auf F ein in derselben Weise singulärer Punkt.

Nehmen wir jedoch an, dass x ein Fundamentalpunkt der Transformation sei, d. h. dass alle Curven des Netzes (4) durch x hindurchgehen, so ist gleichzeitig:

$$\Phi_1(x) = 0, \quad \Phi_2(x) = 0, \quad \Phi_3(x) = 0, \quad \mu = 0.$$

In den Gleichungen (10) stehen dann auf den linken Seiten nur noch die Ausdrücke $y_i \,.\, d\mu$, wo $d\mu$ von Null verschieden sein mag; und folglich entspricht jeder Fortschreitungsrichtung dx auf f ein Punkt y auf F. Einem ϱ-fachen Punkte mit getrennten Tangenten auf f entsprechen daher ϱ verschiedene Punkte auf F; *ist insbesondere x ein Rückkehrpunkt von f, so entsprechen ihm zwei benachbarte Punkte auf F.**) Ganz dasselbe gilt aber auch, wenn die Curven Φ_i in einem ϱ-fachen Punkte von f sämmtlich einen vielfachen, sagen wir $\varkappa$-fachen, Punkt haben. Ist nämlich zunächst $\varkappa = 2$, so verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (10), und es wird $d\mu = 0$. Durch

---

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 664.

Differentiation dieser Gleichungen finden wir weiter, wenn $\Phi_i = \alpha^{(i)}{}_x{}^s$ gesetzt wird:

(11) $$y_i d^2\mu = s(s-1) \,.\, \alpha^{(i)}{}_x{}^{s-2} \alpha^{(i)}{}_{dx}{}^2 ;$$

d. h. jeder Fortschreitungsrichtung dx auf f entspricht ein Punkt y auf F. Ist dagegen $x = 3$, so wird nach (11) auch $d^2\mu = 0$, und wir erhalten durch nochmalige Differentiation:

(11*) $$y_i d^3\mu = s(s-1)(s-2) \,.\, \alpha^{(i)}{}_x{}^{s-3} \alpha^{(i)}{}_{dx}{}^3 ;$$

u. s. w. Man erkennt hieraus mittelst eines Schlusses von $x = \lambda$ auf $x = \lambda + 1$ sofort, dass unsere Behauptung in der That richtig ist:

Wenn die Curven $\Phi_i = 0$ in einem ϱ-fachen Punkte mit getrennten Tangenten von $f = 0$ sämmtlich einen ein- oder vielfachen Punkt haben, so entsprechen demselben ϱ getrennte Punkte auf $F = 0$ (und dies sind Schnittpunkte der dem ϱ-fachen Punkte in E_x zugehörigen Fundamentalcurve in E_y mit F, nach p. 664).

Dies Resultat verwerthen wir in folgender Weise zur Berechnung des Geschlechtes von F. Unter den α_i i-fachen Punkten von f mögen α_i' enthalten sein, durch welche die Curven Φ nicht hindurchgehen, dagegen α_i'', durch welche diese Curven ein- oder mehrfach hindurchgehen, so dass:

(12) $$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' .$$

In demselben Sinne mögen die r Rückkehrpunkte sich in zwei Gruppen bez. von r' und r'' Punkten trennen, und letztere je t-fache Punkte der Φ sein.

Die Curve F nun möge β_i i-fache Punkte haben. Von diesen sind dann nach Vorstehendem α_i' aus vielfachen Punkten von f entstanden; die übrigen $\beta_i - \alpha_i'$ dagegen durch Zusammenrücken von Punkten, die auf f getrennt lagen. *Im Allgemeinen aber werden auf F nur einfache Doppel- (bez. Rückkehr-) Punkte in der Weise neu entstehen*, so dass, wenn γ die Zahl derselben bedeutet, folgende Relationen Geltung haben:

(13) $$\gamma = \beta_2 - \alpha_2' , \quad \beta_3 = \alpha_3' , \quad \beta_4 = \alpha_4' , \; \ldots .$$

Sollen nämlich ϱ getrennte Punkte von f sich zu einem ϱ-fachen Punkte von F vereinigen, und sind $u_y = 0$, $v_y = 0$ zwei Strahlen durch den letzteren, so darf jeder Strahl $u_y + \lambda v_y = 0$ die Curve F nur noch in $\nu - \varrho$ beweglichen Punkten treffen; folglich dürfen auch die Curven des Büschels

$$u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 + \lambda(v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3) = 0$$

die Curve $f = 0$ nur noch in $\nu - \varrho$ beweglichen Punkten schneiden. Während also im Allgemeinen eine Curve des Netzes (4) durch 2 Punkte bestimmt wird, müssten sich dann auf $f = 0$ ϱ Punkte so wählen lassen, dass durch sie noch unendlich viele Curven des Netzes

hindurchgehen. Es müssten also zwischen den Curven des Netzes und der Curve $f = 0$ noch specielle Relationen bestehen; denn in einer beliebigen zweifach unendlichen Curvenschaar wird man höchstens verlangen dürfen, aus einer einfach unendlichen Reihe von Punkten zwei so auszuwählen, dass durch sie noch unendlich viele Curven der Schaar hindurchgehen (vgl. auch p. 439). Wir wollen daher zunächst voraussetzen, dass die Gleichungen (13) für unsere Transformation bestehen. *Dann ist das Geschlecht von* $F = 0$:

$$(14) \qquad \pi = \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \tfrac{1}{2}\sum_i \alpha_i' \,.\, i\,(i - 1) - r' - \gamma\,.$$

Hierin haben wir noch die Zahlen ν *und* γ *zu bestimmen.* Zur Vereinfachung der dahin führenden Ueberlegungen sei bemerkt, dass wir die Curven $\Phi_i = 0$ immer so voraussetzen dürfen, dass *die Vielfachheit ihrer gemeinsamen, in einem* i*-fachen Punkte von* $f = 0$ *liegenden Punkte für alle Curven des Netzes in allen*)* i*-fachen Punkten von* $f = 0$ *dieselbe ist.* Die Gültigkeit unserer Betrachtungen nämlich werden durch eine lineare Transformation der y nicht gestört, es kommt daher für unsern Zweck nur auf solche gemeinsame Punkte der Curven $\Phi_i = 0$ an, welche auch *allen* Curven des Netzes (4) gemeinsam sind. Sollte daher z. B. $\Phi_3 = 0$ in einem r-fachen Punkte von $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ einen ϱ-fachen Punkt haben, wo $\varrho > r$, so brauchen wir diesen letzteren auch nur als r-fachen Punkt zu zählen. Gingen ferner die Curven $\Phi_i = 0$ durch einen i-fachen Punkt von $f = 0$ ϱ-fach, durch einen andern ϱ'-fach, durch den letzten $\varrho^{(k)}$-fach hindurch, wo $\varrho < \varrho' < \ldots < \varrho^{(k)}$, so können wir eine Curve $\Psi = 0$ so bestimmen, dass die Curven $\Phi_1\Psi = 0$, $\Phi_2\Psi = 0$, $\Phi_3\Psi = 0$ in jedem i-fachen Punkte von f einen $\varrho^{(k)}$-fachen Punkt haben. Fügen wir aber den Factor auf den rechten Seiten der Gleichungen (2) hinzu, so wird dadurch das Resultat der Transformation nicht geändert, indem dies nur auf den Factor M Einfluss hat. Den Factor Ψ aber können wir uns immer schon in den Φ_i enthalten denken; damit ist dann unsere obige Behauptung als richtig erwiesen: Wir können immer annehmen, dass *die Curven* Φ_i *in jedem der* α_i'' i*-fachen Punkte von* f *einen* r_i*-fachen Punkt haben, ausserdem aber sich noch in* σ *einfachen Punkten von* f *je einfach schneiden.* Alsdann ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Φ_i mit f, d. h. *die Ordnung von* F:

$$(15) \qquad \nu = ns - \sigma - \sum_i \alpha_i'' r_i i - 2\,tr''.\text{**)}$$

---

*) Diese letzte Festsetzung soll in den folgenden Formeln nur das Schreiben einer Doppelsumme ersparen, während die erstere von principieller Wichtigkeit ist.

**) Für $f = a_x^{\,m}$, $y_i = u_i$, $\Phi_i = a_x^{\,m-1} a_i$, also $n = m$, $s = m - 1$, $\alpha_i = \alpha_i''$, $\alpha_i' = 0$, $r' = 0$, $r = r''$, $r_i = i - 1$, $\sigma = r$ (letzteres, da die Curven Φ hier im Rückkehrpunkte berühren) erhält man hieraus wieder die Klasse der Grundcurve:

Um endlich die in (14) auftretende Zahl γ zu bestimmen, haben wir eine Curve zu suchen, welche auf f alle diejenigen Punktepaare ausschneidet, welche zu Doppelpunkten von F Veranlassung geben. Eine solche Curve aber ist uns nach dem Obigen durch $M = 0$ gegeben (p. 664 f.); man kann dies auch in folgender Weise einsehen. Wir fragen, wann es überhaupt eintreten kann, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial F(y)}{\partial y_i}$ sämmtlich verschwinden. Nun ist nach (3) und (2):

$$\mu^{\nu} \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} + \sum_k \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \mu \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i};$$

denn aus (2) folgt z. B. für $i = 1$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} = \mu, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} = 0.$$

Setzen wir also $\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i} = F_i(\Phi)$, so wird:

$$\mu^{\nu - 1} F_i(y) = F_i(\Phi). \tag{16}$$

Die Differentialquotienten $F_i(y)$ verschwinden sonach immer, wenn die Ausdrücke $F_i(\Phi)$ verschwinden, es sei denn, dass sämmtliche Φ_i (und somit auch μ) Null sind. In letzterem Falle verschwinden in (16) für einen r_k-fachen Punkt der Φ die Ausdrücke $F_i(\Phi)$ von der Ordnung $r_k(\nu - 1)$, ebenso auch $\mu^{\nu-1}$; kennen wir also die Punkte x auf f, für welche die $F_i(\Phi)$ Null werden, so haben wir von diesen nur die den Φ_i gemeinsamen Punkte abzusondern; die übrig bleibenden Punkte bestimmen solche Punkte x, welche paarweise sich zu einem Doppelpunkte von F vereinigen. Nun erhält man aus Gleichung (3) durch Differentiation nach den x_i die drei Gleichungen:

$$F_1(\Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + F_2(\Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + F_3(\Phi) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i} = M \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{17}$$

Erstens sind also die $F_i(\Phi)$ immer Null, wenn die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ verschwinden, es sei denn, dass die Functionaldeterminante der Φ_i, welche mit (Φ_1, Φ_2, Φ_3) bezeichnet sei, verschwindet. Dann ist aber x ein vielfacher Punkt von f, und diese Fälle haben wir schon berücksichtigt. *Zweitens* sind die $F_i(\Phi)$ immer Null, wenn M verschwindet, wieder ausgenommen die Punkte x auf f, für welche auch die Functional-

$$\nu = m(m-1) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 3r.$$

Nimmt man dagegen $f = (abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2}$, und wieder $\Phi = a_x^{m-1} a_i$, so gibt $F = 0$ nach p. 365 die Gleichung der Steiner'schen Curve in Liniencoordinaten; und aus der Formel (16) findet man für die Klasse derselben, indem jetzt $\sigma = 2$ (weil die Hesse'sche Curve in jedem Rückkehrpunkte von $a_x^m = 0$ in bekannter Weise einen dreifachen Punkt hat):

$$\nu = 3(m-1)(m-2) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 4r.$$

determinante $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ verschwindet; und in der That geht ja die Curve $M=0$ durch die Schnittpunkte von $f=0$ und $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)=0$ (vgl. p. 663). Es ist aber M von der Ordnung $\nu s - n$, $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ von der Ordnung $3s-3$; die Zahl der für uns brauchbaren Schnittpunkte von M mit f würde also zunächst gleich

$$n(\nu s - n - 3s + 3) \tag{18}$$

sein. Hiervon haben wir nach (16) noch die Punkte abzusondern, welche in gemeinsamen Punkten der Φ_i liegen. $M=0$ hat aber in jedem Punkte σ einen $(\nu-1)$-fachen Punkt (p. 664), und in jedem der α_i'' i-fachen Punkte von f einen $(\nu r_i - i)$-fachen Punkt. In den gemeinsamen Punkten der Φ und f liegen also

$$P = (\nu-1)\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i(\nu r_i - i) + 2r''(\nu t - 2)$$

Schnittpunkte von M und f. In denselben Punkten liegen aber auch

$$Q = 2\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i(3r_i - 1) + 2r''(3t-1)$$

Schnittpunkte von f und $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$; denn in einem gemeinsamen r_i-fachen Punkte der Φ hat die Jacobi'sche Curve einen $(3r_i-1)$-fachen Punkt (vgl. p. 383). Diese sind schon unter den $3s-3$ Punkten enthalten, welche in der Zahl (18) berücksichtigt wurden. Im Ganzen haben wir also von (18) noch die Zahl

$$P - Q = (\nu-3)\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i[(\nu-3)r_i - i + 1] + 2r''(t\nu - 3t - 1)$$

abzuziehen. Die Zahl der für uns brauchbaren Schnittpunkte von M und f ist daher schliesslich gleich*)

$$n(\nu s - n - 3s + 3) - (\nu-3)(\sigma + 2r''t) - \Sigma\alpha_i'' i[(\nu-3)r_i - i + 1] + 2r'',$$

oder wegen (15):

$$= (\nu-1)(\nu-2) - (n-1)(n-2) + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i(i-1) + 2r''.$$

Für jeden dieser Punkte x verschwinden nicht nur die $F_i(\Phi)$, sondern auch die $F_i(y)$; je zwei derselben geben also zu einem Doppel- bez. Rückkehrpunkte von F Veranlassung; d. h. wir haben

---

*) Es sei bemerkt, dass ganz analoge Beziehungen wie zwischen M, $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$, f auch zwischen $F_1(\Phi)$, $(\Phi_2\Phi_3 f)$, f oder $F_2(\Phi)$, $(\Phi_3\Phi_1 f)$, f oder $F_3(\Phi)$, $(\Phi_1\Phi_2 f)$, f bestehen; denn aus den Gleichungen (17) folgen (für $f=0$) die Relationen:

$$F_1(\Phi) : F_2(\Phi) : F_3(\Phi) : -M = (\Phi_2\Phi_3 f) : (\Phi_3 f\Phi_1) : (\Phi_1\Phi_2 f) : (\Phi_1\Phi_2\Phi_3).$$

Man könnte daher statt M auch eine der Curven $F_i(\Phi)$ der Betrachtung zu Grunde legen, wie dies bei Clebsch und Gordan a. a. O. in der That geschieht. Man hat dann statt der Sätze über das Verhalten von $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ in einem gemeinsamen Punkte der Φ die auf p. 378 f. gegebenen Sätze über das Verhalten einer Determinante $(\Phi_i\Phi_k f)$ zu benutzen. — Wir werden später diese Punkte noch in anderer Weise bestimmen lernen; vgl. den Abschnitt über Verallgemeinerungen der Correspondenzformeln.

(19) $\gamma = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i''.i(i-1) + r''$.

Setzen wir dies in (14) ein, so kommt wegen (12):

$$\begin{aligned}\pi &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'.i(i-1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i''.i(i-1) - r' - r''\\ &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i.i(i-1) - r,\end{aligned}$$

oder endlich: $\pi = p$, q. e. d.

Der Satz über die Erhaltung von p wäre somit für die von uns gemachten Voraussetzungen bewiesen. Wir haben dabei zunächst angenommen, dass sich nicht mehr als zwei getrennte Punkte von f zu einem vielfachen Punkte von F vereinigen, hingegen wohl, dass getrennten Punkten von F ein vielfacher Punkt von f entspricht.

Diese Beschränkung lässt sich aber leicht aufheben. Nehmen wir nämlich an, dass auf F neue vielfache Punkte vermöge der Transformation (2) entstehen, so ersetzen wir letztere zunächst durch die andere Transformation:

$$\varrho y_i = \Phi_i(x) + \varepsilon\Psi_i(x),$$

wo die Ψ_i mit den Φ_i von gleicher Ordnung, sonst aber ganz beliebig sind. Man kann hier die Ψ_i also jedenfalls so wählen, dass die Transformation ganz allgemeiner Natur ist, dass also die aus f entstehende Curve F' nur einfache Doppelpunkte neu erhält. Nimmt man nun ε unendlich klein, so ist F' zu F benachbart, und die neuen Doppelpunkte von F' liegen theilweise einander derart benachbart, dass sie für $\varepsilon = 0$ sich zu den neuen vielfachen Punkten von F gruppenweise vereinigen. Da aber unser Satz für die Curve F' gilt, und da das Geschlecht von F mit dem Geschlechte von F' übereinstimmt, so gilt der Satz auch für die Beziehung von F' auf f; und wir haben damit folgendes Theorem bewiesen:

*Wenn zwei Curven mit vielfachen Punkten, deren Tangenten nicht zusammenfallen, und mit einzelnen Rückkehrpunkten eindeutig auf einander bezogen sind, so haben sie gleiches Geschlecht.**)

Es bleibt uns übrig, diesen Satz auch auf diejenigen Fälle auszudehnen, wo die vielfachen Punkte von $f = 0$ noch specielle Eigenschaften besitzen. Nun haben wir früher schon eine Zahl als Geschlecht einer solchen Curve definirt (p. 495), welche bei allen Cremona'schen Transformationen erhalten blieb; dieselbe war gleich dem Geschlechte einer Curve mit lauter gewöhnlichen vielfachen Punkten, welche aus der gegebenen durch wiederholte Cremona'sche

*) Es sind aber nicht umgekehrt zwei Curven von gleichem Geschlechte immer eindeutig in einander transformirbar; dazu ist vielmehr noch die Gleichheit gewisser (als *Moduln* bezeichneter) Zahlen nothwendig, die den absoluten Invarianten bei linearen Transformationen entsprechen. Vgl. darüber die beiden folgenden Abschnitte.

Transformationen entstand. Andererseits zeigten wir, dass jeder singuläre Punkt betrachtet werden darf als Combination von verschiedenen gewöhnlichen vielfachen Punkten, die einander unendlich benachbart liegen, und zu denen — so drückten wir uns aus — noch eine Anzahl von Verzweigungspunkten hinzutritt. Die letzteren blieben jedoch ganz ohne Einfluss auf das Geschlecht der Curve; und dieses war gleich dem Geschlechte einer Curve, bei der jene zusammengerückten vielfachen Punkte getrennt liegen. Insofern man in dieser Weise jede Curve durch Grenzübergang aus einer Curve der von uns bisher betrachteten Art entstehen lassen kann, gelten unsere obigen Betrachtungen ganz allgemein; insbesondere *gilt der Satz von der Erhaltung des Geschlechts für zwei beliebige Curven, sobald sie eindeutig auf einander bezogen sind.*

Wir gehen zu einigen *Anwendungen der hier erwähnten Methoden* über.

1) Beim Studium der Punktsysteme auf einer algebraischen Curve (p. 430 ff.) haben wir gesehen, dass es besonders wichtig ist, solche Punktgruppen zu betrachten, welche durch sogenannte *adjungirte Curven* ausgeschnitten werden, d. h. durch Curven, die durch jeden i-fachen Punkt von f $(i-1)$-fach hindurchgehen; insbesondere waren dann wieder die adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgezeichnet. Mittelst der vorstehenden Ueberlegungen lässt sich nun diese hervorragende Bedeutung der adjungirten Curven noch in anderer Weise erkennen.

Es sei $\Theta(y) = 0$ eine zu $F(y)$ adjungirte Curve C_μ und es möge $\vartheta(x) = 0$ eine Curve sein, welche auf $f(x) = 0$ die den Schnittpunkten von Θ und F vermöge der Transformation (2) entsprechende Punktgruppe ausschneidet, ausserdem aber die Curve f nur in den singulären Punkten (in noch zu bestimmender Weise) trifft. Alsdann muss jedenfalls eine Gleichung der Form:

$$A \cdot \Theta(\Phi) = B \cdot \vartheta(x) + C \cdot f(x)$$

bestehen. Nun geht der Voraussetzung nach $\Theta(y) = 0$ durch alle Doppelpunkte von F; folglich geht $\Theta(\Phi) = 0$ durch alle die Punktepaare auf f, aus denen jene Doppelpunkte von F entstehen. Durch diese Punkte muss also auch $B = 0$ ebenso oft hindurchgehen, denn $\vartheta = 0$ enthält sie der Voraussetzung nach nicht. Wir können daher für B die oben mit M bezeichnete Function setzen, wenn wir nur gleichzeitig das Verhalten von A, ϑ und C in den singulären Punkten von f gehörig bestimmen. Die Curve $M = 0$ geht aber ausser durch die genannten Punktepaare und durch die singulären Punkte von f auch durch die Schnittpunkte von f mit der Jacobi'-

schen Curve der Curven Φ; durch dieselben Punkte muss folglich auch A hindurchgehen. Wir wollen deshalb direct $A = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ setzen. Alsdann ist die Vielfachheit des Productes $A \,.\, \Theta(\Phi)$ in jedem i-fachen Punkte von f (durch den die Curven Φ r_i-fach hindurchgehen) nach früheren Sätzen gleich $\mu r_i + 3r_i - 1$; die Vielfachheit von $B\ (= M)$ dagegen gleich $\nu r_i - 1$; obige Gleichung wird daher immer möglich sein, vorausgesetzt dass man der Curve $\vartheta = 0$ in jedem i-fachen Punkte von f einen $[(\mu - \nu + 3)\, r_i + i - 1]$-fachen Punkt beilegen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, dass dies immer möglich ist, d. h. dass sich eine Curve ϑ von passender Ordnung in angegebener Weise bestimmen lässt.

Da nun die Ordnungen von A, B, Θ und Φ_i bekannt sind, so ist die Ordnung x von ϑ leicht zu bestimmen; man findet:

$$x = 3s - 3 + \mu s - \nu s + n = s(\mu - \nu + 3) + n - 3\,. \tag{20}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir $r = r' = r'' = 0$ und bezeichnen die Vielfachheit von ϑ in einem i-fachen Punkte von f mit y_i, so dass:

$$y_i = (\mu - \nu + 3)\, r_i + i - 1\,. \tag{21}$$

Die Zahl der in ϑ zu bestimmenden Coëfficienten ist dann gleich $\frac{1}{2}x(x+3)$. Die Curve ϑ soll durch die $\mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha_i' i(i-1)$ Punkte gehen, welche auf f den nicht in singulären Punkten von F liegenden Schnittpunkten von Θ und F entsprechen. Die Gesammtzahl der für die Coëfficienten von ϑ gegebenen Bedingungen ist also, weil sich (für $\mu > \nu - 3$) p der letzteren Punkte aus den übrigen bestimmen, wegen (19) und (15) gleich

$$\begin{aligned}\mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha_i' i(i-1) - p + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1) &= \mu\nu - (\nu-1)(\nu-2) + p \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1) \\ &= \mu\{ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i i\} - (\nu-1)(\nu-2) + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1) + p\,.\end{aligned}$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass diese Zahl bei zunehmendem μ immer langsamer wächst als die Zahl $\frac{1}{2}x(x+3)$. Setzen wir nämlich $\mu + 1$ statt μ, so nimmt die letztere nach (20) zu um:

$$z = \tfrac{1}{2}s(s + 2x + 3)\,,$$

die erstere dagegen um:

$$t = \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i + 2y_i + 1) + ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i i\,.$$

Die Curven Φ können wir im Allgemeinen als nicht zerfallend voraussetzen, denn wenn Φ_1, Φ_2, Φ_3 einzeln in Factoren zerfallen, so wird dies doch für eine beliebige Curve des Netzes der Φ nicht eintreten*);

*) Wenn oben (p. 670) gelegentlich allen Φ ein gemeinsamer Factor beigelegt wurde, so geschah dies nur der Einfachheit wegen für den damaligen Zweck.

wir haben also, da es 2-fach unendlich viele Curven Φ in dem Netze gibt, noch die Relationen:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2) \geqq \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i-1), \quad \tfrac{1}{2}s(s+3) \geqq \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i+1)+\sigma+2,$$

und hieraus findet man durch Combination, da die positive Differenz beider Seiten der ersten Ungleichung kleiner als die der zweiten ist:

$$(22) \qquad s^2 \geqq \Sigma\alpha_i'' r_i^2 + \sigma + 1\,, \quad 3s \leqq \Sigma\alpha_i'' r_i + \sigma + 3\,.$$

Also sind das erste und dritte Glied von z einzeln grösser als das erste und dritte Glied von t. Es ist aber auch das zweite Glied von z grösser als die Summe der übrigen Glieder von t (oder gleich derselben), d. i. wegen (20) und (21):

$$s^2(\mu-\nu+3) + s(n-3) \geqq (\mu-\nu+3)\,\Sigma\alpha_i'' r_i^2 + ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i\,.$$

Hier ist nämlich der Coëfficient von $(\mu-\nu+3)$ auf der linken Seite wegen (22) grösser als auf der rechten Seite; das Glied ns tritt auf beiden Seiten gleichmässig auf; und für die übrigen Glieder hat man wieder die zweite Gleichung (22) zu benutzen. Damit ist obige Behauptung bewiesen. — Nun werden wir sogleich noch zeigen, dass die für ϑ gestellten Bedingungen immer erfüllbar sind, wenn $\mu = n-3$; also sind sie es wegen des soeben bewiesenen Satzes immer, wenn $\mu > n-3$; q. e. d. Die Fälle, wo $\mu < n-3$, erledigen sich hiernach sehr einfach; man hat nur z und t negativ zu nehmen. Schliesslich können wir sonach folgenden Satz aussprechen:

Das Schnittpunktsystem einer zu F adjungirten Curve Θ von der μ^{ten} Ordnung mit F geht bei eindeutiger Transformation von F in f über in das Schnittpunktsystem einer zu f adjungirten Curve ϑ von der Ordnung $s(\mu-\nu+3)+n-3$, wo s die Ordnung der Transformationscurven Φ_i in (2), *ν die von F, n die von f bedeutet. Von den Schnittpunkten der Curve ϑ mit f fällt aber noch eine grössere Anzahl in die bei F nicht ebenso auftretenden vielfachen Punkte von f, als bei einer beliebigen zu f adjungirten Curve nothwendig wäre; und zwar so, dass die Anzahl der nicht in singulären Punkten liegenden Schnittpunkte von f und ϑ gleich der Zahl der entsprechenden Schnittpunkte von F und Θ ist. Ferner besteht die Relation:*

$$(23) \qquad (\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\,.\,\Theta(\Phi_i) = M\,.\,\vartheta(x) + C\,.\,f,$$

wo M durch (3), *die Φ_i durch* (2) *definirt sind.*

Die letztere Gleichung haben wir nun noch für den Fall $\mu = n-3$ zu beweisen. Von den $2p-2$ Schnittpunkten der Curve Θ mit F, welche nicht in singulären Punkten von F liegen, sind dann bekanntlich $p-1$ durch die übrigen $p-1$ bestimmt (p. 437), wenn wieder p das Geschlecht von F und f bedeutet. Es kommt also, da man die Ordnung x von ϑ jetzt ebenfalls gleich $n-3$ und $y_i = i-1$ findet,

darauf an zu zeigen, dass man durch die entsprechenden $p - 1$ Punkte auf f immer eine zu f adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen kann, d. h. dass:

$$\tfrac{1}{2} n (n-3) - \tfrac{1}{2} \Sigma \alpha_i i (i-1) - p + 1 \geqq 0 .$$

Diese Bedingung ist aber immer erfüllt, denn die links stehende Zahl wird gerade gleich Null. Für $\mu = \nu - 3$ haben wir also insbesondere folgenden wichtigen Satz:

In Folge einer eindeutigen Transformation, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in eine Curve ν^{ter} Ordnung überführt, geht das Schnittpunktsystem einer zur ersteren adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in das Schnittpunktsystem einer zur letzteren adjungirten Curve $(\nu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung über. — Die späteren Untersuchungen über Punktgruppen, welche auf einer Curve n^{ter} Ordnung durch adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, gelten also unverändert bei beliebigen eindeutigen Transformationen der Grundcurve. —

Nach der eben gemachten Abzählung sind für eine adjungirte C_{n-3} immer $\frac{1}{2} \Sigma \alpha_i i (i-1)$ Bedingungen durch die Forderung des Adjungirtseins gegeben. *Es gibt daher* $[\frac{1}{2} n (n-3) - \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i i (i-1)]$-*fach, d. i.* $(p-1)$-*fach unendlich viele adjungirte* C_{n-3}; wenn wir voraussetzen, dass jene Bedingungen von einander unabhängig sind. Dies ist aber immer der Fall, denn zu demselben Resultate sind wir früher auf allgemeinem Wege gekommen, indem wir (nach dem Vorgange von Brill und Nöther) nachwiesen, dass die Zahl der linear von einander unabhängigen C_{n-3} auch niemals grösser als $p - 1$ sein kann (p. 411). Setzen wir andererseits voraus, dass die Zahl p der von einander unabhängigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in dieser Weise schon endgültig bestimmt sei, so würde man hieraus wieder einen Beweis für die Erhaltung der Zahl p ableiten können*), vorausgesetzt dass man die Identität (23) in anderer Weise für Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung abgeleitet hat; wir dagegen haben jenen Satz eben schon zum Beweise der Gleichung (23) benutzt.

Es sei endlich noch bemerkt, dass auch diese Betrachtungen ihre Gültigkeit vollständig behalten, wenn die Grundcurve singuläre Punkte specieller Natur besitzt. Man hat sich eben einen jeden Punkt dieser Art in der früher erörterten Weise als entstanden aus unendlich benachbarten vielfachen Punkten zu denken, zu denen noch Verzweigungspunkte hinzutreten (p. 494). Eine zur Grundcurve f adjungirte

*) Hierauf beruht der bei Clebsch und Gordan a. a. O. §. 14, p. 50 f. gegebene Beweis jenes Riemann'schen Satzes; doch ist die Ableitung der Identität (23) daselbst nicht für alle Fälle ausreichend, indem auf die möglichen Relationen zwischen den (dort allein vorausgesetzten) Doppelpunkten von f (sowie auf vielfache Punkte) nicht Rücksicht genommen wird.

Curve muss sich dann in den *einzelnen* vielfachen Punkten, welche sich zu einer höheren Singularität vereinigen, immer so verhalten, wie es nach der früheren Definition eine adjungirte Curve thun müsste, wenn die vielfachen Punkte getrennt lägen.*) Die hinzutretenden Verzweigungspunkte dagegen bleiben auf das Verhalten einer adjungirten Curve ohne Einfluss, wie dies vom Rückkehrpunkte bekannt ist. Eine solche Curve muss also in jedem j-fachen Punkte von f einen $(j-1)$-fachen Punkt besitzen; wenn noch weiter ein i-facher Punkt der Grundcurve mit diesem vereinigt liegt, so muss in demselben noch ein $(i-1)$-facher Punkt der adjungirten Curve hineinrücken, etc. In einem Selbstberührungspunkte (äquivalent mit 2 benachbarten Doppelpunkten) muss sie demnach die gemeinsame Tangente der Zweige der Grundcurve berühren, ebenso in einer Spitze zweiter Art (nach p. 411 äquivalent mit 1 Doppel- und 1 Rückkehrpunkt), u. s. w. — Berücksichtigt man in dieser Weise die einzelnen Bestandtheile eines höheren singulären Punktes, *so behalten der Restsatz und alle sich an denselben schliessenden Sätze über Punktsysteme auf einer Curve ihre uneingeschränkte Gültigkeit* (vgl. p. 433 ff). — Analoges gilt auch für die folgenden Betrachtungen, wie nicht immer besonders hervorgehoben werden soll.

Das Resultat dieser Bemerkungen über adjungirte Curven können wir noch in einer andern, für spätere Anwendungen wichtigen Form aussprechen. Wir haben früher gesehen, dass der Einfluss eines singulären Punktes auf die Klasse der Grundcurve derselbe ist, wie der Einfluss der verschiedenen in ihm vereinigt gelegenen vielfachen Punkte; nur hat man für jeden hinzutretenden Verzweigungspunkt die Klasse noch um eine Einheit zu verringern. Da nun ein i-facher Punkt eine Reduction gleich $i(i-1)$ an der Klasse hervorbringt, da ferner diese selbst gleich der Zahl der nicht in singuläre Punkte fallenden Schnittpunkte der Grundcurve mit einer beliebigen ihrer ersten Polarcurven ist; so können wir unsere Bestimmung der adjungirten Curven auch folgendermassen aussprechen:

Eine zu f adjungirte Curve muss in jedem singulären Punkte P von f so viele Schnittpunkte mit f gemein haben wie die erste Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf f, wenn man von der Zahl der letzteren noch die Zahl der in P liegenden Verzweigungspunkte abzieht.

2) Wir wollen endlich die Theorie der eindeutigen Transformationen noch verwerthen, um eine beim Beweise des erweiterten Correspondenzprincips gemachte Einschränkung (p. 454) zu beseitigen.**)

---

*) Vgl. Brill und Nöther: Math. Annalen, Bd. 7, p. 288.

**) Die folgende Betrachtung verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill. Vgl. dazu dessen Aufsatz über die Correspondenzformel, Math. Annalen, Bd. 7, p. 616 f.

Wir dachten uns eine Correspondenz auf $f = 0$ immer bestimmt durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, die homogen von der r^{ten} Ordnung in den x_i, von der s^{ten} Ordnung in den y_i angenommen wurde. Bei den betreffenden Beweisen setzten wir immer voraus, dass nicht alle zu einem Punkte x oder y gehörigen Curven $\varphi = 0$ mit $f = 0$ dieselben *festen* Punkte gemein haben. Um nun auch den Einfluss solcher *„Ausnahmepunkte der Correspondenz* φ" auf die Zahl der *eigentlichen* nicht in diese Ausnahmepunkte oder in singuläre Punkte von f fallenden Coincidenzen festzustellen, verfahren wir folgendermassen.

Es sei auf der Grundcurve f ohne Doppelpunkte eine Correspondenz $(\alpha, \beta)_\gamma$ ohne Ausnahmepunkte der beregten Art durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegeben; die Zahl ihrer eigentlichen Coincidenzen ist dann:

$$C = \alpha + \beta + 2\gamma p = nr - \gamma + ns - \gamma + 2\gamma p,$$

wo $r, s, \alpha, \beta, \gamma$ wieder die früheren Bedeutungen haben. Wir denken uns nun die Curve f sammt der Correspondenz φ eindeutig transformirt, so dass $f = 0$ in $F = 0$, $\varphi = 0$ in $\Phi = 0$ übergeht. Dabei bleiben, wie aus dem Begriffe der Eindeutigkeit folgt, die Zahlen γ, C, p erhalten. Die nr bez. ns beweglichen Schnittpunkte, welche einem beliebigen Punkte von f entsprechen und von denen in letzterem selbst je γ Punkte liegen, werden nun nach der Transformation auf f im Allgemeinen erst dann wieder ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden, wenn man ihnen eine Anzahl von *festen* Punkten der neuen Curve F zufügt, die wir eben als Ausnahmepunkte der Correspondenz Φ bezeichnen. In diese Ausnahmepunkte werden dann auf F eine gewisse Zahl (U) von *uneigentlichen* Coincidenzen fallen (deren Bestimmung uns besonders beschäftigen soll), während *ausserhalb* der Ausnahmepunkte noch wieder C eigentliche Coincidenzen liegen müssen. Die Gesammtheit der eigentlichen und uneigentlichen Coincidenzen werden wieder wie früher ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden, d. h. durch eine *„Coincidenzcurve"* ausgeschnitten (p. 452 f.); wir haben also *die Frage nach der Zahl U ihrer Schnittpunkte mit F zu erörtern, welche in Ausnahmepunkten der Correspondenz Φ liegen.*

Die Coëfficienten der Gleichung dieser Coincidenzcurve hängen von den Coëfficienten der Gleichungen $F = 0$ und $\Phi = 0$ ab, und ihre Ordnung ist dieselbe, als wenn weder Ausnahmepunkte von Φ noch singuläre Punkte von F vorhanden wären; denn man kann die letzteren durch continuirliche Aenderung der Coëfficienten von F und Φ beliebig zum Verschwinden bringen oder erzeugen. Sind aber r', s' die Ordnungen der Curven, welche vermöge $\Phi = 0$ einem Punkte y bez. x von F zugeordnet sind, so ist die Ordnung der Coincidenzcurve gleich $r' + s' + \gamma(\nu - 3)$. Nehmen wir nun an, dass F $d' + d''$

Doppelpunkte hat, dass σ' Schnittpunkte der zu einem Punkte y von F gehörigen Curven $\Phi = 0$ mit F in jeden der d' Doppelpunkte fallen, und dass diese Curven ausserdem noch durch e feste einfache Punkte von F je σ-fach hindurchgehen, dass endlich τ', τ die entsprechenden Zahlen für die zu einem Punkte x von F gehörigen Curven $\Phi = 0$ sind*), so haben wir für die Zahlen der beweglichen Schnittpunkte von F mit den Curven Φ die Werthe:

$$\alpha = nr - \gamma = \nu r' - \gamma - e\sigma - d'\sigma'$$
$$\beta = ns - \gamma = \nu s' - \gamma - e\tau - d'\tau',$$

und es soll die Relation bestehen:

$$U + (r'\nu - \gamma - e\sigma - d'\sigma') + (s'\nu - \gamma - e\tau - d'\tau')$$
$$+ \gamma\,[(\nu - 1)(\nu - 2) - 2d' - 2d''] = \nu\,[r' + s' + \gamma(\nu - 3)].$$

Hieraus ergibt sich sofort der Werth von U:

$$U = e(\sigma + \tau) + d'(\sigma' + \tau' + 2\gamma) + 2\gamma d''.$$

Es entfallen also — was mit den früheren Angaben übereinstimmt —
in jeden der e *einfachen Punkte* $\sigma + \tau$ *uneigentliche Coincidenzen*
„ „ „ d' *Doppelpunkte* $\sigma' + \tau' + 2\gamma$ „ „
„ „ „ d „ 2γ „ „

Bedeutet also C die Gesammtzahl aller uneigentlichen, U die aller eigentlichen Coincidenzen einer Correspondenz $(\alpha, \beta)_\gamma$ mit beliebigen festen Punkten; ist ferner Π die Ordnung der jene Coincidenzen ausschneidenden Curve, n die Ordnung der Grundcurve, p deren Geschlecht, so besteht die Relation:

$$\nu\Pi - U = C \quad (= \alpha + \beta + 2p\gamma).$$

*Die Anzahl aller eigentlichen Coincidenzen bestimmt sich daher gerade so, als ob keine Ausnahmepunkte für die Correspondenz vorhanden wären.***) Als Beispiel hiefür betrachten wir die auf $f \equiv a_x^n = 0$ durch die Gleichung $a_x^{n-1}a_y = 0$ bestimmte Correspondenz. Wir haben dann in obigen Formeln zu setzen:

---

*) Wie sich dies gestaltet, wenn die Curven Φ sich in verschiedenen Doppelpunkten d' von F verschieden verhalten, ist leicht zu übersehen. Die Zahlen σ und τ sind übrigens nicht immer von einander unabhängig, vgl. darüber p. 455.

**) Dass vorstehender Beweis nur an Correspondenzen deducirt, die durch eindeutige Transformation aus Correspondenzen ohne feste Punkte ableitbar sind, ist unbedenklich; denn es kommt nur darauf an, den Einfluss jedes einzelnen festen Punktes zu bestimmen, und dieser wird nur von dem Verhalten der Grundcurve $f = 0$, sowie der Correspondenzcurven $\varphi = 0$ in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes, nicht aber von den übrigen Eigenschaften der Grundcurve, wie Ordnung, Geschlecht u. s. w. oder von deren sonstigen Beziehungen zur Correspondenz abhängen.

$r' = n - 1,\ s' = 1,\ \gamma = 2,\ \sigma' = 2,\ d' = d,\ \sigma = \tau = \tau' = d'' = e = 0;$

und also: $\alpha = n\,(n-1) - 2 - 2\,d,\quad \beta = n - 2.$

Für die Zahl der eigentlichen Coincidenzen, d. i. für die Zahl der Wendepunkte ergibt sich so das bekannte Resultat:

$$C = 3\,n\,(n-2) - 6\,d;$$

und in jedem Doppelpunkte von f liegen $\sigma' + \tau' + 2\,\gamma = 6$ uneigentliche Coincidenzen, was mit den früheren Sätzen über das Verhalten der Hesse'schen Curve (die hier Coincidenzcurve ist) übereinstimmt.

Durch diese Betrachtungen sind die früher vorläufig mitgetheilten Sätze bewiesen (p. 454), und somit auch die zahlreichen an dieselben geknüpften Anwendungen, insbesondere die Berührungsformeln auf p. 460 und 474. — Der Einfluss fester Punkte auf Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten (p. 461) endlich ist ganz in derselben Weise zu bestimmen. Man kann ferner diese und die früheren Ueberlegungen in Betreff der Correspondenzformel auch auf Curven mit beliebigen Singularitäten ausdehnen, wenn man sich letztere immer in der bekannten Weise aufgelöst denkt. Es verlangen dann nur die Fälle eine besondere Erörterung, in denen noch Verzweigungspunkte an einen vielfachen Punkt der Grundcurve herantreten (p. 494), indem in letztere noch einige der C eigentlichen Coincidenzen hineinfallen können.*)

Wir geben schliesslich noch eine Uebersicht über die bisher für den Riemann'schen Satz von der Erhaltung des Geschlechts gegebenen Beweise. Wir haben schon die folgenden kennen gelernt:

1) Beweis von Zeuthen, wo der Satz aus einer allgemeineren Relation**) zwischen den Geschlechtszahlen zweier mehrdeutig auf einander bezogenen Curven gefolgert wird (p. 459).

2) Beweis mit Hülfe der Zahl für die berührenden Curven eines Büschels (p. 666).

3) Directer algebraischer Beweis (p. 667 ff.).

Bei letzterem haben wir auch alle vielfachen Punkte von f ausführlich berücksichtigt. Für diese Punkte bedürfen sowohl die Beweise 1), 2) als auch die im Folgenden noch zu nennenden einer weiteren Ausführung (wenigstens gegenüber den gewöhnlichen Darstellungen), welche jedoch keinerlei principiellen Schwierigkeiten begegnen wird.

---

*) Vgl. das über den Einfluss von Rückkehrpunkten auf p. 457 u. 473 Gesagte.

**) Diese Relation würde nach der früher gegebenen Ableitung nur gelten, wenn die Beziehung beider Curven auf einander durch vollständige Schnittpunktsysteme vermittelt wird (vgl. p. 446, Anmk.); aus dem von Zeuthen a. a. O. gegebenen Beweise geht aber hervor, dass dieselbe auch in anderen Fällen gültig bleibt. Für den Text kommt hier nur der erstere Fall in Betracht.

Wir erwähnen ferner folgende Beweise, die zum Theil andere Hülfsmittel und Begriffe benutzen, als wir bisher bei Behandlung algebraischer Fragen zur Anwendung brachten:

4) Ursprünglicher Beweis von Riemann.*) Zu einer algebraischen Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, oder in rechtwinkligen Coordinaten: $F(x, y) = 0$, gehört bekanntlich eine sogenannte Riemann'sche Fläche, deren *Zusammenhang* gleich $2p + 1$ gesetzt wird, d. h. welche durch $2p$ *Querschnitte* in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt werden kann, wenn p das Geschlecht von F bedeutet. Sind nun zwei Curven F und F' eindeutig auf einander bezogen, so sind es auch die zugehörigen Riemann'schen Flächen. Nach dem Begriffe des Zusammenhanges ist der letztere dann für beide Flächen derselbe, nämlich gleich $2p + 1$; daraus folgt unmittelbar die Gleichheit des Geschlechtes. — Es sei hervorgehoben, dass die Construction der zu F gehörenden Riemann'schen Fläche, insofern y als Function von x aufgefasst wird, zunächst von dem gewählten Coordinatensysteme abhängt. Es entspricht daher mehr den Begriffsbildungen der projectivischen Geometrie, wenn man nach dem Vorgange von Klein die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 in der Gleichung $f = 0$ als Liniencoordinaten auffasst und dann direct an die Klassencurve $f = 0$ (ohne Rücksicht auf irgend ein Coordinatensystem) die Construction einer die Ebene mehrblättrig überdeckenden Fläche anknüpft, wie wir es früher geschildert haben (p. 611). Diese Fläche leistet dann für die Theorie der wie f verzweigten Functionen dasselbe, wie die von Riemann construirte; man kann sie insbesondere zum Beweise des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts benutzen.**) Inzwischen würde uns eine nähere Erörterung des betreffenden Gedankenganges hier zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass die Beziehung beider Flächen letzterer Art auf einander nicht für *alle* Punkte derselben eindeutig ist, wenn die Curven eindeutig auf einander bezogen sind, zu denen sie gehören; es treten vielmehr auf jeder Fläche im Allgemeinen „Fundamentalpunkte" auf, d. h. Punkte, denen je eine ganze Curve der andern Fläche entspricht. An Stelle des Satzes von der Gleichheit des Zusammenhanges zweier eindeutig auf einander bezogenen Flächen hat man daher eine Relation zu benutzen, welche zwischen den Zusammenhangs-Zahlen beider Flächen und den Anzahlen der beiderseitig auftretenden Fundamentalpunkte besteht.***)

*) Theorie der Abel'schen Functionen, §. 11, Crelle's Journal, Bd. 54.

**) Vgl. F. Klein: Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, 11. Mai 1874.

***) Vgl. F. Klein: Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen, Math. Annalen, Bd. 7, p. 549.

5) Beweis von Cremona*); derselbe macht von Vorstellungen der Raumgeometrie Gebrauch. Man denke sich nämlich die beiden betrachteten Curven f und f' in verschiedenen Ebenen E und E' gelegen; ihre charakteristischen Zahlen seien bez. n, d, r und ν, δ, ϱ. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden dann eine Linienfläche von der Ordnung $n + \nu$. Diese Fläche wird von der Ebene E' in der Curve f' geschnitten und in einer anderen Curve der Ordnung n, bestehend aus den Verbindungslinien der n Schnittpunkte von E' und f mit den entsprechenden Punkten von f'. Die Ebene E' enthält sonach n Linien der Fläche und muss die letztere daher in n bez. auf diesen Linien gelegenen Punkten berühren. Abgesehen von diesen Berührungspunkten hat nun der Schnitt E' mit der Fläche

$$n\nu + \tfrac{1}{2} n (n-1) + \delta + \varrho - n = n\nu + \tfrac{1}{2} n (n-3) + \delta + \varrho$$

Doppelpunkte, und diese Zahl muss die Ordnung der Doppelcurve unserer Linienfläche ausmachen. Sie muss also gleich der entsprechenden Zahl sein, welche man durch Betrachtung der Ebene E erhält, d. h. gleich der Zahl:

$$n\nu + \tfrac{1}{2} \nu (\nu - 3) + d + r;$$

und daraus folgt in der That: $p = \pi$.

6) Beweis von Bertini.**) Die Punkte x von f verbinden wir mit einem festen Punkt a, die entsprechenden Punkte y von F mit einem anderen festen Punkte b. Jeder Linie durch a entsprechen dann n Linien durch b, und der Schnittpunkt ξ je zweier entsprechender Linien wird eine neue Curve X beschreiben, welche sowohl auf f wie auf F eindeutig bezogen ist; und zwar ergiebt unsere Construction für die Coordinaten von ξ die Werthe:

$$\varrho \xi_i = (xab)\, y_i - (xay)\, b_i,$$

oder, wenn die Beziehung zwischen f und F wieder durch die Gleichungen $\mu y_i = \Phi_i(x)$ vermittelt ist:

$$\sigma \xi_i = (xab)\, \Phi_i - (xa\Phi)\, b_i.$$

---

*) Vgl. dessen Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Abhandlungen der Academie zu Bologna, 2a Serie, t. 6 und 7; p. 54 in der deutschen Uebersetzung von Curtze, Berlin 1870.

**) Vgl. Battiglini's Giornale, t. 7, sowie Salmon's higher plane curves, p. 77 in Fiedler's Uebersetzung, und dazu Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 3, a. a. O.; in etwas anderer Form und Anordnung findet sich ein analoger Beweisgang bei Voss: Göttinger Nachrichten, 1873. Man findet hier die betreffenden Abzählungen mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips erledigt. Algebraisch formulirt wurde der Beweis von Clebsch; vgl. darüber Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 497.

Nehmen wir nun insbesondere a und b zu Ecken des Coordinatendreiecks (und diese mögen nicht auf f und F liegen), d. h. setzen wir $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_3 = 0$, $b_3 = 1$, so wird:

$$\text{(I)} \qquad \sigma \xi_1 = x_1 \,.\, \Phi_1(x), \quad \sigma \xi_2 = x_1 \,.\, \Phi_2(x), \quad \sigma \xi_3 = x_3 \Phi_1(x).$$

Die Curven Φ mögen nun die Curve f in ν beweglichen Punkten treffen, so, dass ν die Ordnung von F ist. Dann schneiden die Transformationscurven der durch (I) dargestellten Transformation, d. h. die Curven des Netzes

$$u_1 x_1 \Phi_1(x) + u_2 x_1 \Phi_2(x) + u_3 x_3 \Phi_1(x) = 0$$

die Curve f in $\nu + n$ beweglichen Punkten; und also *ist* X *von der Ordnung* $\nu + n$. Die Linien des Büschels $\xi_1 + \lambda \xi_3 = 0$ schneiden aber X nur in n beweglichen Punkten, denn denselben entsprechen die Linien des Büschels $x_1 + \lambda x_3 = 0$ (indem sich der Factor Φ_1 absondert). Die Curve X hat daher im Punkte a (d. i. $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$) einen ν-fachen Punkt. Von diesem lassen sich noch $\varkappa - 2\nu$ Tangenten an die Curve X legen*), wenn $\varkappa$ die Klasse von X bedeutet. Ist ferner χ das Geschlecht der letzteren Curve, so haben wir nach den Plücker'schen Formeln:

$$\varkappa - 2\nu = 2\chi - 2 + 2(n + \nu) - 2\nu.$$

Ebenso gross muss aber auch die Zahl der entsprechenden Linien des Büschels $x_1 + \lambda x_3 = 0$ sein, welche f berühren, d. h. die Zahl

$$k + r = 2p - 2 + 2n;$$

und daraus folgt $p = \chi$. Ebenso können wir auch die Beziehung zwischen den Curven F und X betrachten, wodurch wir das Resultat $\pi = \chi$ erhalten, wenn π das Geschlecht von F ist; und somit ist in der That $p = \pi$. — Die Einfachheit dieses Beweises beruht in der Einführung der Hülfscurve X.

7) Beweis von **Brill** und **Nöther**. Auf jeder C_n vom Geschlechte p giebt es eine ∞^{p-1}-Schaar von Punktsystemen, die durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden, ein Satz, welchen wir früher als eine Folge eines anderen Theorems über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} erkannten (p. 441). Diesen, sowie jenes Theorem werden wir hier benutzen. Auf f nehmen wir eine Gruppe G_π von π Punkten beliebig an, mit welcher eine andere Gruppe G_ϱ residual sei. Wäre $\pi > p$, so gäbe es noch mindestens $\infty^{\pi - p}$ andere Punktgruppen von je π Punkte, welche ebenfalls sämmtlich zu G_ϱ residual, d. i. zu G_π corresidual wären (p. 432). Diese Schaar $g_\pi^{(\pi-p)}$ geht bei der

---

*) Unter ihnen sind die Verbindungslinien von a mit etwaigen Rückkehrpunkten von X mitzuzählen (p. 666 f.).

eindeutigen Transformation nach dem Begriffe einer solchen wieder in eine Schaar $g_\pi^{(\pi - p)}$ auf F über. Für letztere ist dann aber die Bedingung

$$q \geq Q - \pi + 1$$

erfüllt, denn wir haben $q = p - \pi$, $Q = \pi$. Die auf F gelegene Schaar $g_\pi^{(p - \pi)}$ kann also nach einem früheren Satze durch adjungirte $C_{\nu-3}$ ausgeschnitten werden (p. 437) und also jede Gruppe derselben nur von $\pi - 1$ willkührlichen Bestimmungsstücken abhängen, während wir π Punkte der entsprechenden Gruppe auf f beliebig annahmen. In der Annahme $\pi > p$ liegt somit ein Widerspruch; das Nämliche lässt sich von der Annahme $\pi < p$ auf demselben Wege nachweisen, und somit bleibt nur die Möglichkeit $\pi = p$, q. e. d.

II. Schnittpunktsysteme adjungirter Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Grundcurve. — Specialschaaren.

In Vorstehendem haben wir uns vorwiegend mit der Theorie der eindeutigen Transformation als solcher beschäftigt; jetzt tritt daher an uns naturgemäss die Frage nach solchen Eigenschaften einer Curve heran, welche bei eindeutigen Transformationen erhalten bleiben, ebenso, wie wir früher die Eigenschaften einer Curve studirten, welche durch Collineationen nicht zerstörbar sind. Im Folgenden *werden wir also alle Curven als wesentlich identisch betrachten müssen, die eindeutig in einander überführbar sind.* Welches sind aber nun — so müssen wir zuerst fragen — die Kennzeichen für die Möglichkeit einer solchen Transformation? Als nothwendige Bedingung erkannten wir bereits die Gleichheit des Geschlechtes der beiden vorliegenden Curven, ausreichend ist dieselbe aber nicht. So war auch die Gleichheit der Ordnung zweier Curven nothwendig, um dieselben linear in einander überführen zu können; ausserdem aber mussten auch die absoluten Invarianten beider Curven übereinstimmen, wenn dies möglich sein sollte.*) Diese absoluten Invarianten waren gewisse für die Curve charakteristische Constante, und ihre Zahl daher gleich der Zahl derjenigen Constanten in der Gleichung der Curve, welche durch lineare Transformation nicht zerstört werden können, d. h. gleich $\frac{1}{2} n (n + 3) - 8$. Ebenso wird nun die Möglichkeit der *eindeutigen* Transformation zweier Curven in einander von gewissen absoluten Constanten, die man dann als *Moduln* bezeichnet, abhängen, wie wir in der That noch genauer sehen werden**); und die Zahl

*) Ueberdies war noch nöthig, dass für jede der beiden Curven *dieselben* Covarianten, etc. identisch verschwinden, wenn eine von ihnen durch identisches Verschwinden von Functionalinvarianten specialisirt ist.

**) Vgl. den folgenden Abschnitt.

dieser Moduln muss dann gleich der Zahl der Constanten sein, welche man in der Gleichung der betrachteten Curve durch eindeutige Transformation nicht mehr zerstören kann. Um diese Zahl zu bestimmen, muss man also vor Allem darauf ausgehen, die Ordnung der Curve möglichst zu erniedrigen; und so werden wir zu der Aufgabe geführt, *die Curve niedrigster Ordnung („Normalcurve") anzugeben, in welche eine Curve von gegebenem Geschlechte eindeutig übergeführt werden kann.* Die allgemeine Lösung derselben drängt aber weiter zu allgemeineren Untersuchungen über Punktsysteme auf einer Curve von solchen speciellen Eigenschaften, welche bei eindeutigen Transformationen erhalten bleiben; und dabei wird es sich besonders um *Schnittpunktsysteme adjungirter* C_{n-3} handeln müssen, denn eine solche geht in das einer zu C_ν adjungirten $C_{\nu-3}$ über, wenn die C_n in eine C_ν transformirt wird. Den reichen Stoff, welcher sich uns im Anschlusse an diese Fragen aufdrängt, werden wir nun in folgender Anordnung erledigen:

1) untersuchen wir die Transformation der C_n mittelst eines Netzes von adjungirten C_{n-3} als Transformationscurven.
2) betrachten wir eine Reihe von Beispielen für Punktsysteme besonderen Charakters auf einer C_n und deren gegenseitige Beziehungen.
3) behandeln wir allgemein die Bestimmung solcher *Punktgruppen auf der* C_n, *durch welche eine höhere Mannigfaltigkeit adjungirter* C_{n-3} *geht, als man nach der Zahl der Punkte einer solchen Gruppe erwarten sollte („Specialgruppe").* Dabei werden wir insbesondere den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz kennen lernen.

Hier soll sich dann in den beiden folgenden Abschnitten anschliessen:

4) die Bestimmung der Normalcurven niedrigster Ordnung und der Moduln.
5) die vollständige (anzahl-geometrische) Erledigung einiger sich bietenden Probleme durch Untersuchungen über Correspondenzen.

Die wiederholt hervorgehobenen ausgezeichneten Eigenschaften der adjungirten C_{n-3} legen es nahe, ein zweifach unendliches System von solchen Curven an Statt der Transformationscurven Φ zu benutzen. Wir wollen dabei alle festen Punkte des Netzes auf die Curve f selbst legen, so dass dasselbe nur von Punkten dieser Curve abhängig ist. Da nun von den Schnittpunkten einer adjungirten C_{n-3} im Allgemeinen $p-1$ die übrigen $p-1$ bestimmen, so werden durch $p-3$ *beliebige* Punkte von f noch ∞^2 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen. Wir haben also in obigen Formeln zu setzen:

$$s = n-3,\quad r_i = r_i'' = i-1,\quad \alpha_i = \alpha_i'',\quad \alpha_i' = 0,\quad r_i' = 0,\quad \sigma = p-3,$$

und erhalten dadurch aus (15) und (19):

$$\nu = p + 1, \quad \gamma = \tfrac{1}{2} p (p - 3).$$

Es ist also im Allgemeinen möglich eine Curve f vom Geschlechte p in eine Curve $(p+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit* $\frac{1}{2} p (p - 3)$ *Doppelpunkten zu transformiren; und zwar geschieht dies durch eine Transformation* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung, bei der alle Curven* Φ *zu f adjungirt sind und ausserdem durch* $p - 3$ *beliebig auf f gewählte Punkte* σ *gehen.* *)

Zu $p - 3$ beliebigen Punkten von f kann man hiernach noch $\frac{1}{2} p (p - 3)$ Punktepaare der Art finden, dass durch jene $p - 3$ Punkte und durch die Punkte eines solchen Paares (zusammen also durch $p - 1$ Punkte) noch *einfach unendlich viele* adjungirte C_{n-3} gehen. Dieses Resultat wollen wir noch in einer etwas anderen Form aussprechen, welche für das Folgende von Wichtigkeit wird. Ist nämlich das betrachtete Curvennetz gegeben durch:

$$\alpha_1 \varphi_1 (x) + \alpha_2 \varphi_2 (x) + \alpha_3 \varphi_3 (x) = 0,$$

und bilden y, z die Punkte eines der genannten Paare, so ist:

$$\varrho \varphi_1 (y) = \varphi_1 (z), \quad \varrho \varphi_2 (y) = \varphi_2 (z), \quad \varrho \varphi_3 (y) = \varphi_3 (z).$$

Die Zahl $\frac{1}{2} p (p - 3)$ giebt also auch die Zahl der Werthepaare yz, welche gleichzeitig den drei Gleichungen

$$\varphi_1 (y) \varphi_2 (z) - \varphi_2 (y) \varphi_1 (z) = 0, \quad \varphi_2 (y) \varphi_3 (z) - \varphi_3 (y) \varphi_2 (z) = 0,$$
$$\varphi_3 (y) \varphi_1 (z) - \varphi_1 (y) \varphi_3 (z) = 0$$

genügen (wenn ausserdem $f(y) = 0$, $f(z) = 0$), wobei die identischen Lösungen $y = z$ schon ausgeschlossen sind. Die genannten Gleichungen können wir auch durch das Verschwinden einer Matrix in der Form:

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1 (y) & \varphi_2 (y) & \varphi_3 (y) \\ \varphi_1 (z) & \varphi_2 (z) & \varphi_3 (z) \end{Vmatrix} = 0$$

zusammenfassend darstellen; und das Auftreten solcher Matrices ist für alle im Folgenden behandelten Probleme charakteristisch.

Auf der C_n gibt es sonach ∞^{p-3} Punktgruppen G_{p-1} von $p - 1$ Punkten dieser besonderen Art, und *Gleiches gilt für jede auf die* C_n

*) Diese Transformation wurde von Clebsch und Gordan angegeben (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 65). Dieselbe ist selbstverständlich nicht möglich für die Fälle $p = 0, 1, 2$, welche am Schlusse dieser Abtheilung besonders behandelt sind. Ausserdem kann nur eine Ausnahme eintreten, wenn durch $p - 3$ beliebige Punkte schon eine Zahl weiterer Punkte der C_{n-3} mit bestimmt sind, wie bei den sogenannten *hyperelliptischen* Curven (zu denen auch *alle* Curven mit $p = 2$ gehören); wir werden weiterhin sehen, dass letztere auch den einzigen Ausnahmefall bilden. Ueber die hyperelliptischen Curven vgl. auch den Schluss des folgenden Abschnittes.

eindeutig bezogene Curve; eine solche Punktgruppe geht immer in eine Gruppe derselben Beschaffenheit über, ohne doch als vollständiges Schnittpunktsystem der C_n mit einer anderen Curve definirt zu sein. Zu jeder dieser Gruppen G_{p-1} gehört nun eine ∞^1-Schaar von Gruppen Γ_{p-1}, ausgeschnitten auf der C_n eben vermittelst des durch G_{p-1} gehenden Büschels von C_{n-3}; und es ist sehr bemerkenswerth, dass *man auch umgekehrt durch jede dieser residualen Gruppen Γ_{p-1} noch einen Büschel adjungirter C_{n-3} legen kann* (vgl. auch p. 439). Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich sehr einfach, wenn man den Satz benutzt, dass *jede* auf der C_n mögliche Schaar $\gamma_p^{(1)}$ durch einen Büschel von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden kann (p. 438). Jede der ∞^1 Gruppen nämlich können wir durch einen beliebig auf der C_n gewählten *festen* Punkt A (der nur nicht in einen Punkt der Basisgruppe G_{p-1} fallen mag) zu einer Gruppe Γ_p ergänzen; die Gesammtheit dieser Gruppen Γ_p kann dann nach obigem Satze durch einen Büschel C_{n-3} ausgeschnitten werden.*) Allen Curven des letzteren muss dann aber der feste Punkt A gemeinsam sein, und somit haben wir einen zweiten (von dem ursprünglichen mit der Basisgruppe G_{p-1} verschiedenen) Büschel von C_{n-3} gefunden, welcher ebenfalls die Schaar $\gamma_{p-1}^{(1)}$ auf der C_n bestimmt.**) Durch jede Gruppe Γ_{p-1} der letzteren gehen also zwei und somit einfach unendlich viele C_{n-3}, q. e. d. Den hier abgeleiteten Satz werden wir noch in den folgenden Beispielen verschiedentlich benutzen müssen.

---

*) Dass obiger Satz auch für Schaaren $g_p^{(1)}$ mit festen Punkten gilt, folgt unmittelbar aus dem früheren Beweise (p. 437 f.); man darf dann nur nicht den dort mit α bezeichneten Punkt gerade in einen festen Punkt hineinlegen.

**) Der Satz ist evident für eine C_5 mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$). Hier ist $p - 1 = 3$. Durch drei Punkte G_3 aber und die beiden Doppelpunkte kann man nur noch ∞^1 Kegelschnitte legen, wenn die drei Punkte mit einem Doppelpunkte auf einer Geraden liegen; jede C_2 des Büschels zerfällt dann in diese feste Gerade und eine (bewegliche) Gerade durch den anderen Doppelpunkt. Die Strahlen des durch letzteren gehenden Büschels bestimmen also die Gruppen Γ_3 auf der C_5; durch jede dieser Gruppen Γ_3 geht dann selbstverständlich auch ein analoger Büschel von C_2, bestehend aus der die Gruppe Γ_3 ausschneidenden Geraden und dem Strahlbüschel durch den ersten Doppelpunkt. Es mag jedoch besonders empfohlen werden, den auf p. 438 gegebenen Beweis an diesem einfachsten Beispiele auch schematisch nochmals durchzuführen. — Die Behauptung des Textes spricht sich hier allgemein in dem Satze aus: *Wenn ein durch gewisse drei Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ und die beiden Doppelpunkte der C_5 gehender Kegelschnitt noch eine Willkürlichkeit besitzt und die C_5 noch in den Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ schneidet, so besitzt auch ein durch $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ und die Doppelpunkte gehender Kegelschnitt noch eine Willkürlichkeit.*

Kehren wir jedoch zu den *Transformationen mittelst adjungirter* C_{n-3} zurück; dieselben sind deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil es eben durch sie gelingt, die Normalcurven niedrigster Ordnung herzustellen. Dass man in der That $s = n - 3$ nehmen muss, um f in eine Curve F von möglichst niedriger Ordnung zu transformiren, folgt sofort aus unseren früheren Untersuchungen über Schnittpunktsysteme linearer Schaaren von Curven. Ist nämlich q die Mannigfaltigkeit einer solchen Schaar, Q die Zahl der beweglichen Schnittpunkte, s die Ordnung der ausschneidenden Curven, so ist nach p. 436

$$\text{für } s = n - 3 : Q \leqq q + p - 1, \quad \text{für } s > n - 3 : Q \leqq q + p .$$

Q nimmt also jedenfalls den kleinsten Werth für $s = n - 3$ an; und überdies haben wir gesehen, dass auch *jede* Schaar von Punkten, für die $Q < q + p$ durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann (p. 437). Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen, denn in unserem Falle haben wir nur $q = 2$ und $Q = \nu$ zu nehmen, wo dann ν eben die Ordnung von F ist.

Genauer aufgezählt erhalten wir von $p = 3$ an durch unsere Transformation, wenn die benutzten C_{n-3} durch $p - 3$ *beliebig* auf der C_n gewählte Punkte gehen, folgende Curven $(p + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$p = 3$:	Curven	4ter	Ordnung	mit	0	Doppelpunkten		
$p = 4$:	"	5ter	"	"	"	2	"	"
$p = 5$:	"	6ter	"	"	"	5	"	"
$p = 6$:	"	7ter	"	"	"	9	"	"
$p = 7$:	"	8ter	"	"	"	14	"	"
$p = 8$:	"	9ter	"	"	"	20	"	"

. . . .

Die allgemeine Curve 5ter Ordnung ($p = 6$) z. B. erscheint dabei als Transformation einer *speciellen* Curve 7ter Ordnung mit 9 Doppelpunkten mit der Eigenschaft, dass man auf ihr auf zweifach unendlich viele Weisen 5 ($= p - 1$) Punkte bestimmen kann, durch welche noch *zwei*fach unendlich viele C_{n-3} hindurchgehen, was auf einer allgemeinen C_7 mit $p = 6$ nicht möglich sein wird.*) Die betreffenden C_{n-3} ($= C_4$) bilden dann eine Schaar mit 5 beweglichen Schnittpunkten (also $\nu = 5$ in Obigem); und die entsprechende Schaar $g_5^{(2)}$ auf der C_5 wird ausgeschnitten durch die Geraden der Ebene, welche durch eine beliebige feste Gerade zu einer C_2 ($= C_{n-3}$) ergänzt werden. Ebenso erscheint die Curve 5ter Ordnung mit 1 Doppelpunkte als Transformation einer speciellen Curve 6ter Ordnung mit 5 Doppelpunkten, u. s. f.

*) Denn nach der unten mitgetheilten Tabelle ist $\nu = 6$ im Allgemeinen der Minimalwerth von ν (dort mit R bezeichnet) für $p = 6$.

Man sieht hieraus, wie überhaupt die Möglichkeit mittelst eindeutiger Transformation die Curvenordnung zu erniedrigen davon abhängt, ob auf der vorliegenden Curve Punktgruppen besonderen Charakters vorhanden sind oder nicht. Aus dieser Ueberlegung folgt aber auch sofort, dass unsere Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung selbst nicht nothwendig diejenigen *niedrigster* Ordnung sind, welche überhaupt aus einer vorliegenden allgemeinen Curve p^{ten} Geschlechtes hervorgehen können; denn die $p-3$ Basispunkte des zur Transformation benutzten Netzes von adjungirten C_{n-3} waren auf der C_n ganz *beliebig* gewählt. Es entsteht jetzt vielmehr die Frage, ob man nicht specielle Gruppen von mehr als $p-3$ Punkten zu Basispunkten eines solchen Netzes wählen kann, wo dann die C_{n-3} dieses Netzes in weniger als $p+1$ beweglichen Punkten schneiden würden. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir also folgende Aufgabe zu lösen: *Es sollen auf einer vorliegenden C_n vom Geschlechte p diejenigen Punktgruppen gefunden werden, durch welche man noch zweifach unendlich viele adjungirte C_{n-3} derart legen kann, dass die Zahl der beweglichen Schnittpunkte eine möglichst kleine wird.*

Die Behandlung dieser Aufgabe führt uns naturgemäss zur Fortsetzung der früher abgebrochenen algebraischen Untersuchungen über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} (p. 437 ff). Bevor wir aber auf die betreffenden Erörterungen allgemeinerer Natur eingehen, wird es zur Veranschaulichung der Fragen, um die es sich handelt, gut sein, ein Beispiel ausführlich zu betrachten; und zwar wollen wir zeigen, dass es möglich ist, *eine Curve* 7ter *Ordnung mit* 9 *Doppelpunkten*, welche soeben als Normalcurve für $p=6$ aufgeführt wurde, in *eine Curve* 6ter *Ordnung mit* 4 *Doppelpunkten* eindeutig überzuführen.

Wir haben also nachzuweisen, dass es auf einer C_7 mit $p=6$ eine Schaar $\gamma_6^{(2)}$, d. i. eine 2-fach unendliche Schaar von je 6 Punkten, gibt, welche durch ein Netz von adjungirten C_4 $(=C_{n-3})$ ausgeschnitten wird, oder — was dasselbe ist — dass man auf der C_7 Gruppen G_4 von je 3 Punkten (sei es in endlicher oder unendlicher Zahl) bestimmen kann, durch welche noch *zwei*fach unendlich viele C_4 hindurchgehen (während man ja durch $4=p-2$ *beliebig* auf der C_7 gewählte Punkte nur *ein*fach unendlich viele C_4 legen kann). Dies aber führt zu der Aufgabe drei Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ so zu bestimmen, dass die durch sie gehenden zweifach unendlich vielen C_4 sämmtlich noch einen vierten Punkt $y^{(4)}$ der C_7 enthalten. Nun bildet die Gesammtheit der adjungirten C_4 eine lineare ∞^5-Schaar von Curven:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_6\varphi_6(x)=0.$$

Die soeben gemachte Forderung können wir also dahin aussprechen, dass von den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi_1 (y^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(1)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(1)}) = 0 \\ \alpha_1 \varphi_1 (y^{(2)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(2)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(2)}) = 0 \\ \alpha_1 \varphi_1 (y^{(3)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(3)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(3)}) = 0 \\ \alpha_1 \varphi_1 (y^{(4)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(4)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(4)}) = 0 \end{aligned}$$

die letzte eine Folge der drei ersten ist, wodurch dann in der That noch 3 der 6 Verhältnissgrössen α_i willkürlich bleiben. Und dies drückt sich dadurch aus, dass alle *vier*gliedrigen aus den $\varphi_i(y^{(k)})$ zu bildenden Determinanten verschwinden müssen, d. h. dass folgendes durch Verschwinden einer Matrix dargestellte System von Gleichungen besteht:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 (y^{(1)}) & \varphi_2 (y^{(1)}) & \varphi_3 (y^{(1)}) & \varphi_4 (y^{(1)}) & \varphi_5 (y^{(1)}) & \varphi_6 (y^{(1)}) \\ \varphi_1 (y^{(2)}) & \varphi_2 (y^{(2)}) & \varphi_3 (y^{(2)}) & \varphi_4 (y^{(2)}) & \varphi_5 (y^{(2)}) & \varphi_6 (y^{(2)}) \\ \varphi_1 (y^{(3)}) & \varphi_2 (y^{(3)}) & \varphi_3 (y^{(3)}) & \varphi_4 (y^{(3)}) & \varphi_5 (y^{(3)}) & \varphi_6 (y^{(3)}) \\ \varphi_1 (y^{(4)}) & \varphi_2 (y^{(4)}) & \varphi_3 (y^{(4)}) & \varphi_4 (y^{(4)}) & \varphi_5 (y^{(4)}) & \varphi_6 (y^{(4)}) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Dies System enthält aber nur *drei* von einander unabhängige Gleichungen, nämlich z. B. diejenigen, welche aus der einen Gleichung:

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1 (y^{(1)}) & \varphi_2 (y^{(1)}) & \varphi_3 (y^{(1)}) & \varphi_i (y^{(1)}) \\ \varphi_1 (y^{(2)}) & \varphi_2 (y^{(2)}) & \varphi_3 (y^{(2)}) & \varphi_i (y^{(2)}) \\ \varphi_1 (y^{(3)}) & \varphi_2 (y^{(3)}) & \varphi_3 (y^{(3)}) & \varphi_i (y^{(3)}) \\ \varphi_1 (y^{(4)}) & \varphi_2 (y^{(4)}) & \varphi_3 (y^{(4)}) & \varphi_i (y^{(4)}) \end{matrix} \right| = 0$$

für $i = 4, 5$ oder 6 entstehen.*) Diese drei Gleichungen enthalten in Rücksicht auf die Bedingungen

$$f(y^{(1)}) = 0, \quad f(y^{(2)}) = 0, \quad f(y^{(3)}) = 0, \quad f(y^{(4)}) = 0,$$

wo $f(x) = 0$ die Gleichung der C_7 ist, noch vier Unbekannte: *Von den vier Punkten $y^{(i)}$ kann daher noch einer, etwa $y^{(4)}$, w i l l k ü r l i c h gewählt werden; zu ihm wird man dann eine e n d l i c h e Zahl von Punktetripeln $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ finden können, welche dem gefundenen Gleichungssysteme genügen.***)

Wählt man nun zu Transformationscurven das Netz der durch vier solche Punkte $y^{(i)}$ gehenden C_4, so schneiden die Curven

---

*) Vgl. z. B. Baltzer's Determinantentheorie p. 42, sowie die späteren allgemeinen Erörterungen des Textes (p. 703 f.).

**) Dass die Zahl der Lösungen nicht Null sein kann, wird sich später ergeben: am Schlusse des 4. Abschnittes werden wir dieselbe gleich 5 finden.

desselben auf der C_7 eine Schaar $\gamma_6^{(2)}$ aus, d. h. *die C_7 wird dadurch in eine C_6 eindeutig übergeführt.**)

Da wir von den vier Punkten $y^{(i)}$ noch einen willkürlich annehmen konnten, so gibt es im Ganzen noch eine ∞^1-Schaar von solchen Gruppen zu je vier Punkten; die Gesammtheit dieser Gruppen nun kann man durch einen Büschel von C_4 auf der C_7 ausschneiden, welche noch durch 6 feste Punkte der C_7 gehen (wie schon aus einem auf p. 437 gegebenen Satze hervorgeht); und zwar wird sich zeigen, dass man zu solchen 6 Basispunkten *irgend* eine Gruppe der Schaar $\gamma_6^{(2)}$ wählen kann, deren Gruppen sämmtlich zu irgend einer Gruppe G_4 von 4 Punkten $y^{(i)}$ residual waren. Dies Beispiel ist für die folgenden allgemeineren Erörterungen von grosser Wichtigkeit und mag deshalb noch eingehender besprochen werden. Man erkennt übrigens die Verwandtschaft unserer letzten Behauptung mit dem früheren Satze, dass jede Schaar $g_{p-1}^{(1)}$ aus Punktgruppen besteht, durch welche ebenfalls noch je ∞^1 C_{n-3} gehen (p. 688); wir haben hier eben zwei Specialfälle eines allgemeineren Theorems vor uns. — Nehmen wir vier Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$ nun so bestimmt an, dass durch sie noch ∞^2 C_4 gehen. Es seien ferner $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$, $x^{(6)}$ die sechs weiteren Schnittpunkte einer C_4 dieser ∞^2-Schaar mit der C_7. Durch die vier Punkte y und jeden beliebigen Punkt der Ebene gehen dann noch ∞^1 C_4, insbesondere also auch durch die Punkte y und irgend einen der sechs Punkte $x^{(i)}$; d. h. letztere bilden zusammen eine Gruppe von $p - 1 = 5$ Punkten, zu welchen es eine residuale Schaar $g_5^{(1)} = g_{p-1}^{(1)}$ gibt. Dann aber gehen auch durch jede Gruppe der letzteren Schaar noch ∞^1 C_4, insbesondere also auch (z. B. für $i = 6$) durch die 5 Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$; diese 5 Punkte liegen mit jedem *beliebigen* Punkte ξ auf einer C_4, so dass für $\varphi_i(\xi) = X_i$ die Gleichung besteht:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \varphi_3(x^{(1)}) & \varphi_4(x^{(1)}) & \varphi_5(x^{(1)}) & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \varphi_3(x^{(2)}) & \varphi_4(x^{(2)}) & \varphi_5(x^{(2)}) & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(5)}) & \varphi_2(x^{(5)}) & \varphi_3(x^{(5)}) & \varphi_4(x^{(5)}) & \varphi_5(x^{(5)}) & \varphi_6(x^{(5)}) \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die X_r *willkürliche***) Grössen sind. Da wir aber für $x^{(i)}$ jeden der sechs Punkte x wählen konnten, so müssen auch die weiteren 5 Gleichungen bestehen, welche aus der hier stehenden hervor-

*) Vgl. darüber Brill: Math. Annalen, Bd. 2, p. 471.

**) Zunächst sind nur *zwei* Quotienten $X_i : X_k$ willkürlich. Durch sie sind aber die ξ_i und somit auch die andern Grössen X *sieben*deutig bestimmt; woraus sich dann das Verschwinden der einzelnen Coëfficienten der letzteren ergibt.

gehen, wenn man je einen der Punkte $x^{(1)} \dots x^{(5)}$ mit $x^{(6)}$ vertauscht; und dies können wir dahin aussprechen, dass *alle fünfgliedrigen Unterdeterminanten der folgenden Determinante verschwinden müssen:*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \dots & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \dots & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(6)}) & \varphi_2(x^{(6)}) & \dots & \varphi_6(x^{(6)}) \end{vmatrix}.$$

Zu genau demselben Systeme von Gleichungen wird man indess — und das ist das Wichtige — durch die Forderung geführt, sechs Punkte $x^{(i)}$ so zu bestimmen, dass durch sie noch eine ∞^1-Schaar adjungirter C_4 geht. In der That müssen ja, wenn Letzteres eintreten soll, von den sechs Gleichungen:

$$\alpha_1 \varphi_1(x^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_2(x^{(1)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6(x^{(1)}) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_1 \varphi_1(x^{(6)}) + \alpha_2 \varphi_2(x^{(6)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6(x^{(6)}) = 0$$

zwei die Folgen der vier übrigen sein, indem schon je $p - 2 = 4$ Punkte der C_7 einen Büschel von adjungirten C_4 bestimmen. Dasselbe gilt aber auch umgekehrt: Ist irgend eine Gruppe Γ_6 dieser Art von Punkten $x^{(i)}$ gegeben, so bildet jedes Residuum derselben eine Gruppe G_4 von Punkten $y^{(i)}$ der eben bezeichneten Art. Weil nämlich durch *je* fünf Punkte der Γ_6 noch eine ∞^1-Schaar von C_4 geht, so bilden auch die vier Punkte G_4 zusammen mit *je einem* Punkte der Γ_6 eine Gruppe von 5 Punkten, durch welche einfach unendlich viele C_4 gehen (nach einem obigen Satze, p. 688). Durch die G_4 gehen also *sechs verschiedene* Büschel von C_4; dies ist aber nur möglich, wenn durch die G_4 noch eine ∞^2-Schaar von C_4 gelegt werden kann, oder wenn diese sechs Büschel unter einander identisch sind. Letzterer Fall ist sofort auszuschliessen; denn dann würden wir $4 + 6 = 10$ Punkte auf der C_7 haben, welche zusammen mit den 9 Doppelpunkten die Basispunkte eines Büschels von C_4 bilden müssten, während sich je zwei C_4 doch nur in 16 Punkten schneiden können. Es bleibt somit nur erstere Möglichkeit, q. e. d. *Liegen also vier Punkte G_4 auf der C_7 so, dass durch sie noch eine ∞^2-Schaar adjungirter C_4 geht, so kann durch jedes Residuum Γ_6 derselben noch eine ∞^1-Schaar solcher C_4 gelegt werden, und umgekehrt.**)

---

*) Die Schaaren $g_4^{(1)}$ kann man auch zur Transformation der C_7 in die von Riemann (a. a. O. §. 13) angegebene Normalform, d. h. in *eine C_8 mit zwei vierfachen und drei Doppelpunkten* benutzen. Seien nämlich $\psi = 0$, $\chi = 0$ zwei adjungirte C_4, welche sich in den 6 Punkten $x^{(i)}$ einer der im Texte charakterisirten Gruppen Γ_6 schneiden, und $\psi' = 0$, $\chi' = 0$ zwei andere solche C_4, welche die

Da sonach jede Gruppe G_4 dieser Art zusammen mit den 9 Doppelpunkten 13 Basispunkte einer ∞^2-Schaar von C_4 bildet, so gibt es mindestens eine ∞^2-Schaar von Gruppen Γ_6; dadurch ist aber auch die *Gesammtheit* dieser Gruppen dargestellt, denn das für die 6 Punkte $x^{(i)}$ gewonnene Gleichungssystem ist nach einem sogleich noch zu erörternden Determinantensatze mit nur *vier* von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent, so dass man noch zwei der Punkte $x^{(i)}$ willkürlich auf der C_7 annehmen darf. Man erkennt hieraus (da diese Ueberlegung umkehrbar ist), dass *alle möglichen* Gruppen Γ_6 auf der C_7 durch die ∞^2-Residuen *einer endlichen Zahl* von Gruppen G_4 jener Art erschöpft werden, und umgekehrt, dass *alle* Gruppen G_4 zu *einer endlichen Zahl* von Gruppen Γ_6 obiger Schaar $\gamma_6^{(2)}$ residual sind.

Die in letzterem Umstande ausgesprochene vollkommene Reciprocität zwischen den Schaaren $\gamma_6^{(2)}$ und $g_4^{(1)}$ ist den Curven vom Geschlechte 6 (die im Allgemeinen alle in eine C_7 mit 9 und somit in ein C_6 mit 4 Doppelpunkten transformirt werden können) eigenthümlich, wie sich sogleich ergeben wird; im Uebrigen dagegen kann man die Bestimmung von Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$ und $\gamma_p^{(2)}$ auf einer Curve vom Geschlechte p in genau derselben Weise ausführen, wie dies soeben für den Fall $p = 6$ geschah. Fragen wir uns nämlich, wie $p - 3$ Punkte $y^{(1)}, y^{(2)} \dots y^{(p-3)}$ auf der Grundcurve C_n liegen müssen, damit jede durch sie gelegte adjungirte C_{n-3} noch durch einen weiteren festen Punkt der C_n gehe, so denken wir uns den Punkten $y^{(1)}, \dots y^{(p-3)}$ zwei bewegliche Punkte $y^{(p-2)}, y^{(p-1)}$ hinzugefügt und suchen die Bedingung auf, unter welcher bei Bewegung dieser beiden neuen Punkte einer der übrigen Schnittpunkte der beweglichen C_{n-3} mit der C_n — sagen wir $y^{(p)}$ — fest bleibt. Diese Forderung involvirt zwei Bedingungen. Sehen wir also nur $y^{(1)}, \dots y^{(p-5)}$ als will-

---

6 Punkte $z^{(i)}$ einer *anderen* Γ_6 der Art gemein haben, so bediene man sich der Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = \psi \cdot \chi', \quad \varrho y_2 = \psi' \cdot \chi, \quad \varrho y_3 = \chi \cdot \chi'.$$

Eine beliebige Curve des Netzes $\alpha_1 \psi \chi' + \alpha_2 \psi' \chi + \alpha_3 \chi \chi' = 0$ hat dann mit der C_7 48 feste Punkte (von denen 36 in den 9 Doppelpunkten und je 6 bez. in den Punkten $x^{(i)}$ und $z^{(i)}$ liegen) gemein, schneidet also in der That die C_7 noch in 8 beweglichen (von den α abhängenden) Punkten. Der Büschel $\psi + \lambda \chi = 0$ aber schneidet nur noch in 4 beweglichen Punkten, ebenso der Büschel $\psi' + \lambda \chi' = 0$; die entstehende C_8 hat also in den Punkten $y_1 = 0, y_3 = 0$ und $y_2 = 0, y_3 = 0$ je einen vierfachen Punkt, q. e. d. — Vgl. über die Riemann'schen Normalformen Brill: Math. Annalen, Bd. 1, p. 401 und Bd. 2, a. a. O. Zur Herstellung derselben fordert Riemann die Aufsuchung zweier algebraischen Functionen, welche in möglichst wenig Punkten Null und unendlich werden, d. h. deren Zähler und Nenner Curven darstellen, die möglichst viele Punkte der Grundcurve gemein haben. Solche Functionen sind eben hier die Quotienten $\psi : \chi$ und $\psi' : \chi'$.

kürlich gegeben an und fragen nun, *wie* $y^{(p-4)}$ *und* $y^{(p-3)}$ *liegen müssen, damit alle durch sie gelegten adjungirten* C_{n-3} *noch durch einen gemeinsamen Punkt* $y^{(p)}$ *gehen.* Da hier vier Punkte weniger gegeben sind, als zur Festlegung einer solchen C_{n-3} erforderlich wären, so kann man durch die gegebenen $p-5$ Punkte*) 5 Curven $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots \varphi_5 = 0$ legen, aus denen eine beliebige durch jene Punkte gehende adjungirte C_{n-3} sich linear zusammensetzt; die allgemeine Curve dieser Schaar hat also die Form:

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 = 0. \tag{1}$$

Die Forderung ist, dass jede durch $y^{(p-4)}$ und $y^{(p-3)}$ gehende Curve dieses Systems auch durch $y^{(p)}$ gehe, dass also aus den Gleichungen

$$\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p-4)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p-4)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p-4)}) = 0$$
$$\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p-3)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p-3)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p-3)}) = 0$$

von selbst die Gleichung folge:

$$\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p)}) = 0.$$

Hierzu ist nöthig und hinreichend, dass die Functionswerthe der letzten Gleichung sich aus denen der beiden ersten linear zusammensetzen, dass also für $i = 1, 2, \ldots 5$ die Gleichungen bestehen:

$$\varphi_i (y^{(p)}) = \lambda \varphi_i (y^{(p-4)}) + \mu \varphi_i (p^{(p-3)}). \tag{2}$$

Dies sind 5 Gleichungen, welche λ, μ und die Coordinaten der drei Punkte $z^{(p-4)}$, $y^{(p-3)}$, $y^{(p)}$, also wegen $f(y^{(p-4)}) = 0$, $f(y^{(p-3)}) = 0$, $f(y^{(p)}) = 0$ auch 5 Unbekannte enthalten. Dieselben kann man bekanntlich auch für $y_i^{(p-4)} = x_i$, $y_i^{(p-3)} = y_i$, $y_i^{(p)} = z_i$ durch die eine Formel:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 (x) & \varphi_2 (x) & \varphi_3 (x) & \varphi_4 (x) & \varphi_5 (x) \\ \varphi_1 (y) & \varphi_2 (y) & \varphi_3 (y) & \varphi_4 (y) & \varphi_5 (y) \\ \varphi_1 (z) & \varphi_2 (z) & \varphi_3 (z) & \varphi_4 (z) & \varphi_5 (z) \end{matrix} \right\| = 0 \tag{3}$$

ersetzen, welche aussagt, dass alle aus dem in Verticallinien eingeschlossenen Schema („Matrix“) der φ_i zu bildenden dreigliedrigen Determinante einzeln verschwinden sollen, und welche mit *drei* von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent ist. Man hat dann die Frage zu beantworten, wie viele Werthsysteme x, y, z dies System von Gleichungen und die Gleichungen $f(x) = 0$, $f(y) = 0$, $f(z) = 0$ gleichzeitig befriedigen.**)

---

*) Im Falle $p = 6$ konnten wir ja auch noch einen der 4 Punkte $y^{(i)}$ willkürlich annehmen.

**) Setzen wir zur Abkürzung $\varphi_i (x) = a_i$, $\varphi_i (y) = b_i$, $\varphi_i (z) = c_i$, so verschwinden *alle* Determinanten der Matrix (3), wenn folgende *drei* Gleichungen bestehen (vgl. die erste Anmerkung auf p. 691):

Bezeichnen wir vorläufig die Zahl dieser Werthsysteme mit Z*), so gibt es also zu $p-5$ beliebigen Punkten noch Z Punktetripel der genannten Art; und im Ganzen gibt es ∞^{p-5} Gruppen G_{p-2}, durch welche noch je ∞^2 C_{n-3}**) hindurchgehen. Diese Gruppen vertheilen sich nun in merkwürdiger Weise auf ∞^{p-6} Schaaren von je einfach unendlich vielen Gruppen, d. h. ∞^{p-6} Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$, von denen jede zu allen Gruppen einer bestimmten Schaar $\gamma_p^{(2)}$ residual ist, so dass also alle Gruppen einer Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ unter einander corresidual sind. Man gelangt zu diesem Resultate, ebenso wie zu dem entsprechenden für $p=6$, mit Hülfe des auf p. 688 angegebenen Satzes über Schaaren $g_{p-1}^{(1)}$. Ist nämlich Γ_p irgend eine zu einer Gruppe G_{p-2} residuale Gruppe, welche aus den Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ bestehen möge, so folgt zunächst aus jenem Satze, dass man durch je $p-1$ dieser Punkte $y^{(i)}$ noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen kann; und deshalb müssen alle $(p-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten der folgenden p-gliedrigen Determinante verschwinden (vgl. p. 693):

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix}.$$

Die hieraus entspringenden Gleichungen aber sagen eben aus, dass *man durch die p Punkte $x^{(i)}$ der Gruppe Γ_p noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen kann;* analog wie oben beweist man auch leicht die Umkehrung dieses Satzes. Das zuletzt erwähnte Gleichungssystem zeigt sich äquivalent mit *vier* Bedingungen, d. h. man kann noch $p-4$ Punkte einer Gruppe Γ_p willkürlich annehmen. Sind dann $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, $\varphi_4=0$ irgend vier Curven der durch die $p-4$

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} = 0;$$

es sei denn, dass auch gleichzeitig:

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Lösungen des Gleichungssystems (3) zu finden, hat man also von den gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (α), wozu immer noch die Bedingungen $f(x)=0$, $f(y)=0$, $f(z)=0$ hinzutreten, die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (β) abzuziehen.

*) Es ist $Z=\frac{1}{6}(p+1)\,p\,(p-1)-p\,(p-1)$; vgl. den Schluss des vierten Abschnittes (p. 753).

**) Es sind hier und im Folgenden selbstverständlich immer *adjungirte* C_{n-3} gemeint.

Punkte bestimmten ∞^3-Schaar, so haben wir zur Aufsuchung einer Gruppe Γ_p vier weitere Punkte ξ, η, ζ, ϑ so zu bestimmen, dass alle aus der Determinante:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) & \varphi_3(\xi) & \varphi_4(\xi) \\ \varphi_1(\eta) & \varphi_2(\eta) & \varphi_3(\eta) & \varphi_4(\eta) \\ \varphi_1(\zeta) & \varphi_2(\zeta) & \varphi_3(\zeta) & \varphi_4(\zeta) \\ \varphi_1(\vartheta) & \varphi_2(\vartheta) & \varphi_3(\vartheta) & \varphi_4(\vartheta) \end{vmatrix}$$

zu bildenden ersten Unterdeterminanten verschwinden. Während also einerseits die Bestimmung der Gruppen Γ_p *direct* durch Aufsuchung der gemeinsamen Lösungen (d. i. Werthsysteme ξ, η, ζ, ϑ) des so resultirenden Gleichungssystems geschehen kann, *erscheint andererseits das Problem der Bestimmung von Gruppen Γ_p hiernach auf das der Bestimmung von Gruppen G_{p-2} obiger Art zurückgeführt;* denn sämmtliche Γ_p erhält man ja als Residuen sämmtlicher G_{p-2}.

Bezeichnen wir nun mit Z' die Zahl der Punktquadrupel ξ, η, ζ, ϑ der C_n, welche dem zuletzt erhaltenen Gleichungssysteme genügen*), so *können wir diese Resultate in Folgendem zusammenfassen.* Geht man von $p-5$ beliebigen Punkten aus, so gibt es noch Z verschiedene Punktetripel, welche mit ihnen zusammen je eine G_{p-2} bestimmen, durch die ∞^2 C_{n-3} gehen; diese ∞^2 C_{n-3} schneiden auf der C_n eine Schaar $\gamma_p^{(2)}$ von Gruppen Γ_p aus**), und durch jede $\Gamma_p^{(2)}$ gehen noch ∞^1 andere C_{n-3}. Umgekehrt bestimmt die Gesammtheit der letzteren auf der C_n eine Schaar $g_{p-2}^{(1)}$, von deren einer Gruppe G_{p-2} wir ausgingen. Im Ganzen gibt es ∞^{p-6} verschiedene solche Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$, so dass erst $p-5$ beliebige Punkte eine einzelne $G_{p-2}^{(1)}$ bestimmen. Dieselben theilen sich in Z *völlig getrennte* Systeme entsprechend den Wurzeln der Gleichung Z^{ten} Grades, von welcher ihre Bestimmung abhängt; der Art, dass keine Schaar eines Systems mit keiner Schaar eines anderen Systems eine vollständige Gruppe G_{p-2} gemein hat, und dass man von einem Systeme aus nicht durch *contiunirlichen* Uebergang mittelst lauter Gruppen $G_{p-2}^{(1)}$ zu einer Gruppe der anderen $Z-1$ Systeme gelangen kann.***) Da

*) Wir finden später: $Z' = \frac{1}{12} p\,(p-1)^2(p-2) - \frac{1}{2} p\,\{(p-1)(p-2) - p + 1\}$.

**) Die C_n kann also auch in eine C_p eindeutig transformirt werden; es ist aber eine noch weitere Reduction der Ordnung möglich.

***) Solchen völlig getrennten Systemen von Punktgruppen auf der C_n werden wir später bei Betrachtung der Berührungscurven noch wiederholt begegnen. Beispiele dafür geben auch die 3 Systeme von Polepaaren auf der C_3 (p. 527) und die Systeme von Punkten auf einer solchen, in denen C_2 mehrpunktig berühren können (p. 533 f.).

nun jeder Schaar $g^{(1)}_{p-2}$ eine Schaar $\gamma_p^{(2)}$ von Residualgruppen zugeordnet ist, so gibt es auch ∞^{p-6} verschiedene Schaaren $\gamma_p^{(2)}$, was mit obiger directen Abzählung übereinstimmt; und letztere reihen sich in Z' getrennte Systeme ein. *Diese Zahl Z' stimmt insbesondere im Falle $p = 6$ mit der Zahl Z überein;* und dadurch ist dieser Fall in der schon oben angegebenen Weise ausgezeichnet (p. 694). Ist nämlich $p = 6$, so gibt es nur eine *endliche* Zahl von Schaaren $g^{(1)}_{p-2}$ und nur eine *endliche* Zahl von Schaaren $\gamma_p^{(2)}$, und die Anzahl beider Schaaren muss die gleiche sein, da aus einer Schaar $g^{(1)}_{p-2}$ immer *eine* Schaar $g_p^{(2)}$ eindeutig hervorgeht (ohne dass noch willkürliche Punkte in Betracht kämen). Für $p - 6 > 0$ dagegen ist zu solchem *eindeutigen* Entsprechen je zweier Schaaren keine Veranlassung mehr.

Es sei schliesslich noch hervorgehoben, dass *es Schaaren $\gamma_p^{(2)}$ und $g^{(1)}_{p-2}$ für $p = 5$, oder überhaupt für $p < 6$ nicht geben kann;* denn in diesem Falle würde die Zahl $p - 6$ der beiderseitig noch vollkommen willkürlich annehmbaren Punkte negativ werden, was keinen Sinn hat. Man überzeugt sich hiervon übrigens auch leicht direct. Eine Curve vom Geschlechte $p = 5$ nämlich kann (wenn sie nicht hyperelliptisch ist) nach p. 687 in eine $(p + 1)^{\text{ter}}$, d. i. 6ter Ordnung mit $\frac{1}{2} p (p - 3) = 5$ Doppelpunkten transformirt werden; sollte es auf dieser C_6 aber eine Gruppe G_5 geben, durch welche noch ∞^1 adjungirte C_3 (C_{n-3}) hindurchgehen, so müssten alle diese C_3 ausser den 5 Punkten der G_5 noch die 5 Doppelpunkte der C_6, d. h. im Ganzen 10 Punkte gemein haben, was nicht möglich ist.

Nachdem so an einzelnen Beispielen der Begriff von „Specialgruppen“ erörtert und die Existenz solcher nachgewiesen ist, gehen wir zur *allgemeinen* Untersuchung derselben über. Und zwar wollen wir zunächst den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz ableiten, welcher sich auf die gegenseitigen Beziehungen solcher Gruppen bezieht (und den wir für Specialfälle auf p. 688 und 693 ausgesprochen haben) und erst dann die Existenz solcher Gruppen durch Aufstellung der betreffenden Bedingungsgleichungen allgemein nachweisen.

Wir gehen hier zunächst auf unsere früheren Untersuchungen über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} zurück, welche wir mit dem wichtigen Satze abgebrochen haben (p. 437), dass *eine q-fach unendliche lineare Schaar $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen zu je Q Punkten immer dann durch eine Schaar von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden kann, wenn die Relationen erfüllt sind*):*

---

*) Eine Schaar $g_Q^{(q)}$, für welche $q = Q - p + 1$, wird durch C_{n-3} ausgeschnitten, die durch $R = 2p - 2 - Q$ feste Punkte G_R gehen. Ist also $Q \leq p - 1$

(6) $$q \geqq Q - p + 1\,, \quad oder \quad Q - q \leqq p - 1\,.$$

Bei dem (in Folge gesonderter Betrachtung der verschiedenen Specialfälle) etwas längeren Beweise gingen wir davon aus, dass der Satz für $q = 0$ jedenfalls richtig ist, und zeigten dann, dass er auch für $q = 1$ gilt, indem wir (für $Q \leqq p$) auf einen Widerspruch stiessen, der sich eben nur durch Annahme des genannten Satzes heben liess. Die übrigen Fälle erledigten sich sodann, indem wir von einer Schaar $g_{Q-1}^{(q-1)}$ zu einer Schaar $g_Q^{(q)}$ aufstiegen.

Es ist schon hervorgehoben worden, dass es sich für uns hauptsächlich um die Untersuchung sogenannter „*Specialgruppen*" handelt*), d. h. Punktgruppen von solchen Eigenschaften, wie sie in obigen Beispielen gefordert wurden (p. 686). Allgemein wollen wir jetzt unter einer „*Specialschaar*" $g_Q^{(q)}$ eine q-fach unendliche lineare Schaar von Punktgruppen zu je Q Punkten verstehen, für welche:

(7) $$q > Q - p + 1\,,$$

d. h. aus welcher eine bestimmte Specialgruppe $G_Q^{(q)}$ erst durch Annahme von *mehr* als $Q - p + 1$ beliebigen Punkten festgelegt wird. Die auf einer C_n möglichen Specialschaaren sind nun keineswegs von einander unabhängig; vielmehr lassen sie sich in merkwürdiger Weise zu je zweien so gruppiren, dass aus einer gegebenen Schaar immer eine andere abgeleitet werden kann, und umgekehrt, wie es in obigen Beispielen der Fall war; und zwar geschieht dies zufolge des Satzes:

Haben R Punkte G_R auf einer nicht zerfallenden Curve f vom Geschlechte p eine solche specielle Lage, dass die durch sie gehenden adjungirten Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung noch eine q-fach unendliche

---

und q dennoch eine positive Zahl (> 0), so muss die Gruppe G_R von ganz besonderem Charakter sein; sind dann $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ zwei C_{n-3} durch G_R, so ist $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ eine algebraische Function, welche für Q, also für weniger als p, Punkte unendlich wird. *Nach dem Satze des Textes kann aber auch umgekehrt jede algebraische Function der letzteren Art in der Form $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ dargestellt werden.* In dieser Form findet sich der Satz auch bei Riemann, a. a. O. §. 10. — Es sei hier noch ein Beispiel für den Satz erwähnt. Zu 7 beliebigen Punkten einer C_4 wird man 2 weitere (und zwar auf 3 verschiedene Arten nach p. 672 f.) so bestimmen, dass durch alle 9 noch ∞^1 C_3 gehen. Die 3 beweglichen Schnittpunkte bilden dann eine Schaar $g_3^{(1)}$, für welche die Bedingung (6) erfüllt ist; sie können daher auch durch einen *Geradenbüschel* ($C_{n-3} = C_1$) ausgeschnitten werden. Letzterer erzeugt dann umgekehrt zusammen mit dem C_3-Büschel die C_4 in Chasles'scher Weise (p. 435).

*) Für das Folgende vgl. Brill und Nöther: Math. Annalen, Bd 6, p. 280 ff.

Schaar bilden (q *eine ganze positive Zahl und* $> p - 1 - R$), *wobei sie die Schaar* $\gamma_Q^{(q)}$ *ausschneiden* ($Q = 2p - 2 - R$), *so gehört die Gruppe* G_R *einer* ∞^r*-Schaar an, für welche* $r = R - p + 1 + q = p - 1 - Q + q$, *die also selbst wieder eine Specialschaar ist; d. h. durch jede Gruppe* $\Gamma_Q^{(q)}$ *der Schaar* $\gamma_Q^{(q)}$ *geht noch eine* ∞^r*-Schaar von adjungirten Curven* $(n - 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung hindurch, welche die Schaar* $g_R^{(r)}$ *ausschneidet.*

Zum Beweise könnten wir wieder unter Benutzung von Determinantensätzen denselben Weg einschlagen wie für den Fall $R = p - 2$, $r = 1$, $Q = p$, $q = 2$ auf p. 696; man gelangt aber auch unter Benutzung des Satzes*) über Specialschaaren (p. 437 und 698) in derselben Weise einfach zum Ziele, wie oben beim Falle $q = r = 1$, $Q = R = p - 1$ (p. 688); und zwar auf folgende Art.

Es sei eine Specialschaar $g_Q^{(q)}$ gegeben, für die also die Ungleichung (7) befriedigt ist; und zwar sei

$$q = Q - p + 1 + r, \tag{8}$$

wo r irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, aber so, dass $r < p - 1$. Wir fügen nun zu jeder Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$ dieselben festliegenden (beliebig gewählten) r Punkte hinzu. Aus der gegebenen Schaar entsteht dann eine andere $g_{Q'}^{(q')}$, wo

$$Q' = Q + r, \quad q' = q,$$

für welche also die Anzahl der willkürlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen der Schaar. Wegen (8) ist nun

$$q' = Q' - p + 1,$$

d. h. es ist für die Schaar $G_{Q'}^{(q')}$ die Bedingung (6) erfüllt. Die letztere Schaar kann daher durch ein System von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden; und durch jede Gruppe $G_{Q'}^{(q')}$ der Schaar geht somit eine adjungirte C_{n-3}. Da aber von den Q' Punkten der Gruppe r völlig beliebig gewählt waren, so muss sich durch die $Q' - r = Q$ Punkte der betreffenden Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch mindestens eine ∞^r-Schaar von adjungirten C_{n-3} legen lassen, d. h. alle durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ gehenden C_{n-3} der Art schneiden eine Schaar $g_R^{(\varrho)}$ aus, für welche $R = 2p - 2 - Q$ und ϱ mindestens $= r$, d. i. nach (8):

$$\varrho \geqq q + p - 1 - Q, \quad \text{also} \quad \geqq R - p + 1 + q. \tag{9}$$

---

*) Neben dem folgenden Beweise des Textes findet man a. a. O. einen Beweis, welcher sich durch Verallgemeinerung der Betrachtung auf p. 688 ergibt. — Auf den früher in dem anderen Beispiele eingeschlagenen Beweisgang kommen wir in dem weiterhin folgenden Abschnitte über das Verschwinden der Θ-Function zurück.

Aber es kann ϱ auch nicht $> r$ sein. Setzen wir nämlich $\varrho = R - p + 1 + \varkappa$, wo $\varkappa > q$, so wird man von der Schaar $g_R^{(\varrho)}$ zu einer Schaar $g_Q^{(\varkappa)}$ durch ganz dieselbe Betrachtung geführt, vermöge deren wir soeben aus der Schaar $g_Q^{(q)}$ die Schaar $g_R^{(\varrho)}$ ableiteten; so dass analog der Relation (9) für $\varkappa$ die Ungleichung resultirte:

$$\varkappa \geqq Q - p + 1 + \varrho. \tag{10}$$

Nun sind aber beide Schaaren ($g_Q^{(q)}$ und $g_Q^{(\varkappa)}$) zu einer beliebigen Gruppe $G_R^{(\varrho)}$ residual, wie aus unserer Construction der Schaaren $g_R^{(r)}$ und $g_Q^{(\varkappa)}$ unmittelbar erhellt; beide Schaaren müssen also die gleiche Zahl willkürlicher Parameter enthalten (vgl. p. 434), und somit folgt $\varkappa = q$, also auch wegen (10) und (8): $\varrho = r$. Dies Resultat sprechen wir in folgendem Satze aus:

Legt man durch eine Gruppe $G_Q^{(q)}$ einer Specialschaar $g_Q^{(q)}$ auf der C_n, für welche q durch (8) *gegeben, d. h. $q = Q - p + 1 + r$ ist, eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so schneidet dieselbe die C_n noch in $2p - 2 - Q = R$ Punkten, die ihrerseits, wenn man durch $G_Q^{(q)}$ alle möglichen C_{n-3} der Art legt, eine Specialschaar $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$ bilden, für welche r den aus* (8) *sich ergebenden Werth: $r = R - p + 1 + q$ besitzt.*

Dies ist aber wieder, wie man sofort erkennt, der oben nur in anderer Form ausgesprochene Riemann-Roch'sche Satz*), durch welchen die erwähnte paarweise Gruppirung der Specialschaaren vermittelt wird; *für je zwei derartig zusammengehörige Schaaren $g_Q^{(q)}$ und $g_R^{(r)}$ haben wir nach ihm die Relationen*:

$$Q + R = 2p - 2, \quad Q - R = 2q - 2r. \tag{11}$$

Einige Beispiele mögen dazu dienen, den Sinn des Satzes noch näher zu erläutern:

A) C_5 mit einem Doppelpunkte: $p = 5$. Wir können hier eine *Specialschaar* $g_5^{(2)}$ durch adjungirte C_2 ausschneiden, von denen jede in dieselbe feste durch den Doppelpunkt gehende und eine beliebig bewegliche Gerade zerfällt. Da $Q = 5$ und $q = 2$, so findet man aus (11) $R = 3$, $r = 1$, also eine $g_3^{(1)}$; dieselbe entsteht, wenn die adjungirte C_2 in eine beliebige feste und eine bewegliche durch den Doppelpunkt gehende Gerade zerfällt.

B) C_6 mit zwei Doppelpunkten; $p = 8$. Wir können eine Specialschaar $g_Q^{(q)} = g_7^{(1)}$ durch eine Schaar von C_{n-3} ausschneiden, von

*) Er wurde in anderer Weise von Riemann für einige specielle Fälle abgeleitet: a. a. O. und §. 5, Crelle's Journal, Bd. 54, und: Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, ib. Bd. 66; sodann von Roch allgemein bewiesen: ib. Bd. 64, p. 372. Vgl. darüber den unten folgenden Abschnitt XI über das Verschwinden der Θ-Function.

denen jede in eine feste durch einen Doppelpunkt gehende Gerade zerfällt und in einen beweglichen Kegelschnitt durch den andern Doppelpunkt, welcher ausserdem durch 3 feste Punkte der C_6 geht. Für die zugehörige $g_R^{(r)}$ findet man $R = 7$, $r = 1$; die 7 Punkte, welche durch eine beliebige C_2 des erwähnten Büschels auf der Grundcurve bestimmt werden, bilden also zusammen mit den 2 Doppelpunkten der C_6 ein System von 9 Punkten, durch die noch unendlich viele Curven 3ter Ordnung hindurchgehen.*) — Eine Specialschaar $g_Q^{(q)} = g_6^{(2)}$ erhält man, wenn die ausschneidenden C_{n-3} aus einer festen adjungirten C_2 und einer beweglichen Geraden bestehen. Es wird für die zugehörige Schaar $R = 8$, $r = 3$, und die $g_8^{(3)}$ wird durch die Gesammtheit der adjungirten C_2 (zusammen mit einer festen Geraden) ausgeschnitten.

C) C_5 mit 2 Doppelpunkten, vgl. die Anmerkung auf p. 688.

D) C_7 mit 9 Doppelpunkten, vgl. p. 690 ff. —

Wir gehen jetzt dazu über, diejenigen Erörterungen allgemein durchzuführen, welche uns bei der C_7 mit 9 Doppelpunkten auf gewisse Determinantensysteme führten; wir werden gleichzeitig auf die betreffenden Determinantensätze etwas eingehen. Auf die Bestimmung der Anzahl von möglichen Specialschaaren (wie der Zahl Z im Beispiele) legen wir dabei zunächst kein Gewicht weiter. Es kommt uns vielmehr darauf an, gewisse Grenzen für die Zahlen Q, R, q, r festzustellen, innerhalb deren die Aufsuchung der Specialschaaren noch möglich sein kann. Die dazu nöthigen algebraischen Ueberlegungen bleiben dieselben, wenn man die adjungirten C_{n-3} durch adjungirte Curven beliebiger Ordnung ersetzt. Wir behandeln daher sogleich folgende allgemeinere Aufgabe:

Gegeben sei eine ∞^t-Schaar von adjungirten Curven: Man soll auf $f = 0$ R Punkte (G_R) so bestimmen, dass durch sie noch ∞^q Curven der gegebenen Schaar gehen.

Dies Problem führt natürlich ebenfalls auf das Verschwinden einer Matrix, bez. der Unterdeterminanten einer solchen. Die ∞^t-Schaar von Curven sei gegeben durch die Gleichung:

$$\Psi \equiv \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \ldots + \alpha_{t+1} \psi_{t+1} = 0; \tag{12}$$

für sie bestehen die R Gleichungen:

$$\Psi(x^{(1)}) = 0, \quad \Psi(x^{(2)}) = 0, \ldots \Psi(x^{(R)}) = 0, \tag{13}$$

wo gleichzeitig: $f(x^{(1)}) = 0$, $f(x^{(2)}) = 0$, $\ldots f(x^{(R)}) = 0$. Die Gleichungen (13) sollen von den Verhältnissen der Parameter α_i noch q willkürlich lassen; es sind also zur Bestimmung dieser Verhältnisse nur $t - q$ verwendbar, oder mit andern Worten: aus je $t - q + 1$

*) Dies ist also wieder ein Beispiel für den schon auf p. 439 behandelten Fall.

der Gleichungen (13) soll jede eine Folge der übrigen $t - q$ sein. Hieraus folgt aber entsprechend der Gleichung (5) die Bedingung, dass sämmtliche $(t - q + 1)$-gliedrige Determinanten des Schemas:

$$(14)\qquad \left\|\begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \dots & \psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \dots & \psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(R)}) & \psi_2(x^{(R)}) & \dots & \psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{matrix}\right\|;$$

verschwinden müssen*); also z. B. alle Determinanten der Form:

$$(15)\quad D_{ik} = \left|\begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) & \psi_i(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) & \psi_i(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \psi_i(x^{(t-q)}) \\ \psi_1(x^{(k)}) & \psi_2(x^{(k)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(k)}) & \psi_i(x^{(k)}) \end{matrix}\right|;$$

wo für i alle Werthe der Reihe $t - q + 1,\ t - q + 2, \dots, t + 1,$
„ k „ „ „ „ $t - q + 1,\ t - q + 2, \dots R$
der Reihe nach zu setzen sind. *Es ist aber zur Erfüllung jener Gleichungen auch gerade nothwendig und hinreichend, dass alle Determinanten D_{ik} einzeln verschwinden***), vorausgesetzt, dass die $(t - q)$-gliedrige Determinante

$$D = \left|\begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \dots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) \end{matrix}\right|$$

nicht selbst Null ist. Dies aber können wir voraussetzen, da wir dem Curvensysteme (12) keine besonderen Bedingungen auferlegt haben. Zum Beweise jener Behauptung entwickeln wir D_{ik} nach den Elementen der letzten Horizontalreihe in der Form:

$$D_{ik} = \psi_1(x^{(k)}) \,.\, B_{1i} + \psi_2(x^{(k)}) \,.\, B_{2i} + \dots + \psi_{t-q}(x^{(k)}) \,.\, B_{t-q,i} + \psi_i(x^{(k)}) \,.\, D,$$

wo das Bildungsgesetz der B_{hi} als Unterdeterminanten von D_{ik} leicht zu übersehen ist. Setzen wir nun

$$(16)\quad C_{ik} = \psi_i(x^{(k)}) - \frac{D_{ik}}{D} = -\frac{1}{D}\left\{\psi_1(x^{(k)}) B_{1i} + \dots + \psi_{t-q}(x^{(k)}) B_{t-q,i}\right\},$$

---

*) Für $R = t - q + 1$ ist dies Problem auch von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen, p. 211 ff.) in der Weise formulirt. — Den allgemeinen Fall kann man auch durch das Verschwinden einer Matrix darstellen, wenn man dem Schema (14) noch $R - t + q - 1$ Reihen *willkürlicher* Grössen zufügt, wie in dem Beispiele auf p. 692.

**) Vgl. Kronecker in Baltzer's Determinantentheorie, p. 42 der dritten Auflage. — Auf ähnliche Fragen beziehen sich die Untersuchungen von Roberts: Crelle's Journal, Bd. 67, p. 266.

so wird $C_{ik} = \psi_i(x^{(k)})$, wenn i oder k einen der Werthe 1 bis $t-q$ annimmt, indem dann D_{ik} verschwindet; und wenn man dem Index i alle Werthe von 1 bis $t+1$, dem Index k alle Werthe von 1 bis R beilegt, so bilden die C_{ik} zufolge ihrer Zusammensetzung aus den ψ und B*) ein System von Elementen, für welches *alle* aus ihm zu bildenden $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten Null sind. Setzen wir also voraus, dass auch die Determinanten

$$(17)\qquad \begin{matrix} D_{t-q+1,t-q+1}, & D_{t-q+2,t-q+1}, & \ldots & D_{t+1,t-q+2}, \\ D_{t-q+1,t-q+2}, & D_{t-q+2,t-q+2}, & \ldots & D_{t+1,t-q+2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{t-q+1,R}, & D_{t-q+2,R}, & \ldots & D_{t+1,R}, \end{matrix}$$

sämmtlich Null sind, wie wir es oben thaten, so stimmen wegen (16) *alle* Elemente C_{ik} bez. mit den $\psi_i(x^{(k)})$ überein, d. h. sie bilden wieder das Schema (14); und es verschwinden daher auch *alle* $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten der ψ, q. e. d.

In dem Gleichungssysteme (14) sind also nur

$$(q+1)(R-t+q)$$

von einander unabhängige Gleichungen enthalten, nämlich z. B. diejenigen, welche durch das Verschwinden der in (17) zusammengestellten Determinanten D_{ik} gegeben werden. Die gemeinsamen Lösungen der letzteren geben also auch diejenigen des Systems (14), denn jedes Werthsystem, welches die Determinanten (17) zum Verschwinden bringt, genügt auch allen anderen aus (14) entspringenden Bedingungen; davon hat man jedoch noch abzusondern alle Werthsysteme, für welche Determinanten der Form D verschwinden.**) In den $(q+1)(R-t+q)$ Gleichungen kommen aber R Unbekannte vor: die Coordinaten der Punkte $x^{(i)}$, welche ausserdem an die Gleichungen $f(x^{(i)})=0$ gebunden sind. Von diesen R Punkten kann man also auf f noch willkürlich annehmen:

$$(18)\qquad R-(q+1)(R-t+q);$$

eine Zahl, welche jedenfalls nicht negativ werden darf. *Damit sich also Gruppen von R Punkten auf f finden lassen, durch welche noch eine ∞^q-Schaar von Curven aus einer gegebenen linearen ∞^t-Schaar hindurchgehen, muss die Bedingung erfüllt sein:*

$$(19)\qquad R \geq (q+1)(R-t+q).\text{***})$$

*) Es folgt dies aus dem Determinanten-Multiplicationssatze; vgl. Crelle's Journal, Bd. 97, p. 38.

**) Vgl. darüber die Beispiele in dem vierten Abschnitte dieser Abtheilung, sowie die Anmerkung **) auf p. 695. Im Beispiele zeigen gleichzeitig, dass *die Zahl der übrig bleibenden Lösungen im Allgemeinen nicht Null ist.*

***) So weit würden diese Betrachtungen auch für nicht adjungirte Curvensysteme gültig bleiben, vgl. den weiterhin folgenden Abschnitt über Schnittpunktsysteme (p. 757).

Neben die Bedingung (19) stellt sich noch eine andere, wenn man verlangt, dass die Gruppen G_R eine Schaar von bestimmter Mannigfaltigkeit bilden sollen, die durch Curven bestimmter Ordnung ausgeschnitten werden. Die Aufstellung dieser zweiten Bedingung ist von besonderem Interesse, wenn die ψ von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und wenn die G_R selbst wieder eine Specialschaar $g_R^{(r)}$ bilden, d. h. durch eine ∞^r-Schaar von adjungirten C_{n-3} ausschneidbar sein sollen, indem dann die Zahlen r, R, q, Q durch den Riemann-Roch'schen Satz unter einander verknüpft sind. Kehren wir z. B. zu dem oben besprochenen Falle zurück (p. 694 und 697), wo wir

$$r=1, \quad R=p-2, \quad q=2, \quad Q=p, \quad t=p-1$$

hatten, und wo in Uebereinstimmung mit (18) noch $p-5$ Punkte willkürlich auf f gewählt werden konnten, um eine Gruppe $G_R = G_{p-2}$ zu finden, durch die noch ∞^2 C_{n-3} gehen. Soll hier dann weiter die Gruppe G_R einer ∞^1- (d. i. ∞^r-) Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ angehören, so *haben wir noch die zweite Bedingung:* $p-5 \geqq 1$; und die (weiterhin mit τ bezeichnete) Zahl $p-6$ ist die Zahl der beliebig wählbaren Punkte, wenn man eine Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ finden will.

Ebenso erledigt sich nun allgemein unser ursprüngliches, die C_{n-3} betreffendes Problem, nämlich die Bestimmung der Specialschaaren $g_R^{(r)}$. Wir wollen dabei voraussetzen, dass $t=p-1$ ist, d. h. dass die Curven der Schaar (12) keiner anderen Bedingung genügen, als der, von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung und zu f adjungirt zu sein. Die Determinanten (15) oder (17) werden in diesem Falle $(p-q)$-gliedrige, und von den R Punkten, welche in den aus (14) entspringenden Gleichungen vorkommen, sind nach (18) noch

$$R-(q+1)(R+q-p+1)$$

willkürlich annehmbar. Damit wir auf eine Schaar $g_R^{(r)}$ kommen, *darf diese Zahl aber nicht nur nicht negativ werden, sondern auch nicht unter r herabsinken.* Da nun wegen (11) $R-p+1=r-q$ ist, *so tritt an Stelle von* (19) *für Specialgruppen* $G_R^{(r)}$ *die Relation:*

$$R-(q+1)r \geqq r, \tag{20}$$

und hieraus folgt, wieder in Rücksicht auf (11):

$$R \geqq \frac{r(r+p+1)}{1+r}, \tag{21}$$

oder auch, wenn man aus (20) R mittelst (11) eliminirt:

$$p \geqq (r+1)(q+1). \tag{22}$$

Die Differenzen der linken und rechten Seiten dieser Ungleichungen:

$$\tau = R-(q+1)r-r = R(r+1)-r(r+p-1) = p-(q+1)(r+1) \tag{23}$$

geben die Anzahl der noch willkürlich annehmbaren Punkte einer Gruppe G_R an, welche, nachdem r willkürliche Punkte fest gewählt sind, aus einem ∞^τ-Systeme von ∞^r-Schaaren $g_R^{(r)}$, die alle den gegebenen Bedingungen genügen, eine *endliche* Anzahl solcher Schaaren $g_R^{(r)}$ ausscheiden. Diese Zahl τ kann nun selbstverständlich beliebig klein werden; ist sie gleich Null, so gibt es nur eine endliche Zahl von Schaaren $g_R^{(r)}$ auf der C_n, wie in dem oben betrachteten Beispiele für $p = 6$. *Wird sie dagegen negativ, so ist das Problem nicht lösbar* (p. 698).

Jeder Schaar $g_R^{(r)}$ von corresidualen Gruppen G_R entspricht nun nach dem Riemann-Roch'schen Satze eine ebensolche $g_Q^{(q)}$ und umgekehrt, und zwar so, dass jede Gruppe der einen Schaar zu jeder Gruppe der andern residual ist; die Zahlen Q, q bestimmen sich dabei aus R, r vermöge der Gleichungen (11). Die ∞^τ Schaaren $g_R^{(r)}$ haben die Eigenschaft, dass keine mit einer anderen von ihnen eine vollständige Gruppe $G_R^{(r)}$ gemein hat (da irgend eine Gruppe die Schaar, welcher sie angehört, nach dem Restsatze vollständig und eindeutig bestimmt); Gleiches gilt von den Schaaren $g_Q^{(q)}$, deren es natürlich auch ∞^τ gibt.

Der Fall $\tau = 0$ ist nun für das Folgende von besonderem Interesse. Für denselben findet man aus den Gleichungen (13) bez. (14), oder aus dem Verschwinden der Determinanten D_{ik}, zu r gegebenen Punkten eine *endliche* Anzahl Z von *Gruppen* zu je $R - r = r(q+1)$ Punkten, von denen dann jede mit den r Punkten zusammen eine Gruppe $G_R^{(r)}$ bildet, und aus denen durch Bewegung der r Punkte Z verschiedene Schaaren $g_R^{(r)}$ entstehen.*) Diese Schaaren haben nichts mit einander gemein, können auch nicht durch unendlich kleine Veränderungen (continuirlich) in einander übergeführt werden. Denselben sind ferner *ebensoviele* Schaaren von Gruppen $G_Q^{(q)}$ auf $f = 0$ als Residuen *eindeutig* zugeordnet, und umgekehrt (vgl. obiges Beispiel, p. 697 f.). Die Aufsuchung der Schaaren $g_Q^{(q)}$ führt somit auf eine Gleichung desselben Grades, wie die der $g_R^{(r)}$; *die Anzahl der Lösungen ist für beide Probleme gleich gross*, und die Lösungen der beiden Gleichungen gehen eindeutig aus einander hervor, wenngleich die Probleme vom algebraischen Standpunkte als völlig verschiedene erscheinen.

Ist dagegen τ von Null verschieden, so findet ein derartiges Entsprechen zweier bestimmten Probleme nicht mehr statt (vgl. das Beispiel

*) D. h. die Bestimmung dieser Schaaren hängt von einer Gleichung Z^{ten} Grades ab. Allgemein angeben kann man die Zahl Z bisher nicht; für den Fall $R = t - q + 1$ ist der Werth von Z bei Brill und Nöther a. a. O. ohne Beweis mitgetheilt.

p. 698). Existirt nämlich auch eine endliche Anzahl von Gruppen $G_R^{(r)}$ zu $r + \tau$ beliebig gegebenen Punkten, so führen diese nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf Gruppen $G_Q^{(q)}$, welche zwar q, aber keine $q + \tau$ Punkte gemein haben können. Nimmt man demnach $q + \tau$ Punkte beliebig an und sucht die ihnen zugehörigen Gruppen $G_Q^{(q)}$ (d. h. die ergänzenden Gruppen von je $Q - q$ Punkten), so sind sie zwar in endlicher, jedoch von jener Zahl verschiedener Anzahl vorhanden. Wohl aber existiren, wie schon bemerkt, zu gegebenen r Punkten ∞^τ Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_R^{(r)}$, welchen zu beliebig gegebenen q Punkten ∞^τ Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_Q^{(q)}$ eindeutig entsprechen.

Beim Beginne unserer Untersuchungen über Specialgruppen hatten wir nach solchen *zwei*fach unendlichen Schaaren gefragt, für welche die Zahl R der beweglichen Punkte eine möglichst kleine ist (vgl. p. 690). Unsere Bedingung (21) p. 705 erlaubt uns nunmehr, sofort für $r = 2$ den kleinsten Werth anzugeben, welchen R annehmen kann. Nach derselben muss nämlich

$$3R \geqq 2(p + 3)$$

sein. Ist also $p = 3\pi$, wo π eine positive ganze Zahl bedeutet, so haben wir als *kleinsten Werth von R für $r = 2$*:

$$R = 2(\pi + 1) = p - \pi + 2;$$

und dieser Werth erfüllt auch noch für $p = 3\pi + 1$ und $p = 3\pi + 2$ die gestellte Bedingung. Die Gleichungen (20), (21) oder (22) erlauben aber überhaupt, *die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten anzugeben, für welche eine Specialgruppe $G_R^{(r)}$ bei gegebenem r auf $f = 0$ bestehen kann;* nach (11) erhält man so gleichzeitig die Maximalwerthe für die Anzahl Q der die Residualgruppen bildenden Punkte. Die sich ergebenden Zahlen sind für $r = 1, 2, 3$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt, welche man leicht beliebig fortsetzt; in ihr enthält die vorletzte Colonne noch die durch (23) definirte Zahl τ für die Mannigfaltigkeit der zusammengehörigen Schaaren $g_R^{(r)}$ und $g_Q^{(q)}$, eine Zahl, welche nie negativ werden darf. Aus letzterer Bemerkung findet man nach (22) oder (23) die kleinsten Werthe von p, für welche die betreffende Specialschaar möglich ist, und welche in der letzten Colonne angegeben sind. Sollen ganze Zahlen für R, u. s. w. zum Vorscheine kommen, so muss man auf die Natur der Zahl p Rücksicht nehmen. Es sei π eine ganze positive Zahl, dann findet man:

für $p =$	r	Minimalwerth von R	Zugehöriger Werth von q	Zugehöriger Werth von Q	τ	$p \geq$
2π $2\pi+1$	1	$p-\pi+1$	$\pi-1$	$p+\pi-3$	0 1	4
3π $3\pi+1$ $3\pi+2$	2	$p-\pi+2$	$\pi-1$	$p+\pi-4$	0 1 2	6
4π $4\pi+1$ $4\pi+2$ $4\pi+3$	3	$p-\pi+3$	$\pi-1$	$p+\pi-5$	0 1 2 3	8
$(r+1)\pi+\tau$, wo $\tau < r+1$	r	$p-\pi+r$	$\pi-1$	$p+\pi-r-2$	τ	$2r+2$*)

So existiren z. B., wie schon mehrfach erwähnt (p. 688), auf einer C_5 mit 2 Doppelpunkten ($p=4$, $\pi=2$) zwei verschiedene Schaaren $g_3^{(1)}$, indem $\tau=0$, $r=1$, $p-\pi+1=3$; und beide sind einander residual; in der That wird auch $q=\pi-1=1$, $Q=p+\pi-3=3$. Ein anderes Beispiel bietet die Curve C_6 mit 5 Doppelpunkten ($p=5$). Zu zwei willkürlich gewählten Punkten P_1, P_2 existirt hier eine endliche Zahl von Punktepaaren, welche mit jenen zusammen Specialgruppen $G_4^{(1)}$ bilden, indem $p=2\pi+1$ für $\pi=2$, $p-\pi+1=4$, $\tau=1$, also $r+\tau=2$ (entsprechend der willkürlichen Wahl von *zwei* Punkten). Und zwar gibt es zu P_1, P_2 noch 5 Gruppen $G_4^{(1)}$; denn transformirt man die C_6 mittelst der ∞^2 adjungirten C_3, welche durch P_1, P_2 gelegt werden können, so erhält man wieder eine C_6', welche ebenfalls 5 Doppelpunkte haben muss; die den letzteren auf der C_6 entsprechenden Punktepaare bilden, wie bekannt, mit P_1, P_2 zusammen die Basispunkte für adjungirte C_3, welche die C_6 in residualen Schaaren $g_4^{(1)} = g_Q^{(q)}$ treffen (vgl. p. 439). Man erhält im Ganzen ∞^1 solche Schaaren $g_4^{(1)}$ auf der C_6, weil $\tau=1$. Eine derselben besteht z. B. aus den Gruppen, welche von dem durch einen Doppelpunkt gehenden Geradenbüschel ausgeschnitten werden; die Residualschaar derselben bilden die Gruppen $G_4^{(1)}$, welche von dem durch die andern vier Doppelpunkte gehenden Kegelschnittbüschel bestimmt sind. Es sei hier endlich noch einmal auf das

*) Die Richtigkeit dieser allgemeinen Zahlenreihe erkennt man durch Einsetzen derselben in die Bedingung (21); es wird dann für $\tau=0$ in der That $(r+1)R=r(r+p-1)$; für $\tau>0$ geht diese Bedingung über in: $(r+1)\cdot(\tau+r) \geq r(r+1+\tau)$. Letztere aber ist erfüllt.

früher eingehend behandelte Beispiel für $p = 6$ verwiesen. Für dasselbe nämlich ist durch vorstehende Determinantensätze der oben noch fehlende Beweis der Existenz von Schaaren $g_4^{(1)}$ und $\gamma_6^{(2)}$ auf einer C_7 mit 9 Doppelpunkten erbracht.*)

III. Die Transformation auf Normalcurven. — Moduln.

Kehren wir jetzt wieder zu dem Falle $r = 2$ zurück, welcher ja für die eindeutige Transformation der Grundcurve von besonderer Wichtigkeit ist. In der That können wir nach unseren früheren Ausführungen (p. 690) unter Berücksichtigung der zu $r = 2$ gehörigen und in der Tabelle angegebenen Minimalwerthe von R sofort folgenden Satz aussprechen:

Die Curve niedrigster Ordnung (Normalcurve), in welche eine allgemeine Curve vom Geschlechte p eindeutig transformirt werden kann, ist von der Ordnung $p - \pi + 2$, *wenn die Zahl p von der Form* 3π, $3\pi + 1$, $3\pi + 2$ *ist, oder — was dasselbe ist — bez. von der Ordnung* $2\pi + 2$, $2\pi + 3$, $2\pi + 4$; *und da ihr Geschlecht ebenfalls gleich p sein muss, besitzt diese Normalcurve* $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ *oder bez.* $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ *Doppelpunkte.***)

*) Für specielle Curven vom Geschlechte p können jedoch auch noch andere Specialschaaren existiren, als die in der Tabelle aufgeführten, z. B. bei den hyperelliptischen Curven.

**) Diese Normalcurven sind von Brill und Nöther a. a. O. angegeben. — Schon in der Anmerkung auf p. 693 wurde bei einem Beispiele hervorgehoben, dass die Normalcurven Riemann's (§. 13 in dessen Theorie der Abel'schen Functionen) von diesen wesentlich verschieden sind. Bei Riemann nämlich kommt es darauf an, in einer Gleichung $F(x, y) = 0$, welche vom m^{ten} Grade in den x, vom n^{ten} Grade in den y ist, die Zahlen m, n *einzeln* durch eindeutige Transformation möglichst zu erniedrigen, oder mit anderen Worten, zwei von einander verschiedene algebraische Functionen $\frac{\psi}{\chi}$ und $\frac{\psi'}{\chi'}$ zu finden, welche in möglichst wenig Punkten Null und unendlich werden. Man hat also zwei Curvenbüschel:

$$(\alpha) \qquad \psi + \lambda\chi = 0 \quad \text{und} \quad \psi' + \mu\chi' = 0$$

zu suchen, welche in möglichst wenig beweglichen Punkten schneiden, d. h. welche auf $f = 0$ zwei Schaaren $g_R^{(1)}$ bestimmen, für die R den in der Tabelle angegebenen Minimalwerth hat: $R = p - \pi + 1$ für $p = 2\pi$ oder $p = 2\pi + 1$. Die zu benutzenden Transformationscurven:

$$(\beta) \qquad \alpha_1\psi\chi' + \alpha_2\chi\psi' + \alpha_3\chi\chi' = 0$$

schneiden $f = 0$ dann noch in $2p - 2\pi + 2$ beweglichen Punkten. Den Gruppen von je $Q = p + \pi - 3$ Basispunkten der Büschel (α) entspricht je ein $(p + \pi - 3)$-facher Punkt der neuen Curve. Wir erhalten also (in Uebereinstimmung mit Riemann):

Den genannten drei Fällen entsprechend hat man zur Wahl der Schaar von Transformationscurven in Rücksicht auf die Werthe von τ bei $r = 2$ keinen, einen oder zwei Parameter zur Verfügung. Die Werthe von Q und q, welche dem Werthe $R = p + \pi - 2$ entsprechen, erlauben daher den vorstehenden Satz auch in folgender Form auszusprechen:

Für $p = 3\pi$, $3\pi + 1$ oder $3\pi + 2$ kann man zu einer Specialgruppe von $p + \pi - 4$ oder bez. $4\pi - 4$, $4\pi - 3$, $4\pi - 2$ Punkten, durch welche noch zweifach unendlich viele adjungirte Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung hindurchgehen, und von denen bez. $\pi - 1$, π, $\pi + 1$ willkürlich angenommen werden dürfen, noch $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ oder bez. $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ Punktepaare finden, welche zusammen mit jenen $p + \pi - 4$ Punkten eine Specialgruppe von bez. $2\pi(\pi + 1) - 4$, $2\pi(\pi + 2) - 3$, $2\pi(\pi + 3) - 1$ Punkten bilden, durch welche noch einfach unendlich viele Curven der Art zu legen sind.

Man erhält so für die niedrigsten Zahlen von p genauer aufgezählt folgende Normalcurven; ein Vergleich mit der oben (p. 689) mitgetheilten Tabelle für Curven $(p + 1)^{ter}$ Ordnung zeigt, wie in der That für $p > 6$ hier Curven niedrigerer Ordnung erhalten werden. Man findet

für $p = 3$, $\pi = 1$:	Curven	4ter	Ordnung	mit	0	Doppelpunkten
„ $p = 4$, $\pi = 1$:	„	5ter	„	„	2	„
„ $p = 5$, $\pi = 1$:	„	6ter	„	„	5	„
„ $p = 6$, $\pi = 2$:	„	6ter	„	„	4	„
„ $p = 7$, $\pi = 2$:	„	7ter	„	„	8	„
„ $p = 8$, $\pi = 2$:	„	8ter	„	„	13	„
„ $p = 9$, $\pi = 3$:	„	8ter	„	„	12	„
. . . .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .

Auch unter diesen Curven fehlen z. B. die Curven 5ter Ordnung mit $p = 5$ und mit $p = 6$. Diese und allgemein Curven vom Geschlechte p, deren Ordnung kleiner als $p - \pi + 2$, entstehen vielmehr durch Transformation von solchen Curven $(p - \pi + 2)^{ter}$ Ordnung, auf denen in Folge besonderer Relationen zwischen den sie bestimmenden Constanten Specialschaaren $g_R^{(2)}$ mit weniger beweglichen Punkten

für $p = 2\pi$ Curven $(p+2)^{ter}$ Ord. mit zwei $3(\pi-1)$-fachen u. $\pi(\pi-2)$ Doppelp.
„ $p = 2\pi+1$ „ $(p+3)^{ter}$ „ „ „ $(3\pi-2)$-fachen „ π^2 „

Ausgenommen sind die Fälle $p = 1$ und $p = 2$. Für $p = 2\pi + 1$ ist $\tau = 1$; die Transformation kann daher dann noch auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen. — Durch eine quadratische Transformation, deren Fundamentalpunkte bez. in den beiden vielfachen Punkten und einem der Doppelpunkte liegen, (oder durch Betrachtungen über Raumcurven) können diese Normalcurven leicht in Curven p^{ter} bez. $(p + 1)^{ter}$ Ordnung übergeführt werden $(p > 4)$; vgl. Brill, Math. Annalen, Bd. 2, p. 471.

existiren, als auf einer allgemeinen Curve des betreffenden Geschlechts möglich ist.

Durch specielle Werthe dieser schon oben erwähnten (p. 685) gewöhnlich als *Moduln* bezeichneten Constanten (deren Anzahl wir sogleich noch bestimmen werden) kann aber auch die Transformation einer C_n $f(x) = 0$ vom Geschlechte p in die zugehörige Normalcurve mittelst adjungirter C_{n-3} überhaupt unmöglich gemacht werden. Wenn nämlich auf f je zwei Punkte einander derart zugeordnet sind, dass (wie dies z. B. bei Curven 5[ter] Ordnung mit einem 3-fachen Punkte der Fall ist) alle adjungirten C_{n-3}, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, damit von selbst durch einen oder mehrere diesem zugeordnete Punkte gehen, so wird die eindeutige Umkehrung der Transformationsformeln $\varrho y_i = \varphi_i(x)$ auch mit Hülfe von $f = 0$ in der Weise unmöglich, dass sich die Variabeln x durch die y nicht mehr rational, sondern nur noch mit Hülfe von Wurzelzeichen (oder überhaupt von Irrationalitäten) ausdrücken lassen; und das Entsprechen hört dann auf eindeutig zu sein. Man überzeugt sich indess leicht davon, dass höhere Irrationalitäten als Quadratwurzeln bei der Benutzung von adjungirten C_{n-3} als Transformationscurven nicht vorkommen können. Sollten nämlich jedem *beliebig* gegebenen Punkte A auf f etwa j Punkte in der Weise entsprechen können, dass alle adjungirten C_{n-3} durch A auch durch diese j Punkte hindurchgingen, so würde man, da eine solche Curve $p-1$ Bestimmungsstücke besitzt, durch Annahme von $p-1$ beliebigen Punkten im Ganzen schon $(j+1) \cdot (p-1)$ Schnittpunkte der Curve festgelegt haben, während dieselbe f nur in $2p-2$ beweglichen Punkten trifft. Daher ist j höchstens gleich 1.

*In der angegebenen Weise kann also höchstens ein weiterer Punkt der C_n durch einen gegebenen mit bestimmt sein.**) Da es nun einfach unendlich viele Punkte auf der Curve gibt, so ist eine Curve dieser speciellen Natur dadurch charakterisirt, dass sie eine $g_2^{(1)}$ besitzt. Für dieselbe bleibt der Satz gültig, dass $p-1$ Schnittpunkte einer adjungirten C_{n-3} durch die $p-1$ übrigen bestimmt sind; aber jetzt hängt schon jeder einzelne jener ersteren Punkte von einem ganz bestimmten der letzteren ab, und umgekehrt. Man kann also $p-3$ Punkte beliebig annehmen; durch sie und die zugehörigen $p-3$ Punkte geht noch ein Büschel von adjungirten C_{n-3}, welche auf f jene $g_2^{(1)}$ ausschneiden. Eine einzelne Gruppe $G_2^{(1)}$ $(= G_R^{(r)})$ dieser Schaar bildet dann nach dem Riemann-Roch'schen Satze das System der Basispunkte von ∞^{p-2} adjungirten C_{n-3}, welche die residuale Schaar $g_{2p-4}^{(p-2)}$ $(= g_Q^{(q)})$ auf f ausschneiden, während durch

*) Vgl. Brill und Nöther, a. a. O. p. 286.

zwei beliebige Punkte von f nur noch ∞^{p-3} solche Curven hindurchgehen. Ein Beispiel für derartige Vorkommnisse bieten die Curven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte (also vom Geschlechte $n-2$); in der That zerfällt hier jede adjungirte C_{n-3} in $n-3$ durch den $(n-2)$-fachen Punkt gehende Gerade. Eine bewegliche Linie dieses Strahlbüschels stellt also zusammen mit $n-4$ festen Geraden desselben eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} dar, welche f in nur zwei beweglichen Punkten treffen. Die hier gemeinten Curven werden gewöhnlich *hyperelliptische* genannt.*)

Es gilt aber auch umgekehrt der Satz, dass *jede C_n vom Geschlechte p, auf welcher eine Specialschaar $g_2^{(1)}$ existirt, in eine Curve $(p+2)^{ter}$ Ordnung mit einem p-fachen Punkte eindeutig transformirt werden kann;* eine jede Curve mit einer Schaar $g_2^{(1)}$ werden wir daher als hyperelliptische bezeichnen. Die genannte Transformation geschieht vermittelst einer ∞^2-Schaar adjungirter C_{n-2}, welche durch $n+p-4$ beliebige feste Punkte der C_n gehen und also letztere in der That noch in $p+2$ beweglichen Punkten treffen. Um auf der neuen Curve C_{p+2} einen p-fachen Punkt zu erzeugen, hat man von den $n+p-4$ festen Punkten auf der C_n $n-p$ in die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $u_x=0$ mit $f=0$ zu legen und die übrigen $2p-4$ so zu wählen, dass durch sie noch ein Büschel von $C_{n-3}: \varphi_1+\lambda\varphi_2=0$, der die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, in der geschilderten Weise hindurchgeht. Bedient man sich dann der Transformationsformeln

$$\varrho y_1 = u_x\varphi_1, \quad \varrho y_2 = u_x\varphi_2, \quad \varrho y_3 = \psi,$$

wo $\psi=0$ eine beliebige durch die genannten $n+p-2$ Punkte gehende C_{n-2} darstellt, so schneidet der Büschel $y_1+\lambda y_2=0$ die resultirende C_{p+2} nur in zwei beweglichen Punkten, indem er auf ihr die charakteristische $g_2^{(1)}$ bestimmt, d. h. der Punkt $y_1=0$, $y_2=0$ ist in der That p-facher Punkt der Curve C_{p+2}. —

Die Bestimmung der Anzahl der für eine Curve charakteristischen Constanten, der Moduln, kann nun im Anschlusse an unsere Bestimmung der Normalcurven niedrigster Ordnung geschehen (vgl. p. 685). Wir nehmen zuerst an, dass das Geschlecht p durch 3 theilbar, also $p=3\pi$ sei; dann ist die zugehörige Normalcurve von der Ordnung $2\pi+2$ und hat $2\pi(\pi-1)$ Doppelpunkte, d. h. sie hängt von

*) Der Name ist dadurch begründet, dass für diese Curven die hyperelliptischen Integrale (vgl. den Abschnitt VI. dieser Abtheilung) eine ähnliche Bedeutung haben, wie die elliptischen Integrale für die Curven vom Geschlechte $p=1$. Auch am Schlusse dieses Abschnittes kommen wir auf die hyperelliptischen Curven zurück; vgl. ausserdem den Abschnitt über die Curven vom Geschlechte $p=2$.

$$(\pi + 1)(2\pi + 5) - 2\pi(\pi - 1) = 9\pi + 5$$

Constanten ab. Von letzteren kann man aber durch lineare Transformation noch acht zerstören, so dass nur

$$9\pi - 3 = 3p - 3$$

Constante übrig bleiben. Eine weitere Reduction dieser Zahl durch besondere Wahl der willkürlichen $\pi - 1$ Punkte, welche bei der Transformation unserer Curve C_n vom Geschlechte 3π in die Normalform (auf derselben liegend) als Basispunkte für die Transformationscurven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung dienen, ist nicht möglich. Zwei verschiedene solche Gruppen $G_{\pi-1}$ nämlich geben zu zwei Schaaren von adjungirten C_{n-3} Veranlassung, welche auf der C_n *dieselbe* Schaar $g^{(2)}_{2\pi+2}$ ausschneiden (da es nur eine endliche Anzahl von Schaaren $g^{(2)}_{2\pi+2}$ gibt, indem $\tau = 0$) und sind daher vollkommen äquivalent in Bezug auf die Curve $f = 0$. Sind also zwei solche Transformationen durch die Gleichungen

$$\varrho y_i = \varphi_i(x), \quad \varrho y_i = \psi_i(x)$$

gegeben, so führen dieselben auf die *gleiche* Normalcurve $F(y) = 0$. Durch andere Wahl jener $\pi - 1$ Basispunkte auf der C_n erreicht man also nur, dass eine andere ∞^2-Schaar von adjungirten C_{n-3} in eine Schaar von Geraden (und eine zu $F = 0$ adjungirte feste $C_{2\pi-1}$) übergeführt wird, ohne jedoch die Gleichung $F = 0$ selbst zu ändern.

Ganz analog gestaltet sich nun die Betrachtung für $p = 3\pi + 1$ und $p = 3\pi + 2$. Im ersteren Falle hat man $\tau = 1$, und demgemäss kann die Transformation in die Normalcurve noch auf einfach unendlich viele *verschiedene* Arten geschehen, so dass man durch specielle Wahl der willkürlichen π Punkte noch eine Constante der resultirenden Gleichung $F = 0$ zerstören kann. Die Zahl der bleibenden Constanten ist also gleich

$$\tfrac{1}{2}(2\pi + 3)(2\pi + 6) - 2\pi^2 - 8 - 1 = 9\pi = 3p - 3\,.$$

In der That ist auch evident, dass zwei verschiedene Normalcurven $F(y) = 0$, welche aus derselben C_n abgeleitet sind, nicht durch lineare Transformation aus einander entstehen können, so dass man wieder (wie vorhin) wegen der linearen Transformationen die Zahl der Constanten um 8 zu verringern hat. Sind nämlich aus $f = 0$ zwei Curven $F = 0$, $F' = 0$ bez. durch die Substitutionen:

$$\varrho y_i = \varphi_i(x), \quad \varrho y_i' = \varphi_i'(x)$$

entstanden und sollen F und F' linear in einander transformirbar sein, so würde man setzen können:

$$\sigma \varphi_i = \alpha_{i1}\varphi_1' + \alpha_{i2}\varphi_2' + \alpha_{i3}\varphi_3'\,.$$

Die Curven φ_i' also würden derselben ∞^2-Schaar angehören wie die φ_i, und ihnen daher auch dieselben Punkte von $f=0$ gemeinsam sein; beide Transformationen würden sich somit nicht von einander unterscheiden. Ganz ebenso findet man endlich für $p=3\pi+2$ die Zahl der Constanten gleich

$$(\pi+2)(2\pi+7)-(2\pi^2+2\pi+1)-8-2=9\pi+3=3p-3.$$

Die Anzahl der Moduln einer Curve vom Geschlechte p, d. i. der für letztere gegenüber eindeutigen Transformationen charakteristischen Constanten, ist sonach gleich $3p-3$.*)

Die Moduln spielen also bei den eindeutigen Transformationen dieselbe Rolle, wie die absoluten Invarianten bei den Collineationen.**) In analoger Weise wie die letzteren kann man aber auch erstere als Functionen von Doppelverhältnissen auffassen, oder auch geradezu gewisse Doppelverhältnisse als Moduln bezeichnen, wenn man (wie es meist geschieht) kein Gewicht darauf legt, die Moduln als rationale Functionen der Coëfficienten von f darzustellen. *Man kann nämlich als Moduln alle nur von den Coëfficienten der Gleichung* $f=0$ *abhängenden Parameter ansehen, welche, durch einen gewissen genau vorgeschriebenen algebraischen Process gebildet, ihren Werth nicht ändern, wenn man sie andererseits durch denselben Process aus den Coëfficienten der transformirten Curve zusammensetzt, oder — falls sie, wie z. B. ein Doppelverhältniss, irrationale Functionen der Coëfficienten sind — doch nur in eine endliche Anzahl davon verschiedener Werthe übergehen können.* Je nach der Art der anzuwendenden algebraischen Operation wird man verschiedene Systeme von Grössen als Moduln erhalten; um dieselben insbesondere durch Doppelverhältnisse darzustellen, wird man am einfachsten ein zu der Curve gehöriges binäres Werthgebiet aufsuchen, welchem bei der transformirten Curve ein ebensolches Werthgebiet eindeutig zugeordnet ist. Diese binären Werthgebiete sind dann projectivisch auf einander bezogen***); die aus entsprechenden Elementen derselben zu bildenden Doppelverhältnisse sind also einander gleich und liefern die Moduln. Am passendsten geht man dabei von adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus; denn wir haben gesehen, dass den Schnittpunktsystemen derselben mit $f=0$ wieder Punktsysteme auf der neuen Curve ν^{ter} Ordnung entsprechen,

---

*) Die Zahl $3p-3$ ist von Riemann zuerst angegeben; a. a. O. §. 12. — Die Fälle $p=0$, 1 sind ausgenommen. Für $p=2$ ist die Zahl indess noch richtig, während sie für hyperelliptische Curven sonst nicht mehr gilt (p. 717). Ueberhaupt ist die Zahl kleiner als $3p-3$ für jede Curve, auf der andere Specialschaaren existiren, als in obiger Tabelle vorkommen.

**) Vgl. p. 249 und p. 267.

***) Vgl. p. 436, Anmerkung.

welche durch adjungirte Curven $(\nu - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. In einem Büschel von adjungirten C_{n-3}, deren $p - 2$ Basispunkte beliebig auf $f = 0$ liegen, gibt es nun nach früheren Formeln $4p - 2$ berührende Curven (p. 461); und ihnen sind in dem entsprechenden Büschel von $C_{\nu-3}$ ebensoviele F berührende Curven zugeordnet.*) Das System der $4p - 2$ Tangenten dieser Curven in einem Basispunkte des ersteren Büschels ist daher projectivisch zu dem Systeme der $4p - 2$ Tangenten der entsprechenden Curven in letzterem Büschel; und die $4p - 5$ absoluten Invarianten der betreffenden binären Formen, d. h. die $4p - 5$ Doppelverhältnisse beider Tangentensysteme, sind einander gleich. Diese Doppelverhältnisse hängen aber noch von den Coordinaten der $p - 2$ beliebig auf $f = 0$ gewählten Basispunkte ab; durch Elimination derselben müssen sich daher nach der obigen Abzählung $3p - 3$ von einander unabhängige Functionen jener $4p - 5$ Doppelverhältnisse bilden lassen, welche nur noch von den Coëfficienten der Grundcurve abhängen und als Moduln aufzufassen sind.**) Letzteres erkennt man auch daraus, dass sich bei specieller Wahl jener $p - 2$ Punkte in der That direct $3p - 3$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse ergeben, und zwar in folgender Weise.

In der ∞^{p-1}-Schaar von adjungirten C_{n-3} gibt es nach p. 461

$$p\,\{2p - 2 + (p-1)p - (p-1)\} = (p-1)\,p\,(p+1)$$

Curven, welche die C_n $(p-1)$-punktig berühren (p-punktig treffen); diese C_{n-3} sind also durch die C_n mit gegeben und hängen nur von den Coëfficienten der letzteren ab. Die $p - 2$ übrigen Schnittpunkte einer solchen C_{n-3} wählen wir nun zu Basispunkten unseres Curvenbüschels. Von den $4p - 2$ berührenden Curven des letzteren fallen jetzt $p - 1$ in die eine $(p-1)$-punktig berührende Curve zusammen; und es sind noch $3p - 1$ einfach berührende C_{n-3} in dem Büschel enthalten: die Tangenten dieser C_{n-3} und jener ausgezeichneten Berührungscurve in einem Basispunkte des Büschels stellen dann eine binäre Form $(3p)^{\text{ter}}$ Ordnung vor, für welche die $3p - 3$ zugehörigen Doppelverhältnisse nunmehr allein von den Coëfficienten der Grundcurve abhängen.***) Diese Doppelverhältnisse kann man

*) An der Zahl $4p - 2$ sind hier wegen etwaiger Rückkehrpunkte von f keine Reductionen anzubringen; vgl. die Bemerkungen auf p. 666.

**) Diese Bestimmungsweise der Moduln gab Riemann a. a. O.; die zuletzt im Texte berührte Frage wird hier auf transcendentem Wege erledigt.

***) Diese Bestimmungsweise der Moduln ist auch von Weierstrass angewandt; vgl. Brill und Nöther a. a. O. p. 302. Man findet daselbst auch noch verschiedene andere Bestimmungsweisen angegeben.

daher als Moduln auffassen, vorausgesetzt, dass dieselben im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Dass letzteres aber in der That der Fall ist*), beweist man, indem man zeigt, dass *umgekehrt durch die Werthe dieser* $3p-3$ *Parameter eine Curve bis auf solche Curven, die aus ihr durch eindeutige Transformation entstehen, endlich vieldeutig bestimmt ist*, und zwar in folgender Weise.**) Statt einer C_n vom Geschlechte p können wir eine C_{p+1} mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten der Betrachtung zu Grunde legen; dieser kann man ferner, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, die Eigenschaft beilegen einen Punkt zu besitzen, in welchem sie von einer Geraden $(p-1)$-punktig berührt wird; denn um eine solche Curve aus einer allgemeinen C_n zu erhalten, hat man das Netz der Transformationscurven nur so zu wählen, dass dasselbe eine der $(p-1)$-punktig berührenden C_{n-3} enthält. Die $(p-1)$-punktig berührende Gerade wird dann die C_{p+1} noch in einem weiteren Punkte P schneiden, von welchem aus man noch $3p-1$ Tangenten an die C_{p+1} legen kann. Die Doppelverhältnisse der so bestimmten $3p$ Geraden sind die von uns zu untersuchenden Parameter. Dieselben betrachten wir nun umgekehrt als völlig beliebig gegeben; alsdann kann eine C_{p+1}, zu der sie als Moduln gehören, immer in folgender Weise gefunden werden. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P an und legen durch ihn drei beliebige Gerade, dann kann man durch P noch $3p-3$ andere Gerade legen, welche mit jenen drei die gegebenen $3p-3$ Doppelverhältnisse bilden. Legen wir nun einer C_{p+1} die Bedingungen auf, durch P zu gehen, $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte zu haben, die $3p$ genannten Geraden zu berühren und zwar eine unter diesen $(p-1)$-punktig, so ist die Zahl der für die C_{p+1} noch verfügbaren Constanten gleich

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(p+4)-\tfrac{1}{2}p(p-3)-(4p-2)-1=3.$$

Sei aber $F'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, und seien $x_1=0$, $x_2=0$ die Coordinaten des

*) Sollte es in besonderen Fällen anders sein, so hat man also eben einigen der Moduln specielle Werthe beigelegt, indem dann für die entsprechende, durch die $3p$ Tangenten in einem Basispunkte dargestellte binäre Form gewisse Invariantenrelationen erfüllt sind. Diese Relationen können durch besondere Werthe absoluter Invarianten (d. i. Verschwinden von Invarianten) gegeben werden, oder auch durch identisches Verschwinden von Covarianten. Durch letzteres Vorkommniss werden im Allgemeinen wieder Relationen zwischen Doppelverhältnissen angezeigt, so dass man beide Fälle umfasst, wenn man nur die Doppelverhältnisse (also *irrationale* Parameter) betrachtet; man verzichtet damit jedoch zunächst auf *rationale* Darstellung der Moduln durch die Coëfficienten der C_n.

**) Vgl. Cayley: Proceedings of the London Math. Society, vol. 1.

Punktes P, so werden unsere Bedingungen auch noch durch jede Curve $F = 0$ erfüllt, welche aus $F' = 0$ durch die lineare Transformation *)

$$\varrho y_1 = x_1, \quad \varrho y_2 = x_2, \quad \varrho y_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

entsteht; und diese Curve $F = 0$ enthält drei willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Daraus folgt, dass alle Curven, welche jenen Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von Curven $F' = 0$ durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. Hiermit ist also erstens gezeigt, dass *die oben als Moduln eingeführten* $3p - 3$ *Doppelverhältnisse von einander unabhängig sind*, gleichzeitig aber auch, dass *diese* $3p - 3$ *Moduln umgekehrt eine „Klasse" von Curven des Geschlechtes* p *bestimmen*, wenn wir mit Riemann zu einer Klasse alle diejenigen Curven rechnen, welche eindeutig in einander übergeführt werden können. —

Es sei schliesslich noch erwähnt, wie diese Bestimmung der Moduln bei den hyperelliptischen Curven (p. 712), d. i. bei den Curven mit einer Specialschaar $g_2^{(1)}$, modificirt wird. Irgend ein Büschel von adjungirten C_{n-3} durch $p - 2$ Punkte von f geht noch durch $p - 2$ weitere feste Punkte von f; und in demselben gibt es nur $2(2 + p - 1) = 2p + 2$ berührende Curven. Da nun sämmtliche construirbaren Büschel von C_{n-3} hier weiter äquivalent sind, so sind die $2p - 1$ Doppelverhältnisse der Parameter dieser Berührungscurven unabhängig von der Wahl der festen Punkte, und *sie sind die* $2p - 1$ *Moduln der hyperelliptischen Curve.* Hieraus folgt gleichzeitig, *dass es* $2p - 3 - 2p + 1 = p - 2$ *Bedingungen äquivalent ist, wenn eine Curve vom Geschlechte* p *eine Specialschaar* $g_2^{(1)}$ *besitzen soll.* **) Geht man insbesondere von der oben angegebenen Normalform einer hyperelliptischen Curve aus, d. h. einer Curve $(p + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit p-fachem Punkte, so sind die adjungirten C_{n-3} durch Gruppen von je $p - 1$ der durch den p-fachen Punkt gehenden Geraden gegeben; *die Moduln also sind die* $2p - 1$ *Doppelverhältnisse (absoluten Invarianten) der* $2p + 2$ *Tangenten, welche vom* p*-fachen Punkte aus an die Curve zu legen sind.*

Es ist übrigens leicht, auch die Gleichung einer solchen C_{p+2} in eine Form zu transformiren, in welcher diese $2p - 1$ Moduln allein als Constanten explicite vorkommen. Der p-fache Punkt nämlich

---

*) Dieselbe ist eine perspectivische Collineation, deren Collineationscentrum (nämlich der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) gegeben ist (p. 254 ff.)

**) Man erkennt gleichzeitig, dass eine Curve mit dem Geschlechte $p = 2$ immer hyperelliptisch ist und also immer in eine C_4 mit Doppelpunkt transformirt werden kann, was später noch direct bewiesen wird; vgl. den Abschnitt über die Curven vom Geschlechte $p = 2$.

möge in der Ecke $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ liegen; dann muss die Gleichung der Curve C_{p+2} von der Ordnung sein:

$$x_2^2 \varphi_p (x_1, x_3) + x_2 \varphi_{p+1} (x_1, x_3) + \varphi_{p+2} (x_1, x_3) = 0,$$

wenn die φ homogene Functionen ihrer Argumente bez. von der Ordnung der unteren Indices bedeuten. Für die Coordinaten der Berührungspunkte der vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten, müssen sich bei gegebenem Werthe von $x_1 : x_3$ aus dieser Gleichung zwei einander gleiche Werthe für $x_2 : x_3$ ergeben. Diese $2p + 2$ Tangenten sind daher gegeben durch die Gleichung:

$$\mathrm{X} (x_1, x_3) \equiv 4 \varphi_{p+2} (x_1, x_3) \cdot \varphi_p (x_1, x_3) - [\varphi_{p+1} (x_1, x_3)]^2 = 0.$$

Durch Drehung des Coordinatensystems um den p-fachen Punkt kann man es aber immer erreichen, dass

$$\mathrm{X} (x_1, x_3) = x_1 \cdot x_3 \cdot (x_1 - x_3)(x_1 - k^{(1)} x_3)(x_1 - k^{(2)} x_3) \ldots (x_1 - k^{(2p-1)} x_3);$$

und dann sind die Grössen $k^{(1)}, \ldots k^{(2p-1)}$ die Moduln der Curve. Macht man noch die Transformation:

$$\varrho y_1 = x_1 \varphi_p, \quad \varrho y_2 = x_2 \varphi_p + \tfrac{1}{2} \varphi_{p+1}, \quad \varrho y_3 = x_3 \varphi_p,$$

so geht unsere Curve über in die Form:

$$4 y_2^2 [\varphi_p (y_1, y_3)]^2 + \mathrm{X} (y_1, y_3) = 0,$$

eine Curve $(2p - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche nach den Erörterungen auf p. 493 f. in $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ einen $2p$-fachen Punkt hat, dessen Tangenten paarweise zusammenfallen, so dass nur p getrennte Tangenten vorhanden sind. Die Gleichung der letzteren ist dann eben durch $\varphi_p = 0$ gegeben.

In unserer letzten Gleichung sind aber ausser den $2p - 1$ Moduln noch die p Constanten der Function φ_p enthalten; auch diese kann man noch durch eindeutige Transformation fortschaffen. Die gegebene C_{p+2} nämlich geht offenbar in eine andere C'_{p+2} derselben Ordnung über, wenn man für die Transformation ein Netz von adjungirten Curven p^{ter} Ordnung benutzt, welche durch $2p - 2$ feste einfache Punkte der C_{p+2} hindurchgeht; in der That schneiden diese Curven die C_{p+2} ja noch in

$$p(p + 2) - p(p - 1) - 2p + 2 = p + 2$$

beweglichen Punkten. Soll insbesondere die entstehende Curve C'_{p+2} wieder einen p-fachen Punkt haben (und nicht $\frac{1}{2} p (p - 1)$ einfache Doppelpunkte), so muss in dem Netze ein Curvenbüschel enthalten sein, dessen Curven die C_{p+2} nur in *zwei* beweglichen Punkten treffen. Da es aber nur *eine* Schaar $g_2^{(1)}$ auf der Grundcurve gibt, so muss dieser Büschel dann aus einer *festen* Curve

$(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Phi_{p-1}=0$, welche in dem p-fachen Punkte einen $(p-2)$-fachen Punkt hat, und aus dem Geradenbüschel $x_1+\lambda x_3=0$ bestehen. Die Curve $\Phi_{p-1}=0$ schneidet dann die C_{p+2} noch in

$$(p-1)(p+2)-p(p-2)=3p-2$$

einfachen Punkten; durch $2p-2$ dieser letzteren legen wir eine Curve $\Phi_p=0$ mit $(p-1)$-fachem Punkte in $x_1=0$, $x_3=0$; und dann bilden die Curven

$$(x_1+\lambda x_3)\Phi_{p-1}+\mu\Phi_p=0$$

ein Netz der verlangten Art mit $p+2$ beweglichen Schnittpunkten. Die C_{p+2} geht also in eine C'_{p+2} mit p-fachem Punkte in $y_1=0$, $y_2=0$ über mittelst der Transformation:

$$\varrho y_1=x_1\Phi_{p-1}(x),\quad \varrho y_2=\Phi_p(x),\quad \varrho y_3=x_3\Phi_{p-1}(x).$$

Dabei entsprechen insbesondere den $2p+2$ Tangenten der C_{p+2} aus dem Büschel $x_1+\lambda x_3=0$ die $2p+2$ Tangenten der C'_{p+2} aus dem Büschel $y_1+\lambda y_3=0$. Man kann nun aber die Curve $\Phi_{p-1}=0$ insbesondere so legen, dass p von den Berührungspunkten der Tangenten des letzteren Büschels in den p-fachen Punkt $y_1=0$, $y_3=0$ zurückfallen, d. h. dass die p Tangenten des letzteren bez. für die p Zweige der Curve C'_{p+2} zugleich *Wendetangenten* werden. Und zwar geschieht dies offenbar, wenn die p Schnittpunkte der C_{p+2} mit $\Phi_{p-1}=0$, welche nicht gleichzeitig auf der Curve $\Phi_p=0$ liegen, mit p von den Berührungspunkten der Tangenten des Büschels $x_1+\lambda x_3=0$ zusammenfallen; denn diese p Schnittpunkte von $\Phi_{p-1}=0$ mit der C_{p+2} sind es eben, welche sich zu dem p-fachen Punkte der C'_{p+2} vereinigen. Da nun von den Schnittpunkten von Φ_{p-1} mit C_{p+2} noch

$$\tfrac{1}{2}(p-1)(p+2)-\tfrac{1}{2}(p-2)(p-1)=2p-2$$

willkürlich angenommen werden können, so kann man *jedenfalls* p dieser Punkte mit p der beregten Berührungspunkte zusammenfallen lassen; von den gemeinsamen $2p-2$ Basispunkten obigen Netzes sind dann noch weitere $p-2$ willkürlich wählbar. Jede der p Tangenten des vielfachen Punktes der so gewonnenen C'_{p+2} schneidet diese Curve schon $(p+2)$-fach in diesem Punkte; ist also die Gesammtheit dieser Tangenten durch $\varphi_p(y_1, y_3)=0$ gegeben, so muss die Curvengleichung für $\varphi_p=0$ unabhängig von y_2 werden, d. h. von der Form sein:

$$y_2{}^2\varphi_p(y_1, y_3)-\psi_{p+2}(y_1, y_3)=0.$$

Da ferner der Strahlbüschel $y_1+\lambda y_3=0$ auf den Büschel $x_1+\lambda x_3=0$ eindeutig bezogen ist, und da:

$$\varrho^{2p+2}\varphi_p(y_1, y_3)\cdot\psi_{p+2}(y_1, y_3)\equiv X_{2p+2}(x_1, x_3)\cdot[\Phi_{p-1}(x)]^{2p+2},$$

so können wir setzen:

$$\sigma\varphi_p(y_1, y_3) \quad = y_1 \cdot y_3 \cdot (y_1 - y_3)(y_1 - k^{(1)}y_3) \ldots (y_1 - k^{(p-2)}y_3)$$
$$\sigma\psi_{p+2}(y_1, y_3) = (y_1 - k^{(p-2)}y_3)(y_1 - k^{(p-1)}y_3) \ldots (y_1 - k^{(2p-1)}y_3).$$

Die Gleichung der Curve hängt also in der That nur von den $2p-1$ *Moduln ab;* und wir haben den Satz:

Jede hyperelliptische Curve kann eindeutig in eine Curve $(p+2)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit einem p-fachen Punkte so transformirt werden, dass die Tangenten* ($\varphi_p = 0$) *des letzteren zugleich Wendetangenten der Curve sind*), dass also nur noch* $p+2$ *weitere Tangenten* ($\psi_{p+2} = 0$) *von ihm ausgehen. Die Berührungspunkte der letzteren liegen dann auf einer Geraden* ($y_2 = 0$), *wie man aus der Gleichung der Curve:*

$$y_2^2\varphi_p - \psi_{p+2} = 0$$

sofort erkennt.

IV. Verallgemeinerungen der Correspondenzformeln. — Bestimmung einiger Specialschaaren.

In unseren Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz haben wir die Bestimmung der Zahl der Lösungen für die sich bietenden Probleme nicht wirklich ausgeführt, wir begnügten uns vielmehr, die Möglichkeit der Lösung nachzuweisen und die Grenzen für diese Möglichkeit zu ziehen. Jene Bestimmung nun soll hier für einzelne Fälle im Anschlusse an gewisse Verallgemeinerungen unserer früheren Correspondenzformeln wirklich geleistet werden.

Die allgemeineren Ueberlegungen, deren Durchführung zuvor nöthig ist, sind jedoch unabhängig von jenen späteren Anwendungen von grossem Interesse für die Theorie der Elimination überhaupt und sollen uns daher ausführlicher beschäftigen. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um folgende Aufgabe: *Gegeben sind n Gleichungen:*

$$\varphi_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0,\ \varphi_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0 \ldots,\ \varphi_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0$$

in welchen die Systeme von Variabeln:

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)};\quad x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)};\ \ldots\quad x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}$$

einzeln homogen vorkommen, während für dieselben gleichzeitig eine und dieselbe Gleichung $f = 0$ *erfüllt ist, so dass:*

$$f(x^{(1)}) = 0,\quad f(x^{(2)}) = 0 \ldots, f(x^{(n)}) = 0.$$

Es soll die Zahl derjenigen Gruppen von je n getrennt liegenden Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}$ *auf* $f = 0$ *bestimmt werden, welche den n Bedingungen* $\varphi_i = 0$ *gleichzeitig genügen.*

---

*) Diese Transformation wurde in anderer Weise von Cremona gegeben: Sulla trasformazione delle curve iperellittiche, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo. Serie II, vol. 2, 29 aprile 1869.

Für den Fall $n = 2$ ist diese Frage schon durch die auf p. 445f. aufgestellte Zahl $(\varphi\varphi')$ beantwortet. Eine genauere Untersuchung dieser Formel für den Fall, dass die Correspondenzen φ, φ' mit *Ausnahmepunkten* behaftet sind (p. 679), soll den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bilden; insbesondere werden wir dabei wiederum Gelegenheit haben zu erkennen, dass in der That die Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips zur Beurtheilung der bei algebraischen Eliminationen im Resultate auftretenden fremden Factoren von grossem Nutzen ist (vgl. p. 424.) Der Uebergang zur Bestimmung der *Zahl von Punktetripeln, welche gleichzeitig drei Correspondenzen* genügen, wird sich dann einfach bewerkstelligen lassen. Man wird so im Folgenden auch manche *Ergänzungen* zu unseren früheren Untersuchungen über Correspondenzen finden. —

Um ein einfaches Beispiel für die Behandlungsweise der sich hier bietenden Probleme zu geben, knüpfen wir zunächst an bekannte Resultate an, um dieselben in neuer und später zu verallgemeinernder Weise abzuleiten. Schon bei der Theorie der eindeutigen Transformationen betrachteten wir eine mit $M = 0$ bezeichnete Curve, welche zu einer gegebenen Grundcurve $f = 0$ und einem gegebenen Curvennetze

$$(1) \qquad \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) + \alpha_3 \psi_3(x) = 0$$

in ganz bestimmter Beziehung stand (p. 663). Diese Curve war als Ort der übrigen Basispunkte eines aus dem Netze (1) herausgewählten Curvenbüschels definirt, wenn ein Basispunkt dieses Büschels die vorliegende Curve $f = 0$ durchläuft: Wir haben die Ordnung der Curve $M = 0$ und deren Verhalten in gemeinsamen festen Punkten der Curven (1) bestimmt und gesehen, dass dieselbe durch alle Schnittpunkte der Jacobi'schen Curve des Netzes (1) mit $f = 0$ hindurchgeht, dass sie aber ausserdem auf $f = 0$ diejenigen Punkte*paare* x-y ausschneidet, durch welche noch *einfach unendlich viele* Curven jenes Netzes hindurchgehen, d. i. deren Coordinaten dem Systeme von Gleichungen genügen (vgl. p. 687):

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) & \psi_3(y) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Letzteres System kann man — und darin liegt die Wichtigkeit dieser früheren Untersuchungen als einfachster Beispiele für das Folgende — ersetzen durch die *zwei* Gleichungen (abgesehen von $\psi_1(x) = \psi_1(y) = 0$):

$$(2) \quad \psi_1(x)\,\psi_2(y) - \psi_2(x)\,\psi_1(y) = 0, \quad \psi_1(x)\,\psi_3(y) - \psi_3(x)\,\psi_1(y) = 0 .$$

Die beiden Gleichungen (2) stellen in Bezug auf die Grundcurve $f = 0$ zwei Correspondenzen $(\nu - 1, \nu - 1)_1$ dar*), die in den x und

*) In Betreff der Bezeichnungsweise vgl. p. 443 und 662.

y symmetrisch sind; zu jedem Punkte x von $f = 0$ gehört vermöge dieser Correspondenzen je eine Curve des Netzes (1), welche durch x geht, und die übrigen Schnittpunkte dieser beiden Curven beschreiben die Curve $M = 0$, wenn x die Curve $f = 0$ durchläuft. Zu derselben Curve $M = 0$ wird man in Folge der erwähnten Symmetrie aber auch geführt, wenn man die zu Punkten y von f gehörenden Curven (2) betrachtet. Die Zahl der den Gleichungen (2) genügenden Punktepaare x-y muss sich dann aus der früheren Correspondenzformel für $(\varphi\varphi')$ ergeben (p. 446), wenn man die Modificationen berücksichtigt, welche letztere in Folge fester Punkte des Netzes erleiden könnte, und wenn man an der so resultirenden Zahl mit Rücksicht auf die den Gleichungen $\psi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) = 0$ entsprechenden Lösungen *eine Reduction* eintreten lässt.

Hiernach liegt es nahe, statt der Gleichungen (2) überhaupt *zwei beliebige Correspondenzen* $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$, gegeben durch die Gleichungen

$$\varphi\left(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}\right) = 0, \quad \varphi'\left(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}\right) = 0 \tag{3}$$

auf $f = 0$ anzunehmen. Bewegt sich dann x auf der festen Grundcurve, so werden die übrigen Schnittpunkte der beiden vermöge (3) zu x gehörenden Curven eine Curve durchlaufen, die im Folgenden durch $\mathsf{M}_y = 0$ bezeichnet sei; und eine andere Curve $\mathsf{M}_x = 0$ wird man erhalten als Ort der Schnittpunkte der zu Punkten y von f gehörenden Curven. Beide Curven werden zusammenfallen, wenn beide Correspondenzen (3) symmetrisch in x und y sind, wie im Falle der Gleichungen (2). *Die Eigenschaften dieser Curven* $\mathsf{M}_y = 0$ *und* $\mathsf{M}_x = 0$ *wollen wir zunächst erörtern,* denn diese sind es, welche uns zur genaueren Bestimmung der gleichzeitig beiden Correspondenzen (3) genügenden Punktepaare führen werden.

Zur Erläuterung des dabei einzuschlagenden Weges sei es gestattet, *die aufgeworfene Frage zuvor für den einfacheren Fall der Gleichungen* (2) *zu beantworten,* d. h. ausgehend von den hier massgebenden Gesichtspunkten die Curve $M = 0$ nochmals zu untersuchen. Es wird diese Untersuchung wesentlich auf Anwendungen des Chasles'schen Correspondenzprincips beruhen.*)

Die Curven ψ des Netzes (1) seien von der s^{ten} Ordnung und mögen in ϱ gemeinsamen Basispunkten $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bez. t_1-, t_2-, $\ldots t_\varrho$-fache Punkte (je mit getrennten Tangenten) haben. Die Grundcurve $f = 0$ sei von der n^{ten} Ordnung und möge in den Punkten

*) Die folgende Bestimmung der Eigenschaften von $M = 0$ und der Jacobischen Curve des Netzes (1) verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill.

$S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bez. einen a_1-, a_2-, ... a_ϱ-fachen Punkt besitzen (wo diese letzteren Zahlen auch Null sein können). Diejenigen C_s der Schaar, welche durch einen beliebig angenommenen weiteren Punkt x der C_n gehen, schneiden sich noch in $s^2 - \Sigma t_i^2 - 1$ (wo sich das Summenzeichen auf alle ϱ festen Basispunkte des Netzes bezieht) Punkten y, welche auf der Curve $M = 0$ liegen. Um nun die Ordnung m der letzteren zu bestimmen, nehme man zwei beliebige feste Punkte A und B in der Ebene an, lege durch A und x eine C_s des Netzes, ebenso durch B und x eine solche und lasse x sich auf der C_n bewegen. Dann bilden die Schnittpunkte dieser beiden C_s mit einer beliebigen festen Geraden auf letzterer eine Correspondenz

$$(s\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,\quad s\,(ns - \Sigma a_i t_i))\,.$$

Die Coincidenzpunkte derselben sind zum Theil Punkte der C_m $M = 0$, zum Theil solche der C_n, theils endlich Punkte derjenigen Curve C_s des Netzes, welche gleichzeitig durch die beiden festen Punkte A und B hindurchgeht.*) Von letzteren Punkten der Geraden absorbirt jeder $s\,(ns - \Sigma a_i t_i)$ Coincidenzen; denn in so vielen Punkten schneidet die beregte C_s die C_n, und *jedem* derselben entspricht wieder dieselbe C_s als Curve des anderen Büschels. Man hat daher die Beziehung:

$$2\,s\,(ns - \Sigma a_i t_i) = m + n + s\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,$$

woraus sich *die Ordnung der Curve* $M = 0$ bestimmt (p. 663):

$$m = n\,(s^2 - 1) - s\,\Sigma a_i t_i = \nu s - n\,, \tag{4}$$

wenn $\nu = ns - \Sigma a_i t_i$ die Zahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve ψ mit $f = 0$ bedeutet. Ferner bemerke man, dass, wenn x auf der C_n wandert, auch die t_k (mit x beweglichen) Tangenten, welche in einem festen Punkte S_k an die durch x und A, bez. durch x und B gehenden C_s gezogen werden können, eine Correspondenz bilden:

$$(t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,\quad t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i))\,.$$

Die Coincidenzen derselben entsprechen aber

1) den a_k Tangenten der Curve C_n in S_k,
2) den t_k Tangenten an jene Curve C_s, welche zugleich durch A und B geht, jede wieder $(ns - \Sigma a_i t_i)$-fach als Coincidenzstrahl zählend,
3) den α_k Tangenten von $M = 0$ in S_k, wo eben α_k noch zu bestimmen ist.

---

*) Diese Punkte müssen so gewählt sein, dass sie nicht Basispunkte eines und desselben im Netze enthaltenen Büschels sind. Ist A ein Schnittpunkt von ψ_1 mit ψ_2 und B ein solcher von ψ_1 mit ψ_3, so sind die beiden betreffenden Curven eben durch (2) gegeben, und die zuletzt erwähnte Curve ist $\psi_1 = 0$.

Wir haben also:

$$2\,t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i) = \alpha_k + a_k + t_k\,(n - \Sigma a_i t_i)\,,$$

woraus man die *Vielfachheit des Punktes S_k für die Curve $M = 0$* findet (p. 664):

$$\alpha_k = t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i) - a_k = \nu t_k - a_k\,. \tag{5}$$

Verbindet man (5) mit (4), so erhält man noch die symmetrisch gestaltete Formel*):

$$s\,(a_k + \alpha_k) = t_k\,(n + m)\,. \tag{6}$$

Um schliesslich die Zahl der Punktepaare x-y zu finden, hatten wir noch die Eigenschaft der Jacobi'schen Curve $(\psi_1 \psi_2 \psi_3) = 0$ nöthig (p. 472), d. i. des Ortes der Punkte, in denen sich zwei Curven des Netzes (und dann jedesmal unendlich viele Curven desselben) und somit zwei Curven der durch A und B gehenden Büschel berühren. Es sei noch bemerkt, dass man die Ordnung dieses Ortes auch in folgender Weise ableiten kann. Ausser den Punkten A und B nehmen wir noch zwei *beliebige* Gerade F und G zu Hülfe. Durch A und einen beweglichen Punkt P von F, ebenso durch B und P lege man je eine Curve C_s und construire an beide die Tangenten in P: Wir suchen die Zahl der Punkte P, für welche diese zwei Tangenten zusammenfallen. Wenn man nun um einen beliebig auf F angenommenen Punkt Q sich eine Gerade drehen lässt und für irgend eine Lage derselben diejenigen Curven C_s des durch A gehenden Büschels sucht, für welche dieselbe Tangente ist, so gibt es deren $2\,(s-1)$, und der Ort der Berührungspunkte für alle Lagen der Geraden durch Q ist eine Curve der Ordnung $2\,(s-1) + 1 = 2\,s - 1$, welche einfach durch Q geht.**) Diese Curve schneidet die Gerade G in $2s - 1$ Punkten; zwischen den Schnittpunkten der Paare von den in Punkten P construirten Tangenten mit G hat man daher eine Correspondenz $(2\,s-1,\; 2\,s-1)$. Unter den $4\,s - 2$ Coincidenzen derselben befinden sich aber ausser den Schnittpunkten von G mit $(\psi_1 \psi_2 \psi_3) = 0$ noch die Schnittpunkte der durch A und B zugleich gehenden C_s, sowie der Schnittpunkt der beiden Geraden G und F. Somit bleibt für *die Ordnung der* Jacobi'*schen Curve die Zahl*

$$4\,s - 2 - s - 1 = 3\,(s-1)\,. \tag{7}$$

---

*) Die in den Gleichungen (4), (5), (6) ausgesprochenen Resultate sind es, welche von Cayley für den Fall $s = 3$ gelegentlich unter dem Namen des „Geiser-Cotterill"-Theorems ausgesprochen wurden: Math. Annalen, Bd. 8, p. 360.

**) Dies folgt auch aus einem Satze auf p. 414, denn der durch A gehende Büschel von C_s bildet ein Curvensystem mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\mu' = 2\,(s-1)$.

Ganz analoge Betrachtungen kann man anstellen, wenn man statt der demselben Netze angehörigen Büschel durch A und B zwei beliebige Büschel

$$\psi + \lambda\chi = 0, \quad \psi' + \lambda\chi' = 0$$

bez. von den Ordnungen s und s' zu Grunde legt; man hat dann nur an den gewonnenen Resultaten keine Reduction wegen einer beiden Büscheln gemeinsamen Curve anzubringen. An Stelle der Curve $M = 0$ tritt also eine Curve der Ordnung:

(8) $s(ns' - \Sigma a_i t_i') + s'(ns - \Sigma a_i t_i) - n = n(2ss' - 1) - s\,\Sigma a_i t_i' - s'\,\Sigma a_i t_i,$

wo sich die Zahlen t_i auf gemeinsame vielfache Punkte des Büschels s^{ter}, die Zahlen t_i' auf solche Punkte des Büschels s'^{ter} Ordnung beziehen. Für die Vielfachheit dieser Curve in einem Punkte, welcher t-facher Punkt des ersten, t'-facher des zweiten Büschels und a-facher von $f = 0$ ist, erhält man an Stelle von (5) die Zahl:

(9) $$\alpha = t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t_i') - a.$$

Endlich findet man die Ordnung des Ortes derjenigen Punkte, in denen sich zwei Curven der Büschel berühren, gleich

(10) $$(2s - 1) + (2s' - 1) - 1 = 2(s + s') - 3.\text{*)}$$

Man könnte diese Resultate endlich noch weiter verallgemeinern, indem man die beiden Curvenbüschel durch zwei einfach unendliche Curvensysteme der Ordnung s bez. s' mit den Charakteristiken μ, ν bez. μ', ν' ersetzt und dann diese Curvensysteme in ihrer Beziehung zu einer *beliebigen* C_n $f = 0$ betrachtet.**) Für uns ist jedoch der

*) Vgl. auch Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven, p. 127 in der Uebersetzung von Curtze; ib. p. 130 wird auch gezeigt, dass die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven beider Büschel in ihren Berührungspunkten im Allgemeinen eine Curve der Klasse $4ss' - 2(s + s')$ umhüllen. — Auch zwei Büschel der hier gemeinten Art kann man für eine eindeutige Transformation benutzen; den Doppelpunkten der neuen Curve entsprechen dann diejenigen Punktepaare, durch welche noch aus *jedem* der beiden Büschel eine Curve hindurchgeht; vgl die Anmerkungen auf p. 693 und 709.

**) Man erhält dann übrigens leicht auf analogem Wege an Stelle von (8) die Zahl:

$$\mu\mu' s(ns' - \Sigma a_i t_i') + \mu\mu' s'(ns - \Sigma a_i t_i) - \mu\mu' n$$
$$= \mu\mu'\{n(2ss' - 1) - s\Sigma a_i(t_i + t_i')\},$$

an Stelle von (9) die Zahl:

$$\mu\mu'\{t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t_i') - a\},$$

endlich an Stelle von (10) die Zahl:

$$\mu'(\mu + \nu) + \mu(\mu' + \nu') - \mu\mu' = \mu\nu' + \nu\mu' + \mu\mu'.$$

Hieran sind wieder noch Reductionen anzubringen, wenn beiden Curvensystemen (für $s = s'$) eine Curve gemeinsam ist, oder wenn (für $s > s'$) eine Curve C_s des ersten Systems in eine Curve $C_{s'}$ des zweiten und in eine andere $C_{s-s'}$ zerfällt.

Fall von hervorragendem Interesse, dass beide Curvensysteme zu der C_n in ganz besonderen Beziehungen stehen, denn *dieser Fall liegt eben vor*, *wenn zwei beliebige Correspondenzen in der Form* (3) *gegeben sind* (wie sich sogleich zeigen wird). Zur Untersuchung dieser Verhältnisse gehen wir daher jetzt über; allerdings werden wir dabei genöthigt sein, uns in manchen Einzelheiten auf Andeutungen zu beschränken.

In den Gleichungen (3), welche die zu betrachtenden Correspondenzen $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ auf $f = 0$ vermitteln (wo wieder f von der Ordnung n und vom Geschlechte p), können wir etwa die y_i als veränderliche Punktcoordinaten, die x_i dagegen als drei homogen vorkommende Parameter auffassen, die noch an die Bedingung $f(x) = 0$ geknüpft sind. Eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ stellt uns dann ein System von Curven dar, welches von einem irrational vorkommenden Parameter in allgemeinster Weise abhängt (vgl. p. 390). In den Gleichungen (3) haben wir also, wie oben behauptet wurde, zwei solche Curvensysteme vor uns, welche mit ihrem Parameter je durch *dieselbe* Irrationalität verknüpft sind. Zu der Curve $f = 0$ stehen diese Systeme aber dadurch noch in besonderer Relation, dass unserer Annahme nach die Functionen $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$ für $x = y$ vermöge $f = 0$ bez. γ- und γ'-fach verschwinden sollen, während letzteres im Allgemeinen für einen beliebigen Punkt der Ebene nicht eintreten wird. Dies können wir auch dahin aussprechen, dass unter den Curven des Systems, welche durch einen beliebigen Punkt x der Curve f gehen, immer eine enthalten ist (nämlich „die vermöge (3) zu x gehörige Curve“), von deren Schnittpunkten mit der Grundcurve γ bez. γ' in x selbst liegen; für jede der übrigen durch x gehenden Curven gibt es einen anderen Punkt von $f = 0$, in welchen γ bez. γ' Schnittpunkte derselben mit $f = 0$ zusammenfallen.

Für das System der Curven s^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ mögen nun wieder die Punkte $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ mit den charakteristischen Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_\varrho$ und $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ dieselbe Bedeutung haben wie soeben in dem Beispiele eines Curvenbüschels; für die Curven s'^{ter} Ordnung $\varphi' = 0$ bezeichnen wir ferner in entsprechender Weise ausgezeichnete Punkte mit $S_1', S_2', \ldots S_{\varrho'}'$ und die zugehörigen Zahlen mit $t_1', t_2', \ldots t_{\varrho'}'$, $a_1', a_2', \ldots a_{\varrho'}'$. Dabei können von den Punkten S' einige oder auch alle mit Punkten S zusammenfallen. Es bestehen dann die Relationen:

$$(11) \qquad \beta = ns - \Sigma a_i t_i - \gamma, \quad \beta' = ns' - \Sigma a_i' t_i' - \gamma',$$

denn z. B. β ist die Zahl der Punkte, in denen eine zu x gehörige Curve $\varphi(x, y) = 0$ die C_n noch trifft, und welche nicht in x selbst

liegen, aber alle mit x beweglich sind; und $\Sigma a_i t_i$ ist die Zahl der festen Schnittpunkte der Curve C_s $\varphi = 0$ mit der C_n $f = 0$. Es sei noch bemerkt, dass wir nur die Punkte S_i zu berücksichtigen brauchen, für welche $a_i \geqq 1$, d. h. welche auf $f = 0$ liegen; die übrigen festen Punkte der beiden Curvensysteme kommen im Folgenden nicht weiter in Betracht.

Selbstverständlich hätten wir auch die y_i als Parameter, welche an die Bedingung $f(y) = 0$ geknüpft sind, und die x_i als Punktcoordinaten betrachten können. Dann stellen uns die Gleichungen (3) zwei Curvensysteme r^{ter} bez. r'^{ter} Ordnung dar. Letzteren mögen die festen Ausnahmepunkte $R_1, R_2, \ldots R_\sigma$ und $R_1', R_2', \ldots R'_{\sigma'}$ zukommen, und diesen Punkten entsprechend den zu S_i gehörigen Zahlen a_i, t_i die Zahlen α_i, τ_i, α_i', τ_i'; dann haben wir auch die Gleichungen:

$$\alpha = nr - \Sigma\alpha_i\tau_i - \gamma, \quad \alpha' = nr' - \Sigma\alpha'_i\tau_i' - \gamma'. \tag{12}$$

Um nun *die Ordnung der Curve* $\mathsf{M}_y = 0$ zu bestimmen, welche vermöge $f = 0$ durch die beiden Curvensysteme s^{ter} und s'^{ter} Ordnung erzeugt wird (p. 722), stellen wir auf folgendem Wege eine Correspondenz zwischen den Punkten einer beliebigen Geraden her, analog der früher für die Curve $M = 0$ benutzten (p. 723). Die Zahl der Curven C_s $\varphi(x, y) = 0$, welche durch einen beliebigen Punkt z der Ebene gehen, ist gleich der Zahl der gemeinsamen von z abhängenden (d. i. nicht in feste Ausnahmepunkte S_i fallenden) Lösungen der Gleichungen $\varphi(x, z) = 0$ und $f(x) = 0$, und sie ist für alle Punkte der Ebene dieselbe, mit alleiniger Ausnahme der gemeinsamen festen Punkte des Systems der Curven C_s. Diese Zahl kennen wir aber für den Fall, dass z auf $f = 0$ liegt; dann ist sie nämlich nach (12) gleich $\gamma + \alpha$. Folglich ist sie immer gleich $\gamma + \alpha$.*). Jede der entsprechenden $\gamma + \alpha$ Curven C_s schneidet f in *einem* bestimmten Punkte γ-fach, und in letzterem hat *eine* bestimmte Curve $C_{s'}$ (die zu ihm vermöge $\varphi' = 0$ gehörige) einen γ'-fachen Schnittpunkt mit f. Einem beliebigen Punkte z auf einer festen Geraden sind dadurch auch $\gamma + \alpha$ Curven $C_{s'}$ zugeordnet; und dieselben schneiden auf jener Geraden $s'(\gamma + \alpha)$ Punkte z' als dem Punkte z entsprechende aus. Es entsteht so eine Correspondenz $(s'(\gamma + \alpha),\ s(\gamma' + \alpha'))$. Ihre Coincidenzen sind diejenigen Punkte der festen Geraden, durch welche „*zwei zusammengehörige*“ *Curven* C_s und $C_{s'}$ (d. i. zu demselben Punkte

*) Diese schon mehrfach angewandte Methode (z. B. bei den Sätzen auf p. 414), durch specielle, leicht übersehbare Fälle hinsichtlich der Anzahl von Lösungen das allgemeine Resultat zu bestimmen, ist neuerdings geradezu als *Princip der speciellen Lage* bezeichnet und in sehr ausgedehnter Weise verwerthet; vgl. Schubert: Göttinger Nachrichten, 1874, p. 274 und Math. Annalen, Bd. 10.

von f vermöge (3) gehörige) sich schneiden, also die Schnittpunkte der festen Geraden mit $M_y = 0$. Da unter diesen noch die n Schnittpunkte mit f enthalten sind, so wird schliesslich *die Ordnung der Curve* $M_y = 0$ *gleich*

$$(13) \qquad \begin{aligned} \mu_y &= s'(\gamma + \alpha) + s(\gamma' + \alpha') - \Gamma n \\ &= n(rs' + sr') - s'\Sigma\alpha_i\tau_i - s\Sigma\alpha_i'\tau_i' - \Gamma n, \end{aligned}$$

wo Γ *eine noch zu bestimmende Zahl bedeutet.**)

Wir untersuchen ferner das Verhalten der Curve $M_y = 0$ in den Punkten S_i und S_i' (vgl. p. 723 und p. 726). Wir haben hier folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Der Punkt S ist nicht zugleich ein Punkt S',

b) Der Punkt S ist zugleich ein Punkt S'.

Im Falle *a*) gibt es $\gamma' + \alpha'$ bestimmte Curven $C_{s'}$, welche durch S gehen, unter ihnen γ'-fach zählend die zu S' selbst gehörige $C_{s'}$. Es gibt aber auch $\gamma' + \alpha'$ Curven C_s, welche mit ihnen zusammengehören (p. 727). Für jedes Paar solcher zusammengehörigen Curven**) liegen t Schnittpunkte im Punkte S, während dies für ein beliebiges Paar von zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ nicht Statt findet, so dass diese t Schnittpunkte jedenfalls unter den beweglichen, die Curve $M_y = 0$ beschreibenden Punkten mit zu zählen sind. Während sie also für ein benachbartes Paar noch auf $M_y = 0$ getrennt liegen, rücken sie für das hier betrachtete Curvenpaar alle nach S, d. h. durch S gehen t Zweige von $M_y = 0$. *In einem gemeinsamen t-fachen Punkte S der Curven C_s, der nicht ein Punkt S' ist, wird die Vielfachheit von* $M_y = 0$ *gleich*

$$(14) \qquad \nu_y = t(\alpha' + \gamma');$$

und ebenso in einem gemeinsamen t'-fachen Punkte S' der $C_{s'}$ gleich

$$(14^*) \qquad \nu_y' = t'(\alpha + \gamma).$$

Im Falle *b*) bestimmen wir die Zahl ν_y mittelst einer Correspondenz, welche zwischen den Strahlen des durch S_i gehenden Büschels ganz ebenso durch die beiden Curvensysteme (3) begründet wird, wie

---

*) Es wird sogleich noch gezeigt werden, dass Γ die Zahl der in $x = y$ auf $f = 0$ liegenden Schnittpunkte zweier „zusammengehörigen" Curven φ, φ' ist, so dass der Ort der Schnittpunkte solcher Curvenpaare durch die Curve $M_y = 0$ *zusammen* mit $f^\Gamma = 0$ gegeben wird.

**) Die zu der dem Punkte S selbst entsprechenden $C_{s'}$ gehörige C_s wird allerdings unbestimmt; statt derselben hat man die einem benachbarten Punkte entsprechende C_s zu nehmen; für das so entstehende Curvenpaar liegen dann noch Γ weitere Schnittpunkte zu S benachbart, dem entsprechend, dass auch $f = 0$ Γ-fach zählend ein Theil der betrachteten Ortscurve ist.

oben im Beispiele durch die beiden Curvenbüschel. Es ist dies eine Correspondenz

$$(t_i'(\gamma + \alpha),\quad t_i(\gamma' + \alpha')).$$

Von den Coincidenzen fallen Γa_i in die Tangenten des a_i-fachen Punktes, welchen $f = 0$ in S_i besitzt. Die Coincidenzen dieser Correspondenz nämlich beziehen sich überhaupt auf den Ort der Schnittpunkte je zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ unserer beiden ∞^1-Systeme; dieser Ort aber besteht aus der Curve M_y *und* aus der Curve f, wobei letztere Γ-fach zu zählen ist, wenn Γ *bewegliche Schnittpunkte zweier Curven einer solchen Correspondenz in demjenigen Punkte von f liegen, welcher eben die gegenseitige Zuordnung beider Curven vermittelt.**) Hieraus erhellt gleichzeitig auch die Bedeutung der Zahl Γ in (13). Die zuletzt gewonnene Correspondenz dagegen gibt uns den Satz:

In einem Punkte S_i (oder S_i'), welcher gemeinsamer t_i-facher Punkt der C_s, gemeinsamer t_i'-facher Punkt der $C_{s'}$ und a_i-facher Punkt von f ist, hat die Curve M_y einen singulären Punkt, dessen Vielfachheit gegeben ist durch die Zahl

$$\nu_y^{(i)} = t_i'(\gamma + \alpha) + t_i(\gamma' + \alpha') - \Gamma a_i. \tag{15}$$

Ganz entsprechend hat man für die Curve $M_x = 0$ (p. 722) aus (13), (14), (14*), (15) die Zahlen:

$$\mu_x = r'(\gamma + \beta) + r(\gamma' + \beta') - \Gamma n \tag{16}$$
$$= n(rs' + sr') - r'\Sigma a_i t_i - r\Sigma a_i t_i',$$

$$\nu_x = \tau(\beta' + \gamma'),\quad \nu_x' = \tau'(\beta + \gamma), \tag{17}$$

$$\nu_x^{(i)} = \tau_i'(\gamma + \beta) + \tau_i(\gamma' + \beta') - \Gamma \alpha_i. \tag{18}$$

Die weiteren Untersuchungen, welche wir an diese Abzählungen knüpfen wollen, (insbesondere auch die Bestimmung der Zahl Γ) gestalten sich nun verschieden, je nachdem der γ- bez. γ'-werthige Punkt der Correspondenzen (3) in $x = y$ durch Berührung mit der Grundcurve entsteht oder nicht; und zwar wollen wir hier zunächst drei Hauptfälle unterscheiden:

1) er entsteht in φ und φ' durch einen vielfachen Punkt der Curven C_s und $C_{s'}$ in $x = y$;
2) er entsteht in φ und φ' durch Berührung mit f;
3) seine Entstehung ist in φ und φ' verschieden bedingt.

Diese Fälle sollen nach einander behandelt, und für sie die Formel für $(\varphi\varphi')$ jedes Mal näher untersucht werden. Dabei soll die Curve

*) Vorausgesetzt ist hier wie im Folgenden, dass zwei zu demselben Punkte x von f gehörige Curven $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi'(x, y) = 0$ sich ausser in x selbst *nicht* mehr in einem *mit x beweglichen* Punkte von f schneiden. — Es ist ferner immer ausgeschlossen, dass beiden Curvensystemen eine Curve gemeinsam sei.

$f = 0$ *nur mit einfachen Doppelpunkten*, nicht mit Rückkehr- oder höheren vielfachen Punkten begabt angenommen werden; *die Zahlen* a_i, α_i *können dann nur den Werth* 1 *oder* 2 *annehmen.*

1) Wir betrachten also zuerst den Fall, wo *der mehrwerthige Punkt in* $x = y$ *bei beiden Correspondenzen durch einen vielfachen Punkt der zu* x *bez.* y *gehörenden Curven bedingt ist.**) Die ersteren bezeichnen wir wieder mit C_s, $C_{s'}$, die letzteren mit C_r, $C_{r'}$. In jedem Punkte x von f liegen hier $\gamma\gamma'$ Schnittpunkte der beiden zu x gehörigen Curven C_s, $C_{s'}$, wenn wir annehmen, dass die γ Tangenten der ersteren in x von den γ' Tangenten der anderen verschieden sind. Nach einer früheren Bemerkung (p. 729) *haben wir also in den Formeln* (13)—(18) $\Gamma = \gamma\gamma'$ *zu setzen.*

Von den Punktepaaren x-y nun, welche gleichzeitig beiden Correspondenzen (3) genügen, werden die Punkte y offenbar durch $M_y = 0$ auf $f = 0$ ausgeschnitten (vgl. auch p. 721 und p. 722), die zugehörigen Punkte x durch die Curve $M_x = 0$, denn für jeden solchen Punkt x liegt ein weiterer Schnittpunkt zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ auf f. Die Gleichung $M_y = 0$ ist also das Resultat der Elimination der x_i aus den Gleichungen (3) und aus $f(x) = 0$; vorausgesetzt, dass man in diesem Resultate zuvor gewisse uneigentliche Factoren absondert; denn dasselbe würde an und für sich von der Ordnung $n(rs' + sr')$ in den y werden. Unter diesen Factoren ist zunächst, da $\Gamma = \gamma\gamma'$, die Curve f selbst $\gamma\gamma'$-fach enthalten (p. 729). Die *Bestimmung der übrigen Factoren* erfordert die Berücksichtigung und besondere Behandlung sehr vieler einzelnen Fälle, so dass eine vollständige Erledigung derselben uns hier zu weit führen würde. Man wird diese Bestimmung im Anschlusse an die folgenden Ueberlegungen aber leicht in jedem Falle ausführen.

Die fraglichen Factoren können nur von den Ausnahmepunkten der Correspondenzen (3) abhängen, denn durch diese ist ja ihr Auftreten bedingt. Wie dies im Einzelnen geschieht, mag nur an folgendem Beispiele erläutert werden.

Die einem *einfachen* Punkte S_i von f, welcher gemeinsamer t_i-facher Punkt der Curven C_s und τ_i-facher Punkt der Curven C_r dagegen nicht gleichzeitig ein Punkt S' ist, entsprechende Curve C_s wird unbestimmt. Zu S_i gehört dagegen eine ganz bestimmte Curve $C_{s'}$, deren Gleichung $\varphi'_s = 0$ sei; und somit kann *jeder* Punkt dieser Curve $\varphi_s' = 0$ als Schnittpunkt von φ_s' mit der zu φ_s' gehörenden Curve C_s aufgefasst werden, d. h. die Curve φ_s' ist ein Theil des Ortes der übrigen (nicht auf f liegenden) Schnittpunkte zweier zusammengehörigen Curven φ, φ'; und zwar ist dieselbe als solcher nach

*) Vgl. dazu das in der zweiten Anmerkung auf p. 456 Gesagte.

Gleichung (13) τ_i-fach zu zählen (indem $\alpha_i = 1$). Wir haben also den Satz, dass in dem Resultate der Elimination der x_i aus den Gleichungen (3) und aus $f(x) = 0$ der Factor $(\varphi_{S}')^{\tau_i}$ enthalten ist. Die Schnittpunkte von $\varphi_{S}' = 0$ mit $M_y = 0$ sind dann die Schnittpunkte von $\varphi_{S}' = 0$ mit der einem zu S benachbarten Punkte von f entsprechenden Curve C_s. Analog hat man den Fall zu behandeln, wo S zugleich ein Punkt S' ist, etc. Ist dagegen S Doppelpunkt von f, so gibt es zu S zwei verschiedene benachbarte Punkte, folglich auch zwei verschiedene benachbarte Curven C_s, und somit ist hier φ_{S}' $2\tau_i$-fach zu zählen, wie es Gleichung (13) verlangt.

Weiter würde man die Fälle zu unterscheiden haben, wo Punkte S nicht zugleich Punkte R sind (p. 727) und umgekehrt etc. Wir unterlassen jedoch hier diese Ausführungen und geben im Folgenden nur noch in Kurzem eine Uebersicht darüber, wie diese Resultate weiter zu verwerthen sind.*)

Wenn von den Schnittpunkten y zweier zu demselben Punkte x gehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ ein weiterer auf f liegt, so bildet derselbe zusammen mit x ein Punktepaar, welches gleichzeitig den Correspondenzen (3) genügt; ein solches Paar zählen wir jedoch unter den gesuchten nicht mit, wenn y an x selbst heranrückt. Die Zahl jener Paare ist daher gleich der Zahl der (nicht in festen Punkten der φ, φ' oder in Doppelpunkten von f liegenden) Schnittpunkte von f mit M_y, *vermindert um die Zahl derjenigen Punkte, in welchen ein Zweig der zu x gehörenden Curve C_s einen Zweig der zu x gehörenden Curve $C_{s'}$ berührt.* Letztere Punkte denken wir uns auf $f = 0$ durch eine Curve $X_y = 0$ ausgeschnitten, deren Ordnung leicht zu bestimmen ist. Nehmen wir dann zunächst an, dass keine Ausnahmepunkte in den Correspondenzen und keine Doppelpunkte von f vorkommen, so wird

$$M_y = X_y \,.\, K_y + Af, \tag{19}$$

wo nun K_y *die Curve ist, welche die Punkte y der gesuchten Paare x-y auf f ausschneidet.* Nun ist uns die Zahl der Schnittpunkte der letzteren mit f bekannt (p. 446), denn diese ist gleich $(\varphi\varphi')$; und somit ergibt sich, da die Ordnung von M_y durch (13) gegeben ist, für die Ordnung von X_y die Zahl:

$$\begin{aligned} \chi_y &= \mu_y - \frac{1}{n}(\varphi\varphi') \\ &= \gamma'(r+s) + \gamma(r'+s') - 3\gamma\gamma'.^{**}) \end{aligned} \tag{20}$$

---

*) Auf einen dieser Fälle kommen wir noch unter 2) zurück (p. 738).

**) Diese Zahl kann man auch leicht direct finden. Setzt man nämlich:

$$\varphi(x, y) = \alpha_x^{\,r}\beta_y^{\,s}, \qquad \varphi'(x, y) = a_x^{\,r'} b_y^{\,s'},$$

Für die Ordnung von $K_y = 0$ haben wir also die Zahl

(21) $k_y = n(rs' + sr') - \gamma(r' + s') - \gamma'(r + s) - \gamma\gamma'(n - 3)$

und es wird:

(22) $$(\varphi\varphi') = nk_y = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p,$$

wenn $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Die Ausdrücke M_y, X_y, K_y und A sind simultane Functionalinvarianten der Grundformen f, $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$, und die Gleichung (19) gibt eine zwischen ihnen bestehende Relation an.*) Eine solche aber kann nicht geändert werden, wie auch die Coëfficienten der Grundformen variirt werden mögen; insbesondere also muss sie auch bestehen, wenn wir auf der Curve f durch solche Variationen Doppelpunkte entstehen lassen, ein Fall, den wir zuerst betrachten wollen. Und zwar wollen wir die nicht in Doppelpunkte fallenden Schnittpunkte von $K_y = 0$ mit $f = 0$ bestimmen.

Da wir den Correspondenzen φ, φ' noch keine Ausnahmepunkte beilegen, so entsprechen diesem Doppelpunkte zwei ganz bestimmte Curven C_s, $C_{s'}$, von deren Schnittpunkten in ihm $\gamma\gamma'$ liegen, wie in einem beliebigen Punkte von f. Die Curve M_y geht also nicht durch den Doppelpunkt, folglich wegen (19) auch nicht die Curven X_y und K_y. Die Zahl der gesuchten Punktepaare ist daher wieder gleich nk_y, d. h. gleich

(23) $$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p - 2\gamma\gamma' d,$$

wenn d Doppelpunkte auf f vorhanden sind, und wenn $p = \frac{1}{2}(n-1) \cdot (n-2) - d$ das Geschlecht von f bedeutet. *Gehen also die Curven C_s, $C_{s'}$ durch d Doppelpunkte von f nicht hindurch, so ist der auf* p. 446 *gefundene Werth für $(\varphi\varphi')$ um $2d\gamma\gamma'$ zu erniedrigen, wenn man unter p das Geschlecht von f verstehen will.*

Wir wollen nun weiter auch die Constanten der Correspondenzen φ und φ' variiren und dadurch auf f Ausnahmepunkte erzeugen. Wir betrachten jedoch auch wieder nur einzelne Fälle, die für spätere Anwendungen nöthig sind. Es möge zunächst φ' noch unverändert

---

so entsteht die Curve $X_y = 0$ durch Elimination der dx_i aus den Gleichungen:

$$\alpha_x^r \beta_x^{s-\gamma} \beta_{dx}^\gamma = 0, \qquad a_x^{r'} b_x^{s'-\gamma'} b_{dx}^{\gamma'} = 0, \qquad k_{dx} = 0,$$

wenn $k_x = 1$. Aus dem Resultate, welches unabhängig von den k_i sein muss, lässt sich ein Factor $k_x^{\gamma\gamma'}$ absondern; es bleibt dann in der That ein Ausdruck von der Ordnung (20). So kann man also auch umgekehrt die Zahl $(\varphi\varphi')$ direct ableiten.

*) Dass in (19) als Coëfficient von M_y oder K_y nicht noch eine eigentliche simultane Invariante auftreten kann, erkennt man durch eine ähnliche Ueberlegung, wie sie auf p. 471 angestellt wurde.

bleiben, dagegen ein einfacher Punkt S von f (mit den Coordinaten x_i) gemeinsamer t-facher Punkt der C_s, τ-facher Punkt der C_r werden. Wir kennen das Verhalten von M_y in x nach (14); das Verhalten von X_y bestimmt sich in folgender Weise. Es verschwindet dann $\varphi(x, x)$ jedenfalls $(t + \tau)$-fach, d. h. die zu einem benachbarten Punkte von x gehörige Curve φ hat in x einen $(t + \tau)$-fachen Punkt. Es fallen also $(t + \tau)\gamma'$ Schnittpunkte der letzteren mit der zu x gehörigen Curve φ' in den Punkt x, d. h. *die Vielfachheit von* $X_y = 0$ *in einem gemeinsamen t-fachen Punkte der* φ *ist gleich*

$$(t + \tau)\gamma'. \tag{24}$$

Haben gleichzeitig die φ' in x einen t'-fachen Punkt, so deformiren wir die Correspondenz $\varphi'(x, y)$ zunächst so, dass dieser t'-fache Punkt von x getrennt, aber noch auf f — sagen wir in y — liegt; dann verschwindet X_y von der Ordnung $(t + \tau)\gamma'$ in x und von der Ordnung $(t' + \tau')\gamma$ in y. Fällt nun x mit y zusammen, so liegen in x $(t + \tau)\gamma' + (t' + \tau')\gamma$ Schnittpunkte der beiden zu $x + dx$ gehörigen Curven φ, φ'. Da aber für *je* zwei zusammengehörige Curven φ, φ' $\gamma\gamma'$ Schnittpunkte in $x = y$ liegen, so ist die Zahl der neu hinzugetretenen Schnittpunkte, d. h. *die Vielfachheit von* $X_y = 0$ *in einem gemeinsamen t-fachen Punkte der* φ *und t'-fachem Punkte der* φ' *gleich*

$$(t + \tau)\gamma' + (t' + \tau')\gamma - \gamma\gamma'. \tag{25}$$

An Stelle von M_y in (19) tritt nun im ersten Falle nach den obigen Ausführungen (p. 731) das Product $M_y(\varphi s')^\tau$, so dass die Gleichung (19) übergeht in:

$$M_y(\varphi s')^\tau = X_y \,.\, K_y + Af. \tag{26}$$

Im zweiten Falle dagegen erhalten wir:

$$M_y(\varphi' s)^\tau (\varphi s)^{\tau'} = X_y \,.\, K_y + Af \tag{27}$$

wenn $\varphi s = 0$, $\varphi' s = 0$ die beiden einem zu S benachbarten Punkte von f zugehörenden Curven C_s, $C_{s'}$ sind. Ebenso wird, wenn mehrere Punkte S der Art vorkommen, auf der linken Seite von (19) neben M_y ein Product Π_y auftreten, dessen einzelne Factoren von der Form $(\varphi s')^\tau \ldots$ sind. Die gesuchten Punkte y werden also nicht mehr durch die Curve $K_y = 0$ allein ausgeschnitten, sondern diese Curve geht auch durch die Schnittpunkte von $\Pi_y = 0$ mit $f = 0$. *Nur die nicht in singulären Punkten liegenden Verschwindungs-Punkte des Quotienten*

$$\Lambda_y = \frac{K_y}{\Pi_y} = \frac{M_y}{X_y} \tag{28}$$

geben uns jetzt die Punkte y der gesuchten Paare x-y. Die zuge-

hörigen Punkte x sind die Verschwindungs-Punkte eines entsprechend zu bildenden Quotienten:

$$\Lambda_x = \frac{K_x}{\Pi_x} = \frac{M_x}{X_x}. \tag{29}$$

Die Zahl dieser Verschwindungs-Punkte wollen wir noch für die in den Formeln (24) und (25) berücksichtigten Fälle bestimmen. Im ersten Falle, wo also ein Ausnahmepunkt S mit den charakteristischen Zahlen t, τ auftritt, verschwindet wegen (14), (24) und (28) der Quotient Λ_y in diesem von der Ordnung:

$$t(\alpha' + \gamma') - (t + \tau)\gamma' = t\alpha' - \tau\gamma'; \tag{30}$$

die Zahl der einfachen Verschwindungs-Punkte dieses Quotienten ist sonach

$$\begin{aligned} &n(\mu_y - \chi_y) - t\alpha' + \tau\gamma' \\ &= n\{n(rs' - sr') - \tau s' - \gamma\gamma' n\} - n\{\gamma'(r+s) + \gamma(r'+s') - 3\gamma\gamma'\} - t\alpha' + \tau\gamma' \\ &= \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2), \end{aligned} \tag{31}$$

wenn wieder: $\alpha = nr - \tau - \gamma$, $\beta = ns - t - \gamma$, $\alpha' = nr' - \gamma'$, $\beta' = ns' - \gamma'$. *Die resultirende Zahl wird also durch den festen Punkt S nicht beeinflusst.*

Ist S dagegen zugleich ein Punkt S', so verschwindet wegen (15), (25) und (28) der Quotient Λ_y in S von der Ordnung

$$\begin{aligned} &t'(\alpha + \gamma) + t(\alpha' + \gamma') - \gamma\gamma' - (t + \tau)\gamma' - (t' + \tau')\gamma + \gamma\gamma' \\ &= t\alpha' + t'\alpha - \tau\gamma' - \tau'\gamma.\text{*)} \end{aligned} \tag{32}$$

Und *die Zahl der einfachen Schnittpunkte von $\Lambda_y = 0$ mit $f = 0$ wird wieder gleich*

$$\begin{aligned} &n(\mu_y - \chi_y) - t\alpha' - t'\alpha + \tau\gamma' + \tau'\gamma \\ &= \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2) \end{aligned} \tag{33}$$

wo nun:

$$\begin{aligned} \alpha &= nr - \tau - \gamma, \quad \beta = ns - t - \gamma \\ \alpha' &= nr' - \tau' - \gamma', \quad \beta' = ns' - t' - \gamma'. \end{aligned}$$

In ganz analoger Weise lässt sich ferner nachweisen, dass auch für Doppelpunkte von f, durch welche die Curven C_s, C_r, $C_{s'}$, $C_{r'}$ hindurchgehen, die Zahl $(\varphi\varphi')$ in der Form erscheint

$$(\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'(p + d'),$$

wenn man unter p das Geschlecht von f versteht und unter d' die Zahl derjenigen Doppelpunkte von f, welche nicht Ausnahmepunkte der Correspondenzen sind. Das gewonnene Resultat werden wir nach

*) Diese Zahl stimmt mit der von Brill in anderer Weise abgeleiteten überein: Math. Annalen, Bd. 6, p. 46.

kurzer Erörterung der beiden noch übrigen (auf p. 729 erwähnten) Fälle in einem Satze zusammenfassen.

2) Wir nehmen zweitens an, dass *der γ- bez. γ'-werthige Punkt in $x = y$ bei beiden Correspondenzen durch Berührung entsteht.* Dieser Fall ist dadurch von Interesse, dass wir nach den früheren Betrachtungen über die Natur solcher Correspondenzen weit bestimmtere Angaben machen können, als im vorigen Falle. Die beiden Correspondenzen nämlich können wir dann in folgender Form gegeben annehmen (vgl. p. 472):

$$(34)\quad \begin{aligned} \varphi(x,y) &\equiv \Phi_0(x)\cdot\varphi_0(y) + \Phi_1(x)\cdot\varphi_1(y) + \dots + \Phi_\gamma(x)\cdot\varphi_\gamma(y) = 0 \\ \varphi'(x,y) &\equiv \Phi_0'(x)\cdot\varphi_0'(y) + \Phi_1'(x)\cdot\varphi_1'(y) + \dots + \Phi_{\gamma'}'(x)\cdot\varphi_{\gamma'}'(y) = 0, \end{aligned}$$

wo $\Phi_0 = 0$ diejenige Curve ist, welche die Berührungspunkte der $(\gamma-1)$-punktig berührenden Curven s^{ter} Ordnung der Schaar

$$\lambda_1\varphi_1(y) + \lambda_2\varphi_2(y) + \dots + \lambda_\gamma\varphi_\gamma(y) = 0$$

auf $f = 0$ ausschneidet, und wo die übrigen Curven $\Phi_i = 0$, $\Phi_i' = 0$ in entsprechender Weise definirt sind. Hier ist die Ordnung r der Curven Φ, so wie die Vielfachheit derselben in den gemeinsamen Punkten der φ und in den Doppelpunkten von f durch das Verhalten der Curven φ vollständig gegeben. In der That kann die Bestimmung von r durch s in folgender Weise geschehen.*) Die Coincidenzcurve einer Correspondenz $\varphi(x, y) = 0$ ist nach p. 452 von der Ordnung

$$r + s + \gamma(n-3).$$

Insbesondere also für $\gamma = 1$, $r = s$ die Coincidenzcurve der Correspondenz

$$\varphi_0(x).\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_0(y) = 0$$

von der Ordnung $2s + n - 3$. Für $\gamma = 2$ ist daher in der Correspondenz (vgl. p. 456):

$$\Phi_0(x)\cdot\varphi_0(y) + \Phi_1(x)\cdot\varphi_1(y) + \Phi_2(x)\cdot\varphi_2(y) = 0$$

die Ordnung r der Φ gleich $2s + n - 3$, und also die Ordnung der Coincidenzcurve gleich $3(s + n - 3)$; hieraus findet man ebenso die Ordnung der Coincidenzcurve bei $\gamma = 3$ gleich $4[s + \frac{3}{2}(n-3)]$, u. s. f. *Allgemein wird die Ordnung der Coincidenzcurve gleich*

$$(35)\qquad (\gamma + 1)\left\{s + \tfrac{1}{2}(n-3)\gamma\right\},$$

Nun sind die Curven r^{ter} Ordnung $\Phi_i = 0$ in (34) Coincidenzcurven einer Correspondenz mit $(\gamma-1)$-werthigem Punkte in $x = y$, und daher:

$$(35^*)\qquad r = \gamma\left\{s + \tfrac{1}{2}(n-3)(\gamma-1)\right\}.$$

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 471.

Wir haben ferner gesehen (p. 455), dass in jedem einfachen Punkte von f, in welchem σ feste Schnittpunkte der Curven φ_i liegen, $\gamma\sigma$ Schnittpunkte der Curven Φ_i liegen, ohne jedoch darauf Rücksicht zu nehmen, ob die Curven φ daselbst einen gemeinsamen σ-fachen Punkt haben, oder ob sie die Curve f daselbst $(\sigma-1)$-punktig berühren, während wir bei Aufstellung der Zahl $\nu_y^{(i)}$ in (15) ausdrücklich ersteres annahmen. Die Zahl (15) ist aber auch für den letzteren Fall richtig. Für einen einfachen Punkt S_i von f (d. i. $a_i = 1$) nämlich möge $t_i = 1$ sein, und die φ' mögen daselbst einen gemeinsamen t_i'-fachen Punkt haben, dann ist die Vielfachheit der Curve $\mathsf{M}_y = 0$ gegeben durch:

$$\nu_y^{(i)} = t_i'(\gamma + \alpha) + \gamma' + \alpha' - \Gamma.$$

Gehen nun die φ auch noch sämmtlich durch $t_i - 1$ zu S_i benachbarte Punkte von f, so ist für jeden von diesen $t_i' = 0$, und in jedem ist also die Vielfachheit von $\mathsf{M}_y = 0$ gleich $\gamma' + \alpha'$; *im Ganzen ist daher die Vielfachheit von* $\mathsf{M}_y = 0$ *in* S_i *in der That gegeben durch die Zahl:*

$$\nu_y^{(i)} = t_i'(\gamma + \alpha) + t_i(\gamma' + \alpha') - \Gamma.$$

Analoges gilt, wenn gleichzeitig die φ' in S_i die Grundcurve $(t'-1)$-punktig berühren; und ebenso erledigt sich diese Frage für einen Doppelpunkt von f (d. i. $a_i = 2$). In letzterem Falle haben wir nur σ durch $2t_i$ zu ersetzen; dann gibt die Zahl $\gamma(\sigma + \gamma - 1)$ wieder die Zahl der in einem solchen liegenden festen Schnittpunkte der Φ.

Die Zahlen τ_i, τ_i' *in obigen Formeln sind also für einen einfachen Punkt von* f:

(36). $$\tau_i = t_i\gamma, \quad \tau_i' = t_i'\gamma',$$

für einen Doppelpunkt von f:

(37) $$\tau_i = \gamma t_i + \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1), \quad \tau_i' = \gamma' t_i' + \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1).$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass $\gamma' > \gamma$. Von den Schnittpunkten je zweier in demselben Punkte x von f $(\gamma-1)$- bez. $(\gamma'-1)$-punktig berührenden Curven liegen γ Punkte zu x benachbart auf f; *es ist daher (vgl. p. 729) in den Formeln* (13)—(18) $\Gamma = \gamma$ *zu nehmen.*

Die Bestimmung der in dem Eliminationsresultate der x aus (34) und aus $f(x) = 0$ neben M_y und f^γ auftretenden Factoren gestaltet sich ganz wie im vorigen Falle und braucht nicht noch einmal erörtert zu werden.

Ein besonderes Verhalten dagegen zeigt hier die für Aufstellung der Gleichung (19) wichtige Curve $\mathsf{X}_y = 0$, welche auf $f = 0$ diejenigen Punkte x ausschneidet, für die ein $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ nach x zurückfällt. Da wir aber

$\gamma' > \gamma$ voraussetzen, so muss dann dieser $(\gamma + 1)^{\text{te}}$ Schnittpunkt auch auf der Curve f liegen; und dies tritt nur ein, entweder wenn eine Curve C_s γ-punktig berührt (wo dann $\gamma + 1$ consecutive Punkte gemeinsam sind), also in den Coincidenzpunkten der ersten Correspondenz (34), oder wenn eine Curve φ' in x einen Doppelpunkt hat, wo dann nur γ gemeinsame consecutive Punkte auftreten, von letzteren aber einer als Schnittpunkt von φ und φ' doppelt zählt. Die Punkte der ersteren Art, *von denen jeder γ'-fach zu zählen ist**), werden nach (35) durch eine Coincidenzcurve $L_\gamma = 0$ der Ordnung $(\gamma + 1) \cdot \{s + \frac{1}{2}(n - 3)\gamma\}$ auf f ausgeschnitten; die Punkte der letzteren Art, *von denen jeder γ-fach zählt*, durch eine Curve, welche sich in folgender Weise bestimmt**). Aus der zweiten Gleichung (34) muss sich für $x = y$ ein Factor f absondern, so dass man hat:

$$(38) \qquad \Phi_0'(x) \cdot \varphi_0'(x) + \dots + \Phi_{\gamma'}'(x) \cdot \varphi_{\gamma'}'(x) = \Psi' \cdot f.$$

Für die Schnittpunkte von Ψ' mit f verschwindet also die linke Seite dieser Gleichung quadratisch, d. h. die zu einem dieser Schnittpunkte gehörige Curve φ' hat in ihm einen Doppelpunkt; und also werden die erwähnten Punkte der zweiten Art ausgeschnitten durch die Curve $\Psi' = 0$, für deren Ordnung man aus (38) die Zahl findet:

$$(39) \qquad \psi' = r' + s' - n = (\gamma' + 1)s' + \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1)(n - 3) - n.$$

Nehmen wir nun zunächst wieder an, dass f keine Doppelpunkte habe, und dass keine gemeinsamen festen Punkte der C_s oder $C_{s'}$ auf f liegen, so tritt hier an Stelle von (19) die Gleichung:

$$(40) \qquad \mathsf{M}_y = (\Psi')^\gamma (L_\gamma)^{\gamma'} \cdot \mathsf{K}_y + A \cdot f.$$

Die Ordnung von K_y findet man hieraus wie im vorigen Falle wegen (13), (35) und (39) gleich

$$\begin{aligned}&\mu_y - \gamma\psi' - \gamma'(\gamma + 1)\{s + \tfrac{1}{2}\gamma(n - 3)\}\\ (41) \qquad &= n(rs' + sr') - \gamma(r' + s') - \gamma'(r + s) - \gamma\gamma'(n - 3).\end{aligned}$$

Die weiteren Untersuchungen gestalten sich nun auch ganz wie im vorigen Falle; man hat nur immer den Ausdruck X durch das Product $(\Psi')^\gamma (L_\gamma)^{\gamma'}$ zu ersetzen. Das Verhalten dieses Productes in Ausnahmepunkten der Curve f oder der Correspondenzen (34) ist auch leicht zu bestimmen, da man nach Früherem das Verhalten von L_γ kennt, und da das von Ψ' aus (38) leicht zu entnehmen ist. Die gesuchten Punkte y werden schliesslich wieder durch die einfachen Verschwindungspunkte von Quotienten Λ_y der Form (28), und die zu-

*) Man erkennt dies sofort aus dem auf p. 444 Gesagten.

**) Ausgenommen ist hier immer der Fall $\gamma' = \gamma$. — Vgl. das Beispiel $\gamma' = 2$ auf p. 456, wo Ψ' in die Jacobi'sche Curve der drei Curven φ'_0, φ'_1, φ'_2 übergeht.

gehörigen Punkte x durch die von Quotienten R_x der Form (29) gefunden. Für diese Quotienten bleiben dann auch die Zahlen (30) und (32) gültig; man hat in ihnen nur τ, τ' nach (36) und (37) durch t und t' auszudrücken.

Zu bemerken ist nur, dass der Fall, wo sowohl die C_s, $C_{s'}$ als die C_r, $C_{r'}$ durch einen Doppelpunkt von f nicht hindurchgehen, hier nicht vorkommen kann. Denn wenn auch für einen solchen $t = t' = 0$, so haben wir nach (37) doch:

$$\tau_i = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)\,, \quad \tau_i' = \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1)\,.$$

Nehmen wir nun an, es sei ein solcher Doppelpunkt S vorhanden, so entsprechen ihm zwei verschiedene Curven C_s: $\varphi_S = 0$, $\varphi_{S'} = 0$ und zwei verschiedene Curven $C_{s'}$: $\varphi_S' = 0$, $\varphi'_{S'} = 0$; und an Stelle von (40) tritt, wenn keine anderen Ausnahmepunkte vorkommen, die Gleichung:

$$\mathsf{M}_y\,(\varphi_S\varphi_{S'})^{\frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1)}\,(\varphi_S'\varphi_{S'}')^{\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)} = (\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}\,\mathsf{K}_y + Af$$

Aus dieser Identität können wir hier aber nichts schliessen, denn wir kennen das Verhalten von M_y in S noch nicht. Die Zahl der gesuchten Punkte y ist aber gleich der Zahl der Punkte x, welche mit ihnen je ein Paar bilden. Statt M_y können wir also auch den Ausdruck M_x benutzen. Die Vielfachheit des letzteren ist nach (18) in Rücksicht auf (35*):

$$\begin{aligned}\pi &= \tau_i'(\gamma + \beta) + \tau_i(\gamma' + \beta') - 2\gamma = \\ &= \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1)(\gamma + \beta) + \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)(\gamma' + \beta') - 2\gamma,\end{aligned}$$

wo $\beta = ns - \gamma$, $\beta' = ns' - \gamma'$. Ferner ist nach (40):

$$\mathsf{M}_x = (\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}\,\mathsf{K}_x + Af. \tag{42}$$

Nun ist die Vielfachheit von L_γ in S gleich $\frac{1}{2}\gamma(\gamma + 1)$, die von Ψ' nach (38) gleich $\frac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1) - 2$. Die Vielfachheit von K_y in S wird daher gegeben durch die Zahl:

$$\begin{aligned}\varkappa &= \pi - \tfrac{1}{2}\gamma'\gamma(\gamma + 1) - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma'(\gamma' - 1) + 2\gamma \\ &= \tfrac{1}{2}\beta\gamma'(\gamma' - 1) + \tfrac{1}{2}\beta'\gamma(\gamma - 1) - \gamma\gamma'.\end{aligned}$$

Die Ordnung k_x von K_x ist nach (42) gleich der in (41) gegebenen Zahl, so dass:

$$nk_x = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2) + \beta'\gamma(\gamma - 1) + \beta\gamma'(\gamma' - 1) - 2\gamma\gamma'.$$

Die Zahl der einfachen Schnittpunkte von $\mathsf{K}_x = 0$ mit f wird daher

$$= nk_x - 2\varkappa = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2)\,.\text{*)}$$

Auf dieselbe hat also ein solcher Doppelpunkt keinen Einfluss.

*) Man kann hieraus umgekehrt das Verhalten von M_y in S bestimmen. Analoges gilt übrigens auch für den unter 1) besprochenen Fall, wo für einen Doppelpunkt $t = 0$ und τ von Null verschieden ist (p. 732).

Eine besondere Erwähnung verlangt noch *der Fall* $\gamma = \gamma'$. Man übersieht leicht, dass auch hier $\Gamma = \gamma$ zu nehmen ist, dass aber ein Zerfallen der Curve $X = 0$ in die Curven $(\Psi')^\gamma = 0$ und $(L_\gamma)^{\gamma'} = 0$ nicht mehr eintritt, sondern Alles symmetrisch bleibt.

3) Endlich mögen hier noch einige Worte über den dritten oben genannten Fall (p. 729) ihre Stelle finden, *in welchem der γ-werthige Punkt von $\varphi(x, y)$ in $x = y$ durch einen γ-fachen Punkt der Curven φ, der γ'-werthige Punkt von $\varphi'(x, y)$ in $x = y$ dagegen durch $(\gamma' - 1)$-punktige Berührung der Curven φ' entsteht.* Hier ist unabhängig davon, ob $\gamma' > \gamma$ oder $< \gamma$, $\Gamma = \gamma$ zu nehmen. Ferner rückt ein weiterer Schnittpunkt der beiden zu x gehörenden Curven φ, φ' an x heran: erstens, wenn in x eine Coincidenz von $\varphi(x, y)$ eintritt, und zweitens, wenn die in x berührende Curve φ in x einen Doppelpunkt hat. An Stelle der Fundamental-Gleichung (19) tritt daher hier die folgende:

$$M_y = \Psi^{\gamma'} . (L_{\gamma'})^\gamma . K_y + Af,$$

wo $L_{\gamma'} = 0$ die Coincidenzcurve von $\varphi'(x, y) = 0$ bedeutet, während Ψ durch Gleichung (38) definirt ist, wenn man darin die gestrichenen Buchstaben mit den nicht gestrichenen vertauscht. Die Bestimmung des Verhaltens der hier auftretenden Curven in den Ausnahmepunkten der Correspondenzen geschieht dann wieder ebenso, wie im Vorhergehenden. —

Die gewonnenen Resultate fassen wir schliesslich, soweit wir dieselben weiterhin noch benutzen werden, zu folgendem Satze zusammen:

Wenn zwei Correspondenzen $(\alpha, \beta)_\gamma$ und $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$, welche beliebige (feste) Ausnahmepunkte besitzen mögen, durch zwei Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ gegeben sind, so ist die Zahl der beiden gleichzeitig genügenden und getrennt liegenden Paare x-y gleich

$$(43) \qquad (\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma'(p + D),$$

wenn es D Doppelpunkte von f gibt, durch welche weder die zu x noch die zu y gehörenden Curven φ, φ' sämmtlich hindurchgehen. Die Punkte y dieser Paare sind dabei die ***einfachen***, *nicht in Ausnahmepunkten liegenden Verschwindungspunkte des Quotienten $\Lambda_y = \frac{K_y}{\Pi}$, wenn Π das bekannte Product bedeutet, welches durch die Ausnahmepunkte bedingt wird und in* (26), (27) *etc. als Factor von M_y auftritt. Die Vielfachheit von Λ_y ist für einen t- bez. t'-fachen Ausnahmepunkt der zu x in φ bez. φ' gehörenden Curven, welcher einfacher Punkt von f ist, durch die Zahl* (25) *gegeben (in der auch einzelne der Zahlen t, τ, t', τ' Null sein können). Ebenso sind die zugehörigen Punkte x die einfachen, nicht in Ausnahmepunkten liegenden Verschwindungspunkte eines Quotienten Λ_x.*

— *Im Falle, dass jede der Correspondenzen φ und φ' bei Vertauschung von x mit y ungeändert bleibt, ist jedoch die Zahl der Punktepaare gleich* $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$, *indem alsdann die Curven* $\Lambda_x = 0$ *und* $\Lambda_y = 0$ *zusammenfallen.**) —

Ein solcher Fall der Symmetrie tritt insbesondere in dem Beispiele ein, von welchem wir ausgingen, und in welchem die Curve $M_y = M_x = 0$ durch die Curve $M = 0$ zu ersetzen ist (p. 721 ff.). Hier erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$M \cdot \Pi = (\psi_1 \psi_2 \psi_3) \cdot K_y + Af,$$

in der also die Curve X_y an Stelle der Jacobi'schen Curve des betrachteten Netzes getreten ist, und wo Π ein von den festen Punkten der Curven des Netzes abhängender Ausdruck ist. Von der Zahl $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$ hat man hier noch die Zahl $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ der auf $\psi_1 = 0$ gelegenen Punktepaare x-y abzuziehen, welche auch beiden Correspondenzen (2) genügen (wo ν die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Curven des Netzes mit f bedeutet). Die Zahl der gesuchten Punktepaare wird also gleich, indem $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \nu - 1$:

$$(44) \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) &= \tfrac{1}{2}(\nu-1)^2 - p - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) - D \\ &= \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + d', \end{aligned}$$

wenn sämmtliche Curven ψ durch d' Doppelpunkte von f hindurchgehen; und diese Zahl stimmt mit der auf p. 673 für γ gefundenen in der That überein. —

Die Formel für $(\varphi\varphi')$ wollen wir noch zur Behandlung einiger Beispiele benutzen, die uns theilweise sogleich noch nützlich sein werden; weiterhin gehen wir dann zur Aufstellung einer entsprechenden Formel für drei Correspondenzen über. Diese Beispiele sollen sich auf die Betrachtung *einer von drei Parametern abhängigen linearen Curvenschaar* beziehen**), nämlich:

$$(45) \qquad \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \lambda_3 \varphi_3(x) + \lambda_4 \varphi_4(x) = 0.$$

Der Einfachheit wegen nehmen wir dabei an, dass alle Curven des Netzes zu f adjungirt seien (d. i. durch die Doppelpunkte von f

*) Solche Symmetrie tritt z. B. ein, wenn der γ-fache Punkt der Curven φ in $x = y$ dadurch entsteht, dass die zu x gehörige Curve in γ getrennte Curven zerfällt, wenn man also z. B. ein einfach unendliches System von Curven betrachtet, von denen γ durch jeden Punkt der Ebene gehen. — Die im Texte noch nicht betrachteten Fälle, wo einzelne Zweige des γ-fachen Punktes der Curven φ die Curve f berühren etc., erledigt man durch Combination der für die getrennten Fälle angewandten Methoden.

**) Diese Beispiele sind für die Theorie der Raumcurven von besonderem Interesse; vgl. Brill: Math. Annalen, Bd. 4, p. 522 und Bd. 6, p. 50.

gehen) und ausserdem f noch in M beweglichen Punkten treffen. Die verschiedenen hier abzuleitenden Sätze sind zum Theil auch mit Rücksicht auf später zu behandelnde Probleme ausgewählt, welche dann den Eingangs erwähnten Zusammenhang dieser Erörterungen mit der Theorie der Specialschaaren klar stellen werden. Die einzelnen Beispiele trennen wir von einander durch grosse lateinische Buchstaben.

A) Durch jeden Punkt von f geht ein Netz von Curven der Schaar (45) mit $M-1$ beweglichen Schnittpunkten; *zu jedem Punkte von f kann man also nach* (44) *noch*

$$N = \tfrac{1}{2}(M-2)(M-3) - p \tag{46}$$

Punktepaare finden, so dass durch alle drei Punkte noch einfach unendlich viele Curven der Schaar (45) *gehen.*

B) *Es soll die Zahl der in* (45) *enthaltenen Curvenbüschel bestimmt werden, deren Curven f in einem Punkte sämmtlich berühren, während noch ein weiterer (beweglicher) Basispunkt auf f liegt.**) Wir heben zunächst aus der Schaar (45) die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Curven heraus, welche f berühren; und aus dieser ∞^2-Schaar wiederum die beiden ∞^1-Schaaren, welche bez. durch zwei feste Punkte A und B gehen. Durch A und einen beliebigen Punkt von f gehen dann nach der Formel auf p. 460 noch $2(M+p-2)$ berührende Curven. Die beiden ∞^1-Schaaren geben uns daher auf f zwei Correspondenzen

$$(M-2,\ \ 2(M+p-2))_2\,;$$

und die Zahl der ihnen gemeinsamen Punktepaare ist gleich

$$4(M-2)(M+p-2) - 8p,$$

Nun gehen aber durch A und B noch $2(M+p-1)$ berührende Curven, welche beiden Correspondenzen gemeinsam sind; und der Berührungspunkt einer jeden von diesen bildet mit jedem ihrer anderen $M-2$ Schnittpunkte ein Paar der gesuchten Art. *Die verlangte Zahl wird somit gleich*

$$\begin{aligned} &4(M-2)(M+p-2) - 8p - 2(M-2)(M+p-1) \\ &= 2(M-2)(M-3) + 2p(M-6). \end{aligned} \tag{47}$$

C) *Es soll auf f die Zahl der Punktetripel gefunden werden, durch die noch einfach unendlich viele Curven der Schaar* (45) *hindurchgehen, während gleichzeitig in einem solchen Büschel eine Curve vorkommt, welche f in* z w e i *von den drei Punkten des Tripels berührt.*

---

*) Diese Zahl z. B. ist gleich der Zahl derjenigen Tangenten einer Raumcurve von der Ordnung M und vom Geschlechte p, welche die Raumcurve noch einmal treffen, während (46) die Zahl der dreifach schneidenden Sehnen gibt, welche durch einen beliebigen Punkt der Raumcurve gehen.

Zu jedem Punkte z von f gehören nach (46) noch $N = \frac{1}{2}(M-2)$ $.(M-3) - p$ Punktepaare x-y, so dass durch z, x und y noch ein Büschel von Curven der Schaar (45) hindurchgeht. Diese $2N$ Punkte (sowohl die x als die y wegen der Symmetrie) sind nach dem Obigen die einfachen Verschwindungspunkte eines Quotienten $\Lambda_y = \frac{K_y}{\Pi}$, worin K_y und Π rational von den Coordinaten des Punktes z abhängen; denn die Gleichung $\Lambda_y = 0$ entsteht hier durch Elimination von x aus $f(x) = 0$ und aus dem Gleichungssysteme:

$$(48) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Aus dieser Bemerkung erkennt man gleichzeitig, dass Λ_y *symmetrisch in y und z* ist. In Rücksicht hierauf wollen wir Λ_{yz} statt Λ_y schreiben, wo dann also $\Lambda_{yz} = 0$ uns eine Correspondenz zwischen y und z gibt, vermöge deren jedem Punkte y $2N$ Punkte z und jedem z $2N$ Punkte y zugeordnet sind, und *deren Werthigkeit in $y = z$ durch die Zahl*

$$(49) \qquad 2(M-2) - 2 - (M-2) = M - 4$$

gegeben ist. Letzteres folgt daraus, dass man in (32) zu setzen hat:

$$t = t' = \tau = \tau' = \gamma = \gamma' = 1, \quad \alpha = \alpha' = M - 2;$$

von der so resultirenden Zahl hat man dann noch $M-2$ abzuziehen wegen der Curve, welche durch A, B und z hindurchgeht, wenn A, B wieder zwei beliebige Punkte der Ebene sind, die man wie oben beim Netze zur Aufstellung der Correspondenzen einführt (p. 723). Diese Correspondenz können wir nun, obgleich sie nicht durch das Verschwinden einer ganzen Function von x, y dargestellt wird, ebenso benutzen wie eine Correspondenz der letzteren Art, *so lange die für sie charakteristischen Zahlen α, β, γ (hier bez. $2N$, $2N$, $M-4$) nur linear vorkommen.* Bezeichnen wir nämlich diese Zahlen für K_{yz} mit a, b, c für Π mit a', b', c', so ist:

$$\alpha = a - a', \quad \beta = b - b', \quad \gamma = c - c',$$

und es wird die Zahl der Coincidenzen, da K_{yz} durch alle Schnittpunkte von Π mit f geht, gleich

$$a + b + 2cp - (a' + b' + 2c'p) = \alpha + \beta + 2\gamma p,$$

und die Zahl der ihr und einer anderen Correspondenz $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ gemeinsamen Punktepaare*) gleich

*) Auch diese andere Correspondenz braucht nicht durch das Verschwinden einer ganzen Function rein darstellbar zu sein; vgl. die Anmerkung auf p. 747.

$$a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma' p - a'\beta' - b'\alpha' + 2c'\gamma' p = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p.$$

Diese Bemerkung werden wir noch wiederholt benutzen.

Ferner gibt es $2(M+p-3)$ Curven in der Schaar (45), welche f in z und in einem anderen Punkte y berühren, wodurch uns eine Correspondenz

$$(2(M+p-3),\ 2(M+p-3))_4$$

gegeben ist. Da wir andererseits durch $\Lambda_{yz} = 0$ eine Correspondenz $(2N,\ 2N)_{M-4}$ dargestellt fanden, so würde die Zahl der gesuchten Punktetripel zunächst gleich

$$\begin{aligned} &8N(M+p-3) - 8(M-4)p \\ &= 8N(M+p-1) - 8(M-2)(M-3) - 8(M-6)p. \end{aligned}$$

Hierunter sind aber noch, je doppelt zählend, die durch (47) bestimmten Tripel enthalten; denn wenn es einfach unendlich viele Curven gibt, welche in z berühren und ausserdem durch x und y gehen; so ist unter diesen jedenfalls eine Curve enthalten, welche auch in x, und eine, welche auch in y die Grundcurve berührt. Ziehen wir also von der gefundenen Zahl das Doppelte der Zahl (47) ab, so wird *die hier gesuchte Zahl gleich*

$$(50)\quad 8N(M+p-1) - 12(M-2)(M-3) - 12(M-6)p.$$

Diese Zahl gibt zugleich, wie leicht zu sehen, die *Zahl der Punkte x von f, für welche zwei der zugehörigen N Punktepaare* (46) *einander benachbart liegen.* Geht nämlich eine Curve der ∞^3-Schaar durch x und berührt in y und z, so gehört sie gleichzeitig dem durch x und dem durch $z + dz$ bestimmten Büschel des durch x gehenden Netzes an. Der letztere Büschel hat aber einen weiteren Basispunkt in der Nähe von y, und dieser muss gleichzeitig auf f liegen, da jene eine Curve dieses Büschels durch den zu y auf f benachbarten Punkt $y + dy$ geht. Es bilden daher in der That sowohl die Punkte y, z als die Punkte $y + dy$, $z + dz$ eines der N zu x gehörenden Punktepaare.

D) Es soll die Zahl der Punktquadrupel auf f ermittelt werden, durch welche noch einfach unendlich viele Curven der Schaar (45) *hindurchgehen; d. h. die Zahl der gemeinsamen Lösungen des Systems von Gleichungen:*

— Darin, dass wir die Darstellbarkeit der hier auftretenden Correspondenzen in der Form $\Lambda_{yx} = 0$ erkannten, liegt eben der grosse Nutzen der vorstehenden Erörterungen für die sich jetzt bietenden Fragen; denn nur dadurch wird die Correspondenzformel anwendbar; vgl. die Anmerkung auf p. 446.

$$f(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad f(z) = 0, \quad f(\xi) = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(y) & \varphi_1(z) & \varphi_1(\xi) & X_1 \\ \varphi_2(x) & \varphi_2(y) & \varphi_2(z) & \varphi_2(\xi) & X_2 \\ \varphi_3(x) & \varphi_3(y) & \varphi_3(z) & \varphi_3(\xi) & X_3 \\ \varphi_4(x) & \varphi_4(y) & \varphi_4(z) & \varphi_4(\xi) & X_4 \end{Vmatrix} = 0,$$

worin die X_i willkürliche Grössen sind (p. 692 und 697).

Durch jeden Punkt z von f geht eine Curve $\Lambda_{yz} = 0$, welche nach (49) in $y = z$ einen $(M-4)$-werthigen Punkt besitzt, und welche nach (46) auf f $2N$ weitere Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(2N)}$ ausschneidet. Diese Punkte ordnen sich in N Paare, indem jeder Punkt $y^{(i)}$ durch einen anderen Punkt, sagen wir $y^{(N+i)} = x^{(i)}$, zu einem Paare derartig ergänzt wird, dass durch $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ und z noch ∞^1-Curven der Schaar (45) gehen. Zu jedem Punkte $y^{(i)}$ construiren wir nun die zugehörige Curve $\Lambda_{y^{(i)}\eta} = 0$, welche zu $y^{(i)}$ in derselben Beziehung steht wie $\Lambda_{zy} = 0$ zu z. Dieselbe verschwindet $(M-4)$-fach in $y^{(i)} = \eta$, geht einfach durch $x^{(i)}$ und durch z und schneidet auf f ausserdem $2N-2$ (nicht auf $\Lambda_{zy} = 0$ gelegene) Punkte η aus, die sich wieder zu Paaren η, ξ anordnen. Das Product aller Ausdrücke $\Lambda_{y^{(i)}\eta}$ bezeichnen wir mit $\Pi_{z\eta}$; dann stellt die Gleichung

$$\Pi_{z\eta} = \Lambda_{y^{(1)}\eta} \cdot \Lambda_{y^{(2)}\eta} \ldots \Lambda_{y^{(N)}\eta} \Lambda_{x^{(1)}\eta} \Lambda_{x^{(2)}} \ldots \Lambda_{x^{(N)}\eta} = 0$$

eine zu z gehörige Curve dar, welche $(M-4+1)$-fach in jedem Punkte $y^{(i)}$ und $2N$-fach in z verschwindet, und welche auf f $2N(2N-2)$ Punkte η, je einfach zählend, ausschneidet. Nimmt man aus letzteren einen Punkt η und den zugehörigen ξ heraus, so hat man, ausgehend von einem Punkte $y^{(i)}$, folgende Beziehungen. Die Punkte z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ bilden ein Tripel der unter A) betrachteten Art, die Punkte $y^{(i)}\eta$ ξ bilden ein zweites Tripel der Art: Jede Curve der ∞^3-Schaar, welche durch $y^{(i)}$ und z geht, geht auch durch $x^{(i)}$; und jede, welche durch $y^{(i)}$ und η geht, geht auch durch ξ. Für besondere Lagen von z kann es nun eintreten, dass η mit z zusammenfällt; und dann geht jede Curve durch $y^{(i)}$ und z sowohl noch durch $x^{(i)}$ als durch ξ; d. h. die Punkte z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$, ξ bilden alsdann ein Tripel der gesuchten Art. Es darf jedoch dabei η nicht mit $y^{(i)}$ zusammenfallen, d. h. nicht unter den durch $\Lambda_{z\eta} = 0$ auf f ausgeschnittenen Punkten vorkommen, Punkte, durch welche nach Obigem $\Pi_{z\eta} = 0$ noch je $(M-3)$-fach hindurchgeht. Die gesuchten Punkte z sind daher die Coincidenzpunkte der durch die Gleichung

$$\frac{\Pi_{z\eta}}{(\Lambda_{z\eta})^{M-3}} = 0$$

dargestellten Correspondenz, welche nach den obigen Bemerkungen über $\Pi_{z\eta}$ in $z = \eta$ einen Punkt von der Werthigkeit

$$2N - (M-3)(M-4) = 2(M-3) - 2p$$

besitzt; und die Zahl ihrer Coincidenzpunkte ist nach den unter C) angegebenen Erörterungen gleich:

$$2N(2N-2) + 2N(2N-2) + 2p\{2(M-3) - 2p\}$$
$$= 2(M-1)(M-2)(M-3)(M-4) - 4p(2M^2 - 11M + 13) + 4p^2.$$

Wenn aber η mit z zusammenfällt, so kann es eintreten, dass gleichzeitig der zugehörige Punkt ξ mit $x^{(i)}$ zusammenfällt, wo dann die beiden Tripel $zy^{(i)}x^{(i)}$ und $y^{(i)}\eta\xi$ identisch werden; dann ist also $y^{(i)}$ einer der unter C) betrachteten Punkte, für welchen zwei der zugehörigen N Paare (46) zusammenfallen. Von der gefundenen Zahl haben wir daher noch die Zahl (50) zu subtrahiren. Da ferner die Punkte z, y, x, ξ in jedem der übrig bleibenden Quadrupel symmetrisch vorkommen, haben wir den Rest noch mit $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ zu dividiren. *Die Zahl der gesuchten Quadrupel findet man sonach schliesslich gleich*

$$(51) \qquad \tfrac{1}{12}(M-2)(M-3)^2(M-4) - \tfrac{1}{2}p\{(M-3)(M-4) - p + 1\}.$$

Wir benutzen jetzt ferner die für zwei simultane Correspondenzen und die Zahl ihrer Coincidenzen gewonnenen Resultate für die gleichzeitige Betrachtung dreier Correspondenzen zwischen drei Punkten x, y, z der Grundcurve (vgl. p. 720). Daran soll sich die Behandlung eines für die Theorie der Specialschaaren sehr lehrreichen Beispiels anschliessen.

Es seien also die drei Gleichungen gegeben:

$$(52) \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

und: $$f(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad f(z) = 0;$$

es soll die Zahl der aus je drei getrennt liegenden Punkten x, y, z bestehenden Tripel gefunden werden, welche gleichzeitig diesem Systeme von Gleichungen genügen. Vermöge der Bedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ mögen jedem Punktepaare x, y bez. μ_1, μ_2, μ_3 nicht in x oder y liegende Punkte z von f zugehören, jedem Punktepaare y, z ebenso bez. $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ Punkte x, jedem Paare z, x bez. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Punkte y. Ferner möge eine Gleichung $\varphi_i = 0$ je α_i-fach verschwinden für $y = z$, β_i-fach für $z = x$, γ_i-fach für $x = y$. Ueberdies nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die zu x, y oder z vermöge der Gleichungen (52) gehörenden Curven durch *sämmtliche* Doppelpunkte hindurchgehen.*)

*) Die andernfalls im Folgenden [besonders an den Zahlen $(\varphi_i\varphi_k)_{xy}$ etc.] anzubringenden Modificationen sind nach dem auf p. 732 Gesagten leicht zu bestimmen.

Die Elimination von x bez. y oder z aus $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ gibt uns zunächst die Gleichungen*):

$$\Lambda_{12}(x, z) = 0, \quad \Lambda_{12}(y, z) = 0, \quad \Lambda_{12}(x, y) = 0, \tag{53}$$

wo die Functionen Λ_{ik} (wie auf p. 733) nicht nothwendig ganze Functionen sind. Die Zahl der Punkte x, welche einem Punkte z vermöge $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ zugeordnet sind, ist dann gleich $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$, wenn letztere Zahl die Anzahl der Punktepaare x, y bezeichnet, welche bei festem z gleichzeitig den Correspondenzen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ genügen, d. h. wenn:

$$(\varphi_1\varphi_2)_{xy} = \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_1 - 2\gamma_1\gamma_2 p\,.$$

Ebenso gross ist die Zahl der Punkte y, welche vermöge $\Lambda_{12}(y, z) = 0$ zu z gehören; und entsprechende Bedeutung sollen die Zahlen haben:

$$\begin{aligned} (\varphi_i\varphi_k)_{yz} &= \lambda_i\mu_k + \lambda_k\mu_i - 2\alpha_i\alpha_k p \\ (\varphi_i\varphi_k)_{zx} &= \mu_i\varkappa_k + \mu_k\varkappa_i - 2\beta_i\beta_k p \\ (\varphi_i\varphi_k)_{xy} &= \varkappa_i\lambda_k + \varkappa_k\lambda_i - 2\gamma_i\gamma_k p \end{aligned} \tag{54}$$

Ferner bezeichnen wir mit $[yz]_{ik}$ die Werthigkeit des Punktes $y = z$ in der Gleichung $\Lambda_{ik}(y, z) = 0$, d. i. in dem Resultate der Elimination von x aus den Gleichungen $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$; dann ist nach (32):

$$\begin{aligned} [yz]_{ik} &= \alpha_i\varkappa_k + \alpha_k\varkappa_i - \beta_i\gamma_k - \beta_k\gamma_i \\ [zx]_{ik} &= \beta_i\lambda_k + \beta_k\lambda_i - \gamma_i\alpha_k - \gamma_k\alpha_i \\ [xy]_{ik} &= \gamma_i\mu_k + \gamma_k\mu_i - \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Durch den Punkt z und durch jeden der $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ Punkte x, welche vermöge $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ zu z gehören, legen wir je die eine Curve $\varphi_3(x, y, z) = 0$, die zu ihm und zu z gehört. Jede solche Curve schneidet noch in λ_3 weiteren Punkten y, während ausserdem γ_3 Schnittpunkte in x und α_3 in z liegen. Das Product dieser sämmtlichen Curven φ gleich Null gesetzt, d. h. das Resultat der Elimination von x aus $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ und $\varphi_3 = 0$:

$$\Pi_{yz} \equiv \varphi_3(x^{(1)}, y, z)\,.\,\varphi_3(x^{(2)}, y, z) \ldots \varphi_3(x^{(\varrho)}, y, z) = 0,$$

wo $\varrho = (\varphi_1\varphi_2)_{xy}$, stellt dann eine Correspondenz zwischen y und z dar, vermöge deren einem Punkte z der Grundcurve $(\lambda_3 + \gamma_3)(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ Punkte y zugeordnet sind. Von letzteren liegen dabei $\gamma_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ in den Schnittpunkten x der Curve $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ mit f; *wegen dieser in $x = y$ fallenden Punkte haben wir daher später noch eine Reduction anzubringen.* In $y = z$ hat ferner die Correspondenz $\Pi_{yz} = 0$ einen Punkt von der Werthigkeit $\alpha_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$. Die Zahl der Punkte z,

---

*) Ueber die Benutzung solcher durch gebrochene Functionen dargestellter Correspondenzen vgl. das oben unter *C*) Gesagte (p. 742 f.).

welche umgekehrt zu y gehören, ist nicht unmittelbar aus dem für Π_{yz} gewählten Ausdrucke zu entnehmen, da die $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(\varrho)}$ noch von z abhängen; diese Zahl aber muss gleich der Zahl der Punktepaare x-z sein, welche vermöge der Gleichungen $\Lambda_{12}(y, z) = 0$, $\varphi_3 = 0$ zu einem gegebenen y gehören, und deren Punkte z nicht in y liegen, während die zugehörigen Punkte x nicht mit z, wohl aber wieder mit y zusammenfallen dürfen, d. i. gleich der Zahl:

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{yz} (\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xy} \mu_3 - 2 p \beta_2 [xz]_{12}.$$

Die Correspondenz $\Pi_{yz} = 0$ muss nothwendig erfüllt sein, damit es zu y, z einen dritten Punkt x gibt, so dass das Tripel x, y, z den drei Gleichungen $\varphi_i = 0$ genügt. Eine zweite nothwendige Correspondenz der Art zwischen y, z, ist durch die Bedingung $\Lambda_{12}(y, z) = 0$ gegeben; und zwar ist dies eine Correspondenz:

$$((\varphi_1 \varphi_2)_{xy}, \ (\varphi_1 \varphi_2)_{xz})_{[yz]_{12}}.$$

Die Zahl der beiden gemeinsamen Paare finden wir daher gleich*)

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xy} \left\{ (\varphi_1 \varphi_2)_{yz} (\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xy} \mu_3 - 2 p \beta_3 [xz]_{12} \right\}$$
$$+ (\varphi_1 \varphi_2)_{xz} (\varphi_1 \varphi_2)_{xy} (\lambda_3 + \gamma_3) - 2 p [yz]_{12} \alpha_3 (\varphi_1 \varphi_2)_{xy}.$$

Diese Zahl gibt an, wie viele Punktepaare x-z in $\Lambda_{12}(x, z)$ mit einem Paare y-z in $\Lambda_{12}(y, z)$ zusammen ein Tripel x-y-z von $\varphi_3 = 0$ bilden. Aber zu jedem der $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ zu z gehörigen Paare x-z (vermöge $\Lambda_{12}(x, z)$) gibt es unter den $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ Paaren y-z nur eines, welches auch der dritten Gleichung (53), nämlich $\Lambda_{12}(x, y) = 0$, genügt, d. i. nur eines, welches zu einem gemeinsamen

---

*) In der That kann man die Formel für $(\varphi \varphi')$ auch direct zur Bestimmung der gemeinsamen Punktpaare zweier Correspondenzen verwerthen, welche in der Form

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)} = 0, \qquad \varphi'(x, y) \equiv \frac{\Phi'(x, y)}{\Psi'(x, y)} = 0$$

gegeben sind, wo Φ, Φ' bez. durch alle Schnittpunkte von Ψ, Ψ' mit f hindurchgehen, während die Ausführung der Division wegen des Verhaltens in festen Punkten etc. nicht möglich ist. Sei nämlich die Correspondenz Φ, Ψ, Φ', Ψ' bez. charakterisirt durch die Zahlen:

$$(a + \alpha, \ b + \beta)_{c+\gamma}, \quad (a, b)_c, \quad (a' + \alpha', \ b' + \beta')_{c'+\gamma'}, \quad (a', b')_{c'},$$

so ist von der Zahl der gemeinsamen Paare der Correspondenzen Φ, Φ', nämlich der Zahl

$$(a + \alpha)(b' + \beta') + (a' + \alpha')(b + \beta) - 2(c + \gamma)(c' + \gamma')p$$

abzuziehen:

1) die Zahl $ab' + ba' - 2cc'p$ der gemeinsamen Paare von Ψ und Ψ'
2) „ „ $a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma'p$ „ „ „ „ Ψ' „ Φ
3) „ „ $a'\beta + b'\alpha - 2c'\gamma p$ „ „ „ „ Ψ „ Φ'.

Es bleibt dann eben wieder die Zahl $\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'p$, q. e. d.

Tripel der drei Gleichungen $\varphi_i = 0$ Veranlassung geben kann. Da wir nun immer alle $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ Paare gleichmässig berücksichtigt haben, haben wir also die gefundene Zahl noch durch $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ zu dividiren; dieselbe wird dann gleich

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{yz}(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xz}(\lambda_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\left\{[y\,z]_{12}\,\alpha_3 + [x\,z]_{12}\beta_3\right\}.$$

Hierunter sind aber nach dem Obigen (p. 746) noch solche Tripel vorhanden, für welche x mit y zusammenfällt. Letzteres kann nur in den Coincidenzpunkten der Gleichung $\Lambda_{12}(x, y) = 0$ eintreten, da dieser alle gefundenen Tripel genügen müssen; und es wird auch *jeder* dieser

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xz} + (\varphi_1 \varphi_2)_{yz} + 2\,[xy]_{12}\,p$$

Coincidenzpunkte zu einem solchen uneigentlichen Tripel Veranlassung geben, und zwar wegen des γ_3-werthigen Punktes von φ_3 in $x = y$ je γ_3-fach zählend. Man erhält also die Zahl:

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (\varphi_1 \varphi_2)_{yz}\varkappa_3 + (\varphi_1 \varphi_2)_{zx}\lambda_3 + (\varphi_1 \varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\left\{[yz]_{12}\alpha_3 + [zx]_{12}\beta_3 + [xy]_{12}\gamma_3\right\}$$

und schliesslich, da diese Zahl von φ_1, φ_2, φ_3 symmetrisch abhängen muss — wovon man sich in Rücksicht auf (54) und (55) auch durch Ausrechnen überzeugt —, den Satz:

Die Zahl der Punktetripel, welche gleichzeitig den drei Correspondenzen (52) *genügen und aus je drei getrennten Punkten von f bestehen, ist gegeben durch eine der drei Formeln* $(r, s, t = 1, 2, 3)$:

$$(56)\qquad \begin{aligned}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (\varphi_r \varphi_s)_{yz}\varkappa_t + (\varphi_r \varphi_s)_{zx}\lambda_t + (\varphi_r \varphi_s)_{xy}\mu_t \\ - 2p\left\{[y\,z]_{rs}\alpha_t + [z\,x]_{rs}\beta_t + [xy]_{rs}\gamma_t\right\},\end{aligned}$$

worin $\varkappa_i$, λ_i, μ_i die obigen Bedeutungen haben, wo ferner $(\varphi_i \varphi_k)_{yz}$ etc. durch (54), $[y\,z]_{ik}$ *etc. durch* (55) *definirt sind. — Wenn insbesondere jede der Correspondenzen in Bezug auf die einzelnen Variabeln symmetrisch gebildet ist, wo dann nothwendig:*

$$\varkappa_i = \lambda_i = \mu_i, \quad \alpha_i = \beta_i = \gamma_i,$$

so wird die Zahl der gemeinsamen Tripel)*:

$$(57)\quad \tfrac{1}{6}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 - p(\varkappa_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varkappa_2 \alpha_3 \alpha_1 + \varkappa_3 \alpha_1 \alpha_2) + 2p\,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Es sei hervorgehoben, dass die Formel (56) auch noch gilt, wenn die Correspondenzen φ_1, φ_2 nicht durch zwei einzelne Gleichungen, sondern durch das gleichzeitige Bestehen von drei Gleichungen der Form (53):

$$\Phi(y, z) = 0, \quad \Phi'(z, x) = 0, \quad \Phi''(x, y) = 0,$$

---

*) Diese Formeln sind ebenso wie die entsprechenden für die Zahl der gemeinsamen Quadrupel von vier Correspondenzen von Brill auf anderem Wege abgeleitet: Math. Annalen, Bd. 6, p. 56.

bez. mit den charakteristischen Zahlen:

$$(l,\ m)_a,\quad (m,\ k)_b,\quad (k,\ l)_c$$

dargestellt sind, ohne dass es nothwendig wäre, dieselben als Resultate der Elimination bez. von x, y, z aus $f=0$ und je zweien der Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ aufzufassen, wie es bisher geschah. Dann entsprechen jedem Punkte z jetzt m Paare x-y, die durch $\Phi=0$, $\Phi'=0$ ausgeschnitten werden, und deren paarweise Zuordnung durch $\Phi''=0$ vermittelt wird, etc. Bei Ableitung der Formel (56) nämlich haben wir nirgends von den Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ Gebrauch gemacht, sondern nur von den Gleichungen (55). Fügt man zu $\Phi=0$, $\Phi'=0$, $\Phi''=0$ eine Correspondenz $\varphi=0$ mit den Zahlen $\varkappa$, λ, μ, α, β, γ, *so gilt also für die Zahl der gemeinsamen Tripel wieder die Formel:*

$$(58)\qquad (\Phi\Phi'\Phi'',\ \varphi)=k\varkappa+l\lambda+m\mu-2p\,(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,,$$

indem in (56) zu setzen ist:

$$(\varphi_1\varphi_2)_{yz}=k,\ (\varphi_1\varphi_2)_{zx}=l,\ (\varphi_1\varphi_2)_{xy}=m,\ [yz]_{12}=a,\ [zx]_{12}=b,\ [xy]_{12}=c,$$
$$\varkappa_3=\varkappa,\quad \lambda_3=\lambda,\quad \mu_3=\mu,\quad \alpha_3=\alpha,\quad \beta_3=\beta,\quad \gamma_3=\gamma\,;$$

und im Falle der *Symmetrie* gewinnt man aus (58) die Formel

$$(59)\qquad \tfrac{1}{6}\,(\Phi\Phi'\Phi'',\ \varphi)=\tfrac{1}{2}\,k\varkappa-pa\alpha\,.\ -$$

Gerade diese letzte Bemerkung wird uns für die folgende Anwendung von Nutzen sein:

Es ist eine vierfach unendliche lineare Schaar von Curven:

$$(60)\qquad \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_3+\alpha_4\varphi_4+\alpha_5\varphi_5=0$$

gegeben, welche f in M beweglichen Punkten treffen und zu f adjungirt sind; man soll auf f die Zahl der Punktetripel bestimmen, durch die noch eine doppelt unendliche Schaar dieser Curven hindurchgeht; d. h. man soll die Anzahl von Werthsystemen x, y, z finden, welche dem folgenden Gleichungssysteme genügen):*

$$(61)\qquad S\,(12345)_3\equiv\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x)\\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y)\\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z)\end{matrix}\right\|=0\,,$$

$$(62)\qquad f(x)=0\,,\quad f(y)=0\,,\quad f(z)=0\,.$$

*) Die Lösung dieser Aufgabe ist in der That im Allgemeinen möglich; vgl. p. 752. — Mit Hülfe der entsprechenden Formel für vier Correspondenzen findet man bei Brill a. a. O. auch die Aufgabe behandelt, *die Zahl der Punktquadrupel auf f anzugeben, durch welche noch dreifach unendlich viele Curven aus einer sechsfach unendlichen, linearen, zu f adjungirten Schaar hindurchgehen.* Eine allgemeine Formel für die Zahl der Lösungen einer Matrix mit R Horizontalreihen und $R+i$ Verticalreihen, wenn ausserdem R Gleichungen der Form (62) bestehen, ist in dem Aufsatze von Brill und Nöther mitgetheilt; vgl. die Anmk. auf p. 706.

Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit $(12345)_3$ und entsprechend mit $(1234)_3$ die Zahl der Punktepaare y-z, welche bei festem x dem Systeme

$$(63)\qquad S(1234)_3 \equiv \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

sowie den Gleichungen (62) genügen, ferner mit $[(1234)_3\,(345)_3]$ die Zahl der Tripel, welche gleichzeitig den Gleichungen (63) und der einen Gleichung

$$(64)\qquad \left| \begin{matrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{matrix} \right| = 0$$

genügen, mit $[(123)_3\,(34)_3]$ die Zahl derjenigen Tripel, welche den Gleichungssystemen genügen:

$$(65)\qquad \left| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{matrix} \right| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

endlich mit $(3)_3$ die Zahl der durch das System

$$(66)\qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) \\ \varphi_3(y) \\ \varphi_3(z) \end{matrix} \right\| = 0, \text{ d. i. durch: } \varphi_3(x) = 0,\ \varphi_3(y) = 0,\ \varphi_3(z) = 0$$

bestimmten Werthetripel. Zu jedem dieser Gleichungssysteme sind natürlich immer wieder die Gleichungen (62) hinzuzunehmen, wie im Folgenden nicht mehr besonders hervorgehoben werden soll.

Die Lösungen des Systems (61) sind nun jedenfalls unter den $[(1234)_3\,(345)_3]$ gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (63) und (64) enthalten, denn nach einem früher erwähnten Satze (p. 703) sind alle gemeinsamen Lösungen einer Matrix mit q Verticalreihen und k Horizontalreihen, wo $q > k$, unter den gemeinsamen Lösungen von irgend $q - k + 1$ von einander unabhängigen k-gliedrigen Determinanten der Matrix enthalten. In unserm Falle haben wir aber $q = 5$, $k = 3$, also $q - k + 1 = 3$; und das System (63) stellt eben nach demselben Satze zwei von einander unabhängige Gleichungen dar. Unter den erwähnten $[(1234)_3\,(345)_3]$ Lösungen befinden sich jedoch auch diejenigen, welche dem Systeme (65) genügen, ohne gleichzeitig *alle* Gleichungen (61) zu befriedigen, wie man wieder mit Hülfe jenes Satzes bestätigt. Unter den Lösungen von (65) sind wieder auch die von (66) inbegriffen, während letztere doch die Gleichungen (63) und (64) nicht befriedigen. Von der Zahl $[(1234)_3(345)]_3$

hat man daher die Zahl $[(123)_3\,(34)_3] - (3)_3$ abzuziehen, um die Zahl $(12345)_3$ zu erhalten; d. h. wir haben die Formel*):

$$(67)\qquad (12345)_3 = [(1234)_3\,(345)_3] - [(123)_3\,(34)_3] + (3)_3\,.$$

Die hier rechts auftretenden Zahlen haben wir nun durch die Zahlen M und p auszudrücken. Zunächst ist $(3)_3$ gleich der Anzahl der Tripel, welche man aus den M Schnittpunkten von $\varphi_3 = 0$ mit f bilden kann, also:

$$(3)_3 = \tfrac{1}{6}\,M\,(M-1)\,(M-2)\,.$$

In (65) stellt uns das Verschwinden der dreigliedrigen Determinante eine symmetrische Correspondenz $\varphi\,(x,\,y,\,z) = 0$ dar, für welche nach der in Formel (59) benutzten Beziehungsweise:

$$\varkappa = M - 2\,, \quad \alpha = 1\,.$$

Das Verschwinden der Matrix dagegen ist äquivalent mit zwei Correspondenzen, die durch *drei* Gleichungen $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$ dargestellt werden, und zwar:

$$\left\{\begin{vmatrix}\varphi_3(y) & \varphi_4(y)\\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z)\end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0\,, \qquad \left\{\begin{vmatrix}\varphi_3(z) & \varphi_4(z)\\ \varphi_3(x) & \varphi_4(x)\end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0\,,$$

$$\left\{\begin{vmatrix}\varphi_3(x) & \varphi_4(x)\\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y)\end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0\,.$$

Zu z gehören nämlich z. B. alle $M-1$ nicht in z liegenden Schnittpunkte von $\varphi_3(z)\,\varphi_4(y) - \varphi_4(z)\,\varphi_3(y) = 0$, jeder aber $(M-2)$-fach zählend, da jeder mit jedem andern dieser Punkte ein zu z gehöriges Paar x-y bildet; es ist daher in (59) zu setzen:

$$k = (M-1)\,(M-2)\,, \quad a = M - 2\,;$$

und somit wird**):

$$[(123)_3\,(34)_3] = \tfrac{1}{2}\,(M-1)\,(M-2)^2 - p\,(M-2)\,.$$

Ebenso haben wir zur Bestimmung der Zahl $[(1234)_3\,(345)_3]$ die einzelne Correspondenz (64) mit den Zahlen $\varkappa = M - 2$, $\alpha = 1$ und zwei Correspondenzen, dargestellt durch die drei Gleichungen:

---

*) Vgl. für die Ableitung solcher Formeln Salmon's Raumgeometrie, p. 519 ff. in dem zweiten Theile von Fiedler's Bearbeitung, 2. Auflage. Eine allgemeinere Formel gab Brill: Math. Annalen, Bd. 5, p. 378 ff. — Ein einfachstes Beispiel wurde schon oben p. 389 f. behandelt.

**) Correspondenzen der hier vorkommenden Art, wo links vollständige Potenzen stehen, haben wir bisher nicht berücksichtigt; unsere Formeln bleiben aber gültig, insofern man dieselben durch Grenzübergang aus anderen Correspondenzen entstehen lassen kann. Im Falle des Textes könnte man übrigens auch die durch Verschwinden der einfachen Determinanten gegebenen Correspondenzen zunächst allein betrachten. Wegen der vollkommenen Symmetrie braucht man dann nur das Resultat mit $M-2$ zu multipliciren.

$$\Lambda(y, z) = 0, \quad \Lambda(z, x) = 0, \quad \Lambda(x, y) = 0,$$

wo z. B. $\Lambda(y, z) = 0$ die Curve ist, welche nach dem unter A) und C) Gesagten (p. 741 ff.) auf $f = 0$ die Punktepaare x-y ausschneidet, welche vermöge des Systems (63) zu z gehören, so dass bez. nach (46) und (49):

$$k = (M-2)(M-3) - 2p, \quad a = M - 4;$$

und also nach (59):

$$[(1234)_3, (345)_3] = \{\tfrac{1}{2}(M-2)(M-3) - p\}(M-2) - p(M-4).$$

In Rücksicht auf (67) wird daher schliesslich *die Zahl der von uns gesuchten Punktetripel:*

$$(68) \qquad (12345)_3 = \tfrac{1}{6}(M-2)(M-3)(M-4) - p(M-4). -$$

Die zuletzt behandelte Aufgabe ist ein besonderer Fall des früher formulirten allgemeineren Problems, *auf der Grundcurve R Punkte G_R so zu bestimmen, dass die durch sie gehenden Curven einer gegebenen ∞^t-Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden* (p. 704). Als nothwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Problems fanden wir

$$R \geq (q+1)(R - t + q);$$

und diese Ungleichung ist hier in der That erfüllt, denn wir haben zu setzen:

$$R = 3, \quad q = 2, \quad t = 4.$$

Von besonderem Interesse war jenes Problem für die Schaaren adjungirter Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, und zwar in Folge der Gültigkeit des Riemann-Roch'schen Satzes für die Schnittpunktsysteme solcher Curven. Von den $2p-2$ Schnittpunkten derselben sind $p-1$ durch die andern $p-1$ bestimmt; wir haben daher

$$M = p - 1 + 4 = p + 3$$

zu nehmen, wenigstens unter der Voraussetzung, dass die gegebene ∞^4-Schaar von C_{n-3} nicht in besonderen Beziehungen zur Grundcurve steht; und diese Schaar ist durch $p-5$ beliebige Punkte von f festgelegt. Letztere bilden mit jedem Punktetripel der von uns bestimmten Art eine Specialgruppe G_R von Punkten, durch welche noch ∞^2 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen; d. h. wir haben:

$$R = p - 2, \quad q = 2.$$

Die Gleichungen des Riemann-Roch'schen Satzes (p. 701):

$$Q + R = 2(p-1), \quad Q - R = 2(q - r),$$

ergeben dann weiter:

$$Q = p, \quad r = 1.$$

Durch die p weiteren Schnittpunkte jener ∞^2-Schaar gehen also noch ∞^1 adjungirte C_{n-3} hindurch; und die Gruppen $G_R = G_{p-2}$ bilden selbst eine ∞^1-Schaar $g_{p-2}^{(1)}$; Schaaren der letzteren Art gibt es aber noch τ-fach unendlich viele, wenn:

$$\tau = p - (q + 1)(r + 1) = p - 6 .$$

Umgekehrt kann man auch von dem Probleme ausgehen, Gruppen G_p zu finden, durch welche noch ∞^1 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen; und *diès letztere Problem geht gerade aus dem unter D) behandelten für $M = p + 2$ hervor* (p. 743 ff.). Die gegebene ∞^3-Schaar ist hier durch $p - 4$ *beliebige* Punkte von f festgelegt; und diese bilden mit jedem der gesuchten Quadrupel eine solche Specialgruppe G_p, während durch die übrigen $p - 2$ Punkte wieder noch ∞^2 C_{n-3} gelegt werden können. Diese Beziehung nun haben wir schon früher eingehend besprochen und dabei gefunden, dass die Zahl der zu $p - 5$ festen Punkten gehörenden (68) Punktetripel, d. i. (wegen $M = p + 3$):

$$\tfrac{1}{2} p (p - 1) \left\{\tfrac{1}{6} (p - 1)(p - 2) - (p - 3)\right\}$$

mit der Zahl (40) der zu $p - 4$ Punkten gehörenden Punktequadrupel d. i. (wegen $M = p + 2$) der Zahl

$$p (p - 1) \left\{\tfrac{1}{6} (p + 1) - 1\right\}$$

für $\tau = 0$, also $p = 6$ übereinstimmen muss. In der That werden dann auch beide Zahlen gleich 5; *für $p = 6$ können aber auch, wenn es sich um Schaaren adjungirter C_{n-3} handelt, beide Probleme wirklich auf einander zurückgeführt werden.*

Für $p = 5$ werden beide Zahlen gleich Null: es gibt keine Specialgruppen dieser Art mehr, was mit Früherem übereinstimmt.

V. Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven.

Die wesentliche Grundlage für unsere Untersuchungen über die Punktsysteme auf einer gegebenen Curve bildete der auf p. 427 ausgesprochene Satz, nach welchem *von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve n^{ter} Ordnung mit einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch δ Doppelpunkte von $f = 0$ gehen soll, ohne in diesen selbst mehrfache Punkte zu haben,*

1) *wenn $m \geq n$, höchstens $\tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta$;*
2) *wenn $m < n$, höchstens $mn - \tfrac{1}{2} m (m + 3) - \delta$ durch die übrigen bestimmt sind.*

Wenn die C_m durch sämmtliche Doppelpunkte gehen sollte, so entstanden hieraus die Sätze über *adjungirte* Curven, bei denen dann das Geschlecht der Curve $f = 0$ von Wichtigkeit wurde. Wenn wir uns

dann auf letztere hauptsächlich beschränkten, so hatte dies zunächst darin seinen Grund, dass für adjungirte Curven manche Fragen sich einfacher gestalten, besonders aber darin, dass die Schnittpunktsysteme solcher Curven gegenüber eindeutigen Transformationen der Grundcurve invarianten Charakter zeigten (p. 676), während letzteres bei nicht adjungirten Curven nicht ohne Weiteres der Fall ist. Wenn nämlich aus einer durch solche Curven ausgeschnittenen Schaar von Punktgruppen eine Gruppe einen der Doppelpunkte der Grundcurve enthält, welcher nicht zu den festen Punkten der Schaar gehört, so fallen in diesen sogleich *zwei* Punkte der Gruppe. Lösen wir also den Doppelpunkt durch eindeutige Transformation in zwei getrennte Punkte ξ, η einer neuen Grundcurve auf, so entspricht jener Schaar von Punktgruppen auf der neuen Curve eine Schaar, welche zu ξ, η in der besonderen Beziehung steht, dass jede Gruppe derselben, welche ξ enthält, auch η enthalten muss und umgekehrt. Eine solche Schaar ist aber nur noch mit Hülfe neuer fester Punkte (eben ξ und η) zu definiren.

Hier wollen wir nun dazu übergehen, den angeführten Satz in anderer Richtung zu verwerthen, ohne uns auf adjungirte Curven zu beschränken. Insbesondere werden wir die zwischen den Punkten eines Schnittpunktsystems bestehenden Relationen näher betrachten und obiges Theorem in einer allgemeineren Form aussprechen. Daran sollen sich verschiedene *Anwendungen* anschliessen, wobei wir auch wieder auf die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curven durch projectivische Curvenbüschel zurückkommen. Wir werden gleichzeitig Gelegenheit haben, im Anschlusse an die früheren Untersuchungen weitere Fragen zu formuliren.

Es sei hier zunächst hervorgehoben, dass *der obige Satz seiner Ableitung nach unabhängig davon gilt, ob die Grundcurve reducibel ist oder nicht.* So kann man zwar auf jedem Kegelschnitte 8 Punkte als Schnittpunkte desselben mit einer C_4 völlig willkürlich wählen; auf einer in zwei Kegelschnitte zerfallenden C_4 sind dagegen 3 Schnittpunkte mit einer anderen C_4 durch die 13 übrigen bestimmt. Hat man also in letzterem Falle etwa auf der einen C_2 8 Punkte einer C_4 willkürlich angenommen, so darf man auf der andern C_2 nur noch 5 Punkte beliebig wählen. Geht hingegen die C_4 durch 1, 2, 3 oder 4 Schnittpunkte beider C_2, so sind bez. noch 12, 11, 10, 8 Schnittpunkte willkürlich und durch diese bez. 2, 1, 0, 0 weitere bestimmt.*)

Ferner aber lässt sich unser Fundamentaltheorem in allgemeinerer Form aussprechen, wenn wir nicht, wie bisher, *eine* C_n $(f = 0)$ als

*) Zerfällt die Grundcurve in lauter Gerade, so lässt sich der Inhalt dieser Schnittpunktsätze algebraisch in dem sogenannten Carnot'schen Theoreme formuliren; vgl. Salmon's Higher plane curves, nr. 124, sowie eine Bemerkung in dem weiterhin folgenden Abschnitte über das Abel'sche Theorem.

fest gegeben annehmen, wie dies z. B. für $m = n$ schon in dem Satze geschah, dass *alle Curven n^{ter} Ordnung, die $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ Punkte mit einander gemein haben, durch bestimmte $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ weitere Punkte hindurchgehen* (p. 428). Sollen allgemein mn Punkte (wo $m > n$ sei) auf einer C_n liegen, so müssen zwischen deren Coordinaten $mn - \frac{1}{2} n (n + 3)$ Gleichungen bestehen, denn die C_n ist schon durch $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Punkte bestimmt. Sollen die mn Punkte dann weiter auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, so kann man letztere bei nunmehr gegebener C_n immer durch eine Curve ersetzen (p. 426), welche nur von $mn - \frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ Constanten abhängt. Zwischen den mn Punkten bestehen daher noch weitere $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ Relationen, so dass die Gesammtheit der letzteren gleich

$$mn - \tfrac{1}{2} n (n + 3) + \tfrac{1}{2} (n - 1)(n - 2) = mn - 3n + 1$$

wird. Für $m = n$ dagegen haben wir eine ∞^1-Schaar von C_n, welche durch die n^2 Punkte gehen, und daher nur $(n - 1)(n - 2)$ Relationen zwischen den $2n^2$ Coordinaten der n^2 Punkte; in der That sind dann ja wieder $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ Punkte durch die übrigen bestimmt, wie es sein muss. Wir haben also folgenden Satz*):

Wenn mn Punkte auf zwei Curven bez. von der Ordnung m und n liegen und dabei keinerlei anderen Bedingungen genügen sollen und einfache Punkte beider Curven sind, so müssen für $m > n$ zwischen den $2mn$ Coordinaten der mn Punkte $mn - 3n + 1$ Relationen bestehen; für $m = n$ dagegen ist letztere Zahl gleich $n^2 - 3n + 2$.

Ist nun die Curve n^{ter} Ordnung fest gegeben, so sind dadurch $mn - \frac{1}{2} n (n + 3)$ Gleichungen absorbirt, und es bestehen nur noch die vorhin zuletzt erwähnten $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ Relationen, während gleichzeitig jeder der mn Punkte nur noch von einem Parameter abhängt. Hieraus folgt wieder, dass $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ Punkte durch die übrigen bestimmt sind.

Es ist übrigens leicht, die $mn - 3n + 1$ Relationen zwischen den mn Punkten

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \ldots x^{(\mu)}, \text{ wo } \mu = mn,$$

wirklich aufzustellen. Verstehen wir nämlich unter:

$$\Psi_1(x) = 0, \quad \Psi_2(x) = 0, \ldots \Psi_{\nu+1}(x) = 0, \text{ wo } \nu = \tfrac{1}{2} n (n + 3),$$

die Gleichungen von irgend $\nu + 1$ von einander linear unabhängigen Curven n^{ter} Ordnung, so dass z. B.:

$$\Psi_1(x) = x_1^n, \quad \Psi_2(x) = x_1^{n-1} x_2, \ldots \Psi_{n+1}(x) = x_2^n, \ldots \Psi_{\nu+1}(x) = x_3^n,$$

*) Vgl. Jacobi: De relationibus, quae locum habere debent etc. Crelle's Journal, Bd. 15, p. 285.

so ist die Gesammtheit der Curven n^{ter} Ordnung dargestellt in der ∞^ν-Schaar:

$$(1)\qquad \alpha_1 \Psi_1(x) + \alpha_2 \Psi_2(x) + \ldots + \alpha_{\nu+1}\Psi_{\nu+1}(x) = 0.$$

Die Bedingungen also dafür, dass $\mu = mn$ Punkte $x^{(i)}$ auf einer C_n liegen, sind gegeben durch das übervollständige System von Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{Vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \end{Vmatrix} = 0,$$

wo links eine Matrix mit $\nu + 1$ Vertical- und μ Horizontalreihen steht. Dies System enthält in der That nach einem früheren Satze (p. 703) nur

$$\mu - \nu = mn - \tfrac{1}{2} n(n+3)$$

von einander unabhängige Gleichungen, nämlich z. B. diejenigen, welche aus der Bedingung:

$$(3)\qquad \Psi(x^{(i)}) \equiv \begin{vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\nu)}) & \Psi_2(x^{(\nu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\nu)}) \\ \Psi_1(x^{(i)}) & \Psi_2(x^{(i)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(i)}) \end{vmatrix} = 0$$

entstehen, wenn man dem Index i alle Werthe von $i = \nu + 1$ bis $i = \mu$ nach einander beilegt. Letztere Gleichungen sagen ja auch nichts Anderes aus, als dass die Punkte $x^{(\nu+1)}, \ldots x^{(\mu)}$ auf der durch die Punkte $x^{(1)}, \ldots x^{(\nu)}$ bestimmten C_n liegen sollen. Seien ferner:

$\chi_1(x) = 0,\ \ \chi_2(x) = 0,\ \ldots\ \chi_{\mu-\pi+1}(x) = 0$, wo $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ die Gleichungen von irgend $\mu - \pi$ von einander linear unabhängigen C_m. Dann wird die Gesammtheit der C_m in der Schaar:

$$(4)\qquad \alpha_1\chi_1(x) + \alpha_2\chi_2(x) + \ldots + \alpha_{\mu-\pi+1}\chi_{\mu-\pi+1}(x) + A\Psi(x) = 0$$

dargestellt, wo A von der $(m-n)^{\text{ten}}$ Ordnung in x ist; und die weiteren $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Relationen erscheinen in der Form:

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} \chi_1(x^{(1)}) & \chi_2(x^{(1)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(1)}) \\ \chi_1(x^{(2)}) & \chi_2(x^{(2)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_1(x^{(\mu)}) & \chi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(\mu)}) \end{Vmatrix} = 0.$$

Nach dem mehrfach erwähnten Satze ist die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen in der That gleich π. *Unsere* $mn - 3n + 1$ *Relationen sind also durch die Gleichungen* (3) *und* (5) *gegeben.*

Wenn $m = n$, gestaltet sich dies Resultat etwas anders. Sollen nämlich n^2 Punkte auf zwei Curven n^{ter} Ordnung liegen, so liegen sie mit jedem beliebigen $(n^2 + 1)^{\text{ten}}$ Punkte der Ebene auf einer C_n. *Für $m = n$ haben wir daher die Relationen* (vgl. p. 692 Anmk.):

$$(6)\qquad \begin{Vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \\ X_1 & X_2 & \dots & X_{\nu+1} \end{Vmatrix} = 0,$$

worin die X_i beliebige Grössen bedeuten und wo $\mu = n^2$. Die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen wird in Uebereinstimmung mit dem Obigen gleich $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$.

Zu einem analogen Gleichungssysteme wie der zuletzt behandelte Fall (insofern dieser das Verschwinden aller Unterdeterminanten einer Matrix verlangte) führt die Behandlung der folgenden Aufgabe:

Gegeben ist eine lineare ∞^t-Schaar von Curven n^{ter} Ordnung:

$$\alpha_1 \Psi_1(x) + \alpha_2 \Psi_2(x) + \dots + \alpha_{t+1} \Psi_{t+1}(x) = 0;$$

Man soll in der Ebene Gruppen von R Punkten so bestimmen, dass durch dieselben noch eine ∞^q-Schaar von C_n der gegebenen Schaar hindurchgeht, wobei $q > t - R$. Dies Problem ist dem auf p. 702 behandelten genau analog, nur dass damals die R Punkte der beschränkenden Bedingung unterworfen waren, auf einer gegebenen C_n zu liegen. Dasselbe führt daher ebenfalls auf die Forderung, dass alle $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten aus dem Schema

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(R)}) & \Psi_2(x^{(R)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{Vmatrix}$$

verschwinden sollen. Dies liefert $(q+1)(R-t+q)$ von einander unabhängige Gleichungen zwischen $2R$ Unbekannten: den $2R$ Coordinaten der R Punkte. Für die Möglichkeit der Lösung ist also nothwendig, dass

$$2R \geqq (q+1)(R-t+q)\,.$$

Genauere Untersuchungen über die Zahl der Lösungen in einzelnen Fällen (die analog wie das Beispiel auf p. 749 zu behandeln wären), sind bisher jedoch noch nicht angestellt.*)

---

*) Ein Beispiel für die Lösung des im Texte gestellten Problems werden wir sogleich noch kennen lernen; auch den Fall, wo die m^2 Basispunkte eines C_m-Büschels auf einer festen C_n liegen sollen $(n > m)$, werden wir noch besprechen.

Die Modificationen, welche diese Betrachtungen erleiden, wenn eine der betrachteten Curven durch Doppelpunkte der anderen hindurchgeht, sind unschwer anzugeben. Es ist bekanntlich drei Bedingungen äquivalent, wenn ein bestimmter Punkt Doppelpunkt einer Curve sein soll (p. 339). Soll z. B. y Doppelpunkt einer Curve der Schaar (1) sein, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$(8) \qquad \left[\alpha_1 \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x_i} + \ldots + \alpha_{\nu+1} \frac{\partial \Psi_{\nu+1}(x)}{\partial x_i}\right]_{x=y} = 0$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Für $y = x^{(1)}$ treten also in der Matrix (2) statt der ersten Horizontalreihe drei aus den linken Seiten der Gleichungen (8) entstehende Horizontalreihen auf. Gleichzeitig fallen aber von den μ Punkten des Schnittpunktsystems zwei nach $x^{(i)}$, so dass wir nur noch $\mu - 1$ getrennte Punkte zu betrachten haben. Ebenso haben wir beim Auftreten von δ Doppelpunkten der C_n nur noch $\mu - \delta$ getrennte Punkte $x^{(i)}$. An Stelle der Matrix (2) tritt daher alsdann eine Matrix mit $\mu + \delta$ Horizontal- und $\nu + 1$ Verticalreihen, deren Verschwinden also mit $\mu - \nu + \delta$ Bedingungen äquivalent ist. Sollen ferner ausserdem im Schnittpunktsystem δ' Doppelpunkte der C_m vorkommen, von denen keiner in einem Doppelpunkte der C_n liegt, so besteht jenes Punktsystem nur noch aus $\mu - \delta - \delta'$ getrennten Punkten. Die in (2) auftretende Matrix enthält daher jetzt noch $\mu + \delta - \delta'$ Horizontalreihen; und die Zahl der durch ihr Verschwinden dargestellten Bedingungen wird gleich

$$\mu - \nu + \delta - \delta' = mn - \tfrac{1}{2} n (n + 3) + \delta - \delta'.$$

Ebenso tritt an Stelle von (5) eine Matrix mit $\mu + \delta' - \delta$ Horizontal- und $\mu - \pi + 1$ Verticalreihen. Die Zahl der durch das Verschwinden der letzteren Matrix dargestellten Bedingungen wird daher gleich

$$\pi - \delta + \delta' = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta + \delta'.$$

Auch in dem hier betrachteten Falle ist daher die Gesammtheit der zwischen den $mn - \delta - \delta'$ *Punkten bestehenden Bedingungen gleich* $mn - 3n + 1$. Ist wieder die C_n fest gegeben, so sind damit $mn - \frac{1}{2} n (n + 3) + \delta$ Bedingungen als von selbst erfüllt betrachtet; es bestehen also noch $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta$ Relationen, woraus sich wieder der Eingangs erwähnte Satz ergibt. —

Den betrachteten Theoremen über die Schnittpunkte *zweier* algebraischen Curven kann man nun zahlreiche andere gegenüberstellen und aus ihnen ableiten, welche sich auf Schnittpunktsysteme *dreier* und *mehrerer* Curven beziehen. Hierfür geben wir im Folgenden einige Beispiele, die ihrer Anwendungen wegen von besonderem

Interesse sind; und zwar sollen sich letztere auf die Chasles'sche Erzeugungsweise einer gegebenen Curve beziehen. Wir beweisen zunächst den folgenden Satz*):

Eine Curve der n^{ten} Ordnung, wo:

$$n > p \quad \textit{und} \quad n > q, \quad \textit{aber} \quad n < p + q,$$

welche durch

$$pq - \tfrac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$$

*Schnittpunkte zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung geht, enthält auch die übrigen $\frac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$ Schnittpunkte der letzteren.***)

Zum Beweise nehmen wir auf der C_p $\frac{1}{2}(n - q)(n - q + 3)$ Punkte beliebig an und legen durch sie eine Curve C_{n-q} der $(n - q)^{ten}$ Ordnung, was immer möglich, wenn $n - q < p$; ebenso legen wir durch $\frac{1}{2}(n - p)(n - p + 3)$ Punkte der gegebenen C_p eine Curve C_{n-p} der $(n - p)^{ten}$ Ordnung. Wir haben dann zwei Curven n^{ter} Ordnung, deren eine aus C_q und C_{n-q}, deren andere aus C_p und C_{n-p} besteht, und durch deren n^2 Schnittpunkte jede Curve n^{ter} Ordnung gehen muss, welche $\frac{1}{2}n(n + 3) - 1$ von denselben erhält. Nun ist aber:

$$(9) \quad \tfrac{1}{2}n(n+3)-1 = \alpha + \tfrac{1}{2}(p - n)(p - n + 3) + \tfrac{1}{2}(q - n)(q - n + 3),$$
$$\text{wenn: } \alpha = pq - \tfrac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2).$$

Alle Curven n^{ter} Ordnung also, welche durch α der gegebenen pq Punkte und durch die auf der C_p bez. C_q willkürlich gewählten Punkte gehen, gehen auch durch die übrigen $pq - \alpha$ Schnittpunkte von C_p und C_q. Dies sind aber auch *alle* Curven n^{ter} Ordnung, welche überhaupt durch die α Punkte gehen; denn die Mannigfaltigkeit *aller* dieser Curven ist gleich

$$\beta = \tfrac{1}{2}n(n + 3) - \alpha;$$

und unsere obige Construction liefert uns ∞^{γ} verschiedene Büschel von C_n, wo:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(p - n)(p - n + 3) + \tfrac{1}{2}(q - n)(q - n + 3)$$

also im Ganzen eine $\infty^{\gamma+1}$-Schaar von C_n; und wegen der Relation (9) ist in der That $\gamma + 1 = \beta$. *Alle* C_n durch die α Punkte, gehen also wirklich durch die übrigen $pq - \alpha$ Punkte; q. e. d. Vorausgesetzt wurde bei diesem Beweise, dass $n - q < p$, also auch

*) Hier, sowie überhaupt im Folgenden schliessen wir den Fall aus, dass in Schnittpunkten Doppelpunkte der betrachteten Curven liegen; letztere können *ausserdem* aber beliebig viele Doppel- und vielfache Punkte haben, auch in niedrige Curven zerfallen.

**) Vgl. Cayley: Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. 3, 1843, p. 211.

$n - p < q$, oder $n < p + q$, wie oben angegeben wurde. Für $n = p + q - 1$ oder $n = p + q - 2$ sagt übrigens unser Satz nichts mehr aus. Für $n < q$ oder $n < p$ würde die Construction der Curven C_{n-q} oder C_{n-p} nicht mehr möglich sein.

Für $p = q = m$ folgt hieraus insbesondere:

Liegen von den m^2 Basispunkten eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung

$$\alpha = m^2 - \tfrac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$$

auf einer Curve n^{ter} Ordnung, wo $n > m$ aber $n \leq 2m$, so liegen auch die übrigen $m^2 - \alpha$ Basispunkte jenes Büschels auf der Curve n^{ter} Ordnung.

Bevor wir dies letztere Resultat zu weiteren Anwendungen benutzen, sei hervorgehoben, dass in Vorstehendem eine specielle Lösung des vorhin gestellten Problems enthalten ist: in der Ebene Q Punkte so zu bestimmen, dass durch sie noch ∞^r Curven einer gegebenen linearen ∞^t-Schaar gehen. Wir haben nämlich hier:

$$t = \tfrac{1}{2}n(n+3), \quad Q = pq, \quad r = \tfrac{1}{2}n(n+3) - \alpha.$$

Eine solche Gruppe von Q Punkten ist eben durch jedes beliebige vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung gegeben, wenn nur $n > q$, $n > p$, $n \leq p + q$; durch ein beliebiges System von pq Punkten dagegen würden weniger, nämlich $\{\tfrac{1}{2}n(n-3) - pq\}$-fach unendlich viele C_n hindurchgehen.

Der zuletzt für $p = q = m$ ausgesprochene Satz wird nun von Wichtigkeit für die Frage, ob es immer möglich ist, für $m < n$ auf einer gegebenen C_n m^2 Punkte so zu bestimmen, dass durch sie noch einfach unendlich viele C_m hindurchgehen, eine Frage, die für die Untersuchung der Chasles'schen Erzeugungsweise der C_n von besonderem Interesse ist (p. 376). Für $n \leq 2m$ nämlich braucht man nach jenem Satze nur zu fragen, ob es möglich ist, $\alpha = m^2 - \tfrac{1}{2}(2m - n - 1) \cdot (2m - n - 2)$ Basispunkte eines Büschels von C_m auf eine gegebene C_n zu legen; die übrigen Basispunkte liegen dann von selbst auf der C_n. Die dazu nöthigen Bedingungen aber sind durch das Verschwinden aller t-gliedrigen Determinanten des Schemas (7) gegeben (indem dort $q = 1$), wenn:

$$t = \tfrac{1}{2}m(m+3), \quad R = \alpha;$$

was $2(\alpha - t + 1)$ Relationen zwischen α Unbekannten gibt (indem die α Punkte gezwungen sind, sämmtlich auf der C_n zu liegen). Von letzteren bleiben also willkürlich:

$$\alpha - 2(\alpha - t + 1) = m(m+3) - m^2 - 2 + \tfrac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(2m-n)^2 + 3n - 2\}.$$

So viele von den α Punkten kann man daher auf der C_n beliebig annehmen.

Ist dagegen $n > 2m$, so haben wir in dem Schema (9): $R = m^2$, $t = \frac{1}{2}m(m+3)$, $q = 1$ und also $m^2 - 3m + 2$ Relationen; d. h. die Zahl der willkürlich bleibenden Punkte ist gleich

$$m^2 - (m^2 - 3m + 2) = 3m - 2.$$

*Soll man also auf einer Curve n^{ter} Ordnung m^2 Punkte ($m < n$) so bestimmen, dass sie die Basispunkte eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung bilden, so kann man von ihnen für $n \leq 2m$ noch $\frac{1}{2}\{(2m-n)^2 + 3n - 2\}$, dagegen für $n > 2m$ noch $3m - 2$ willkürlich auf der C_n annehmen.**)

Hat man nun diesem Satze gemäss einen Büschel von C_m gefunden, so kann man auch immer einen zweiten Büschel von C_{n-m} angeben, dessen $(n-m)^2$ Basispunkte ebenfalls sämmtlich auf der C_n liegen, und welcher auf den C_m-Büschel derartig projectivisch bezogen ist, dass die Schnittpunkte entsprechender Curven beider Büschel die C_n in Chasles'scher Weise erzeugen. Die Curven des Büschels m^{ter} Ordnung nämlich schneiden die C_n in $m(n-m)$ beweglichen Punkten. Legen wir nun durch $m(n-m) - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ von diesen weiteren Schnittpunkten einer bestimmten Curve C_m des Büschels eine Curve C_{n-m}, *so geht diese auch durch die übrigen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Punkte von selbst hindurch.* Sei nämlich C_m' eine zweite Curve unseres Büschels, und beschreibt man durch $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$ der $(n-m)m$ weiteren Schnittpunkte von C_n und C_m' (welche also nicht auch auf C_m liegen) eine C_{n-m}, so haben wir zwei Curven n^{ter} Ordnung: die C_n und die $C_m + C_{n-m}$. Die Curve C_m' enthält nun

$$m^2 - \tfrac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2) + \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$$
$$= nm - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

Durchschnittspunkte beider Curven, folglich auch noch $\frac{1}{2}(m-1) \cdot (m-2)$ weitere Schnittpunkte, und zwar, da C_m' durch alle m^2 Basispunkte des einen Büschels geht,

$$\tfrac{1}{2}(2m-n-1)(2m-n-2)$$

Punkte, die C_n und C_m gemeinsam sind, und also

$$(n-m)m - \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3)$$

Punkte, die C_n und C_{n-m} gemeinsam sein müssen. Die C_{n-m} geht also in der That durch alle $m(n-m)$ Schnittpunkte von C_m' mit

*) Vgl. Chasles: Détermination du nombre des points etc., Comptes rendus, 21. Septb. 1857, sowie Cremona's Theorie der ebenen Curven, p. 77 ff. in Curtze's Uebersetzung. — Für $n = 2m + 1$ und $n = 2m + 2$ sind beide Zahlen identisch, so dass die Angaben des Textes mit denen von Chasles übereinstimmen.

C_n.*) Legt man also durch die beregten $m(n-m)$ Schnittpunkte von C_n mit C_m' eine beliebige C_{n-m}, so schneidet letztere die C_n noch in

$$(n-m)\,n - m\,(n-m) = (n-m)^2$$

Punkten. Sind ferner $C_n = 0$, $C_m' = 0$, $C_{n-m} = 0$ die Gleichungen der betrachteten Curven, und ist $C_m = 0$ die Gleichung einer anderen die gewählten m^2 Basispunkte enthaltenden Curve m^{ter} Ordnung, so muss sich eine Curve C'_{n-m} so bestimmen lassen, dass identisch

$$C'_m C'_{n-m} \equiv C_m C_{n-m} + C_n\,,$$

denn wir haben es nur mit einfachen Schnittpunkten zu thun. Dann aber geht die C'_{n-m} ebenfalls durch die $(n-m)^2$ Punkte, welche auf C_n und C_{n-m}, aber nicht auf C'_m, liegen. D. h. der Büschel $C_{n-m} + \lambda C'_{n-m} = 0$ ist dem Büschel $C'_m + \lambda C_m = 0$ projectivisch und erzeugt die C_n in verlangter Weise. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

*Liegen die m^2 Basispunkte eines Büschels von C_m auf einer C_n, so gibt es immer einen zu ihm projectivischen Curvenbüschel von C_{n-m}, dessen $(n-m)^2$ Basispunkte ebenfalls auf der C_n liegen, und welcher mit jenem ersten Büschel durch den Schnitt je zweier entsprechenden Curven die C_n erzeugt.***)

Durch vorstehende Betrachtungen ist gleichzeitig der vollständige Beweis erbracht, dass *jede C_n* durch zwei projectivische Curvenbüschel m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann, von deren Basispunkten keiner in einem Doppelpunkte der C_n liegt; dabei kann m alle Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen. —

Von dem hier zuletzt bewiesenen Satze, der offenbar auch für eine zerfallende Curve C_n gültig ist, wollen wir zum Schlusse noch eine andere Anwendung machen, die uns zu interessanten Specialfällen führt.

Es seien $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ zwei Curven n^{ter} Ordnung. Dieselben bestimmen einen Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ von solchen Curven mit $n^2 = p + q$ Basispunkten. Die Zahl q soll nun so gewählt werden, dass durch q jener n^2 Basispunkte eine Curve $K_3 = 0$ der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung gerade bestimmt wird, d. h. wir nehmen

---

*) Es folgt dies auch direct aus dem allgemeineren Satze von Cayley: *Liegen von den Schnittpunkten zweier Curven C_m und C_n, wo $m < n$, $mp - \frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ auf einer Curve C_p, wo $p < n$, so liegen auf dieser Curve noch weitere $\frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ Punkte, und die übrigen $m(n-p)$ Punkte liegen auf einer Curve der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung.*

**) Vgl. Chasles: Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres; Comptes rendus, 28. décb. 1857.

(10) $$q = \tfrac{1}{2}(n-r)(n-r+3),$$
und also:
(11) $$p = n^2 - q = \tfrac{1}{2}n(n+2r-3) - \tfrac{1}{2}r(r-3).$$
Durch die p übrigen Schnittpunkte von C_1 mit C_2 legen wir eine beliebige dritte Curve n^{ter} Ordnung: $C_3 = 0$. Dann bilden die beiden Curven C_3 und K_3 zusammen eine Curve $C_3 . K_3 = 0$ von der $(2n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung, auf welcher die Basispunkte des Büschels $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ vertheilt liegen. Nach dem zuletzt bewiesenen Theoreme muss es daher einen zum Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ projectivischen Büschel $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung geben, dessen $(n-r)^2$ Basispunkte ebenfalls auf $C_3 . K_3 = 0$ vertheilt liegen, und welcher mit dem Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ durch die Schnittpunkte entsprechender Curven die Curve $C_3 . K_3 = 0$ erzeugt. Sind nun $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ diejenigen Curven des zweiten Büschels, welche den Curven*) $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ bez. des ersten entsprechen, so entsteht die Frage, wie viele von den $(n-r)^2$ Basispunkten des zweiten Büschels auf die C_3, wie viele auf die K_3 fallen. Nun schneidet der Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ die C_3 in $n^2 - p = q$ beweglichen Punkten; Gleiches gilt daher auch von dem Büschel $K_2 + \varkappa K_1 = 0$. Die Curven des letzteren treffen also die C_3 noch in $\lambda = n(n-r) - q$ *festen* Punkten; und folglich liegen auf K_3 noch $\mu = (n-r)^2 - \lambda$ Basispunkte des Büschels, wo nun wegen (10) und (11):

(12) $$\begin{aligned} \lambda &= p - rn &&= \tfrac{1}{2}n(n-3) - \tfrac{1}{2}r(r+3) \\ \mu &= (n-r)^2 - \lambda &&= \tfrac{1}{2}(n-r)^2 + \tfrac{3}{2}(n+r) - nr. \end{aligned}$$

Da ferner die Gleichung der Curve $C_3 . K_3 = 0$ durch Elimination von $\varkappa$ aus den Gleichungen
$$C_1 + \varkappa C_2 = 0, \quad K_2 + \varkappa K_1 = 0$$
hervorgehen muss, so besteht zwischen $C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3$ eine Identität der Form:

(13) $$\alpha_1 C_1 K_1 + \alpha_2 C_2 K_2 + \alpha_3 C_3 K_3 \equiv 0,$$

wo die α_i Constante bedeuten. Zwischen den drei Curven C_i und den drei Curven K_i herrscht sonach vollkommene Symmetrie, und wir können folgenden Satz aussprechen:

Schneiden sich drei Curven C_1, C_2, C_3 der n^{ten} Ordnung in denselben
$$p = \tfrac{1}{2}n(n+2r-3) - \tfrac{1}{2}r(r-3)$$
Punkten, so schneiden sie sich paarweise noch in weiteren

*) Die Indices 1, 2 sind so gewählt, dass die Gleichung der Curve $K_3 C_3 = 0$ in der Form $C_1 K_1 - C_2 K_2 = 0$ erscheint, dass also zwischen C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 eine Identität der Form (13) besteht.

$$q = \frac{1}{2}(n-r)(n-r+3)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven K_1, K_2, K_3 *der* $(n-r)^{ten}$ *Ordnung. Diese letzteren gehen alsdann, wenn* λ, μ *wie in* (12) *bestimmt werden, durch dieselben* μ *Punkte der Ebene, während ihre übrigen* λ *Schnittpunkte paarweise genommen bez. auf den Curven* C_1, C_2, C_3 *liegen.**)

Für $n = 2$, $r = 1$ ergibt sich hieraus der bekannte Satz:

*Schneiden sich drei Kegelschnitte in denselben zwei Punkten der Ebene, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren zwei Punkten; die durch diese Punktepaare bestimmten drei Geraden gehen durch denselben Punkt der Ebene.***)

Ebenso folgt z. B. für $n = 3$, $r = 2$:

Schneiden sich drei Curven 3ter Ordnung in denselben 7 Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch 2 Punkten; die dadurch bestimmten 3 Geraden bilden ein Dreiseit, dessen 3 Eckpunkte bez. auf die drei Curven 3ter Ordnung zu liegen kommen. —

Diese Anwendungen und Beispiele werden hinreichen, um das mächtige Hülfsmittel zu kennzeichnen, welches wir in den Schnittpunktsätzen besitzen, indem letztere auch die ganze Ebene beherrschen, während wir früher immer eine feste Curve zu Grunde legten. Wir wenden uns nunmehr zu Untersuchungen anderer Art, für die dann gerade wieder der Begriff der adjungirten Curven von besonderer Wichtigkeit werden wird.

VI. Die zu einer Curve gehörigen algebraischen Integrale.

Wir haben schon wiederholt auf den innigen Zusammenhang zwischen der Geometrie auf einer Curve und der Theorie gewisser zu ihr gehöriger Integrale hingewiesen, wir haben insbesondere bei den Curven dritter Ordnung diesen Zusammenhang bereits ins Einzelne verfolgt: das elliptische Integral erster Gattung, dessen Modul mit dem Doppelverhältnisse der Curve in bestimmter Weise zusammenhing, erschien hier auf's Engste mit der Theorie der Schnittpunktsysteme verknüpft (vgl. p. 602 ff.). Die allgemeine Erörterung der hier vorkommenden Verhältnisse soll uns nun beschäftigen; und zwar wollen wir zunächst folgende Gegenstände erledigen

1) Einführung einer bestimmten Form für die allgemeinsten algebraischen Integrale,

---

*) Für $r = 1$ und $r = 2$ ist dieser Satz von Olivier gegeben: Crelle's Journal, Bd. 70, p. 156.

**) Dieser Satz ist ja nichts anderes als die projectivische Verallgemeinerung des bekannten, dass die Chordalen dreier Kreise durch denselben Punkt gehen (p. 155).

2) Zurückführung der letzteren auf gewisse Normalformen,

3) Untersuchung der Unendlichkeitspunkte dieser Normalformen.

Die so gewonnenen Normalformen werden weiterhin auf noch einfachere Typen reducirt werden; und es bleibt dann übrig für letztere das Abel'sche Theorem aufzustellen, sowie das sogenannte Umkehrproblem der Abel'schen Integrale zu erledigen*), um alle Mittel für die geometrischen Anwendungen bereit zu haben. Hervorgehoben sei sogleich, dass die Eigenschaften der hier auftretenden Integrale invarianten Charakter gegenüber allen eindeutigen Transformationen der Grundcurve bewahren, wie später genauer gezeigt werden soll; es wird dadurch von Neuem gerechtfertigt erscheinen, wenn wir die Theorie dieser eindeutigen Transformationen an die Spitze gegenwärtiger Untersuchungen stellten.

Unter einem *algebraischen oder Abel'schen Integrale* versteht man ein solches, bei welchem die Function unter dem Integralzeichen derartig irrational von der Veränderlichen x abhängt, dass sie als rationale Function *zweier* Veränderlichen x, y darstellbar ist, wenn zwischen letzteren eine bestimmte (und für alle Werthe von x dieselbe) algebraische Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

besteht. Dieselbe ist eben *die Gleichung der Grundcurve*, zu welcher das betreffende Integral gehört. Das Integral selbst kann man dann nach dem Vorgange von Riemann immer in der Form annehmen**):

---

*) Die Theorie der Abel'schen Integrale und Functionen muss hier im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Nur die rein algebraischen Betrachtungen über die Differentiale der Abel'schen Integrale und das Abel'sche Theorem sollen im Texte etwas ausführlicher gegeben werden. Im Uebrigen stellen wir die benutzten Sätze nur immer kurz zusammen und verweisen wegen näherer Ausführungen auf die betreffenden Originalarbeiten, insbesondere auf folgende Schriften:

B. Riemann: Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54; im Folgenden kurz bezeichnet mit: *R. A. F.*

A. Clebsch und P. Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866; im Folgenden kurz bezeichnet mit: *Cl.* u. *G. A. F.*

Für die *hyperelliptischen* Integrale vgl. besonders Weierstrass: Crelle's Journal, Bd. 47 und 52; C. Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1865; Prym: Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Denkschriften der Math.-phys. Classe der Wiener Academie, Bd. 24, 1864 und: Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Denkschriften der schweizerischen Gesellschaft, Bd. 22, Zürich 1866. Die späteren Arbeiten von Weierstrass über diese Theorien sind bisher nicht allgemeiner bekannt geworden.

**) Vgl. R. A. F. §. 9. — Ist das Integral sonst nicht in der Form (1) gegeben, so kann man letztere ja immer einfach herstellen, indem man Zähler und Nenner der Function unter dem Integralzeichen mit $\frac{\partial F}{\partial y}$ multiplicirt.

$$(1)\qquad \int \frac{\Psi\, dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

wo Ψ eine rationale, gebrochene algebraische Function in x, y bedeutet, während zwischen x, y die Gleichung n^{ter} Ordnung $F = 0$ besteht, d. h. während x, y die Coordinaten eines Punktes der Grundcurve n^{ter} Ordnung bedeuten. Wir wollen das Integral jedoch immer in einer etwas anderen, von Aronhold gegebenen Form annehmen, indem wir statt x, y homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3 einführen, wodurch auch äusserlich den Forderungen der Symmetrie sowie der projectivischen Denkweise (dem invarianten Charakter des Differentials) mehr Rechnung getragen wird. Dadurch ist dann zugleich ein Zusammenhang mit der ternären Algebra angezeigt, welcher für die Behandlung der Integrale von Bedeutung sein kann. Wir schreiben nämlich das Integral immer in der Form:

$$(2)\qquad V = \int \frac{\Psi \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}} = \int \frac{\Psi\,(c\,x\,dx)}{n a_x^{n-1} a_c},$$

wo nun c_1, c_2, c_3 die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene bedeuten, und x_1, x_2, x_3 durch die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung $f \equiv a_x^n = 0$ an einander gebunden sind, während Ψ jetzt eine homogene gebrochene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in den x_i ist. — Ehe wir jedoch allgemein auf das Wesen dieser Darstellung eingehen, möge dieselbe an einem einfachsten Beispiele (für $n = 2$) erörtert werden*); die weiteren Verallgemeinerungen ergeben sich dann von selbst.

Wir behandeln das Integral

$$(3)\qquad V = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}},$$

welches gewöhnlich mittelst wiederholter Substitutionen auf einen Logarithmus zurückgeführt wird, während wir dasselbe, von der homogenen Schreibweise ausgehend, zugleich in allgemeinerer Form direct auswerthen werden. Wir bringen es zunächst auf die Form der Integrale (1) und (2). Das Wurzelzeichen nämlich können wir dadurch fortschaffen, dass wir x mit einer neuen Variabeln y durch eine quadratische Gleichung verbinden. Letztere sei:

---

*) Vgl. Aronhold: Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x, y)\, dx$, in welcher $\Pi(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht. Crelle's Journal, Bd. 61. Es sei auf diese Arbeit zur Einführung in die im Texte verfolgten Vorstellungen nachdrücklich verwiesen.

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

dann findet man durch Auflösung nach y:

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = \tfrac{1}{2}f'(y) = \sqrt{2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x^2 - (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}.$$

Führen wir also die Bezeichnung ein:

$$A = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad B = 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \quad C = -(a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$$

so wird in der That:

$$(4) \qquad V = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = 2\int \frac{dx}{f'(y)}.$$

Wir verwandeln nun alle vorkommenden Functionen durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

in homogene. Unsere Bedingungsgleichung wird dann:

$$f \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k \equiv a_x^2 = 0$$

und in V müssen wir setzen:

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \quad f'(y) = \frac{1}{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2a_x a_2}{x_3},$$

so dass:

$$(5) \qquad V = 2\int \frac{dx}{f'(y)} = \int \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3 \cdot a_x a_2},$$

In dem Nenner tritt also noch eine lineare Function auf; dies war vorauszusehen, denn das Integral (3) wird für $x = \infty$, $y = \infty$, d. h. für einen Schnittpunkt des Kegelschnittes $f = 0$ mit der unendlich fernen Geraden, selbst unendlich; dasselbe muss daher bei der homogenen Form für den Schnittpunkt der Linie $x_3 = 0$ mit dem Kegelschnitte $a_x^2 = 0$ eintreten. Um nun von der Lage des Coordinatendreiecks unabhängig zu sein, werden wir statt V das Integral:

$$(6) \qquad W = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{u_x \cdot a_x a_2},$$

wo:

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

der Betrachtung zu Grunde legen: *Die Integrale V und W sind also in projectivischem Sinne nicht von einander verschieden.* Zur Auswerthung beider werden wir hier auch auf demselben Wege gelangen, während bei dem gewöhnlich in der Integralrechnung angewandten Verfahren beide Fälle eine gesonderte Betrachtung erfordern.

Das Integral W lässt sich nun auf merkwürdige Weise in eine mehr *symmetrische* Form bringen. Wir haben nämlich zufolge der Bedingungsgleichung $f = 0$, wenn $f_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 &= f = 0 \\ dx_1 f_1 + dx_2 f_2 + dx_3 f_3 &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(8)\quad f_1 : f_2 : f_3 : = x_2 dx_3 - x_3 dx_1 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1 .$$

Ferner haben wir aus (6):

$$dW \,.\, f_2 \,.\, u_x = x_3 dx_1 - x_1 dx_3 ,$$

also auch, wenn $(x\,dx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2$, etc., wegen der Gleichberechtigung der drei Coordinatenseiten nach (8):

$$dW \,.\, f_i \,.\, u_x = (x\,dx)_i , \quad (i = 1, 2, 3)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen bez. mit den willkürlichen Grössen c_i und addirt, so kommt:

$$dW (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) \,.\, u_x = \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3 = (c\,x\,dx).$$

Wir erhalten also für das Integral (6) *die folgende homogene Darstellung:*

$$(9)\quad W = 2 \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(c\,x\,dx)}{u_x \,.\, \Sigma c_i f_i} = \int \frac{(c\,x\,dx)}{u_x \,.\, a_c a_x} .$$

Zur Auswerthung von W, dessen Werth von den c_i vollkommen unabhängig ist, weren wir jetzt diese willkürlichen Grössen passend bestimmen. Zu dem Zwecke benutzen wir den folgenden allgemeinen Satz:

Die Determinante $(c\,x\,dx)$, *dividirt durch das Product zweier ternären algebraischen Formen* φ, ψ, *ist proportional zu einem vollständigen Differentiale, wenn man die* c_i *proportional zu den zweigliedrigen Determinanten aus den ersten Differentialquotienten von* φ *und* ψ *nach* x_1, x_2, x_3 *setzt, d h. wenn:*

$$\varrho c_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \quad \varrho c_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

$$\varrho c_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}.$$

Der Beweis ist ausserordentlich einfach. Sei nämlich:

$$\varphi = a_x^m , \quad \psi = \alpha_x^n ,$$

so wird:

$$\varrho c_i = m n \,.\, (a\alpha)_i \, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} ,$$

und also nach einer bekannten Identität (vgl. V. p. 283):

$$\begin{aligned} \varrho\,(c\,x\,dx) &= mn\,(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx})\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} \\ &= m\varphi \,.\, d\psi - n\psi \,.\, d\varphi , \end{aligned}$$

und somit:

$$(10)\qquad \varrho \frac{(c\,x\,dx)}{\varphi \,.\, \psi} = m \frac{d\psi}{\psi} - n \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad \text{q. e. d.}$$

Für unsern Fall setzen wir nun:

$$(11)\qquad \begin{gathered}\varphi = u_x\,,\quad \psi = a_x a_c\,,\\ \varrho c_i = (u a)_i a_c\,;\end{gathered}$$

dann wird nach (10):

$$(12)\qquad W = \int \frac{(c x d x)}{u_x \cdot a_x a_c} = \frac{1}{\varrho}\int\left\{\frac{d(a_x a_c)}{a_x a_c} - \frac{d(u_x)}{u_x}\right\} = \frac{1}{\varrho}\log\frac{a_x a_c}{u_x}\,,$$

wo ϱ ein noch zu bestimmender Factor ist. Zu dieser Bestimmung führt folgende Betrachtung. Aus (11) ergibt sich:

$$(13)\qquad u_c = 0 \quad \text{und} \quad a_c^2 = 0\,;$$

wir haben also durch die Substitution (11) *für den Punkt c einen der Schnittpunkte der Geraden $u_x = 0$ mit dem Kegelschnitte $f = 0$ gewählt.* Wir brauchen nun allerdings nur die Verhältnisse der c_i zu kennen; denn eine gleichzeitige Aenderung derselben um denselben Factor würde nur die willkürliche Constante des Integrals beeinflussen. Gleichwohl müssen wir der Grösse ϱ in (11) hier einen bestimmten Werth beilegen, da auf beiden Seiten der Gleichungen (11) dieselben Verhältnisszahlen c_1, c_2, c_3 vorkommen. In der That durch Multiplication der c_i bez. mit willkürlichen Grössen v_i und durch Addition der Producte ergibt sich die Identität:

$$(14)\qquad \varrho v_c = (a v u)\, a_c\,;$$

es muss also ϱ ein Ausdruck erster Ordnung in den u_i und a_{ik} sein. Wir wollen nun mit c_i' die Coordinaten des zweiten Schnittpunktes der Linie u mit $f = 0$ bezeichnen, so dass

$$\sigma u_1 = c_2 c_3' - c_3 c_2'\,,\quad \sigma u_2 = c_3 c_1' - c_1 c_3'\,,\quad \sigma u_3 = c_1 c_2' - c_2 c_1'\,;$$

dann folgt aus (14) für $v_i = b_i b_{c'}$ ($f = a_x^2 = b_x^2$):

$$(15)\qquad \begin{aligned}\varrho b_c b_{c'} &= (a b u)\, a_c b_{c'} = \tfrac{1}{2}(a b u)\,(a_c b_{c'} - b_c a_{c'})\\ &= \frac{\sigma}{2}(a b u)^2\,.\end{aligned}$$

Andererseits haben wir wegen $a_c^2 = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma\varrho v_c &= \sigma\,(a v u)\, a_c = (a_c v_{c'} - v_c a_{c'})\, a_c\\ &= -v_c \,.\, a_c a_{c'} = -v_c\,.\, b_c b_{c'}\,,\end{aligned}$$

und also:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}\, b_c b_{c'}\,.$$

Setzen wir dies in (15) ein, so kommt schliesslich:

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2}(a b u)^2 = \tfrac{1}{2} F\,,$$

wenn wir mit F, wie schon früher (p. 285), die zugehörige Form von f bezeichnen:

$$F = (abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit ist folgendes Theorem bewiesen:

Wenn man unter der Voraussetzung, dass $f(x, y) \equiv f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_x^2 \equiv b_x^2 = 0$ *ist, das Integral*

$$W = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(c x d x)}{u_x \cdot a_x a_c}$$

auswerthen soll, so nehme man für die c_i *ein den Gleichungen:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u_x = 0$$

genügendes Werthsystem, was durch Auflösung der linearen Gleichungen:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_1 = (ua)_1 a_c, \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_2 = (ua)_2 a_c, \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_3 = (ua)_3 a_c$$

geschehen kann), in denen* F *die zugehörige Form* $(abu)^2$ *von* f *bedeutet: alsdann ist*

$$W = \frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} F}} \log \frac{a_x a_c}{u_x} + C. \tag{16}$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{\tfrac{1}{2} F}$ *muss mit dem in den linearen Gleichungen benutzten übereinstimmen, und die in den Differentialausdruck einzuführende Wurzel der Gleichung* $f(x, y) = 0$ *mit der im Integralausdrucke zu wählenden.*

Um ein Beispiel für die Anwendbarkeit der Formel (16) auch in den gewöhnlich vorkommenden Fällen zu geben, sei

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = (x^2 + y^2 - 1)$$

also:

$$\tfrac{1}{2} F = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} f'(y);$$

dann wird:

$$W = \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 \sqrt{1 - x^2} + u_3)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}} \log \frac{c_1 x + c_2 y - c_3}{u_1 x + u_2 y + u_3},$$

wo die c_i aus zwei der folgenden Gleichungen zu bestimmen sind ($\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{2} F}$):

$$\varrho c_1 = -u_2 c_3 - u_3 c_2, \quad \varrho c_2 = u_3 c_1 + u_1 c_3, \quad \varrho c_3 = u_1 c_2 - u_2 c_1. \tag{17}$$

Setzt man noch $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$, so wird $\varrho = \sqrt{-1} = i$ und nach (17): $c_3 = 0$, $c_1 = i\, c_2 = i$, wenn $c_2 = 1$, also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{i} \log (xi + y) = \arcsin x.$$

*) Vgl. über die Bestimmung der c_i p. 107 und 116.

Setzt man ferner $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = 1$, so wird $\varrho = 1$, $c_2 = 0$, $c_1 = -c_3$, also $c_1 = 1$, wenn $c_3 = -1$, und folglich:

$$\int \frac{dx}{y\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Nehmen wir endlich noch $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$, also $\varrho = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = -1$, so ergibt sich:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Dies Beispiel wird genügen, um den Gebrauch der homogenen Form eines algebraischen Integrals zu erklären, und die Vorzüge derselben bei gewissen allgemeineren Fragestellungen zu erläutern. —

Schon an diesem Beispiele trat der invariante Charakter des Differentials dW hervor. In der That kann man jedes Differential dV der Form (2) als simultane Functionalinvariante der Grundcurve $f = 0$ und der auf $f = 0$ gelegenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Function Ψ betrachten. Zunächst nämlich ist klar, dass der Differentialausdruck, als homogene Function nullter Ordnung der x_i, sich nicht ändert, wenn man die x_i gleichzeitig um denselben Factor ändert, und dass derselbe, ebenso wie für $n = 2$ in obigem Beispiele, wegen der Gleichungen (7) *völlig unabhängig von dem Punkte c ist* und nur durch die Function Ψ bestimmt wird. Für eine beliebig lineare Transformation aber gilt der Satz, dass *das Differential dV sich be einer solchen nur um den Factor der Substitutionsdeterminante ändert.* *) Setzen wir nämlich:

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3,$$

so wird, wenn k_i die Coordinaten des dem Punkte c entsprechenden Punktes sind (vgl. p. 265):

$$r \cdot (c\,x\,dx) = (k\,y\,dy),$$

und wenn wir

$$f(x) = F(y), \quad \Psi(x) = \Phi(y)$$

setzen, so kommt:

$$r\,dV = r \cdot \frac{\Psi(c\,x\,dx)}{\Sigma c_i f_i} = \frac{\Phi(k\,y\,dy)}{\Sigma k_i F_i}.$$

*) Analoges gilt für jedes binäre Differential der Form:

$$\frac{\alpha_x^{\,n-2}(x\,dx)}{\sqrt[m]{a_x^{\,mn}}}.$$

Ein solches ist simultane Covariante der Formen $a_x^{\,mn}$, $\alpha_x^{\,n-2}$. Für $m = 2$ sind dies die hyperelliptischen Differentiale; für $m = 1$, $n = 2$ hat man das elliptische Differential, das als reine Covariante der Grundform aufzufassen ist.

Dies kann man z. B. benutzen, um das Integral V in die Form (1) überzuführen. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$x_i = a_i t + b_i x + c_i y ,$$

wo x, y, t die neuen Coordinaten bedeuten; es wird dann

$$f(x_1, x_2, x_3) = F(t, x, y), \quad \Psi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(t, x, y)$$

$$\Sigma c_i f_i = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial x_2}{\partial y} + f_3 \frac{\partial x_3}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial F}{\partial y};$$

endlich:

$$(c x d x) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 t + b_1 x + c_1 y & a_1 dt + b_1 dx + c_1 dy \\ c_2 & a_2 t + b_2 x + c_2 y & a_2 dt + b_2 dx + c_2 dy \\ c_3 & a_3 t + b_3 x + c_3 y & a_3 dt + b_3 dx + c_3 dy \end{vmatrix}$$
$$= (abc) \,.\, (t dx - x dt);$$

und also, wenn man (abc) in Φ eingehen lässt und $t = 1$ setzt:

$$dV = n \frac{\Phi\, dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

wo mittelst $F = 0$ y als Function von x definirt ist. —

Vermöge $f = 0$ ist das Differential dV natürlich immer nur von *einer* Variabeln abhängig. Um letztere explicite einzuführen, hat man indess im Allgemeinen höhere Gleichungen aufzulösen. Nur bei den hyperelliptischen Curven sind diese vom *zweiten* Grade, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst wollen wir für den Fall $n = 3$, wo dann $\Psi = 1$ sein mag, das Differential dV in die früher benutzte Form des elliptischen Differentials bringen (p. 649), wie es Aronhold*) zuerst gethan hat. Wir legen den Punkt c auf die Curve $f = 0$ und verstehen unter $u_x = 0$, $v_x = 0$ zwei durch c gehende Gerade. Jeder Strahl des Büschels

$$(18) \qquad \varkappa u_x - \lambda v_x = 0$$

schneidet dann die C_3 noch in zwei beweglichen Punkten; die Coordinaten derselben lassen sich also mittelst einer Quadratwurzel durch $\varkappa$, λ ausdrücken. Es ist aber nicht nöthig dieselben wirklich zu berechnen; vielmehr kann man hier auch auf folgendem Wege zum Ziele gelangen. In dem Büschel (18) sind bekanntlich vier Tangenten der C_3 enthalten, deren Berührungspunkte nicht in c liegen. Die Parameterwerthe $\varkappa$, λ derselben mögen durch die biquadratische Gleichung $\varphi(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben sein, so dass $\varphi(v_x, u_x) = 0$ das Product dieser vier Tangenten darstellt. Die Curve $\varphi = 0$ trifft die C_3 vierpunktig im Punkte c und je zweipunktig in den vier Berührungspunkten; in gleicher Weise aber wird die C_3 von der Curve $[a_x^2 a_c]^2 = 0$ getroffen. Man hat daher bei passender Wahl der in φ eingehenden Constanten:

*) Berliner Monatsberichte, 25. April 1861.

(19) $$[a_x^2 a_c]^2 = \varphi(v_x, u_x) + Af.$$

Ferner wird, da $\varrho c_i = (uv)_i$ gesetzt werden kann, und da $\sigma\lambda = u_x$, $\sigma\varkappa = v_x$:

(20) $$\varrho(cxdx) = u_x v_{dx} - v_x u_{dx} = \sigma^2(\lambda\, d\varkappa - \varkappa\, d\lambda)$$

$$\varphi(v_x, u_x) = \sigma^4 \varphi(\varkappa, \lambda),$$

und daher*):

$$dV \equiv \frac{(cxdx)}{a_x^2 a_c} = \frac{1}{\varrho} \frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\varphi(\varkappa, \lambda)}}.$$

Den hier rechts stehenden Ausdruck erhält man jedoch unmittelbar in der verlangten, von den Invarianten S, T abhängenden Form, wenn man den Punkt c insbesondere in einen *Wendepunkt* der C_3 legt, so dass gleichzeitig:

$$f(c) \equiv a_c^3 = 0, \quad \Delta(c) \equiv \alpha_c^3 = 0.$$

Das Product der vier von c aus an die C_3 zu legenden Tangenten ist nun gegeben durch die Gleichung (p. 501):

(21) $$3(Df)^2 - 4fD^2f = 0,$$

wenn: $$Df = a_x^2 a_c, \quad D^2 f = a_x a_c^2.$$

Unter diesen Tangenten muss auch die Wendetangente von c enthalten sein, und von der linken Seite der Gleichung (21) muss sich ein Factor $D^2 f$ absondern lassen. Um diese Absonderung auszuführen, hat man die Sätze zu benutzen, dass die Curve $f = 0$ als Hesse'sche Curve von drei anderen Curven des Büschels $\varkappa f - \lambda\Delta = 0$ aufgefasst werden kann, die durch die Gleichung (p. 527 und 560):

(22) $$G_1(\varkappa, -\lambda) \equiv \varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3} T\lambda^3 = 0$$

bestimmt werden, und dass immer die Hesse'sche Curve von den Wendetangenten der Grundcurve berührt wird.**) Aus der letzteren Bemerkung geht hervor, dass die drei von c ausser $D^2 f = 0$ noch an $f = 0$ gehenden Tangenten eben die Wendetangenten der drei vermöge (22) zu $f = 0$ gehörigen Grundcurven im Punkte c sind. Diese Tangenten sind also durch (22) bestimmt, wenn gleichzeitig:

$$\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0,$$

wo $D^2\Delta = \alpha_x \alpha_c^2$; das Product ihrer Gleichungen ist daher:

(23) $$G_1(D^2\Delta, -D^2 f) \equiv (D^2\Delta)^3 - \tfrac{1}{2} S \,.\, D^2\Delta \,.\, (D^2 f)^2 + \tfrac{1}{3} T (D^2 f)^3 = 0.$$

---

*) Die Berührungspunkte der vier Tangenten sind also die Verzweigungspunkte der zu dem Integrale gehörenden Riemann'schen Fläche.

**) Dies folgt unmittelbar daraus, dass die lineare Polare eines Punktes der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve erstere in einem Punkte berührt (p. 501), denn die Wendetangente der Grundcurve ist eben die lineare Polare des Wendepunktes; vgl. auch die Anmerkung auf p. 648.

Das Product des links stehenden Ausdrucks in $D^2 f$ muss nun mit dem in (21) links stehenden Ausdrucke bis auf einen noch zu bestimmenden constanten Factor M übereinstimmen; d. h. wir haben vermöge $f=0$*):

$$M \cdot 3\,(Df)^2 = D^2 f \,.\, G_1\,(D^2\Delta,\, -D^2 f)\,, \tag{24}$$

was wieder mit Gleichung (19) übereinstimmt, denn der Büschel (18) ist hier durch den Büschel $\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta$ ersetzt. Aus dieser Gleichung ersieht man, dass M vom 8ten Grade in den Coëfficienten von f und von der 6ten Ordnung in den c_i sein muss. Da aber jede Covariante sechster Ordnung von f sich durch *eine* solche und durch f, Δ ausdrücken lässt (p. 570), so können wir wegen $a_c{}^3=0$, $\alpha_c{}^3=0$ setzen:

$$M = \varphi(c)\, C\,,$$

wenn φ jene eine Covariante ist (p. 574):

$$\varphi(x) = (a b \alpha)(a b \beta)\, a_x b_x \alpha_x{}^2 \beta_x{}^2$$

und wenn C einen Zahlenfactor bedeutet. Die Bestimmung des letzteren geschieht am einfachsten mit Hülfe der kanonischen Form. Nehmen wir der Einfachheit wegen für f eine Curve mit verschwindender Invariante S (was für die vorliegende Frage sonst irrelevant ist), so wird (p. 568 und 570):

$$f = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3\,, \quad \Delta = 6\,x_1 x_2 x_3\,,$$
$$Df = x_1{}^2 c_1 + x_2{}^2 c_2 + x_3{}^2 c_3\,, \quad D^2 f = x_1 c_1{}^2 + x_2 c_2{}^2 + x_3 c_3{}^2\,,$$
$$\varphi(c) = 8\,(c_2{}^3 c_3{}^3 + c_3{}^3 c_1{}^3 + c_1{}^3 c_2{}^3)\,, \quad S = 0\,, \quad T = -6\,,$$

oder, wenn wir für c den Wendepunkt mit den Coordinaten 0, 1, -1 wählen:

$$Df = x_2{}^2 - x_3{}^2\,, \quad D^2 f = x_2 + x_3\,, \quad \varphi(c) = -8\,, \quad D^2\Delta = -2\,x_1\,.$$

Hieraus ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$3\,(Df)^2 = 4 f \,.\, D^2 f - \tfrac{1}{2} D^2 f \left\{2\,(D^2 f)^3 - (D^2\Delta)^3\right\}.$$

Andererseits wird nach (23) für unsern Fall:

$$G_1\,(D^2\Delta,\, -D^2 f) = (D^2\Delta)^3 - 2\,(D^2 f)^3\,.$$

Wegen $M = \varphi(c) \,.\, C = -8\,C$ folgt also vermöge $f=0$ aus (24): $C = -\frac{1}{4}$, und es wird:

$$M = -\tfrac{1}{4}\,\varphi(c)\,. \tag{25}$$

---

*) Diese Gleichung besteht übrigens auch noch, wenn c ein beliebiger Punkt von f ist. Dann liegt nämlich der Mittelpunkt des Büschels $\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0$ in dem Tangentialpunkte von c und die von dem Mittelpunkte ausgehenden Tangenten sind $D^2 f = 0$ und $G_1\,(D^2 f,\, -D^2\Delta) = 0$; vgl. p. 647. Es ist dann nur M in anderer Weise zu bestimmen.

Ist also c ein Wendepunkt von $f=0$, so besteht vermöge $f(c)=0$, $\Delta(c)=0$, $f(x)=0$ die Identität:

$$-\tfrac{3}{4}\varphi(c)\,.\,(Df)^2 = D^2f\,.\,G_1(D^2\Delta, -D^2f)\,. \tag{26}$$

Hiermit wäre der Nenner unseres Differentials in Function von $\varkappa = D^2\Delta$ und $\lambda = D^2f$ berechnet. Für Berechnung des Zählers beachten wir, dass

$$\varrho\, c_i = (\alpha a)_i\, \alpha_c{}^2 a_c{}^2\,, \tag{27}$$

weil c der Schnittpunkt von $a_c{}^2 a_x = 0$ und $\alpha_c{}^2\alpha_x = 0$ ist, also auch:

$$\begin{aligned}\varrho\,(c\,x\,dx) &= \alpha_c{}^2 a_c{}^2(\alpha_x a_{dx} - a_x\alpha_{dx})\\ &= D^2\Delta\,.\,d(D^2f) - D^2f\,.\,d(D^2\Delta)\\ &= \varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Die Bestimmung des Factors ϱ geschieht nun in ganz derselben Weise, wie die des entsprechenden Factors in den Gleichungen (11). Es sei c' ein beliebiger Punkt der Linie $D^2\Delta \equiv u_x = 0$; dann haben wir:

$$\sigma u_i \equiv \sigma\alpha_i\alpha_c{}^2 = (cc')_i\,.$$

Ferner folgt aus (27):

$$\varrho v_c = (\alpha a v)\,\alpha_c{}^2 a_c{}^2 = (a v u)\, a_c{}^2\,,$$

also für $v_i = a_i a_c a_{c'} = b_i b_c b_{c'}$:

$$\begin{aligned}\varrho\, b_c{}^2 b_{c'} &= (abu)\, a_c{}^2 b_c b_{c'} = \tfrac{1}{2}(abu)(a_c b_{c'} - b_c a_{c'})\, a_c b_c\\ &= \frac{\sigma}{2}(abu)^2 a_c b_c = \frac{\sigma}{2}(ab\alpha)(ab\beta)\, a_c b_c \alpha_c{}^2\beta_c{}^2\,.\end{aligned}$$

Andererseits haben wir wegen $a_c{}^3 = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma\varrho\,.\,v_c = \sigma(avu)\, a_c{}^2 &= (a_c v_{c'} - v_c a_{c'})\, a_c{}^2\\ &= -v_c\,.\,a_c{}^2 a_{c'} = -v_c\,.\,b_c{}^2 b_{c'}\,.\end{aligned}$$

Und durch Combination dieser Relationen folgt:

$$\varrho^2 = -\tfrac{1}{2}(ab\alpha)(ab\beta)\, a_c b_c \alpha_c{}^2\beta_c{}^2 = -\tfrac{1}{2}\varphi(c)\,.$$

Schliesslich geht also die Gleichung (28) über in:

$$-\tfrac{1}{2}\varphi(c)\,.\,(c\,x\,dx) = \varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa\,;$$

und so gewinnen wir in Folge von (26) *das Resultat:*

$$dV \equiv \frac{(c\,x\,dx)}{Df} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{\varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa}{\sqrt{\lambda(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3)}}\,,$$

oder endlich für $\varkappa = \mu$, $\lambda = 1$:

$$dV = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3 - \frac{1}{2}S\mu + \frac{1}{3}T}}\,;$$

und damit haben wir wieder die frühere Form (p. 649).

Die Herstellung dieser Normalform für dV kann noch in anderer, sehr eleganter Weise nach dem Vorgange von Hermite und Brioschi*) bewerkstelligt werden, wenn man eine höhere Substitution benutzt. Diese Transformation beruht auf der zwischen den Formen Ω, ψ, f, Δ bestehenden Identität, die früher von uns abgeleitet wurde (vgl. Gleichung (42), p. 640), nämlich:

$$24^2\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,\psi S_{\Delta,-f} + 2\,T_{\Delta,-f}.$$

Für $f = 0$ haben wir nun insbesondere (p. 561):

$$S_{\Delta,-f} = S\Delta^4, \quad T_{\Delta,-f} = T\Delta^6,$$

und somit wird:

$$(29) \qquad 24^2\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,S\psi\Delta^4 + 2\,T\Delta^6.$$

Ferner ist identisch:

$$\begin{aligned} \Omega u_c &\equiv (a\alpha\psi)\, a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5 \,.\, u_c \\ &\equiv \left\{(a\alpha u)\,\psi_c - (a\psi u)\,\alpha_c + (\alpha\psi u)\,a_c\right\}\, a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5; \end{aligned}$$

und hieraus folgt für $u_i = (x\,dx)_i$, wenn wir $a_x^3 = 0$, $a_x^2 a_{dx} = 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned} \Omega\,(c\,x\,dx) &= a_x^2 a_c\,(\alpha_x^3\psi_x^5\psi_{dx} - \psi_x^6\Delta_x^2\Delta_{dx}) \\ &= \tfrac{1}{3}\,a_x^2 a_c\,(\tfrac{1}{2}\Delta\,d\psi - \psi\,d\Delta)\,. \end{aligned}$$

Multipliciren wir also dV in Zähler und Nenner mit Ω, so wird wegen (29):

$$\begin{aligned} dV &\equiv \frac{(c\,x\,dx)}{a_x^2 a_c} = \frac{1}{6}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\,\psi\,d\Delta}{\Omega} \\ &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\,\psi\,d\Delta}{\sqrt{16\,\psi^3 - \tfrac{1}{2}\,S\Delta^4\psi + \tfrac{1}{12}\,T\Delta^6}}\,. \end{aligned}$$

Hierin endlich braucht man nur noch $4\psi = \varkappa$, $\Delta^2 = \lambda$ zu setzen, *um das Resultat zu erhalten:*

$$dV = \sqrt{\tfrac{8}{3}}\,\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}\,S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}\,T\lambda^3)}}\,.$$

Diese Darstellung ist jedoch von der Aronhold'schen dadurch unterschieden, dass jetzt allen *achtzehn* Schnittpunkten der Curve sechster Ordnung $\varkappa\Delta^2 - 4\,\psi\lambda = 0$ mit $f = 0$ derselbe Parameterwerth $\varkappa : \lambda$ entspricht, während früher nur je *zwei* beweglichen Schnittpunkten des Strahlbüschels $\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0$ der gleiche Parameterwerth zukam.

Ganz in derselben Weise lassen sich die zu den *hyperelliptischen Curven* gehörigen Integrale mittelst einer Quadratwurzel als Function eines Parameters darstellen, wenn man die Curve zuvor auf die Normalform transformirt hat; d. h. auf die Form (p. 719 f.):

---

*) Vgl. Crelle's Journal, Bd. 63, p. 30.

$$F(x, y) \equiv y^2 \varphi(x) - \psi(x) = 0.$$

In der That wird dann:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 y \varphi(x) = 2 \sqrt{\varphi(x) \cdot \psi(x)},$$

und also

$$(30) \qquad \frac{\Psi(x, y) \cdot dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\Psi\left(x, \sqrt{\frac{\psi}{\varphi}}\right) \cdot dx}{2 \sqrt{\varphi \cdot \psi}}.$$

Im Nenner tritt hier also die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke $(2p+2)^{\text{ten}}$ *Grades in* x *auf.* Durch das Verschwinden des letzteren sind die vom p-fachen Punkte an die C_{p+2} zu ziehenden Tangenten dargestellt. Letztere Bemerkung gilt auch, wenn man die C_{p+2} in der Form

$$F(x, y) \equiv y^2 \varphi_p(x) + 2 y \varphi_{p+1}(x) + \varphi_{p+2}(x) = 0$$

gegeben annimmt. Die Polare des unendlich fernen Punktes der Y-Axe:

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} \equiv y \varphi_p(x) + \varphi_{p+1}(x) = 0$$

nämlich schneidet die C_{p+2} in den $2p+2$ Berührungspunkten der vom p-fachen Punkte ausgehenden Tangenten, deren Gleichung durch $X_{2p+2}(x) = 0$ gegeben sei, und hat im p-fachen Punkte von F ebenfalls einen p-fachen Punkt, dessen Zweige die der Grundcurve berühren, so dass in ihm $p(p+1)$ Schnittpunkte liegen. Die Schnittpunkte der Curve $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$ mit $F = 0$ sind daher dieselben, wie die der Curve $X_{2p+2}(x) = 0$ mit $F = 0$; d. i. man kann setzen:

$$(31) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = C \cdot X_{2p+2}(x) + A \cdot f,$$

wo C eine Constante ist, eine Relation, welche der Gleichung (19) analog und in gleicher Weise zu verwerthen ist. —

Wir kehren zurück zur näheren Betrachtung unseres allgemeinen Differentials

$$dV = \frac{\Psi(c\,x\,dx)}{a_x^{\,n-1} a_c},$$

in dem Ψ eine beliebige algebraische Function der Ordnung $n-3$ in den x_i bedeutet. Durch nähere Festsetzung über die Natur dieser Function wollen wir zunächst gewisse *Normalformen für die später allein zu betrachtenden Differentialausdrücke* herstellen. Dabei werden wir je nach dem Verhalten der Function Ψ in einfachen oder viel-

fachen Punkten von $f=0$ verschiedene Fälle nach einander zu behandeln haben; in allen diesen Fällen werden wir zeigen, dass es vor Allem nothwendig ist, solche Differentiale (und deren Integrale) in's Auge zu fassen, in denen Ψ eine ganze Function ist, oder bei denen im Nenner von Ψ nur die Potenz einer linearen Function der x_i auftritt. Weiterhin soll uns dann noch das Verhalten der gewonnenen Hauptformen in den Doppelpunkten von $f=0$ beschäftigen.

Es sei nun:

$$\Psi = \frac{M}{N},$$

wo der Nenner N eine ganze Function der m^{ten} Ordnung bedeuten möge, und also der Zähler, welcher auch eine ganze Function sei, bis zur $(m+n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigt. Die Curven $f=0$, $N=0$ schneiden sich in mn Punkten, deren Gesammtheit durch eine Gleichung

$$u_\chi^{mn} = 0$$

dargestellt werden kann.*) Die Coordinaten dieser Schnittpunkte bezeichnen wir bez. mit

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)}, \ldots x^{(mn)},$$

wo man sich für $x^{(i)}$ immer $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ geschrieben denken mag. Diese Punkte verbinden wir mit einem beliebigen festen Punkte ξ. Die Gesammtheit der mn Verbindungslinien ist dann durch $(\chi x \xi)^{mn}=0$ dargestellt; und wir können setzen:

$$(\chi x \xi)^{mn} = \prod_{i=1}^{i=mn} (x^{(i)} x \xi). \tag{32}$$

Wenn wir ferner, wie es zunächst geschehen soll, voraussetzen, dass *die Punkte $x^{(i)}$ sämmtlich von einander verschieden sind* (also auch nicht in vielfachen Punkten von f liegen), so muss sich der Ausdruck (32) jedenfalls in der Form

$$(\chi x \xi)^{mn} = \mathsf{A} f + \mathsf{B} N \tag{33}$$

darstellen lassen, wo $\mathsf{B}=0$ eine Curve der Ordnung $m(n-1)$ ist, welche durch alle nicht auf $N=0$ liegenden Schnittpunkte der mn Strahlen mit $f=0$ geht. In Folge dessen wird für $f=0$:

---

*) In Betreff einer allgemeinen Methode zur Herstellung dieser Gleichung in symbolischer Form vgl. p. 281. Nimmt man insbesondere $\xi_1=1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$, so wird die Gleichung des Strahlbüschels durch Elimination von x_1 aus $f=0$ und $N=0$ erhalten. Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 5 ff. — Alsdann hängt $(\chi x \xi)^{mn}$ unmittelbar nur von der einen binären Veränderlichen $x_2 : x_3$ ab; vgl. die Fortsetzung des Textes.

$$\Psi = \frac{M \cdot B}{(\chi x \xi)^{mn}},$$

wo nun wegen (32) im Nenner ein Product von lauter linearen Functionen steht. Die durch Nullsetzen der letzteren dargestellten Linien gehen aber alle durch denselben Punkt ξ, so dass der Nenner in Wahrheit nur von einer binären Veränderlichen abhängt, d. h. von dem Parameter des durch ξ gehenden Strahlbüschels. Man kann daher die Function Ψ nach den Gesetzen der binären Partialbruchzerlegung als Summe von einzelnen Gliedern darstellen, deren jedes nur eine lineare Function im Nenner hat; womit die oben behauptete Zurückführung des Differentials dJ' auf solche Normaldifferentiale geleistet wäre.

Dasselbe Resultat kann man aber auch leicht erreichen, ohne die binäre Veränderliche des Strahlbüschels explicite einzuführen; und wir gehen darauf hier um so mehr ein, als wir später auf analogem Wege auch complicirtere Reihenentwicklungen erledigen werden, die sich sonst durch wiederholte Partialbruchzerlegungen ergeben würden. Gleichzeitig werden wir in der Normirung der Differentiale noch einen Schritt weiter gehen, indem wir den Zähler so einrichten, dass nur zwei von den Verschwindungspunkten der linearen Function des Nenners zu Unendlichkeitspunkten des Integrals Veranlassung geben.

Zu dem Zwecke ist es nützlich, *den Punkt* ξ *mit einem der Punkte* $x^{(i)}$ — *sagen wir* $x^{(mn)}$ — *zusammenfallen zu lassen*, wie es im Folgenden geschehen soll. Ist dann die Gleichung der übrigen $mn-1$ Punkte $x^{(i)}$ durch $u_\psi^{mn-1} = 0$ gegeben, so können wir setzen:

$$(\chi x \xi)^{mn} = (\psi x \xi)^{mn-1} \cdot a_\xi^{n-1} a_x,$$

und an Stelle von (32) und (33) treten die Gleichungen:

$$(34) \quad (\psi x \xi)^{mn-1} = \prod_{i=1}^{i=mn-1} (x^{(i)} x \xi), \quad (\psi x \xi)^{mn-1} = Af + BN,$$

wo nun $B = 0$ eine Curve der Ordnung $mn - m - 1$ ist, welche durch alle nicht auf $N = 0$ gelegenen Schnittpunkte von $f = 0$ mit den $mn - 1$ von ξ ausgehenden Strahlen geht, und *von deren Schnittpunkten mit* f $mn - 2$ *in* ξ *selbst liegen*. Es wird dann auch:

$$\Psi = \frac{MB}{(\chi x \xi)^{mn}} = \frac{MB}{(\psi x \xi)^{mn-1}}.$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise setzen wir nun:

$$mn - 1 = \mu, \quad B = B_x^{\mu - m}, \quad M = M_x^{m+n-3}.$$

Wir legen sodann eine Curve C der Ordnung $\mu + n - 3 : C_x^{\mu+n-3} = 0$ durch alle $n(\mu + n - 3)$ Schnittpunkte von $M = 0$ und $B = 0$ mit $f = 0$, welche ausserdem noch zu den Schnittpunkten $x^{(i)}$ von $N = 0$

mit $f=0$ in besonderer Beziehung steht. Jedenfalls haben wir zunächst:

(35) $$C_x^{\mu+n-3} = M_x^{m+n-3} B_x^{\mu-m} + D \cdot f.$$

Die Curve C bestimmen wir nun näher in folgender Weise. Die Verbindungslinie eines Schnittpunktes $x^{(k)}$ mit dem Punkte ξ schneidet die Grundcurve in $n-2$ weiteren Punkten, die mit $x^{(k,1)}, x^{(k,2)}, \ldots x^{(k,n-2)}$ bezeichnet seien; durch alle diese $n-2$ Punkte soll die $(\mu-1)^{\text{te}}$ Polare des Punktes $x^{(k)}$ in Bezug auf $C=0$ hindurchgehen*), so dass wir die Gleichungen haben:

(36) $$C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,1)}}^{n-2} = 0, \quad C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,2)}}^{n-2} = 0, \ldots C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,n-2)}}^{n-2} = 0$$

für alle Werthe von $k=1$ bis $k=\mu$. Dies gibt $\mu(n-2)$ lineare Gleichungen für die Coëfficienten von C. Von letzteren sind wegen (35) nur noch $\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+1$ willkürlich, nämlich die Coëfficienten des Ausdrucks D; und da die Bedingung

$$\tfrac{1}{2}\mu(\mu-3)+1 \geqq \mu(n-2)$$

für $m>1$ immer erfüllt ist, so ist es in der That möglich, die Curve C den Gleichungen (35) und (36) gemäss zu legen. Auf den Fall $m=1$ kommen wir zum Schlusse noch zurück.

Mit Hülfe der Curve C bilden wir jetzt den folgenden Ausdruck $(\mu+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$S = \mu M_x^{m+n-3} B_x^{\mu-m} \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi)$$
$$- C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\mu} \left\{ C_{x^{(k)}}^{\mu-1} (x^{(k)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k (x^{(i)} x \xi) (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi) \right\}.$$

Hier sind η_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene, und der Index k an dem zweiten Productzeichen soll andeuten, dass das betreffende in $C_{x^{(k)}}^{\mu-1}(x^{(k)}\eta\xi)$ multiplicirte (d. i. im k^{ten} Gliede der Summe auftretende) Product aus nur $\mu-1$ Factoren zu bilden ist, indem der Factor für $i=k$ ausfallen soll; in dem ersten Gliede der Differenz S steht dagegen ein Product aus μ Factoren. *Diese Function S verschwindet zunächst für alle Schnittpunkte von B und f.* In der That fällt für $x = x^{(r,s)}$ das erste Glied von S wegen $B=0$ fort, und in der Summe verschwinden alle Glieder, welche den Factor $(x^{(r)} x^{(r,s)} \xi)$ enthalten, da ja $x^{(r,s)}$ eben einen Punkt der Verbindungs-

*) Da diese Polare von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, kann man diese Bedingung noch gerade erfüllen; mehr als $n-2$ Punkte der Geraden würde die Polare nicht enthalten können, ohne in die Gerade selbst und in eine Curve C_{n-3} zu zerfallen.

linie von $x^{(r)}$ mit ξ bezeichnet. Es bleibt so nur das dem Index $k = r$ entsprechende Glied der Summe; dieses fällt aber wegen (36) ebenfalls fort. *Ferner verschwindet S für alle μ Schnittpunkte von N mit f.* Für $x = x^{(r)}$ nämlich fallen wieder alle Glieder der in S auftretenden Summe, welche einen Factor $(x^{(r)} x^{(r)} \xi)$ enthalten würden, fort; und es bleibt nur das dem Index $k = r$ entsprechende Glied:

$$- C_{x^{(r)}}^{\mu + n - 3} (x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(i)} x^{(r)} \xi) (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) .$$

Nun folgt aber aus (35):

$$C_{x^{(r)}}^{\mu + n - 3} = M_{x^{(r)}}^{m + n - 3} \,.\, B_{x^{(r)}}^{\mu - m} ,$$

und aus der ersten Gleichung (34) durch Polarenbildung, da die übrigen Terme der links zunächst auftretenden Summe für $x = x^{(r)}$ Null werden:

$$(x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(i)} x^{(r)} \xi) = \mu \,.\, (\psi x^{(r)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) .$$

Jenes aus der in S stehenden Summe übrig bleibende Glied wird daher gleich

$$- \mu M_{x^{(r)}}^{m + n - 3} B_{x^{(r)}}^{\mu - n} \prod_{i=1}^{i=\mu} (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) ,$$

d. h. bis auf das Vorzeichen gleich dem ersten Gliede von S für $x = x^{(r)}$; S selbst ist also Null, q. e. d. Die Gleichung $S = 0$ stellt sonach eine Curve dar, welche durch alle einfachen Schnittpunkte von $f = 0$ und $(\psi x \xi)^\mu = 0$ hindurchgeht. In ξ selbst jedoch verschwindet jedes Glied von S (nach unserer Bestimmung von $B = 0$), und folglich S selbst, $(\mu - 1)$-fach. Da aber die Curve C (für $m > 1$) durch die Bedingungen (36) noch nicht vollständig bestimmt ist, so können wir über C noch so verfügen, dass ein μ^{ter} Schnittpunkt von $S = 0$ mit $f = 0$ nach ξ fällt. *Deshalb kann man setzen:*

$$S = P \,.\, f + R \,.\, (\psi x \xi)^\mu , \tag{37}$$

wo $R = R_x^{n-3}$ eine homogene ganze Function $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung in den x_i bedeutet. Dividiren wir endlich auf beiden Seiten von (37) mit dem Producte

$$(\psi x \xi)^\mu \,.\, \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) = (\psi x \xi)^\mu \,.\, \Pi ,$$

so erhalten wir wegen (32) und (34) unter der Bedingung $f = 0$ für Ψ folgende Partialbruchzerlegung:

$$(38)\qquad \Psi \equiv \frac{M}{N} = \frac{MB}{(\psi x \xi)^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\mu}\,\frac{R_x^{n-3}}{\Pi} + \frac{C_x^{n-2}}{\mu}\sum_{k=1}^{k=\mu}\frac{C_{x^{(k)}}^{\mu-1}\cdot(x^{(k)}\eta\xi)}{(\psi x^{(k)}\xi)^{\mu-1}\,(\psi\eta\xi)\cdot(x^{(k)}x\xi)}\,.$$

Jede algebraische Function $(n-3)^{ter}$ Ordnung, die nur für einzelne getrennte Punkte von f unendlich wird, können wir also mit Hülfe von $f=0$ zerlegen in eine ganze Function $(n-3)^{ter}$ Ordnung und in eine Summe von Functionen, deren Nenner linear sind, und die nur in je zwei von den n Verschwindungspunkten des letzteren unendlich werden, indem für die übrigen $n-2$ wegen (36) *auch der Zähler Null wird.**)

Es bleibt uns jetzt noch der Fall $m=1$ zu erledigen, wo also im Nenner von Ψ eine lineare Function $u=u_x$, im Zähler eine Function M von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung steht, so dass $\Psi = \frac{M}{u}$. Die Schnittpunkte von u_x mit f mögen durch $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}$ bezeichnet werden, und es seien $Q_2=0$, $Q_3=0$, $\ldots$ $Q_n=0$ specielle Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche alle Schnittpunkte der Geraden mit $f=0$ enthalten, ausgenommen bez. für Q_2 die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, für Q_3 die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(3)}$, ... für Q_n die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(n)}$. Dann kann man in der Gleichung:**)

$$M - k_2 Q_2 - k_3 Q_3 - \ldots - k_n Q_n = 0$$

die $n-1$ Constanten k_i so bestimmen, dass die hierdurch dargestellte Curve durch $n-1$ Schnittpunkte der Geraden mit $f=0$ geht und also diese Gerade ganz enthält. Man hat nämlich, wenn man durch obere Indices andeutet, dass die Coordinaten des betreffenden Schnittpunktes in die Functionen M und Q_i eingesetzt werden sollen, nur die Gleichungen:

$$M^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0\,,\quad M^{(3)} - k_3 Q_3^{(3)} = 0\,, \ldots\, M^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0$$

zu erfüllen, damit die Punkte $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots x^{(n)}$ auf obiger Curve liegen. Bestimmt man hieraus die k_i, so zerfällt jene Curve in eine Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung $R=0$ und in die Gerade $u_x=0$, so dass identisch:

---

*) Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung ergibt sich übrigens unmittelbar aus den Riemann'schen Anschauungen; denn eine algebraische Function ist in der zu $f=0$ gehörenden Riemann'schen Fläche (bis auf hinzutretende Constante) durch ihre Null- und Unendlichkeits-Punkte völlig definirt; beide Punktsysteme stimmen aber für die beiden Seiten von (38) überein. Für den Fall, dass mehrere der Schnittpunkte von f und N auf einer durch ξ gehenden Geraden liegen, treten im Texte einige Modificationen ein, die aber das Resultat nicht beeinflussen.

**) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 18.

$$M = k_2 Q_2 + k_3 Q_3 + \dots + k_n Q_n + u_x \,.\, R;$$

und somit wird:

$$\Psi = \frac{M}{u_x} = R + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{k_i Q_i}{u_x},$$

wo wieder jedes Glied der Summe nur in zwei Punkten unendlich wird. *Auch für $m = 1$ bleibt also obiges Resultat gültig.*

Wir erwähnen noch die Modificationen, welche vorstehende Ueberlegungen erleiden, wenn von den mn Schnittpunkten mehrere zusammenfallen (nur nicht in singuläre Punkte von f). Es mögen von diesen Punkten $x^{(i)}$ nur noch ν getrennt liegen, und jeder von ihnen bez. r_i-fach zählen, so dass:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_\nu = mn.$$

Den Punkt ξ lassen wir wieder mit einem dieser Punkte, etwa $x^{(\nu)}$, zusammenfallen und setzen zur Abkürzung:

$$\lambda = mn - r_\nu,$$

wo r_ν so gewählt sei, dass $mn - 2r_\nu \geqq 0$.*) Die Gleichung der Verbindungslinien von ξ mit den λ übrigen Punkten sei durch $(\psi x \xi)^\lambda = 0$ gegeben, so dass an Stelle der zweiten Gleichung (34) die folgende tritt:

$$(\psi x \xi)^\lambda = Af + B_x^{\lambda - m} N,$$

wo nun $\lambda - r_\nu$ Schnittpunkte von $B = 0$ mit $f = 0$ in ξ vereinigt liegen. Ferner bestimmen wir eine Curve $C = 0$ von der Ordnung $\lambda + n - 3$ entsprechend den Gleichungen (35) und (36), so dass die k^{te} Polare von $x^{(k)}$ in Bezug auf jeden Punkt $x^{(k,i)}$ je r_k-fach verschwindet.**) An Stelle von S tritt dann der Ausdruck:

$$(39)\quad S' = M_x^{m+n-3} B_x^{\lambda - m} \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (\psi x^{(i)} \xi)^{\lambda - r_i} (\psi \eta \xi)^{r_i}$$
$$- C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\nu-1} \Big\{ Z_k C_{x^{(k)}}^{\lambda - 1} (x^{(k)} \eta \xi)(x \eta \xi)^{r_k - 1} \prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_k (x^{(i)} x \xi)^{r_i} (\psi x^{(i)} \xi)^{\lambda - r_i} (\psi \eta \xi)^{r_i} \Big\},$$

wo:
$$\frac{1}{Z_k} = \binom{\lambda}{r_k} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda - r_k + 1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,.\,r_k}.$$

Aus der an Stelle der ersten Gleichung (34) tretenden Gleichung:

---

*) Unter den ν Punkten wird im Allgemeinen ein solcher enthalten sein, denn man kann über die Zahlen r nicht willkürlich verfügen, da z. B. für $m > n - 3$ $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ durch die übrigen bestimmt sind.

**) Die Bedingung für die Möglichkeit dieser Bestimmung ist hier (vgl. p. 780):

$$\lambda(\lambda - 3) + 2 \geqq 2\lambda(n-2).$$

Für $r_\nu = 1$, $m > 1$ ist dieselbe z. B. immer erfüllt. Für Ausnahmefälle muss man wieder besondere Betrachtungen anstellen, wie im vorigen Falle.

$$(40) \qquad (\psi x \xi)^{\lambda} = \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x \xi)^{r_i}$$

folgt nun durch Polarenbildung:

$$\binom{\lambda}{r_k} (\psi x^{(k)} \xi)^{\lambda - r_k} (\psi \eta \xi)^{r_k} = (x^{(k)} \eta \xi)^{r_k} \prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_k (x^{(i)} x^{(k)} \xi)^{r_i};$$

und in Rücksicht hierauf und auf (35) erkennt man, dass S' in jedem der Punkte $x^{(i)}$ einfach verschwindet, nur in ξ selbst von der Ordnung $\lambda - r_\nu$ (wegen der Eigenschaften von B); durch passende Verfügung über die Constanten von C wird man es indess erreichen können, dass noch ein $(\lambda - r_\nu + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt von $S' = 0$ mit $f = 0$ nach ξ fällt. Ferner verschwindet S' r_k-fach in jedem r_k-fachen Schnittpunkte $x^{(k,i)}$ von B mit f. Versteht man also unter $R = 0$ eine Curve der Ordnung $\lambda + n - \nu - 2$, welche jeden r_k-fach zählenden Punkt $x^{(k,i)}$ nur $(r_k - 1)$-fach, die Punkte $x^{(k)}$ dagegen nicht enthält, und welche in ξ Null von der Ordnung $\lambda - r_\nu - \nu + 2$ wird, so hat man analog zu Gleichung (37):

$$(41) \qquad S' = Pf + R \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x \xi).$$

Trägt man dies in (39) ein, dividirt auf beiden Seiten mit $(\psi x \xi)^{\lambda}$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\mathsf{N} = \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x \xi)^{r_i - 1},$$

so wird wegen (34) und (40) vermöge $f = 0$:

$$(42) \quad \Psi = \frac{R}{\mathsf{N}} + C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\nu-1} \frac{1}{\binom{\mu}{r_k}} \left\{ \frac{C_y^{\lambda-1} (y \eta \xi)(x \eta \xi)^{r_k - 1}}{(\psi y \xi)^{\lambda - r_k} (\psi \eta \xi)^{r_k} (y x \xi)^{r_k}} \right\}_{y = x^{(k)}}.$$

Wegen der über R gemachten Festsetzungen wird der Quotient $R : \mathsf{N}$ nur in den Schnittpunkten von N mit f unendlich, also in denselben Punkten wie Ψ, in jedem von ihnen (auch in $\xi = x^{(\nu)}$) aber von niedrigerer Ordnung, und zwar von der Ordnung $r_k - 1$ in $x^{(k)}$. Die Function Ψ ist also zurückgeführt auf eine Function, die in denselben Punkten von je um eine Einheit geringerer Ordnung unendlich wird und also in gleicher Weise wie Ψ weiter behandelt werden kann, um auf Functionen der Art zu führen, wie sie in der Summe (42) auftreten, in deren Nenner also nur Potenzen linearer Functionen vorkommen. Für letztere ist aber:

$$-\frac{(x \eta \xi)^{r_k - 1}}{(y x \xi)^{r_k}} = \frac{1}{r_k - 1} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial \frac{(x \eta \xi)^{r_k - 2}}{(y x \xi)^{r_k - 1}}}{\partial y_i} \eta_i .$$

Die Glieder der Summe (42) entstehen also bis auf constante Factoren aus den Gliedern der in (38) auftretenden Summe durch wiederholte Anwendung des Polarisations-Processes $\Sigma \frac{\partial}{\partial y_i} \eta_i$.

Schliesslich wollen wir noch die Annahme hinzufügen, dass die Curve $N = 0$ einen q-fachen Punkt in einem Doppelpunkte P von f habe. In letzterem liegen dann im Allgemeinen $2q$ Schnittpunkte beider Curven; die Gleichung $(\chi x \xi)^{mn} = 0$ enthält also einen $2q$-fachen Strahl. Man hat daher, wie in dem zuletzt besprochenen Falle, zur Aufstellung der Partialbruchzerlegung eine Function S' zu benutzen, wie sie in Gleichung (39) gebildet wurde. Die Curve $S' = 0$ geht dann einfach durch den Doppelpunkt, ebenso wie die aus $mn - 2q + 1$ Strahlen bestehende Curve $\Pi(x^{(i)} x \xi) = 0$. In Folge dessen besteht wieder die Gleichung (41) und auch die aus ihr und (39) hervorgehende Gleichung (42). In letzterer erscheint dann als erstes Glied auf der rechten Seite eine Function, die im Doppelpunkte P nur $(q-1)$-fach verschwindet. Das Resultat bleibt also dasselbe. In ähnlicher Weise endlich wird man auch beim Auftreten vielfacher Punkte verfahren müssen, so dass *jede algebraische Function* Ψ *vermöge* $f = 0$ *in eine Summe der Form* (42) *entwickelt werden kann.*

Verwerthen wir diese Betrachtungen über die Function Ψ nun für unser Differential dV, so zeigt sich, dass *jedes Differential der von uns betrachteten Art auf Aggregate von Differentialen der folgenden Formen zurückgeführt werden kann:*

1) *Differentiale der Form:* $\dfrac{R_x^{n-3}(c x dx)}{a_x^{n-1} a_c}$.

2) *Differentiale der Form:* $\dfrac{Q_x^{n-2}(c x dx)}{u_x \cdot a_x^{n-1} a_c}$, *wo die Curve* $Q_x^{n-2} = 0$ *durch* $n-2$ *der* n *Schnittpunkte von* $u_x = 0$ *mit* $f = 0$ *hindurchgeht.*

3) *Differentiale, welche aus den letztgenannten durch den (eventuell wiederholt anzuwendenden) Process* $\Sigma \frac{\partial}{\partial y_i}$ *abgeleitet werden, wo* y_i *die Coordinaten eines der Schnittpunkte von* $u_x = 0$ *mit* $f = 0$ *bedeuten.* — Dieselben kann man dann weiter als Summen von Differentialen darstellen, von deren Integralen jedes entweder in zwei Punkten logarithmisch oder in einem Punket (im Allgemeinen von höherer Ordnung) algebraisch unendlich wird, in analoger Weise wie dies unten für den Fall geschieht, wo im Nenner das *Quadrat* einer linearen Function steht.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf solche Unendlichkeitspunkte der in V unter dem Integralzeichen stehenden Function

$\left(\text{d. i. der Differentialquotienten } \frac{dV}{dx_i}\right)$, welche durch die Natur der Function Ψ bedingt waren. Die Differentialquotienten $\frac{dV}{dx_i}$ können aber auch unendlich gross werden, wenn der im Nenner stehende Ausdruck $Df \equiv a_x^{n-1} a_c$ verschwindet. Letzteres tritt zunächst ein, wenn x ein Berührungspunkt der von c aus an die Curve zu legenden Tangente ist (vgl. p. 309). Dann liegt der Punkt $x + dx$ mit c und x auf einer Geraden, und also wird der Ausdruck $(c x d x)$, welcher im Allgemeinen von der ersten Ordnung unendlich klein ist, unendlich klein von der zweiten Ordnung; der Quotient $(c x d x) : a_x^{n-1} a_c$ bleibt folglich unendlich klein von der ersten Ordnung: *Für einen Berührungspunkt der von c an die Curve zu legenden Tangenten*) wird daher das Integral V nicht unendlich;* in der That ist ja auch der Werth desselben von dem Punkte c völlig unabhängig (p. 771).

Der Ausdruck Df verschwindet ferner — und zwar unabhängig von den Grössen c_i — sobald x ein vielfacher Punkt von f ist; doch wollen wir hier nur das Auftreten von Doppel- und Rückkehr-Punkten der Grundcurve voraussetzen. In diesem Falle bleibt die Determinante $(c x d x)$, in welcher sich die dx_i aus der quadratischen Gleichung $a_x^{n-2} a_{dx}^2 = 0$ bestimmen, unendlich klein von der ersten Ordnung, und die Differentialquotienten von V nach den x_i werden unendlich. Um die Art des Unendlichwerdens genauer zu bestimmen, gehen wir, indem wir dV in der unter 2) genannten Form annehmen, von der Gleichung aus:

$$(43) \qquad a_x^{n-1} a_c \,.\, u_x \,.\, dV = Q_x^{n-2} \,.\, (c x d x)\,,$$

Unter ξ verstehen wir einen Punkt der einen, unter η einen Punkt der andern Tangente des Doppelpunktes y. Aus (43) erhalten wir dann für einen auf dem einen Zweige zu y benachbarten Punkt den Werth von dV, wenn wir setzen $x_i = y_i + \varepsilon \xi_i$, $dx_i = \varepsilon d\xi_i$, wo ε eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bedeutet. Nun wird in erster Annäherung:

$$(n-1)\, u_y \,.\, a_y^{n-2} a_\xi a_c \,.\, dV = Q_y^{n-2}\, (c y d\xi)\,.$$

*) Legt man (bei rechtwinkligen Coordinaten) den Punkt c in den unendlich fernen Punkt der Y-Axe, was projectivisch irrelevant, so sind diese Berührungspunkte die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche. In einem solchen wird dx auch unendlich klein von der zweiten Ordnung; ist also für ihn $x = a$, so muss dV in dem Punkte $x = a$ sich verhalten wie $\frac{dx}{\sqrt{x-a}}$, was man leicht direct bestätigt; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 11, R. A. F. §. 7 u. 9. In der That ist ja $\sqrt{x-a}$ in dem Verzweigungspunkte eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung; und also bleibt der Quotient dx dividirt durch $\sqrt{x-a}$ in $x = a$ unendlich klein von der ersten Ordnung, wie es sich im Texte ergab.

Für c wählen wir nun den Punkt η; dann wird, da die Tangente der ersten Polare von η im Doppelpunkte y mit der Linie $(\eta y x) = 0$ zusammenfällt, wenn C eine Constante bedeutet:

$$a_y^{n-2} a_\xi a_\eta = C \,.\, (\eta y \xi),$$

und also:

$$(44) \qquad d V = \frac{Q_y^{n-2}}{C(n-1) u_y} \cdot \frac{(\eta y d \xi)}{(\eta y \xi)} = C' \,.\, d\left[\log (\eta y \xi)\right],$$

wo C' eine neue Constante ist. *Das Integral V wird sonach in einem Doppelpunkte y von f logarithmisch unendlich*, und zwar wie $+\log(\eta y \xi)$ in der dem Punkte ξ entsprechenden, wie $-\log(\eta y \xi)$ in der dem Punkte η entsprechenden Fortschreitungsrichtung. Eine Ausnahme tritt ein, wenn auch die Curve $Q = 0$ durch y geht, indem dann das Integral endlich bleibt.

Die vorstehende Betrachtung gibt kein Resultat, wenn der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, indem dann die Punkte η und ξ zusammenfallen. Um den Werth des Integrals in der Nähe des Rückkehrpunktes zu finden, müssen wir daher noch Glieder von zweiter Ordnung der Kleinheit berücksichtigen, was mittelst Einführung neuer Veränderlichen r, s, t für die Umgebung des Punktes y in folgender Weise passend geschieht. Wir setzen:

$$(45) \qquad x_i = r y_i + s \xi_i + t \zeta_i .$$

Um die Gleichung der Curve $f = 0$ in den Veränderlichen r, s, t in möglichst einfacher Gestalt zu erhalten, legen wir ζ in den Wendepunkt der $(n-3)^{\text{ten}}$ Polare von y, d. h. der Curve dritter Ordnung $a_y^{n-3} a_x^3 = 0$, und ξ in den Schnittpunkt der Wendetangente von ζ mit der Rückkehrtangente von y, so dass die Gleichungen bestehen:

$$a_y^{n-3} a_\zeta^3 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\xi^2 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\zeta a_\xi = 0,$$
$$a_y^{n-3} a_\zeta^2 a_\xi = 0, \quad a_y^{n-3} a_\xi^2 a_\zeta = 0 .$$

Für einen Punkt in der Nähe von y (d. i. für unendlich kleine Werthe von s und t) wird daher:

$$f(x) \equiv a_x^n = \tfrac{1}{2} n (n-1) r^{n-3} \left\{ r t^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + \tfrac{1}{3}(n-2) s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 \right\} + \ldots,$$

und somit geht die Gleichung $f = 0$ über in:

$$(46) \qquad 3 r t^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + (n-2) s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 = 0.^{*})$$

Lassen wir ferner c mit ζ zusammenfallen, so ergibt sich:

$$(47) \qquad Df \equiv a_x^{n-1} a_\zeta = (n-1) r^{n-2} \,.\, a_y^{n-2} a_\zeta^2 \,.\, t,$$

oder wegen (46):

---

*) Es wird in der Nähe von y also t^2 mit s^3 vergleichbar, was mit Früherem übereinstimmt, vgl. p. 329 und 521.

$$Df = (n-1)r^{n-3}\sqrt{s^3 r}\sqrt{-\tfrac{1}{3}(n-2)\,a_y^{n-2}a_\zeta^2\,.\,a_y^{n-3}a_\xi^3}\,.$$

Für den Zähler von dV endlich findet man:

$$(48)\qquad (\zeta x\,dx) = (\zeta y\xi)\,(r\,ds - s\,dr)\,.$$

Zur Berechnung von dV müssen wir noch die Function $\frac{Q}{u_x}$ nach Potenzen von s und t entwickeln. Es wird in Folge der Substitution (45) in erster Annäherung:

$$Q_x^{n-2} = r^{n-2}Q_y^{n-2} + (n-2)r^{n-3}Q_y^{n-3}(s\,Q_\xi + t\,Q_\zeta) + \ldots$$

$$\frac{1}{u_x} = \frac{1}{r u_y + s u_\xi + t u_\zeta} = \frac{1}{r u_y} - \frac{s u_\xi + t u_\zeta}{r^2 u_y^2} + \ldots$$

und also:

$$\frac{Q_x^{n-2}}{u_x} = r^{n-3}\frac{Q_y^{n-2}}{u_y} - \frac{r^{n-4}}{u_y^2}\left\{Q_y^{n-2}(s u_\xi + t u_\zeta) - Q_y^{n-3}(n-2)(s\,Q_\xi + t\,Q_\zeta)u_y\right\} + \ldots,$$

und somit in Rücksicht auf (47) durch Einsetzen der gefundenen Werthe, wenn man $\frac{r}{s} = \mu$ setzt und die Grösse t vermöge (46) durch μ ausdrückt:

$$(n-1)\,dV = \frac{(\zeta y\xi)\,Q_y^{n-3}}{\sqrt{a_y^{n-2}a_\zeta^2\,.\,a_y^{n-3}a_\xi^3}}\sqrt{\frac{-3}{n-2}}\left(\frac{Q_y}{u_y}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3}} + \frac{(n-2)\,Q_\xi u_y - Q_y u_\xi}{u_y^2}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}\right)$$
$$+ \frac{(\zeta y\xi)}{a_y^{n-2}a_\zeta^2\,.\,u_y^2}\left(Q_y^{n-2}u_\zeta - (n-2)\,Q_y^{n-3}Q_\zeta u_y\right)d\mu + \ldots$$

Durch Integration ergibt sich hieraus endlich, wenn A, B, C Constante bedeuten, deren Werthe aus dem für dV gefundenen Ausdrucke leicht zu entnehmen sind*):

$$V = \frac{A}{\sqrt{\mu}} + B\sqrt{\mu} + C\mu + \ldots$$

oder da nach (45): $\mu = \frac{s}{r} = \frac{(yx\xi)}{(x\xi\zeta)}$

$$(49)\qquad V = A\sqrt{\frac{(x\xi\zeta)}{(yx\zeta)}} + B\sqrt{\frac{(yx\zeta)}{(x\xi\zeta)}} + C\sqrt{\frac{(yx\xi)}{(x\xi\zeta)}} + \ldots$$

Dies ist der Werth von V in der Nähe des Rückkehrpunktes y:

Das Integral V wird nach (49) *in einem Rückkehrpunkte algebraisch unendlich von der ersten Ordnung.***)

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 13.

**) Nicht von der Ordnung $\frac{1}{2}$, denn der Rückkehrpunkt ist ein Verzweigungspunkt der zugehörigen Riemann'schen Fläche, und in einem solchen ist, wenn in ihm $x = a$, $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung; vgl. die Anmerkung auf p. 786.

In ähnlicher Weise muss man nun auch ein Integral behandeln, welches in einem vielfachen Punkte von f unendlich wird. Am einfachsten geschieht dies indess, wenn man sich den vielfachen Punkt zuvor in bekannter Weise (p. 491 ff.) durch eindeutige Transformation aufgelöst denkt, denn bei einer solchen Transformation ändert das Differential seinen Charakter nicht, was man in analoger Weise beweist, wie dies weiterhin für Differentiale dritter Gattung geschieht. Das Differential erscheint dann als Combination der oben unter 2) und 3) genannten Differentiale (p. 785).

VII. Die Normalintegrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Die Integrale der auf p. 785 unter 1) und 2) genannten Differentiale sollen jetzt hinsichtlich ihrer Eigenschaften genauer untersucht werden.

Zunächst ist klar, dass es Integrale geben kann, welche für keinen Punkt der Curve unendlich gross werden, deren Differentiale also in allen Punkten der Curve unendlich klein von der ersten Ordnung bleiben: es sind dies offenbar die Differentiale der Form:

$$\frac{R_x^{n-3}(cx\,dx)}{a_x^{n-1}a_c},$$

wenn man die Curve R so bestimmt, dass sie in allen Punkten von f in ebenso hoher Ordnung Null wird, wie der Nenner, ausgenommen die Berührungspunkte der von c an die Curve zu legenden eigentlichen Tangenten, für welche auch die Determinante $(cx\,dx)$ Null wird (p. 786). Dazu aber ist nur nöthig, dass wir für $R_x^{n-3} = 0$ eine zu f adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung wählen, wie aus der für eine solche gegebenen Definition unmittelbar hervorgeht (p. 678): In der That hat sie ja in jedem singulären Punkte von f ebenso viele Punkte mit f gemein, wie die Polare $a_x^{n-1}a_c$, wenn man von der Zahl der letzteren die der etwa in dem vielfachen Punkte liegenden Verzweigungspunkte (p. 494) abzieht. Für die letzteren aber wird wieder die Determinante $(cx\,dx)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, wenn man von dem vielfachen Punkte x aus auf demjenigen Zweige von f zu einem Punkte $x + dx$ fortschreitet, auf welchem der Verzweigungspunkt an x herangerückt ist; und so bleibt unser Differential in der That eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, wie man auch den Punkt $x + dx$ in der Nachbarschaft von x wählen mag. Eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung soll nun, nach dem Vorgange von Riemann, immer durch φ bezeichnet werden und das überall endliche Integral durch J. Das Differential des letzteren nennen wir ein *Differential erster Gattung*.

$$(1) \qquad dJ = \frac{\varphi \cdot (c\,x\,d\,x)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}} = \frac{\varphi \cdot (c\,x\,d\,x)}{n \cdot a_x^{n-1} a_c}.$$

Aus unseren früheren Bemerkungen über adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (p. 677) folgt dann unmittelbar der Satz:

Es gibt p linear von einander unabhängige Differentiale erster Gattung; oder mit anderen Worten: *Jedes zu f gehörige Differential erster Gattung kann als lineare Conbination von p beliebigen anderen solchen Differentialen dargestellt werden.* —

Von den auf p. 785 unter 1) aufgeführten Differentialen werden uns im Folgenden zunächst nur noch die soeben definirten Differentiale erster Gattung beschäftigen, indem alle anderen als besondere Fälle der daselbst unter 2) und 3) genannten aufgefasst werden können, wie sich sogleich noch ergeben wird. Ebenso wollen wir bei den unter 2) aufgeführten Differentialen zunächst nur solche betrachten, welche in den Doppelpunkten von f nicht endlich werden, d. h. wir ersetzen die Curve $Q = 0$ durch eine *adjungirte* Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega_x^{n-2} = 0$. Dies ist immer möglich, denn die Curve $\Omega = 0$ ist ausserdem nur der Bedingung unterworfen, durch $n-2$ Schnittpunkte der Geraden $u_x = 0$ zu gehen, wenn u_x die im Nenner des Differentials auftretende lineare Function bedeutet. *Von den Schnittpunkten der Curve $\Omega = 0$ mit $f = 0$ bleiben daher immer noch*

$$n(n-2) - \Sigma \alpha_i i (i-1) - (n-2) - p = p$$

willkürlich wählbar. Die beiden übrigen Schnittpunkte von $u_x = 0$ mit $f = 0$ mögen durch ξ, η bezeichnet werden; dann werden die Differentialquotienten des Integrals nach den x_i nur in ξ und η unendlich. *Ein solches Differential, welches nur in zwei getrennten Punkten von f einen endlichen Werth annimmt, heisst ein Differential dritter Gattung, und das zugehörige Integral, welches dann nur in diesen beiden Punkten unendlich wird, heisst ein Integral dritter Gattung.**)

Letzteres soll im Folgenden mit $S_{\xi\eta}$ bezeichnet werden, wenn ξ und η die beiden Unendlichkeitspunkte desselben sind. Sein Differential ist also definirt durch:

$$(2) \qquad dS_{\xi\eta} = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,d\,x)}{(\xi\,\eta\,x)\, \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,d\,x)}{n(\xi\,\eta\,x) \cdot a_x^{n-1} a_c},$$

*) Das Differential zweiter Gattung wird sogleich noch definirt werden. — Vgl. R. A. F. §. 2; Cl. u. G. A. F. p. 20. — Es ist zu beachten, dass die Bezeichnungsweise des Textes mit der von Jacobi und Legendre für elliptische Integrale eingeführten nicht übereinstimmt; in der That hat Legendre's elliptisches Normalintegral dritter Gattung *vier* Unendlichkeitspunkte. Vgl. Königsberger's Theorie der elliptischen Functionen, Th. 1, p. 276.

wenn man das Bestehen der folgenden Gleichungen voraussetzt:

$$f(\xi) \equiv a_\xi^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta^n = 0,$$

$$(3) \qquad \Omega_x^{n-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) \equiv (\xi\eta\zeta)^2 \cdot f + (\xi\eta x) \cdot N.$$

Die letzte Gleichung folgt unmittelbar aus den Bedingungen, welche wir der Function Ω auferlegten; in ihr sind ζ_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes (die nur dazu eingeführt sind, um die Gleichung homogen zu schreiben, ebenso wie der Factor $(\xi\eta\zeta)^2$ bei f); und N ist eine ganze Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Gleichung ist für eine spätere Anwendung besonders wichtig.

Die Art, wie das Differential $dS_{\xi\eta}$ in den Punkten ξ und η unendlich wird, ist leicht zu bestimmen. Wir setzen (wie auf p. 786) $x = \xi + \varepsilon\zeta$, wo ε eine unendlich kleine Grösse und ζ ein Punkt der Tangente von ξ ist, dann wird in erster Annäherung für $c_i = \eta_i$:

$$n a_\xi^{n-1} a_\eta (\xi\eta\zeta) \cdot dS_{\xi\eta} = \Omega_\xi^{n-2}(\eta\xi d\zeta).$$

Aus Gleichung (3) folgt aber, wenn man auf beiden Seiten derselben die erste Polare von η für $x = \xi$ bildet:

$$(4) \qquad \Omega_\xi^{n-2} = -n a_\xi^{n-1} a_\eta;$$

und somit ergibt sich für die Nähe des Punktes ξ:

$$dS_{\xi\eta} = \frac{(\xi\eta dx)}{(\xi\eta x)}.$$

Das Integral $S_{\xi\eta}$ verhält sich also in der Nähe des Unendlichkeitspunktes ξ wie $+\log(\xi\eta x)$, *mithin in der Nähe des Unendlichkeitspunktes η wie* $-\log(\xi\eta x)$.*)

Es ist oben bemerkt worden, dass für die Curve Ω noch p Schnittpunkte auf f beliebig angenommen werden können. Das Differential $dS_{\xi\eta}$ ist also durch die Punkte ξ und η noch keineswegs bestimmt; vielmehr erhalten wir eine andere Curve Ω' und ein anderes Differential $dS'_{\xi\eta}$, wenn wir diese p Punkte sämmtlich oder theilweise durch andere ersetzen. Für die Function Ω' besteht dann (bei passender Festsetzung über die absoluten Werthe ihrer Coëfficienten) ebenfalls die Gleichung (3) und folglich auch die aus ihr abgeleitete Gleichung (4), d. h. es ist:

$$\Omega_\xi^{n-2} = -n a_\xi^{n-1} a_\eta, \quad \Omega_\eta^{n-2} = -n a_\eta^{n-1} a_\xi$$
$$\Omega'^{n-2}_\xi = -n a_\xi^{n-1} a_\eta, \quad \Omega'^{n-2}_\eta = -n a_\eta^{n-1} a_\xi.$$

*) Dies ändert sich nicht, wenn auch ein Unendlichkeitspunkt in einen Berührungspunkt der von c an f zu ziehenden Tangenten fällt. Die Lage von c ist vollkommen gleichgültig. — Es können ferner die Punkte ξ, η auch in einen Doppelpunkt zusammenfallen, wie weiterhin noch erörtert werden soll.

Hieraus folgt, dass die Differenz $\Omega_x^{n-2} - \Omega'^{n-2}_x$ verschwindet für $x = \xi$ und $x = \eta$. Die Curve $\Omega - \Omega' = 0$ enthält also die Gerade $\xi\eta$ ganz, und man kann setzen:

$$\Omega - \Omega' = (\xi\eta x) \cdot \varphi,$$

wo $\varphi = 0$ eine adjungirte C_{n-3} ist. *Wenn man also das Differential dritter Gattung $dS_{\xi\eta}$ auf zwei verschiedene Weisen für dieselben Unendendlichkeitspunkte ξ, η bildet, so unterscheiden sich beide Bildungen bei passender Verfügung über die in ihnen auftretenden Constanten nur um ein Differential erster Gattung.* —

Lassen wir die beiden Unendlichkeitspunkte des Differentials dritter Gattung einander auf demselben Curvenzweige von f unendlich nahe rücken, so entsteht aus $dS_{\xi\eta}$ ein *Differential zweiter Gattung*. Die Linie $\overline{\xi\eta}$ wird dann zur Tangente von f in dem einen Punkte, welcher mit ξ bezeichnet sei; und *man kann also ein (mit dE_ξ bezeichnetes) Differential zweiter Gattung definiren durch die Gleichung:*

$$dE_\xi = \frac{\Omega_x^{n-2}(c\,x\,dx)}{n^2 \cdot a_\xi^{n-1} a_x \cdot a_x^{n-1} a_c};$$

nun wieder Ω zu f adjungirt ist und durch die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von f in ξ mit f hindurchgeht. Für Ω besteht daher, wenn η ein beliebiger Punkt ist, eine Gleichung der Form

$$\Omega_x^{n-2}(\xi\eta x)^2 = [a_\xi^{n-1} a_\eta]^2 \cdot f + a_\xi^{n-1} a_x \cdot M_x^{n-1}; \tag{5}$$

wo f von der Curve M in allen Schnittpunkten der Linie $(\xi\eta x) = 0$ berührt wird, ausgenommen den Punkt ξ selbst.

In Betreff der Differentiale zweiter Gattung sei hier ohne Angabe des Beweises noch bemerkt, dass ein solches auch immer bis auf ein additiv hinzutretendes Differential erster Gattung aus einem Differentiale dritter Gattung durch einen Differentiationsprocess abgeleitet werden kann; es ist nämlich, wenn $a_\xi^{n-1} a_\zeta = 0$*):

$$dE_\xi = \frac{\partial\, dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\zeta_1 + \frac{\partial\, dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\zeta_2 + \frac{\partial\, dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\zeta_3 + dJ.$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man Sätze über Differentiale dE_ξ aus solchen über Differentiale $dS_{\xi\eta}$ ableiten. Insbesondere ergibt sich so, dass $\int dE_\xi$ für $x_i = \xi_i$ unendlich wird wie $\int \frac{dx}{(x-\xi)^2}$ für $x = \xi$. *Das Integral zweiter Gattung E_ξ wird also im Punkte ξ algebraisch unendlich von der ersten Ordnung;* was man unter Anwendung von Gleichung (5) auch leicht direct bestätigt.

---

*) Vgl. darüber Cl. u. G. A. F. p. 28.

Auf die unter 3) auf p. 785 genannten Differentiale wollen wir hier nicht weiter eingehen, man wird ihre Eigenschaften aus denen der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung durch Benutzung des früher angegebenen Differentiationsprocesses ableiten können. Es sei indess hervorgehoben, dass ein Differential, in dessen Nenner das *Quadrat* einer linearen Function vorkommt, d. i. *ein Differential der Form*

$$dV = \frac{Q_x^{n-1}(cx\,dx)}{u_x^2 \cdot a_x^{n-1}\, a_c}$$

sich immer direct auf Differentiale zweiter und dritter Gattung zurückführen lässt. Dieser Fall gewinnt noch dadurch an Interesse, dass das zu einer in rechtwinkligen Coordinaten x, y gegebenen Curve $F(x, y) = 0$ gehörige Flächenintegral $\int y\,dx$ als Specialfall des Integrals V erscheint. In der That für $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$ wird ja:

$$\int y\,dx = \int \frac{(x_3 dx_1 - x_1 dx_3)\, x_2}{x_3^2}.$$

Dasselbe entsteht also aus V, wenn man setzt:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = u_x = 1, \; a_x^n = F(x, y), \quad Q_x^{n-1} = y\,\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Zum Beweise der ausgesprochenen Behauptung bestimmen wir n Curven $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0, \ldots Q_n = 0$ so, dass $Q_k = 0$ die Grundcurve f in allen Schnittpunkten $x^{(i)}$ von $u_x = 0$ berührt, ausgenommen den Punkt $x^{(k)}$. Alsdann können wir n Constante k_i so bestimmen, dass die Curve

$$Q - k_1 Q_1 - k_2 Q_2 - \ldots - k_n Q_n = 0$$

durch alle n Punkte $x^{(i)}$ hindurchgeht, denn dafür brauchen nur die Gleichungen erfüllt zu sein:

$$Q^{(1)} - k_1 Q_1^{(1)} = 0, \quad Q^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0, \ldots . \; Q^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0,$$

wo die oberen Indices analoge Bedeutung haben, wie in den entsprechenden Gleichungen auf p. 782. Es wird daher:

$$(6) \qquad Q = \Sigma k_i Q_i + u_x \Omega,$$

wo $\Omega = 0$ eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und zwar eine zu f adjungirte, wenn wir annehmen — wie es Kürze wegen geschehen möge — die Curven $Q = 0$ und $Q_k = 0$ seien sämmtlich zu f adjungirt. Wegen (6) wird nun:

$$(7) \qquad dV \equiv \frac{Q\,(cx\,dx)}{u_x^2 \cdot a_x^{n-1}\, a_c} = \sum \frac{k_i Q_i\,(cx\,dx)}{u_x^2\, a_x^{n-1}\, a_c} + \frac{\Omega\,(cx\,dx)}{u_x \cdot a_x^{n-1}\, a_c}.$$

Hier ist aber jedes Glied der rechts auftretenden Summe ein Differential zweiter Gattung, denn wegen der Bestimmungen über $Q_i = 0$ kann man setzen:

$$\varrho_i \, . \, a_{x^{(i)}}^{n-1} a_x = u_x^2 \Omega_i ,$$

wo $\Omega_i = 0$ eine durch alle $n - 2$ weiteren Schnittpunkte der Tangente von $x^{(i)}$ mit $f = 0$ gehende C_{n-2} bedeutet. Das letzte Glied des in (7) rechts stehenden Ausdrucks kann in eine Summe von $n - 1$ Integralen dritter Gattung zerlegt werden. Man hat also schliesslich:

$$V = E_{x^{(1)}} + E_{x^{(2)}} + \ldots + E_{x^{(n)}} + S_{x^{(1)}x^{(2)}} + S_{x^{(1)}x^{(3)}} + \ldots + S_{x^{(1)}x^{(n)}}.$$

Das Integral V wird sonach in jedem der Punkte $x^{(i)}$ unendlich, wie die Function $\log(x - \xi) + \frac{1}{x - \xi}$ *für $x = \xi$ unendlich wird.**) —

Von besonderer Wichtigkeit für die späteren Anwendungen sind noch die folgenden Bemerkungen über die Differentiale zweiter und dritter Gattung. Die in dem Differentiale $dS_{\xi\eta}$ auftretenden Punkte ξ, η können wir insbesondere in einen Doppelpunkt von f zusammenrücken lassen. Durch diesen Doppelpunkt aber geht Ω als zu f adjungirte Curve hindurch und hat folglich dann mit der Linie $\overline{\xi\eta}$ $n - 1$ Schnittpunkte gemein; d. h. Ω enthält diese Gerade ganz. Daher wird

$$\Omega_x^{n-2} = u_x \, . \, \mathsf{H}_x^{n-3},$$

wenn u_i die Coordinaten der im Nenner von $dS_{\xi\eta}$ auftretenden Geraden sind. Das Differential selbst also nimmt die Form an:

$$dS_{\xi\eta} = \frac{\mathsf{H}_x^{n-3}(c\,x\,dx)}{n\,a_x^{n-1}a_c}, \tag{8}$$

wo nun H durch alle vielfachen Punkte von f geht, ausgenommen den auf u_x liegenden Doppelpunkt; dasselbe ist übrigens von u_x ganz unabhängig geworden. Dieses Differential liefert dann zugleich das Schema für die auf p. 785 unter 1) angeführten nicht überall endlichen Differentiale, soweit dieselben in Doppelpunkten von f unendlich werden; denn es ist leicht zu übersehen, dass jedes Differential der Form 1), welches in mehreren Doppelpunkten unendlich wird, in eine Summe von Differentialen entwickelt werden kann, deren jedes nur in einem Doppelpunkte unendlich ist. *Auch solche Differentiale rechnen wir zu denen dritter Gattung;* auch sie nämlich werden in zwei Punkten logarithmisch unendlich (vgl. p. 787), insofern man den

*) Aus der für dV in (7) gegebenen Darstellung wird man alle diejenigen Eigenschaften des Integrals $\int y\,dx$ (insbesondere die Bestimmung seiner Perioden) entwickeln, welche von M. Marie (ohne vollständige Benutzung der früheren Arbeiten von Riemann, Clebsch und Gordan) angegeben worden sind; Comptes rendus, 1874, p. 692, 757, 865, 943. — Vgl. auch für Curven vom Geschlechte $p = 0, 1$: Hermite, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1ière partie, Paris 1873.

Doppelpunkt einmal als auf dem einen, einmal als auf dem anderen durch ihn gehenden Zweige von f gelegen ansehen kann. Letzteres wird recht deutlich, wenn man den Doppelpunkt durch eindeutige Transformation der Grundcurve in zwei getrennte Punkte auflöst, wie sogleich noch erörtert werden soll.

Man erkennt, dass in analoger Weise *ein nur in einem Rückkehrpunkte unendliches Differential als ein Differential zweiter Gattung zu betrachten ist**); denn jede durch den Rückkehrpunkt gelegte Gerade verbindet in diesem zwei unendlich benachbarte Punkte, ungleich einer durch einen Doppelpunkt gehenden Geraden, welche als Verbindungslinie zweier verschiedenen Punkte der Curve zu betrachten ist.

Die letzten Erörterungen werden, wie schon erwähnt, von besonderem Interesse, wenn man die Curve f einer eindeutigen Transformation unterwirft. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung des *Einflusses, welchen eine solche eindeutige Transformation der Grundcurve auf ein Differential erster, zweiter oder dritter Gattung ausübt.* Die Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve der ν^{ten} Ordnung $F(y) = 0$ sei, wie auf p. 661, durch Gleichungen der Form:

$$\mu y_1 = \Phi_1(x)\,, \quad \mu y_2 = \Phi_2(x)\,, \quad \mu y_3 = \Phi_3(x)$$

gegeben; und vermittelst derselben möge wieder $\mu^\nu F(y) = F(\Phi)$ in $M \cdot f$ übergehen. Dann ist für alle Punkte von $f = 0$:

$$M \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_3}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i}\,,$$

und also, da nach p. 671 $\mu^{\nu-1}\frac{\partial F(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i}$:

$$\left(c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \cdot M = \mu^{\nu-1}\left(\frac{\partial F(y)}{\partial y_1} k_1 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_2} k_2 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_3} k_3\right),$$

wenn wir setzen:

$$k_i = c_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3}\,.$$

Ferner wird nach dem Multiplicationssatze der Determinanten:

$$\mu^2 (k y d y) = (k \Phi d \Phi) = \frac{1}{s}(c x d x) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)\,,$$

wo $(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)$ wieder die Functionaldeterminante, und s die Ordnung der Φ_i bedeutet. Die hier abgeleiteten Relationen reichen nun zur Umformung unserer Differentiale aus. Ein solches sei für die Curve F gegeben, und zwar von der dritten Gattung; die beiden Unendlichkeitspunkte desselben mögen auf der Linie v liegen. Man findet dann unmittelbar:

---

*) In der That wird dasselbe im Rückkehrpunkte ja auch algebraisch unendlich von der ersten Ordnung, vgl. p. 788.

$$s \cdot \frac{\Omega(y) \cdot (kydy)}{\Sigma v_i y_i \cdot \Sigma k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\Omega(\Phi) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) \cdot (cxdx)}{\Sigma v_i \Phi_i \cdot M \cdot \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

Hier ist der Ausdruck rechts ganz ähnlicher Natur, wie der Ausdruck links, nur dass an Stelle der Functionen Ω und v_y bez. die Functionen $\Omega(\Phi) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)$ und $\Sigma v_i \Phi_i \cdot M$ getreten sind, und dass an Stelle der ganz willkürlichen Grössen k die ebenso willkürlichen Grössen c erscheinen.

Es ist aber Ω eine zu F adjungirte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, und also nach einem früheren Satze (p. 676):

$$(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) \cdot \Omega(\Phi) = M \cdot \omega(x) + C \cdot f,$$

wo $\omega(x) = 0$ eine Curve der Ordnung $s + n - 3$ darstellt, welche f ausser in den vielfachen Punkten und den gemeinsamen Punkten der Φ nur in den Punkten trifft, die den Schnittpunkten von Ω mit F entsprechen. Insbesondere also geht $\omega(x)$ auch durch die $n-2$ Schnittpunkte der Curve $\Sigma v_i \Phi_i = 0$ mit f, welche den $n-2$ auf Ω liegenden Punkten von $v_y = 0$ entsprechen. Die rechte Seite der Gleichung

$$s \cdot \frac{\Omega(y) \cdot (kydy)}{v_y \cdot \Sigma k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\omega(x) \cdot (cxdx)}{\Sigma v_i \Phi_i \cdot \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

stellt daher ein Differential dar, welches nur in *den zwei* Punkten endlich wird, in welchen dies für das Differential auf der linken Seite eintritt, also wieder ein Differential dritter Gattung; in der That verschwindet nach dem Früheren für einen gemeinsamen r-fachen Punkt der Φ, welcher i-facher Punkt von f ist $(i \gtreqless 1)$, $\omega(x)$ immer $(r + i - 1)$-fach, also immer ebenso oft wie der Nenner der rechten Seite. Weiter wird man das rechts stehende Differential auch so darstellen können, dass im Nenner nur eine lineare Function steht. Denn sind ξ, η die Unendlichkeitspunkte unseres Differentials, und ist $\Omega' = 0$ eine zu f adjungirte Curve, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte der Geraden $(x\xi\eta) = 0$ mit f hindurchgeht, so besteht offenbar vermöge $f = 0$ eine Gleichung der Form:

$$\omega \cdot (\xi \eta x) = \Omega' \cdot \Sigma v_i \Phi_i.$$

Insbesondere können die Punkte ξ, η eins der Punktepaare von f bilden, welche sich zu einem Doppelpunkte von F vereinigen; dann ist $\Omega(y)$ durch v_y theilbar, und auf der linken Seite obiger Gleichung steht ein Differential dritter Gattung der zuletzt erwähnten Art. Wir haben also folgenden Satz:

Bei eindeutiger Transformation der Curve f geht ein Differential dritter Gattung immer wieder in ein Differential dritter Gattung über; und zwar gilt dies unabhängig davon, ob die beiden Unendlichkeitspunkte

desselben auf f getrennt liegen oder in einem Doppelpunkte von f vereinigt; vielmehr kann ein Differential der einen Art dabei in ein Differential der andern Art übergeführt werden.

Dasselbe gilt natürlich, wenn die beiden Unendlichkeitspunkte einander benachbart liegen, oder wenn man $\Omega = v_y \,.\, \Theta$ setzt, wo $\Theta = 0$ eine zu F adjungirte C_{n-3} ist. Also*):

Ein Differential erster oder zweiter Gattung geht bei eindeutiger Transformation der Grundcurve immer wieder in ein Differential bez. der ersten oder zweiten Gattung über.

Unsere bisherigen Untersuchungen waren rein algebraischer Natur, sie bezogen sich auf Quotienten algebraischer Functionen. Indem wir zu den Integralen unserer Differentiale übergehen, müssen wir aber noch andere Untersuchungen in Betracht ziehen, insbesondere solche über die Periodicitäts-Eigenschaften der algebraischen Integrale; denn gerade auf letzteren beruhen die späteren geometrischen Anwendungen dieser Theorien (vgl. das Beispiel der elliptischen Integrale auf p. 607 ff.). Es ist hier indess nicht der Ort, eine ausführliche Darstellung der betreffenden Verhältnisse zu geben; wir beschränken uns auf eine kurze Uebersicht der Resultate, die um so nützlicher sein wird, als wir so Gelegenheit finden, unsere späteren Bezeichnungsweisen im Zusammenhange einzuführen und zu definiren.

Bei Betrachtung eines algebraischen Integrals ist vor Allem zu bemerken, dass der Werth eines solchen immer von dem benutzten Integrationswege abhängen kann, und also kein völlig bestimmter ist. Die hieraus fliessenden Fragen erledigen sich am einfachsten, wenn man sich der Riemann'schen Vorstellungen bedient, d. h. die Gleichung der Grundcurve in rechtwinkligen Coordinaten zu Grunde legt und dann die eine der letzteren als Function der andern über die zugehörige Riemann'sche Fläche ausbreitet; eine Vorstellungsweise, die übrigens auch für die rein algebraische Untersuchung des durch $f=0$ dargestellten Werthgebietes von grossem Nutzen ist (vgl. p. 610 und p. 682). Die dadurch gewonnenen Resultate sollen im Folgenden kurz zusammengestellt werden, soweit wir dieselben für spätere Untersuchungen benutzen werden, ohne dass jedoch die betreffenden Beweise vollständig erbracht würden.

Wir betrachten zunächst die *Integrale erster Gattung.* Der Werth eines solchen ist bestimmt, wenn die untere und obere Grenze nebst dem Wege gegeben sind, auf welchem das Integral von der ersten zur zweiten geführt wird. Zwei Integrationswege, welche durch das Endliche oder Unendliche ohne Ueberschreitung eines Verzweigungs-

*) Für Differentiale erster Gattung vgl. Cl. u. G. A. F. p. 50.

punktes der Fläche in einander überführbar sind, liefern dann immer dasselbe Resultat für den Werth des Integrals; denn letzteres (als von der ersten Gattung) wird in keinem Punkte der Fläche unendlich. Wenn die beiden Wege aber Verzweigungspunkte einschliessen und zwar weder alle noch keinen, so dass eine directe Ueberführung eines Integrationsweges in den andern nicht möglich ist, so hat man im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe des Integrals vor sich, obgleich die oberen und unteren Grenzen dieselben sind. Man kann dann statt des zweiten Weges den ersten setzen, vermehrt um eine geschlossene Curve, welche den zweiten Integrationsweg in directer, den ersten in entgegengesetzter Richtung enthält; man kann daher den zweiten aus dem ersten durch Hinzufügen eines Weges entstanden denken, welcher die überschrittenen Verzweigungspunkte umschliesst und um diese beliebig nahe zusammengezogen werden kann, welcher also äquivalent ist mit einem *geschlossenen* um die betreffenden Verzweigungspunkte gelegten Wege, indem der Verbindungsweg des letzteren mit jenem ersten Wege zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird und also keinen Beitrag für das Integral liefert. Alle Aenderungen, welche das Integral durch Aenderung des Integrationsweges erleidet, sind somit darstellbar durch die Werthe des Integrals, welche dasselbe beim Herumführen um Verzweigungspunkte annimmt. Es wird also zunächst darauf ankommen, die Zahl der von einander unabhängigen (durch Verzerrung und Combination nicht aus einander ableitbaren) Wege dieser Art zu bestimmen, welche auf der Fläche möglich sind.

Zu dem Zwecke ist es nützlich, sich über die Gestalt der Riemann'schen Fläche bestimmtere Vorstellungen zu bilden und Festsetzungen zu machen. Zunächst kann man nach dem Vorgange von Lüroth immer eine gewisse *Normalform* für dieselbe zu Grunde legen, d. h. gewisse einfache Annahmen über die Gruppirung der Verzweigungspunkte und der durch sie verbundenen Blätter machen*); dabei erkennt man insbesondere, dass sich die Untersuchung der Periodicitätsmoduln auf das einfachere Schema der hyperelliptischen Integrale zurückführen lässt. Der dazu leitende Gedankengang ist kurz folgender. — Die Zahl der Blätter unserer Fläche möge durch m, die ihrer Verzweigungspunkte durch r bezeichnet sein**); ferner verstehen wir unter einer *Gruppe von Verzweigungspunkten* die Gesammtheit aller solchen Punkte, welche dieselben beiden Blätter

*) Vgl. Lüroth, Math. Annalen, Bd. 4, p. 181 und Clebsch, ib. Bd. 6, p. 216.

**) Es ist dann immer $2p = r - 2(m - 1)$. Im Allgemeinen wird m gleich der Ordnung der Grundcurve sein; dann ist r gleich der Klasse derselben, vermehrt um die Zahl der Rückkehrpunkte (vgl. die Anmk. auf p. 494).

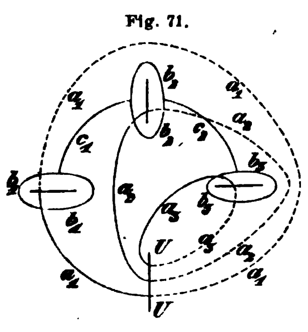
verbinden, der Art, dass diese Blätter durch weitere Verzweigungspunkte nicht mehr verbunden erscheinen. In einer jeden Gruppe ist dann nothwendig eine *gerade* Anzahl von Verzweigungspunkten enthalten, wie die Anschauung direct ergibt. Eine nähere Ueberlegung zeigt nun, dass weder in der Anordnung der Verzweigungspunkte, noch in der Folge, in der die Blätter verbunden werden, etwas Specifisches liegt, noch endlich in der Zahl der Punkte, welche bei gegebener Anordnung für jede Gruppe benutzt werden; die letztere darf nur nicht Null werden. Insbesondere kann man daher eine Anordnung bevorzugen, bei welcher eine Gruppe aus $r - 2(m - 2)$ Verzweigungspunkten besteht, alle übrigen nur aus je zweien derselben. Es sind dann zwei Blätter, etwa das erste und zweite, mit einander durch $r - 2(m - 2)$ Verzweigungspunkte verbunden; die übrigen $m - 2$ Blätter hängen aber nicht mehr unter einander zusammen, sondern jedes derselben ist nur durch zwei Verzweigungspunkte mit dem ersten oder mit dem zweiten Blatte verknüpft. Damit wäre die vorhin erwähnte Normalform der Riemann'schen Fläche hergestellt.

Eine so verzweigte Fläche lässt sich nun in derselben Weise durch ein *kanonisches Querschnittsystem* in eine einfach zusammenhängende zerlegen, wie die bei den hyperelliptischen Integralen benutzte zweiblättrige Fläche, d. i. durch ein Querschnittsystem, wie es Riemann seinen Betrachtungen zu Grunde legt.*) In der That braucht man bei unserer Anordnung der Verzweigungspunkte nur die Verbindung des ersten und zweiten Blattes zu berücksichtigen; denn ein Blatt, welches z. B. nur mit dem ersten durch zwei Verzweigungspunkte, d. i. durch eine Uebergangslinie (Verzweigungsschnitt) zusammenhängt, kann man immer so verzerren, dass es zusammen mit dem ersten Blatte nur ein Blatt bildet, wie dies bei einer zweiblättrigen Fläche, deren Blätter durch nur 2 Verzweigungspunkte verbunden sind, bekannt ist. Zwischen dem ersten und zweiten Blatte haben wir $r - 2(m - 2) = 2p + 2$ Verzweigungspunkte, also $p + 1$ Verzweigungsschnitte; um sie legt man dann bekanntlich jenes kanonische Schnittsystem in folgender Weise. Zuerst legt man, etwa im ersten Blatte, p Schnitte $b_1, b_2, \dots b_p$: je einen um eine der p Uebergangslinien, so dass eine Uebergangslinie nicht durch einen Schnitt b_r umkreist ist. Die Schnitte b verbindet man dann unter einander in irgend welcher Reihenfolge durch die Verbindungsschnitte $c_1, c_2, \dots c_{p-1}$; endlich legt man p weitere Schnitte $a_1, a_2, \dots a_p$ so, dass jeder von ihnen, von jener $(p + 1)^{\text{ten}}$ Uebergangslinie U ausgehend, theils im ersten, theils

*) Vgl. R. A. F. §. 10 und p. 405 ff. in dem erwähnten Werke von C. Neumann. Das im Texte gegebene Querschnittsystem ist von dem Riemann'schen übrigens noch etwas verschieden.

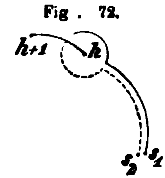
im zweiten Blatte verläuft und zu je einer der p anderen Uebergangslinien hinführt, wie es in Fig. 71 für $p = 3$ dargestellt ist (die im zweiten Blatte verlaufenden Schnitte sind durch punktirte Linien bezeichnet). Das so gezogene Curvensystem kann man sich nun aus $2p$ Querschnitten zusammengesetzt denken*); und dieselben bilden in ihrer Gesammtheit eine in sich zurücklaufende Curve, wenn man alle Schnitte einmal in positiver, einmal in negativer Richtung durchläuft, d. h. die so zerschnittene Fläche hat eine einzige Randcurve. Sie ist dann gleichzeitig durch die $2p$ Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt; *ihr Zusammenhang ist also gleich* $2p + 1$.**)

Fig. 71.



Unter Benutzung dieses kanonischen Querschnittsystems erledigt sich nun die Frage nach den Werthänderungen, welche ein Integral erster Gattung durch Abänderung des Integrationsweges erleiden kann, von selbst. Jeder geschlossene Weg nämlich, welcher in der zerschnittenen *einfach zusammenhängenden* Fläche verläuft, d. h. die Schnitte a_ν, b_ν, c_ν nicht überschreitet, kann auf einen Punkt zusammengezogen werden; ein überall endliches Integral I, geführt über einen solchen Weg, gibt daher jederzeit Null, und zwei verschiedene Wege der Art, welche dieselben Punkte verbinden, führen zu demselben Integralwerthe. Wir haben also nur noch die Aenderungen zu betrachten, *welche beim Ueberschreiten jener Schnitte eintreten können.* Alle diese Werthänderungen aber lassen sich aus $2p$ Grössen linear und ganzzahlig zusammensetzen, wie man in folgender Weise erkennt. Wir denken uns die in Betracht kommenden $2p + 2$ Verzweigungspunkte (zwischen dem ersten und zweiten Blatte) numerirt, und zwar so, dass der erste mit dem zweiten, der dritte mit dem vierten, ... der $(2p + 1)^{\text{te}}$ mit dem $(2p + 2)^{\text{ten}}$ durch einen Verzweigungsschnitt verbunden ist. Wir wählen ferner zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 der Fläche, welche bez. im ersten und zweiten Blatte über einander liegen und bezeichnen mit α_h den Werth des Integrals I geführt auf einem Wege, welcher von s_1 aus im obern Blatte verläuft, sich in kleinem Kreise um den h^{ten} Verzweigungspunkt windet und dann im untern Blatte nach s_2 zurückkehrt (Fig. 72). Das Inte-

Fig. 72.



*) Als erster Querschnitt ist die Curve b_1 aufzufassen, nachdem man zuvor die (geschlossene) Riemann'sche Kugelfläche durch Herausheben eines Punktes in eine nicht geschlossene verwandelt hat. Die übrigen $2p - 1$ Querschnitte sind: c_1 und b_2, c_2 und b_3, ... c_{p-1} und b_p, a_1, a_2, a_3 ... a_p.

**) Vgl. R. A. F. §. 7 und Neumann a. a. O.

gral I gibt nun offenbar Null, wenn man dasselbe auf einem alle $2p+2$ Verzweigungspunkte umschliessenden Wege herumführt, denn ein solcher Weg kann (durch's Unendliche hindurch) auf einen Punkt zusammengezogen werden. Andererseits aber kann man diesen Weg zusammenziehen auf eine Reihe einzelner Schleifen, die von den Punkten s_1, s_2 aus um die einzelnen Verzweigungspunkte in geschilderter Weise zu legen sind. Der Beitrag, welchen zwei um die Punkte $2h-1$ und $2h$ gelegte Schleifen zu dem Werthe von I geben, ist dann $\alpha_{2h-1}-\alpha_{2h}$. Denn hier wird der erste Weg von s_1 nach s_2, der zweite aber von s_2 nach s_1 zurückgelegt; der letztere gibt somit den negativen Werth von α_{2h} (Fig. 73). Führt man also I von s_1 aus um sämmtliche Schleifen zu s_1 zurück, so ergibt dies die Gleichung:

Fig. 73.

$$(7) \qquad \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\cdots+\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}=0\,.$$

Die Differenz irgend zweier Integrale α_h und α_k ist aber von den Punkten s_1, s_2 völlig unabhängig; denn den Integrationsweg des Integrals $\alpha_h-\alpha_k$ können wir zusammenziehen auf eine Schleife, welche die Verzweigungspunkte h und k beliebig eng umspannt, und auf einen von s_1 zu einem Punkte dieser Schleife und dann zu s_1 ebenso zurücklaufenden Weg; der Beitrag des letzteren aber hebt sich auf, und somit folgt, dass $\alpha_h-\alpha_k$ eine von s_1 und s_2 unabhängige *Constante* ist. Aus allen möglichen solchen Constanten lassen sich aber alle Werthänderungen von I zusammensetzen (vgl. p. 798). Diese Differenzen $\alpha_h-\alpha_k$ ferner kann man aus $2p+1$ solcher Differenzen linear zusammensetzen, welche man erhält, wenn man eines der Integrale α_h, etwa α_{2p+2}, von allen anderen abzieht, d. h. aus den $2p+1$ Grössen:

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_{2p+2}\,,\quad \beta_2=\alpha_2-\alpha_{2p+2}\,,\ \ldots\ \beta_{2p+1}=\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}\,.$$

Zwischen diesen Grössen erhält man noch aus Gleichung (7) die Relation:

$$(8) \qquad \beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4+\cdots+\beta_{2p+1}=0\,;$$

es drückt sich also eine linear durch die übrigen aus, und es bleiben $2p$ linear unabhängige Werthänderungen von I, oder — wie man sich ausdrückt — $2p$ *„Periodicitätsmoduln" des Integrals I.* Wir können sonach folgenden Satz aussprechen:

Ein Integral erster Gattung hat im Allgemeinen $2p$ Periodicitätsmoduln. Nennen wir I den Werth des Integrals, genommen auf beliebigem Integrationswege, $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $\ldots$ $I^{(2p)}$ seine Periodicitätsmoduln, so ist

$$I+m^{(1)}I^{(1)}+m^{(2)}I^{(2)}+\cdots+m^{(2p)}I^{(2p)}$$

der allgemeinste Werth, welchen das Integral durch Abänderung des

Integrationsweges erhalten kann, wo $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots m^{(2p)}$ positive oder negative ganze Zahlen sind.

Dies gilt für jedes einzelne der $(p-1)$-fach unendlich vielen Integrale erster Gattung. Wir werden von diesen aber immer nur p *beliebige* zu betrachten haben, denn aus ihnen lassen sich alle anderen linear zusammensetzen, vorausgesetzt dass man für die gewählten p Integrale immer denselben Integrationsweg zu Grunde legt; und *Letzteres soll im Folgenden immer geschehen.* Sind $I_1, I_2, \ldots I_p$ irgend p solche Integrale, genommen auf beliebigem (aber alle auf demselben) Wege, so ist das allgemeinste Werthsystem dieser Integrale auf irgend einem anderen Wege dargestellt durch das Schema:

$$\begin{array}{l} I_1 + m^{(1)} I_1^{(1)} + m^{(2)} I_1^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_1^{(2p)} \\ I_2 + m^{(1)} I_2^{(1)} + m^{(2)} I_2^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_2^{(2p)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_p + m^{(1)} I_p^{(1)} + m^{(2)} I_p^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_p^{(2p)} . \end{array}$$

Die Periodicitätsmoduln bilden ein System von $2p^2$ Constanten, bei welchen die $2p$ Grössen derselben Horizontalreihe sich auf dasselbe Integral und von einander unabhängige Umgänge um Verzweigungspunkte, die p Grössen derselben Verticalreihe sich auf denselben Umgang und verschiedene Integrale beziehen. Diese Periodicitätsmoduln $I_h^{(k)}$ sind aber nicht von einander unabhängig; zwischen ihnen bestehen vielmehr noch algebraische Relationen, und zwar insbesondere zwischen den $I_h^{(k)}$ zweier Horizontalreihen bestehen Gleichungen, welche linear für die $I_h^{(k)}$ jeder der beiden Reihen sind.

Um diese Gleichungen zu entwickeln, wählt man für $I_h^{(k)}$ am besten die $2p$ Werthe des Integrals I_h, welche dasselbe, geführt über einen der Schnitte a_ν und b_ν, annimmt; in der That sind dies ja auch Umgänge um je zwei Verzweigungspunkte, und zwar der Art, dass sich keiner von ihnen aus den anderen zusammensetzen lässt. Wir wollen nun den Werth des Integrals I_h geleitet über b_ν mit $B_h^{(\nu)}$, geleitet über a_ν mit $A_h^{(\nu)}$ bezeichnen. Wir setzen also:

$$\begin{array}{lll} I_h^{(1)} = B_h^{(1)}, & I_h^{(2)} = B_h^{(2)}, & \ldots I_h^{(p)} = B_h^{(p)}, \\ I_h^{(p+1)} = A_h^{(1)}, & I_h^{(p+2)} = A_h^{(2)}, & \ldots I_h^{(2p)} = A_h^{(p)} . \end{array}$$

Da sich die Schnitte b_ν und a_ν durchkreuzen, und da beide Schnitte noch in beliebiger Entfernung oder Nähe um die betreffenden Verzweigungspunkte gelegt werden dürfen, so kann man offenbar dies auch so aussprechen, dass *sich das Integral I_h beim Ueberschreiten des Schnittes a_ν um die Grösse $B_h^{(\nu)}$ ändere, beim Ueberschreiten des Schnittes b_ν um die Grösse $A_h^{(\nu)}$, an den Schnitten c_ν dagegen constant bleibt.* Das Integral ist also bei der von uns über die Lage der Querschnitte

gemachten Annahme an den Schnitten a_ν und b_ν unstetig, während es im Uebrigen auf der Fläche allenthalben endlich und stetig verläuft.

Um nun die beregten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln aufzustellen, führt man das Integral $\int I_h\, d I_k$ über die ganze Begrenzung der zerschnittenen, einfach zusammenhängenden Fläche, d. i. einmal in positiver und einmal in negativer Richtung über alle Schnitte a_ν, b_ν und c_ν, was den Werth Null ergeben muss; und so findet man die Relationen*):

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(A_h^{(\nu)} B_k^{(\nu)} - B_h^{(\nu)} A_k^{(\nu)}\right) = 0. \tag{9}$$

Diese Relationen bestehen also zwischen den Periodicitätsmoduln je zweier Integrale I_h und I_k. —

Diese Betrachtungen führen endlich auf eine bestimmte *Normalform der Integrale erster Gattung.* Die Integrale $I_1, I_2, \ldots I_p$ hatten wir ganz beliebig aus den $(p-1)$-fach unendlich vielen Integralen I ausgewählt. Statt derselben kann man nun insbesondere solche lineare Combinationen der $I_1, I_2, \ldots I_p$ zu Grunde legen, deren Periodicitätsmoduln besonders einfache Werthe haben; und zwar zeigt sich, dass man die entsprechenden Grössen $B_h^{(k)}$ für $h \lessgtr k$ alle zu Null machen kann, während die Grössen $B_h^{(h)}$ alle gleich demselben beliebigen Werthe genommen werden dürfen, wofür man den Werth $2i\pi$ wählt.**) Dann folgt aber aus (9), dass $A_h^{(k)} = A_k^{(h)}$ wird. Um dies anzudeuten, schreiben wir dafür a_{hk}; also ist:

$$a_{hk} = a_{kh} = A_h^{(k)} = A_k^{(h)}.$$

Die so gewählten Integrale, welche gewissermassen ein (von der Wahl des kanonischen Querschnittsystems abhängiges) kanonisches Coordinatensystem in der $(p-1)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Integralen I bilden, sollen Normalintegrale genannt und mit $u_1, u_2, \ldots u_p$ bezeichnet werden. Ihre Eigenschaften sind in folgendem Satze ausgesprochen:

*) Vgl. R. A. F. §. 20, Cl. u. G. A. F. p. 106. Für hyperelliptische Integrale wurden diese Gleichungen von Weierstrass (a. a. O.) gefunden, für $p = 2$ schon vorher von Rosenhain: Mémoire sur les fonctions de deux variables à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, Mémoires présentées par divers savants, Paris 1851. — Ausserdem bestehen noch andere Relationen, die jedoch im Allgemeinen nicht bekannt sind; vgl. darüber die Einleitung zu R. A. F. und Fuchs: Crelle's Journal, Bd. 71 und 73, Thomae, ib. Bd. 66 und 71.

**) R. A. F. §. 20, Cl. u. G. A. F. p. 108; vgl. dazu Prym, Crelle's Journal, Bd. 71, p. 231, und Schläfli, ib. Bd. 76, wo gezeigt wird, dass die Determinante der für die Integrale J entstehenden linearen Gleichungen im Allgemeinen nicht verschwindet. — Es sei hervorgehoben, dass Riemann den Werth $i\pi$ statt $2i\pi$ wählt.

Ein Normalintegral erster Gattung u_h ändert sich nicht beim Ueberschreiten eines Querschnittes a_ν, nur an a_h um $2i\pi$. Die erste Hälfte der Periodicitätsmoduln der u_h ist daher gegeben durch das Schema:

$$\begin{array}{lcccc} u_1) & 2i\pi & 0 & 0 \dots & 0 \\ u_2) & 0 & 2i\pi & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p) & 0 & 0 & 0 \dots & 2i\pi. \end{array}$$

Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln bildet ein System von symmetrischer Determinante, indem $a_{ik} = a_{ki}$:

$$\begin{array}{lcccc} u_1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1p} \\ u_2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p) & a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \dots & a_{pp}; \end{array}$$

d. h. das Integral u_h ändert sich um $a_{h\nu}$ beim Ueberschreiten von b_ν. Und die allgemeinsten Werthe, welche die Normalintegrale $u_1, u_2, \dots u_p$ durch Abänderung des Integrationsweges annehmen können, sind:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + 2i\pi\, m_1 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1p}q_p \\ u_2' &= u_2 + 2i\pi\, m_2 + a_{21}q_2 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2p}q_p \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_p' &= u_p + 2i\pi\, m_p + a_{p1}q_1 + a_{p2}q_2 + \dots + a_{pp}q_p, \end{aligned}$$

wo die m, q positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. —

In ähnlicher Weise lassen sich nun auch die *Integrale zweiter und dritter Gattung* normiren. Ein Integral dritter Gattung $S_{\xi\eta}$ war nach unserer früheren Definition nur bis auf additiv hinzutretende Integrale erster Gattung bestimmt (p. 792). Durch Hinzufügen eines geeigneten Integrals kann man zunächst $S_{\xi\eta}$ in ein anderes Integral überführen, dessen Periodicitätsmoduln an den Schnitten a_ν *sämmtlich* Null sind. Dies Integral nennen wir dann *ein Normalintegral dritter Gattung*; es soll im Folgenden immer durch $\Pi_{\xi\eta}$ bezeichnet werden. Die Werthänderungen desselben an den Schnitten b_ν erhält man durch Bestimmung der Werthe der Integrale $\int \Pi_{\xi\eta} du_\nu$, in positiver Richtung um die ganze Begrenzung der zerschnittenen Fläche geführt. Diese Werthe müssen gleich den entsprechenden Integralen sein, geführt über beliebige Curven in der einfach zusammenhängenden Fläche, welche die Unendlichkeitspunkte ξ, η einschliessen. Das Integral ergibt, auf diese Weise behandelt*), den Periodicitätsmodul von $\Pi_{\xi\eta}$ am Schnitte b_ν gleich $\int_\eta^\xi du_\nu$. Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung drückt sich also durch die

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. Fünfter Abschnitt.

zwischen den Unendlichkeitspunkten genommenen Integrale erster Gattung aus. Endlich ändert sich noch $\Pi_{\xi\eta}$ beim Umgange um ξ oder η um $+2i\pi$ bez. $-2i\pi$, denn das Integral wird in ihnen logarithmisch unendlich (p. 791), und wir können die absoluten Werthe der in $\Pi_{\xi\eta}$ vorkommenden Constanten immer so bestimmt annehmen, dass die logarithmische Periode gerade gleich $2i\pi$ wird. *Der allgemeinste Werth, welchen das Integral $\Pi_{\xi\eta}$ durch Abänderung des Inetgrationsweges annehmen kann, ist daher:*

$$\Pi'_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta} + 2i\pi m + q_1 \int_\eta^\xi du_1 + q_2 \int_\eta^\xi du_2 + \ldots + q_p \int_\eta^\xi du_p,$$

wo m, q_1; $q_2 \ldots q_p$ positive oder negative ganze Zahlen sind. — Durch diese Festsetzungen über die Perioden ist das Differential $d\Pi_{\xi\eta}$ durch die Punkte ξ und η völlig und eindeutig bestimmt (im Gegensatze zu $dS_{\xi\eta}$).

Wir erwähnen hier noch einen wichtigen Satz, zu welchem das Integral $\int \Pi_{\xi\eta} d\Pi_{\alpha\beta}$ Veranlassung gibt, wenn man dasselbe in analoger Weise behandelt, wie dies eben für das Integral $\int \Pi_{\xi\eta} du_\nu$ erwähnt wurde. Derselbe lautet:

Das Normalintegral dritter Gattung Π ändert sich nicht, wenn man die Grenzen mit den Unendlichkeitspunkten vertauscht, d. h. es ist:

$$\int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta}.$$

Aus dem Integrale $\Pi_{\xi\eta}$ lässt sich endlich auch das „*Normalintegral zweiter Gattung*" ableiten nach dem Satze, dass (vgl. p. 792):

$$E_\xi = \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\alpha_1 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\alpha_2 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\alpha_3,$$

wo $a_\xi^{n-1} a_\alpha = 0$. Hier haben wir $S_{\xi\eta}$ durch $\Pi_{\xi\eta}$ zu ersetzen, um das Normalintegral zweiter Gattung zu erhalten:

$$Z_\xi = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_1}\alpha_1 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_2}\alpha_2 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_3}\alpha_3.$$

Es ergeben sich dann unmittelbar die Sätze*):

Die Periodicitätsmoduln von Z_ξ an den Schnitten a_ν sind sämmtlich Null.

Die Periodicitätsmoduln von Z_ξ an den Schnitten b_ν sind algebraische Functionen des Parameters ξ; und zwar ist der Periodicitätsmodul am Schnitte b_ν

$$\textit{für}\quad du_h = \frac{\varphi_h(x)\,.\,(c\,x\,d\,x)}{a_x^{n-1}\,a_c}\quad \textit{gleich:}\quad \frac{\varphi_h(\xi)\,.\,(c\,\xi\,\alpha)}{a_\xi^{n-1}\,a_c}.$$

*) Vgl. Roch: Ueber die Zahl der Constanten etc., Crelle's Journal, Bd. 64 und Cl. u. G. A. F. p. 120.

— Es sei schliesslich noch hervorgehoben, wie sich die Eigenschaften des Integrals dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}$ aus denen der Integrale erster Gattung u_h durch einen Grenzprocess ableiten lassen, wenn die Unendlichkeitspunkte von $\Pi_{\xi\eta}$ in einen Doppelpunkt der Grundcurve $f = 0$ zusammenfallen*); und auf diesen Fall lassen sich ja alle anderen durch eindeutige Transformation von f reduciren (p. 796). Die dazu nöthige Betrachtung wird für uns von Wichtigkeit werden, indem man vermöge derselben das sogenannte *erweiterte Umkehrproblem* als einen Grenzfall des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale auffassen darf; wir können uns dann später auf das Folgende zurückbeziehen.

Lassen wir durch continuirliche Aenderung der Coëfficienten von $f(x)$ oder $F(x, y)$ einen Doppelpunkt entstehen, so fallen in diesen für jeden Punkt der Ebene zwei Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten zusammen, ohne dann noch als eigentliche Berührungspunkte zu zählen (vgl. Fig. 52, p. 343). Insbesondere gilt dies auch für den unendlich fernen Punkt der Y-Axe; d. h. auf der zu $F = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche rücken zwei Verzweigungspunkte einander immer näher, indem sich der sie verbindende Verzweigungsschnitt immer mehr verkürzt. Sind beide Punkte zusammengefallen, so stossen in ihm zwar zwei Blätter der Fläche zusammen; indess kann man nicht mehr durch einen Umgang um den Punkt von einem Blatte in's andere gelangen: Man kann die Blätter in dem Punkte durch Biegung von einander entfernen, ohne den Charakter der Fläche dadurch zu ändern; auch darf man nicht einen Weg, der in dem einen Blatte bis zu dem Punkte läuft, in dem andern Blatte fortsetzen. Es haben dort zwar beide Blätter *diesen einen* Punkt gemein; die hier vereinigten Punkte sind aber sonst wie zwei ganz verschiedene Punkte zu behandeln und sollen demgemäss durch zwei verschiedene Buchstaben, ξ und η; bezeichnet werden. Wir sagen dann, dass dem Doppelpunkte der Curve die beiden Punkte ξ und η der Fläche entsprechen.

Die Normalform der Fläche und unser kanonisches Querschnittsystem auf ihr mögen nun so gewählt sein, dass die beiden nachher zusammenfallenden Verzweigungspunkte ein solches Paar bilden, um welches ein Schnitt b_ν — sagen wir b_p — herumgelegt ist. Nach der Deformation ist dann b_p eine in einem der beiden Blätter um den Punkt ξ herumlaufende geschlossene Curve. Der zugehörige Schnitt a_ν aber besteht jetzt aus einer Curve, welche von ξ ausgeht, bei dem

*) Aehnliche Grenzbetrachtungen sind auch von M. Marie a. a. O. angestellt, indem der Einfluss eines Doppelpunktes auf die Periodicitäts-Eigenschaften des Integrals $\int y\,dx$ bestimmt wird; vgl. die Anmerkung auf p. 794.

durch das Ziehen des Querschnittsystems ausgezeichneten Verzweigungsschnitte U in das andere Blatt übertritt (p. 799) und sodann in letzterem zum Punkte η zurückkehrt; dieser Weg verbindet also jetzt nur die Punkte ξ und η mit einander, *ohne jedoch eine geschlossene Curve zu bilden.*

Betrachten wir jetzt unsere p Integrale u_ν. Wenn auf $f=0$ ein neuer Doppelpunkt entsteht, so wird ein beliebiges Integral erster Gattung I dadurch in ein Integral dritter Gattung übergehen, denn die im Zähler des Differentials dI auftretende Function φ wird, gleich Null gesetzt, nicht nothwendig eine Curve darstellen, welche durch den neuen Doppelpunkt hindurchgeht. Es ist aber sehr wichtig, dass *die $p-1$ Normalintegrale erster Gattung $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$ von $f=0$ in die $p-1$ Normalintegrale erster Gattung $u'_1, u'_2, \ldots u'_{p-1}$ der deformirten Curve $f'=0$ übergehen*, wenn wir voraussetzen, dass die beiden durch den Schnitt b_p umschlossenen Verzweigungspunkte sich zu dem Doppelpunkte von f' vereinigt haben. Die Integrale $u_1, \ldots u_{p-1}$ nämlich ändern sich bei einem Umgange um den Querschnitt b_p nicht, da sie alle am Schnitte a_p die Periode Null haben. Folglich bleiben auch die Integrale $u'_1, u'_2, \ldots u'_{p-1}$ bei einem Umgange um b_p, d. i. um den innerhalb b_p liegenden Doppelpunkt, ungeändert; sie werden also in letzterem nicht logarithmisch unendlich: Es sind *keine* Integrale dritter Gattung; es sind vielmehr Normalintegrale erster Gattung, da auch ihre sonstigen Eigenschaften den betreffenden Forderungen genügen. Das Integral u_p dagegen hat am Schnitte a_p die Periode $2i\pi$; das aus ihm bei der Deformation entstehende Integral erhält also bei einem Umgange um den Schnitt b_p, d. i. um den Punkt ξ bez. η, einen Zuwachs gleich $2i\pi$; dasselbe wird somit in der That in ξ bez. η logarithmisch unendlich: *Es ist ein Integral dritter Gattung* und soll demgemäss mit $\Pi_{\xi\eta}$ bezeichnet werden.

Für die Integrale u_ν' nun sind die Grössen $a_{1p}, a_{2p}, \ldots a_{p-1,p}$ nicht mehr als Perioden zu betrachten; denn sie waren bez. gleich den Werthen der Integrale $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$, geführt über den Schnitt a_p, und letzterer ist für die deformirte Fläche keine geschlossene Curve mehr, stellt also auch nicht mehr einen selbstständigen Umgang dar. Da er aber die Punkte η und ξ unter einander verbindet, so haben wir:

$$a_{1p}=\int_\eta^\xi du'_1, \quad a_{2p}=\int_\eta^\xi du'_2, \ldots a_{p-1,p}=\int_\eta^\xi du'_{p-1}.$$

Es ist ferner $a_{ik}=a_{ki}$; und die Grössen $a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{p-1,p}$ sind Perioden des Integrals u_p, welches in $\Pi_{\xi\eta}$ übergeht. *Die $p-1$ Perioden des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$ an den Schnitten $b_1, b_2, \ldots b_{p-1}$ sind also in der That durch die Integrale $\int_\eta^\xi du_\nu$ gegeben.* Es ist somit $\Pi_{\xi\eta}$ für die

Curve f' auch direct ein *Normalintegral* dritter Gattung. In der That sind ja auch die Perioden desselben an den Schnitten $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$, wie die des Integrals u_p, sämmtlich Null; die Periode $2i\pi$ von u_p am Schnitte a_p dagegen gibt jetzt die logarithmische Periode des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$; die Periode a_{pp} dagegen wird unendlich gross, denn es ist:

$$a_{pp} = \int_{\eta}^{\xi} d\Pi_{\xi\eta},$$

und ξ, η sind Unendlichkeitspunkte von $\Pi_{\xi\eta}$. Eine unendlich grosse Periode aber ist als solche nicht mehr mitzuzählen. Damit hätten wir alle für das Normalintegral charakteristischen Eigenschaften abgeleitet.

VIII. Das Abel'sche Theorem und das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Die Differentiale und Integrale, deren wichtigste Eigenschaften wir erörtert haben, sind nun für die Formulirung gewisser geometrischer (oder algebraischer) Probleme von grosser Wichtigkeit, und zwar zunächst für die Fragen, welche wir früher mit Hülfe des Restsatzes behandelt hatten (vgl. p. 432 ff.). An den letzteren knüpfen wir hier wieder an.

Den Inhalt desselben kann man in einer symbolischen Form darstellen, welche dann direct zu den Anwendungen des Abel'schen Theorems hinüberleitet. Wenn nämlich zwei Punktgruppen G_Q und G_R durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden, so können wir diesen Umstand symbolisch durch die Gleichung:

$$G_Q + G_R = 0 \tag{1}$$

darstellen. Werden nun G_Q und G_R durch eine adjungirte Curve $A = 0$, G_Q und $G_{R'}$ durch eine andere $B = 0$, G_R und $G_{Q'}$ durch eine dritte $\alpha = 0$ ausgeschnitten, so sagt der Restsatz aus, dass auch $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden. In der bezeichneten symbolischen Fassung heisst dies aber, dass aus den drei Gleichungen:

$$G_Q + G_R = 0, \quad G_Q + G_{R'} = 0, \quad G_{Q'} + G_R = 0 \tag{2}$$

die vierte Gleichung: $G_{Q'} + G_{R'} = 0$ folgen soll; und hierin ist es ausgesprochen, dass *wir verschiedene symbolische Gleichungen der Form* (1) *beliebig nach den Gesetzen der Addition und Subtraction combiniren dürfen*. Die dadurch erhaltenen Resultate stimmen dann ihrem Inhalte nach mit dem Restsatze überein. Unsere Eintheilung der Schnittpunkte von $A = 0$ mit der Grundcurve $f = 0$ in zwei Gruppen G_Q und G_R war noch sehr willkürlich: wir hätten statt derselben ebenso gut andere (und auch gleichzeitig mehr als zwei) Gruppen aus den $G + R$ Schnittpunkten bilden können. Um diese Gleichberechtigung

aller (nicht in vielfachen Punkten von f liegenden) Schnittpunkte von $A = 0$ auszudrücken, werden wir diese Punkte einzeln einführen. Bezeichnen wir sie der Reihe nach mit $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\varrho)}$, wo $\varrho = Q + R$, so werden wir also an Stelle von (1) die folgende symbolische Gleichung setzen können:

$$G_{x^{(1)}} + G_{x^{(2)}} + G_{x^{(3)}} + \ldots + G_{x^{(\varrho)}} = 0, \tag{3}$$

wo nun die einzelnen Gruppen G aus je einem Punkte bestehen.

Es liegt die Frage nahe, ob man diese symbolischen Relationen durch wirkliche ersetzen kann, d. h. ob es solche Functionen $F(x)$ von x_1, x_2, x_3 gibt, dass für die nicht in singuläre Punkte von f fallenden Schnittpunkte $x^{(i)}$ einer adjungirten Curve mit f die *wirkliche* Gleichung besteht:

$$F(x^{(1)}) + F(x^{(2)}) + \ldots + F(x^{(\varrho)}) = 0, \tag{4}$$

wo auf der rechten Seite an Stelle von Null auch eine beliebige Constante stehen könnte.

Als solche Functionen werden wir nun die von uns behandelten algebraischen Integrale erkennen, und zwar, wenn es sich um Schnittpunktsysteme adjungirter Curven handelt, die (überall endlichen) Integrale erster Gattung. In der That erkennt man, dass die Function $F(x)$ *in keinem Punkte von f unendlich werden darf.* Wäre dies nämlich etwa in $x^{(1)}$ der Fall, so würde die Gleichung (4) nur noch bestehen können, wenn F gleichzeitig in einem anderen der ϱ Schnittpunkte negativ unendlich wird; legt man aber durch $x^{(1)}$ alle möglichen anderen Curven, so werden auch die $\varrho - 1$ übrigen Schnittpunkte andere und andere werden*), indem sie die ganze Curve f durchlaufen; d. h. F müsste in jedem Punkte von f unendlich werden, wodurch die Gleichung (4) wiederum illusorisch werden würde. F ist daher jedenfalls eine überall endliche Function von x; und es liegt somit nahe, für die Function $F(x)$ ein Integral erster Gattung zu wählen. Wir gehen daher jetzt von einem solchen aus und zeigen umgekehrt, dass für dasselbe ein Theorem der Form (4) wirklich besteht. Dies ist dann das Abel'sche Theorem für Integrale erster Gattung.

Letzteres ist rein algebraischer Natur, wenn man nicht von den Integralen, sondern von den Differentialen erster Gattung ausgeht; und dem entsprechend werden wir sogleich an der Hand rein algebraischer Rechnung zwei Beweise für dasselbe erbringen. Sobald man dann weiter zu den Integralen übergeht, muss man über den Lauf der Integrationswege in der zu $f = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche

---

*) Diese Schlussweise wird ungültig für Doppelpunkte von f; in der That treten bei nicht adjungirten Curven Integrale dritter Gattung auf; vgl. p. 817.

bestimmte Voraussetzungen machen und so das rein algebraische Gebiet verlassen, wie wir noch näher sehen werden.

Vor Durchführung jener beiden Beweise sei jedoch kurz geschildert, wie man nach Riemann unter Benutzung bekannter Sätze aus der Functionentheorie in sehr einfacher Weise zum Ziele gelangen kann.*) Es sei $B = 0$ eine adjungirte Curve von derselben Ordnung wie $A = 0$, welche nicht durch die Punkte $x^{(1)}, \dots x^{(\varrho)}$ hindurchgeht, und wir setzen:

$$\zeta = \frac{B}{A}.$$

Dann ist ζ eine algebraische Function von x_1, x_2, x_3, welche (insofern immer $f(x) = 0$) wie f verzweigt ist und in den ϱ Punkten $x^{(i)}$ einfach unendlich wird; und jedem Werthe von ζ entsprechen (vermöge $f = 0$) ϱ Punkte x. Man kann also umgekehrt die Punkte x von f vermöge $f = 0$ und $A\zeta - B = 0$ als ϱ-werthige Functionen des Parameters ζ darstellen.**) Dann wird auch der Differentialquotient eines Integrals erster Gattung (p. 790) nach ζ, welcher mit DJ bezeichnet sei:

$$DJ = \frac{dJ}{d\zeta} = \frac{\varphi \cdot \left(c\,x\,\frac{dx}{d\zeta}\right)}{a_x^{\,n-1}\,a_c}$$

eine ϱ-werthige Function von ζ, deren ϱ Werthe mit $DJ^{(1)}, \dots DJ^{(\varrho)}$ bezeichnet seien. Die letzteren sind daher die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades, welche sich durch Elimination der x_i und dx_i aus den Gleichungen:

$$A\zeta - B = 0, \quad A \,.\, d\zeta + \zeta \Sigma \frac{\partial A}{\partial x_i} dx_i - \Sigma \frac{\partial B}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

$$f(x) = 0, \quad a_x^{\,n-1} a_c \,.\, DJ = \varphi \,.\, \left(c\,x\,\frac{dx}{d\zeta}\right), \quad \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

ergibt, wo die zweite Gleichung eben aussagt, dass die Punkte $x + dx$ die Schnittpunkte von $A(\zeta + d\zeta) - B = 0$ mit $f = 0$ sein müssen. Die symmetrischen Functionen der Differentialquotienten $DJ^{(1)}, \dots DJ^{(\varrho)}$ dagegen (d. h. die Coëfficienten jener Gleichung) sind völlig *ein*deutige Functionen von ζ; insbesondere gilt dies auch für die Summe:

$$\Delta = DJ^{(1)} + DJ^{(2)} + \dots + DJ^{(\varrho)}.$$

Nun bleibt das Integral $\int \Delta\, d\zeta$ als Integral erster Gattung allenthalben endlich; es ist also eine Function von ζ, welche in allen Punkten der zur Darstellung von ζ dienenden Ebene eindeutig und endlich ist,

---

*) Vgl. R. A. F. §. 14.

**) Eine Substitution der Art ist die auf p. 776 für das elliptische Integral nach dem Vorgange von Brioschi benutzte.

und somit nach einem bekannten Satze*) eine Constante; und das Differential desselben ist gleich Null, d. h. wir haben:

$$\Delta d\zeta \equiv dJ^{(1)} + dJ^{(2)} + \ldots + dJ^{(\varrho)} = 0\,,^{**})$$

wo:
$$dJ^{(k)} = \left(\frac{\varphi \cdot (c\,x\,d\,x)}{a_x^{\,n-1}\,a_c}\right)_{x = x^{(k)}}.$$

Nun gibt es aber p linear von einander unabhängige Differentiale erster Gattung, und für jedes von ihnen gilt vorstehende Betrachtung. Insbesondere erhalten wir also für die Differentiale der Normalintegrale u_h den Satz:

Sind $x^{(i)}$ die Schnittpunkte von f mit einer adjungirten Curve A und $x^{(i)} + dx^{(i)}$ die Schnittpunkte mit einer zu A benachbarten Curve, von denen ϱ nicht mit den $x^{(i)}$ zusammenfallen mögen, so bestehen die p Gleichungen:

(5)
$$du_h^{(1)} + du_h^{(2)} + \ldots + du_h^{(\varrho)} = 0$$
$$(h = 1,\,2,\,3,\,\ldots\,p)\,.$$

Weiterhin werden wir sehen, dass mittelst dieser p Gleichungen auch umgekehrt im Allgemeinen p der Punkte $x^{(i)}$ durch die übrigen bestimmt sind, dass sie dagegen nicht mehr so viele Punkte bestimmen, wenn die Ordnung von $A = 0$ kleiner als $n - 2$ ist. Durch Integration erhält man nun das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung, welches dann an Stelle der symbolischen Gleichung (3) tritt (für $\varrho = Q + R$) und somit in engster Beziehung zum Restsatze steht. Wegen der soeben angedeuteten und später näher zu besprechenden Umkehrbarkeit des in den Gleichungen (5) ausgesprochenen Satzes *kann man in der That auch aus dem* Abel'*schen Theoreme wieder den Restsatz ableiten*, wie aus den Eingangs gemachten Erörterungen deutlich sein wird; und so wurde der Inhalt desselben zuerst gefunden. Es war aber von principieller Wichtigkeit, dass man diesen rein algebraischen Satz auch unabhängig von den transcendenten Functionen des Abel'schen Theorems einsehen lernte, während andererseits dieses Theorem den Inhalt des Restsatzes in einer für die Anwendungen sehr vortheilhaften Form darstellt. Weiterhin erlaubt aber auch das Abel'sche Theorem gewisse Berührungsformeln in einfachster Weise

---

*) Vgl. z. B. p. 274 ff. in Neumann's Theorie der Abel'schen Integrale oder Durège's Theorie der Functionen eines complexen Arguments.

**) Dass diese Summe Null sein muss, lässt sich auch algebraisch direct aus der Natur des erwähnten Eliminationsproblems ableiten; vgl. darüber Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 371 ff. — Man findet hier auch die betreffende Gleichung 4ten Grades für die Schnittpunkte einer Geraden mit einer C_4 wirklich aufgestellt; die entsprechende Gleichung für eine C_3 wurde von demselben ebenfalls angegeben, ib. p. 235.

aufzustellen, welche sich durch das Correspondenzprincip nicht sogleich in der übersichtlichen Gestalt angeben lassen würden. —

Wir wollen nun eine directe Ableitung der Gleichungen (5) geben. Dabei mag das Problem noch in der Weise verallgemeinert werden, dass wir auch Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven und Summen von Differentialen *dritter* Gattung betrachten; und zwar werden wir das Abel'sche Theorem für solche Integrale auf zwei verschiedene Weisen ableiten.

Wir beginnen mit Betrachtung des Schnittpunktsystems mit einer beliebigen Geraden.*) Letztere wählen wir zur Coordinatenaxe und führen derartig rechtwinklige Coordinaten ein, dass jene Gerade mit der X-Axe zusammenfällt, dass also ihre Gleichung durch $y=0$ gegeben ist. Die Einführung der neuen Coordinaten geschieht durch eine lineare Transformation. Wir haben nun früher gesehen, dass sich ein algebraisches Differential bei einer solchen um die erste Potenz der Substitutionsdeterminante als Factor ändert, und zwar ist dies die Folge davon, dass im Zähler die Determinante $(c x d x)$ auftritt. In der Normalform eines Differentials dritter Gattung steht aber im Nenner auch eine Determinante, nämlich $(\xi \eta x)$, so dass sich jene Substitutionsdeterminante forthebt (vgl. p. 772). Bezeichnen wir also jetzt mit x, y die rechtwinkligen Coordinaten, mit ξ, η und ξ', η' bez. die Coordinaten der Unendlichkeitspunkte, so geht unser Normaldifferential dritter Gattung über in ein Differential der Form:

$$\frac{\Omega_{n-2}(x, y) \,.\, dy}{(ax + by + c)\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}},$$

wo: $$a = \eta' - \eta, \quad b = \xi' - \xi, \quad c = \xi\eta' - \eta\xi'.$$

Wir betrachten eine Summe solcher Differentiale, gebildet für die n Schnittpunkte von $f=0$ mit $y=0$, wobei die dy so gewählt sein müssen, dass sie die Schnittpunkte einer zur X-Axe benachbarten Geraden mit f bestimmen. Diese benachbarte Gerade wollen wir in der unendlich kleinen Entfernung ε zur X-Axe parallel annehmen, so dass $y - \varepsilon = 0$ ihre Gleichung ist. Bezeichnen wir also mit x_i, y_i die Coordinaten der n Schnittpunkte, mit dx_i, dy_i die zugehörigen Differentiale, so bestehen die Gleichungen

$$y_i = 0, \quad dy_i = \varepsilon.$$

Unsere Summe von Differentialen ist sonach die folgende:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0) \,.\, \varepsilon}{(ax_i + c) \,.\, f'_{x_i}},$$

*) Den folgenden Beweis des Theorems verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill.

wo der Ausdruck f'_{x_i} bezeichnen soll, dass in dem partiellen Differentialquotienten von f nach x auch $y = 0$ und $x = x_i$ gesetzt werden soll. Der Factor ε ist allen Gliedern der Summe gemeinsam und kann also vor dieselbe gesetzt werden. Die dann übrig bleibende Summe ist bekanntlich weiter nichts als die Entwicklung des Ausdrucks $\frac{\Omega(x, 0)}{a \cdot f(x, 0)}$ nach Partialbrüchen, wenn man in dieser Entwicklung $x = -\frac{c}{a}$ setzt. Wir haben daher zunächst die Gleichung:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0)}{(ax_i + c) \cdot f'_{x_i}} = -\frac{1}{a} \frac{\Omega_{n-2}\left(-\frac{c}{a}, 0\right)}{f\left(-\frac{c}{a}, 0\right)},$$

wenn: $\qquad f(x, 0) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

Nun genügt die in einem Normaldifferentiale auftretende Function Ω nach den früheren Festsetzungen (p. 791) der Bedingung:

$$\Omega_{n-2}(\eta \xi x)(\zeta \xi x) \equiv (\xi \eta \zeta)^2 \cdot f + (\xi \eta x) \cdot N,$$

wo ζ ein beliebiger Punkt ist; oder in unserm Coordinatensysteme, wenn wir noch $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 1$ nehmen:

$$\Omega_{n-2} \cdot (x\eta' - y\xi') \cdot (y\xi - x\eta) \equiv c^2 \cdot f + (ax + by + c) \cdot N;$$

eine Identität, welche man in Rücksicht auf die Eigenschaften von Ω auch leicht wieder direct bestätigt. Aus ihr folgt für $y = 0$, $x = -\frac{c}{a}$:

$$\Omega_{n-2}\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \cdot \eta \cdot \eta' = -a^2 \cdot f\left(-\frac{c}{a}, 0\right).$$

Multipliciren wir also schliesslich in (6) auf beiden Seiten mit $\varepsilon = dy_i$, so haben wir, da $a = \eta' - \eta$ die Relation:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2} dy}{(ax + by + c) f'_x}\right)_i = \varepsilon \frac{\eta' - \eta}{\eta \cdot \eta'} = \frac{\eta' - \varepsilon}{\eta'} - \frac{\eta - \varepsilon}{\eta},$$

wo der Index i an dem eingeklammerten Ausdrucke bezeichnen soll, dass in ihm $x = x_i$, $y = 0$ gesetzt werden soll.

In den beiden rechts auftretenden Termen steht im Nenner die linke Seite der Gleichung $y = 0$, geschrieben bez. in den Coordinaten der beiden Unstetigkeitspunkte, im Zähler die linke Seite der Gleichung der benachbarten Linie $y - \varepsilon = 0$, geschrieben bez. in denselben Coordinaten. Ersetzen wir also die X-Axe durch eine beliebige Gerade $u_x = 0$, bezeichnen die beiden Unendlichkeitspunkte des Differentials dritter Gattung wieder mit ξ und η und schreiten von den Schnittpunkten $x^{(i)}$ der Linie u zu den Schnittpunkten einer Linie $u + du$ fort, deren Gleichung durch $\Sigma(u_i + du_i) x_i = 0$ gegeben ist, so wird auf der rechten Seite von (7):

$\eta = u_\xi, \quad \eta' = u_\eta, \quad \eta - \varepsilon = \Sigma \xi_i (du_i + u_i), \quad \eta' - \varepsilon = \Sigma \eta_i (du_i + u_i).$

Für die n Schnittpunkte $x^{(i)}$ und $x^{(i)} + dx^{(i)}$ zweier Geraden $u_x = 0$ und $\Sigma (u_i + du_i) x_i = 0$ mit $f = 0$ besteht somit die Differentialgleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2}(c\,x\,dx)}{(\xi\,\eta\,x)\,n\,.\,a_x^{n-1}\,a_c} \right)_i = \frac{\Sigma \eta_i du_i}{u_\eta} - \frac{\Sigma \xi_i du_i}{u_\xi} = d \left(\log \frac{u_\eta}{u_\xi} \right).$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, aus der sich durch Integration das Abel'sche Theorem ergibt, zunächst allerdings nur für die Schnittpunkte einer Geraden mit f. Wenden wir aber auf die Grundcurve eine eindeutige Transformation $x_i = \varphi_i(y)$ an, wo die φ_i von der m^{ten} Ordnung sind, so tritt an Stelle von $u_x = 0$ die Curve m^{ter} Ordnung $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; ferner geht ein Normaldifferential dritter Gattung wieder in ein solches über (p. 796). Schreiben wir also nach der Transformation wieder x statt y und bezeichnen die Gleichung der neuen Grundcurve mit $\alpha_x^{\nu} = 0$; so erhalten wir die Differentialgleichung (7) in der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2}(c\,x\,dx)}{(\xi\,\eta\,x)\,.\,\nu\,.\,\alpha_x^{\nu-1}\,\alpha_c} \right)_i = d \left(\log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)} \right), \tag{8}$$

wo $\varphi(x) = \Sigma u_i \varphi_i(x)$ gesetzt ist. Die Summe auf der linken Seite enthält n Glieder, während φ und f sich in $m\nu$ Punkten schneiden, wenn ν die Ordnung der neuen Curve $F \equiv \alpha_x^{\nu} = 0$ bedeutet. Dies liegt daran, dass eine Curve des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ die neue Curve $f = 0$ nur in n beweglichen Punkten trifft. Gehen wir also von einer Curve φ des Netzes zu einer benachbarten über, so ändern sich nur n der $m\nu$ Schnittpunkte, wobei aber auch (bei passender Wahl der Transformation von F in eine Curve f) $n = m\nu$ sein kann. In der That verschwinden ja für die gemeinsamen auf f gelegenen Punkte der beiden benachbarten Curven die $dx_k^{(i)}$ sämmtlich, so dass die entsprechenden Differentiale in der Summe von selbst ausfallen müssen. Die Gleichung (8) stellt also *die Differentialgleichung des* Abel'*schen Theorems für Integrale dritter Gattung in seiner allgemeinsten Form dar;* in ihr müssen die dx_k so gewählt sein, dass die Punkte $x_k^{(i)} + dx_k^{(i)}$ das Schnittpunktsystem einer zu $\varphi = 0$ benachbarten Curve mit f bilden.

Die Integration der Gleichung (8) können wir uns so bewerkstelligt denken, dass sich das System der Punkte $x^{(i)}$ auf $f = 0$ von einer Lage, in welcher es der Bedingung $\varphi = 0$ genügt, zu einer andern Lage fortbewegt, in welcher es durch eine Curve $\psi = 0$ ausgeschnitten wird, die mit $\varphi = 0$ von derselben Ordnung ist. Man kann dieses dadurch prägnanter hervortreten lassen, dass man einen

Curvenbüschel $\varphi + \lambda\psi = 0$ betrachtet*) und zwischen den Schnittpunktsystemen, welche $f = 0$ mit $\varphi = 0$ ($\lambda = 0$) und $\psi = 0$ ($\lambda = \infty$) gemein hat, diejenigen einschaltet, welche $f = 0$ mit $\varphi + \lambda\psi = 0$ (für zwischen 0 und ∞ liegende Werthe von λ) bestimmt. Diese Zwischensysteme verbinden alsdann die Grenzsysteme der Art, dass während λ sich von 0 bis ∞ bewegt, die Punktsysteme sich von den unteren Grenzen der Integrale zu den oberen hinbewegen. Bei der Integration selbst hat man also allein mit der einen Variabeln λ zu thun. Durch Integration der Gleichung (8) ergibt sich so das Abel-sche Theorem in der folgenden Fassung, wo $S_{\xi\eta}$ wie auf p. 790 definirt ist**):

Die Summe von mn gleichartigen (d. i. in gleicher Weise gebildeten) Normalintegralen dritter Gattung mit den Unendlichkeitspunkten ξ, η, deren untere Grenzen $x^{(i)}$ die mn Werthsysteme sind, welche den mn Schnittpunkten von $f = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ entsprechen, und deren obere Grenzen $y^{(i)}$ die mn Schnittpunkte mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\psi = 0$ angeben, ist gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function; und zwar besteht die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x^{(i)}}^{y^{(i)}} dS_{\xi\eta} = \log \frac{\psi(\eta) \cdot \varphi(\xi)}{\varphi(\eta) \cdot \psi(\xi)}. \tag{9}$$

Hier kann man statt $S_{\xi\eta}$ auch $\Pi_{\xi\eta}$ schreiben, wo sich $\Pi_{\xi\eta}$ von $S_{\xi\eta}$ höchstens um ein hinzutretendes Integral erster Gattung unterscheidet (p. 804); denn wir werden sogleich sehen, dass die entsprechende Summe von Integralen erster Gattung verschwindet. Hinzuzufügen ist noch eine Bemerkung über die für die Integrale gewählten Integrationswege. Lässt man dieselben beliebig, so können auf der rechten Seite noch beliebige ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln von $\Pi_{\xi\eta}$ hinzutreten (p. 805). Ordnet man aber die Punkte $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ einander paarweise so zu, dass der Punkt $x^{(i)}$ in $y^{(i)}$ übergeht***),

*) Die Variable λ spielt dann dieselbe Rolle, wie oben die Variable ζ in dem Büschel $A\zeta - B = 0$ bei Riemann's Beweise, vgl. p. 810.

**) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 47. — Ein einfacher Beweis des Theorems (ohne Benutzung der Differentialgleichung) ergibt sich mittelst Riemann'scher Principien, wenn man das Integral $\int \log \frac{\varphi}{\psi}\, d\Pi_{\xi\eta}$ um die ganze Berandung der zerschnittenen Riemann'schen Fläche und um die Punkte ξ, η, $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ herumführt; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 125, und für Integrale erster Gattung: Weber, Math. Annalen, Bd. 8, p. 49. — Das Theorem wurde entdeckt von Abel für hyperelliptische Integrale: Crelle's Journal, Bd. 3, p. 313, allgemein 1826: Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes, Mémoires des savants étrangers, vol. 7, 1841.

***) Diese Zuordnung ist übrigens keineswegs eine völlig bestimmte.

wenn man in dem Büschel $\varphi + \lambda\psi = 0$ von $\varphi = 0$ zu $\psi = 0$ fortschreitet (wie es oben festgesetzt wurde), so erhält man auf der linken und rechten Seite von (9) den Werth Null, sobald man die Curven φ, ψ einander unendlich nahe rücken lässt; und also treten bei entsprechender Wahl der Integrationswege keine Perioden von $\Pi_{\xi\eta}$ hinzu. Bei dem Uebergange von φ zu ψ durch den Büschel $\varphi + \lambda\psi$ darf aber keiner der Punkte $x^{(i)}$ den Punkt ξ oder η passiren, denn für die entsprechende Lage von $\varphi + \lambda\psi$ würde $\Pi_{\xi\eta}$ unendlich gross, und somit die Gleichung (9) illusorisch werden oder jedenfalls einer näheren Untersuchung bedürfen. Endlich kann man $y^{(i)}$, $y^{(k)}$ und $x^{(i)}$, $x^{(k)}$ einander unendlich nahe rücken lassen, wodurch dann zwei Integrale der Summe einander gleich werden, vorausgesetzt, dass man ihre beiden Integrationswege in einander überführen kann, ohne einen Unendlichkeitspunkt von $\Pi_{\xi\eta}$ oder einen der für die Perioden von $\Pi_{\xi\eta}$ charakteristischen Verzweigungspunkte zu überschreiten; und letzteres soll daher angenommen werden. Wir fassen diese Regeln in folgendem Satze zusammen: *In der Gleichung* (9) *sind die obern und untern Grenzen der links benutzten Integrationswege einander so zugeordnet, dass die Wege unendlich klein werden, wenn man die Curven* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *unendlich nahe zusammenrücken lässt; und die verschiedenen Wege müssen so liegen, dass je zwei direct in einander überführbar sind, wenn ihre Grenzen gleich werden, und keiner von ihnen (oder alle) darf den Weg schneiden, auf welchem man von* $\log\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}$ *zu* $\log\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}$ *gelangt.**)

Für die geometrischen Untersuchungen sind nun die Integrale erster und diejenigen dritter Gattung von besonderer Wichtigkeit, welche in einem Doppelpunkte von f unendlich werden. Solche Integrale erhält man aus den obigen, wenn Ω_{n-2} den Factor $(\xi\eta x)$ enthält; und es kommt dann darauf an, ob die zurückbleibende Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch einen Doppelpunkt von f nicht mehr hindurchgeht (p. 794), oder ob dieselbe wieder zu f adjungirt ist. Im ersten Falle haben wir $\xi_i = \eta_i$, es wird also $\varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ und $\psi(\xi) = \psi(\eta)$, so dass die rechte Seite von (9) zu Null wird. In beiden Fällen steht in Gleichung (6) in jedem Gliede der Summe links im Zähler eine Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von x, während die lineare Function im Nenner fortfällt; eine solche Summe aber ist

*) Bei diesen Voraussetzungen kann man nach dem Satze über Vertauschung von Parameter und Argument (p. 805) die Gleichung (9) auch in der Form schreiben (Cl. u. G. A. F. p. 127):

$$\sum_i \int_\xi^\eta d\Pi_{x^{(i)}y^{(i)}} = \log\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} - \log\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}.$$

nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Partialbruchzerlegung gleich Null, so dass auf der rechten Seite von (9) auch im zweiten Falle eine Null auftritt. Man hat also den Satz:

Die Summe von gleichartigen Integralen erster Gattung) oder von solchen Integralen dritter Gattung, die nur in einem Doppelpunkte von f unendlich werden, von dem Schnittpunktsysteme der Curve $f = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ ausgedehnt bis zu dem Schnittpunktsysteme von $f = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\psi = 0$, ist immer gleich Null.**)*

Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, dass die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nicht beide durch den Doppelpunkt hindurchgehen. In der That wird er für die in dem Doppelpunkte unendlich werdenden Integrale dritter Gattung dann auch ungültig, indem auf der rechten Seite nicht mehr Null auftritt. Sei nämlich für den Augenblick

$$\varphi = \varphi_x^m, \quad \psi = \psi_x^m,$$

so wird in diesem Falle, wenn y_i die Coordinaten des Doppelpunktes sind:

$$\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{\varphi_y^{m-1}\varphi_\alpha}{\psi_y^{m-1}\psi_\alpha}, \quad \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} = \frac{\varphi_y^{m-1}\varphi_\beta}{\psi_y^{m-1}\psi_\beta},$$

wo α ein Punkt auf der einen Tangente von y (also z B. ein zu ξ auf der Riemann'schen Fläche benachbarter Punkt, vgl. p. 806) ist und β ein Punkt der anderen Tangente von y (z. B. benachbart zu η). Diese beiden Quotienten aber sind nicht mehr einander gleich; die Differenz ihrer Logarithmen gibt also nicht mehr Null.

Für Integrale erster Gattung bleibt dagegen der Satz auch bestehen, wenn die Curven φ, ψ durch die Doppelpunkte von f hindurchgehen; insbesondere bestehen daher für *adjungirte* Curven p verschiedene Gleichungen der Form (9), wenn man rechts Null setzt. Man erkennt dies direct aus (6), denn auf der linken Seite dieser Gleichung erhält man dann eine Summe der Form:

$$\Sigma_i \frac{\varphi_{n-3}(x_i, 0)}{f' x_i},$$

*) Dieser Satz folgt übrigens auch direct aus (9), denn letztere Gleichung gilt immer, wie man auch $S_{\xi\eta}$ für dieselben Punkte ξ, η bilden mag; die Differenz zweier solcher Werthe von $S_{\xi\eta}$ ist aber nach p. 792 ein Integral erster Gattung.

**) Ein anderer Fall, wo auf der rechten Seite der Werth Null erscheint, tritt ein, wenn die Curve des Büschels $\varphi + \lambda\psi = 0$, welche durch ξ geht, von selbst auch η enthält. Ist nämlich ϱ deren Parameter, so ist gleichzeitig:

$$\varphi(\xi) + \varrho\psi(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\eta) + \varrho\psi(\eta) = 0,$$

also in der That: $\varphi(\xi) \cdot \psi(\eta) = \varphi(\eta) \cdot \psi(\xi)$.

und diese Summe verschwindet nach einem bekannten Satze der Algebra. In der That würde ja auch, indem Ω den Factor $ax+by+c$ erhält:

$$\Omega_{n-2}(x,\ 0) = \varphi_{n-3}(x,\ 0)\ .\ (ax+c)\ ;$$

und dieser Ausdruck verschwindet für $x = -\frac{c}{a}$. So weit sich also das Theorem auf Integrale erster Gattung bezieht, führt es uns zu unserem Ausgangspunkte zurück; denn sein Inhalt entspringt auch aus der Differentialgleichung (5) durch Integration. In den Gleichungen desselben kommen auch nur die nicht in singulären Punkten von f liegenden Schnittpunkte vor, wie es sein soll, denn die übrigen sind den Curven φ und ψ, welche die Grenzen bestimmen, gemeinsam. Die Zahl p der so gefundenen transscendenten Bedingungen stimmt genau mit der Anzahl von algebraischen Bedingungen überein, welche nach dem Früheren für die Schnittpunkte einer Curve m^{ter} Ordnung mit f bestehen müssen, wenn $m > n-3$. Wie sich dies für $m \leqq n-3$ modificirt, werden wir später sehen.

Man wird jetzt noch die weitere (schon oben angedeutete) Frage aufwerfen, ob man umgekehrt, wenn die p Gleichungen (5) oder deren Integralgleichungen bestehen, immer Curven angeben kann, welche die Grundcurve bez. in den Punkten schneiden, die in den Grenzen der Integrale auftreten, ob also das betreffende Punktsystem durch die Gleichungen (5) als das vollständige Schnittsystem von f mit einer adjungirten Curve völlig charakterisirt ist. Diese Frage werden wir weiterhin in der That bejahend beantworten.

Zuvor wollen wir das Abel'sche Theorem in anderer Weise ableiten (ohne Benutzung einer eindeutigen Transformation), um so mehr, als dabei der Zusammenhang desselben mit anderen rein algebraischen Sätzen hervortreten wird, welche im Wesentlichen von Jacobi herrühren.

Es seien in der Ebene μ beliebige Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\mu)}$ gegeben, deren Gesammtheit durch eine Gleichung μ^{ter} Klasse in Liniencoordinaten, nämlich $u_\chi{}^\mu = 0$, dargestellt werden mag. Wir verbinden diese Punkte einzeln mit zwei ebenfalls ganz willkürlich gewählten Punkten ξ und η. Die Gleichungen der beiden so erhaltenen Systeme von je μ Strahlen sind dann bez. $(\chi x \xi)^\mu = 0$ und $(\chi x \eta)^\mu = 0$; und man kann setzen:

$$(10) \qquad (\chi x \xi)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \xi x^{(i)}), \quad (\chi x \eta)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \eta x^{(i)})\ .$$

Diese beiden Strahlensysteme schneiden sich in μ^2 Punkten, von denen μ eben die Punkte $x^{(i)}$ sind; ausserdem haben sie also noch

$\mu(\mu-1)$ Punkte mit einander gemein. Durch diese „übrigen Schnittpunkte" — so sollen dieselben kurz bezeichnet werden — kann man jedenfalls noch eine Curve der Ordnung $2\mu-2$ legen:

$$\Theta_x^{2\mu-2}=0,$$

denn eine solche ist erst durch $(\mu-1)(2\mu+1)$ Bedingungen festgelegt; es bleiben also in ihr noch μ^2-1 willkürliche Parameter, über die wir erst später in passender Weise verfügen werden. Nach diesen Festsetzungen wollen wir zeigen, dass Folgendes eine identische Gleichung ist*):

$$(11)\quad \mu^2\Theta_x^{2\mu-2}\prod_{i=1}^{i=\mu}(\chi x^{(i)}\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x^{(i)}\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)$$
$$+\sum_{k=1}^{k=\mu}\left\{\left(\Theta_y^{2\mu-2}(\xi\eta y)^2\right)_k\prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k\left((\chi z\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' z\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)(x\xi z)(x\eta z)\right)_i\right\}$$
$$=A\,.\,(\chi x\xi)^\mu+B\,.\,(\chi x\eta)^\mu\,.$$

Hier steht links im zweiten Terme eine Summe von μ Gliedern, deren jedes wieder aus dem Producte von $\Theta_{x^{(k)}}^{2\mu-2}(\xi\eta x^{(k)})$ in $\mu-1$ andere Factoren besteht; denn der Index k an dem Productzeichen Π soll andeuten, dass in dem Producte, welches im k^{ten} Gliede der Summe auftritt, der dem Index $i=k$ entsprechende Factor ausgelassen werden soll; ferner soll der Index k an dem eingeklammerten Ausdrucke andeuten, dass in ihm $y=x^{(k)}$, und der Index i an der anderen Klammer, dass in ihr $z=x^{(i)}$ zu setzen ist; die Symbole χ' endlich sollen mit χ gleichwerthig sein, so dass $u_\chi^\mu\equiv u_{\chi'}^\mu$. Um die Richtigkeit der Gleichung (11) nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass der links stehende Ausdruck eine Curve darstellt, welche durch alle μ^2 Schnittpunkte von $(\chi x\xi)^\mu=0$ und $(\chi x\eta)^\mu=0$ hindurchgeht. Setzen wir zu dem Zwecke zunächst $x=x^{(rs)}$, d. h. gleich dem Schnittpunkte der Verbindungslinie von $x^{(r)}$ und ξ mit der Verbindungslinie von $x^{(s)}$ und η, so verschwindet der erste Term links, weil Θ durch diesen Punkt hindurchgehen soll, und jedes Glied der Summe im zweiten Terme ist Null wegen der Gleichungen

$$(x^{(rs)}\xi x^{(r)})=0,\quad (x^{(rs)}\eta x^{(s)})=0,$$

denn einer dieser Factoren kommt in jedem Gliede der Summe vor. Setzen wir in (11) ferner $x=x^{(r)}$, so kommt links ebenfalls Null, indem sich die beiden Terme gegen einander aufheben. In der

*) Denkt man sich die beiden Parameter, welche die Strahlen der von ξ und η ausgehenden Büschel bestimmen, als Veränderliche eingeführt, so kann man diese Gleichung auch durch zweimalige Anwendung einer gewöhnlichen Partialbruchzerlegung erzeugen; vgl. p. 779 ff.

μ-gliedrigen Summe nämlich verschwindet alsdann allein das dem Index $k = r$ entsprechende Glied nicht. Für $k = r$ aber bestehen die Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{aligned} \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(r)}\eta x^{(i)}) \,.\, (\xi\eta x^{(r)}) &= \mu\, (\chi x^{(r)}\eta)^{\mu-1}\, (\chi\xi\eta) \\ \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(r)}\xi x^{(i)}) \,.\, (\eta\xi x^{(r)}) &= \mu\, (\chi x^{(r)}\xi)^{\mu-1}\, (\chi\eta\xi), \end{aligned}$$

welche sich aus den Gleichungen (10) durch Polarenbildung leicht ergeben; und vermöge dieser Gleichungen wird das allein übrig bleibende r^{te} Glied der Summe gerade negativ gleich dem ersten Terme links, wie es sein soll. Der Ausdruck links verschwindet also in der That für alle μ^2 Schnittpunkte der beiden Systeme von je μ Strahlen, q. e. d.

Wir bilden nun auf beiden Seiten der Gleichung (11) die $(\mu - 1)^{\text{te}}$ Polare von ξ und setzen dann $x = \eta$; d. h. wir setzen auf beiden Seiten $x = \xi + \lambda\eta$ und suchen die Coëfficienten von $\lambda^{\mu-1}$. Auf der rechten Seite erhalten wir dann identisch Null. Es wird also:

$$(13)\quad \mu^2 \binom{2\mu-2}{\mu-1} \,.\, \Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1} \prod_{i=1}^{i=\mu} \left[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)\right]_i$$
$$= -\sum_{k=1}^{k=\mu} \left\{ \left[\Theta_x^{2\mu-2}(\xi\eta x)^2\right]_k \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k \left[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)(\eta\xi x)(\xi\eta x)\right]_i \right\},$$

wo die Indices i, k an den eckigen Klammern aussagen, dass in letzteren $x = x^{(i)}$ bez. $x = x^{(k)}$ zu nehmen ist. Jedes Glied der rechts stehenden Summe enthält das vollständige (d. h. auf alle μ Werthe des Index i sich beziehende) Product:

$$-\prod_{i=1}^{i=\mu} (\xi\eta x^{(i)})\,(\eta\xi x^{(i)}) = -\,(\chi\xi\eta)^\mu\,(\chi'\eta\xi)^\mu = (-1)^{\mu+1}\,[(\chi\xi\eta)^\mu]^2 .$$

Diesen Factor wollen wir vor das Summenzeichen setzen, und dann auf beiden Seiten mit demselben, sowie mit dem links auftretenden vollständigen Producte dividiren; alsdann erhalten wir folgenden Satz:

Zwischen μ beliebigen Punkten $x^{(i)}$ der Ebene, dargestellt durch $u_\chi{}^\mu = 0$, und zwei ebenfalls beliebigen Punkten ξ, η besteht die identische Gleichung:

$$(14)\quad \mu^2 \binom{2\mu-2}{\mu-1} \frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2}\,(-1)^\mu = \sum_{k=1}^{k=\mu} \left[\frac{\Theta_x^{2\mu-2}}{(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)}\right]_k,$$

wo $\Theta = 0$ durch alle übrigen $\mu(\mu-1)$ Schnittpunkte der Verbindungslinien von ξ und η mit den Punkten $x^{(i)}$ geht.

Aus dieser Identität ergibt sich nun durch eine leichte Umformung der sogenannte Jacobi'sche Satz, aus dem dann weiter das Abel'sche Theorem abgeleitet werden kann. Wir nehmen insbesondere an, dass jene μ Punkte die Schnittpunkte zweier Curven

$$f \equiv a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad \varphi \equiv \alpha_x^m = 0$$

seien, welche alle getrennt liegen mögen, so dass $\mu = mn$. Dann gehen die beiden von ξ und η ausgehenden Systeme zu je μ Strahlen durch alle Schnittpunkte von f und φ, d. h. wir können setzen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} (\chi x \xi)^\mu &= A_x^{\mu-n} \,.\, f + B_x^{\mu-m} \,.\, \varphi \\ (\chi x \eta)^\mu &= C_x^{\mu-n} \,.\, f + D_x^{\mu-m} \,.\, \varphi \,. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = x^{(ik)}$, so werden nur die linken Seiten gleich Null, nicht aber f und φ. *Für die übrigen Schnittpunkte muss also die Determinante verschwinden:*

$$(16) \qquad \Delta \equiv \Delta_x^{2\mu-m-n} = A \,.\, D - B \,.\, C \,,$$

Setzt man aber in (15) $x = x^{(i)}$, so verschwinden auch f und φ. Bildet man also die erste Polare von ξ und η in Bezug auf $(\chi x \xi)^\mu = 0$ und $(\chi x \eta)^\mu = 0$ für $x = x^{(i)}$, so kommt, indem man die in f, φ multiplicirten Terme als verschwindend auslässt:

$$\begin{aligned} \mu\, (\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\chi \eta \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\eta + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i \,, \\ \mu\, (\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\chi \xi \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\xi + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i, \\ \mu\, (\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1} (\chi \eta \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\eta + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i, \\ \mu\, (\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1} (\chi \xi \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\xi + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i. \end{aligned}$$

In der zweiten und dritten Gleichung haben die linken Seiten wegen der Factoren $(\chi \xi \xi)$, $(\chi \eta \eta)$ den Werth Null. Nach dem Multiplicationssatze der Determinanten wird daher $(\mu = mn)$:

$$\mu \begin{vmatrix} (\chi x \xi)^{\mu-1} (\chi \eta \xi) & 0 \\ 0 & (\chi x \eta)^{\mu-1} (\chi \xi \eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_x^{n-1} a_\eta & \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta \\ a_x^{n-1} a_\xi & \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi \end{vmatrix}$$
$$= - \Delta \,.\, (a \alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1} \,,$$

wenn man sich für x immer $x^{(i)}$ geschrieben denkt, und wenn $u_i = (\xi \eta)_i$ gesetzt wird. Mittelst dieser Relation können wir in (14) die rechts auftretenden Nenner durch Δ und die Functionaldeterminante von f, φ und u (d. i. $\overline{\xi \eta}$) ausdrücken. Die Form Δ hebt sich dann gegen den Zähler fort, wenn wir gleichzeitig

$$\Theta_x^{2\mu-2} = U_x^{m+n-2} \,.\, \Delta_x^{2\mu-m-n}$$

setzen, wo U eine ganz beliebige Function der Ordnung $m + n - 2$ ist. Letzteres darf man in der That immer, denn der Curve $\Theta = 0$ war *nur* die Bedingung auferlegt durch die $\mu\,(\mu - 1)$ übrigen Schnittpunkte zu gehen; und diese Bedingung wird durch $\Delta = 0$ erfüllt.

Mittelst der angegebenen Substitution nimmt nun die Gleichung (14) folgende Gestalt an:

$$(17)\quad \sum_{k=1}^{k=\mu}\left(\frac{U_x^{n+m-2}}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right)_k = (-1)^{\mu-1}\cdot\mu\binom{2\mu-2}{\mu-1}\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\,\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2},$$

wo $\mu = mn$, $u_i = (\xi\eta)_i$, und wo der Index k an dem eingeklammerten Ausdrucke aussagt, dass in letzterem $x = x^{(k)}$ gesetzt werden soll. Dieses ist die Gleichung des Jacobi'schen Satzes; derselbe lautet:

Sind $f = 0$, $\varphi = 0$ zwei Curven n^{ter} und m^{ter} Ordnung, ist $u_\chi^{mn} = 0$ die Gleichung ihrer mn (getrennt liegenden) Schnittpunkte in Liniencoordinaten, ferner Δ durch die Gleichung (16) *definirt, U eine beliebige ganze homogene Function der Ordnung $n + m - 2$, endlich $\Theta = \Delta U$, so besteht für die Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$ und zwei beliebige andere Punkte ξ, η immer die Gleichung* (17).

Einen besonders wichtigen Specialfall dieses Satzes heben wir noch hervor. Setzt man nämlich

$$U_x^{n+m-2} = V_x^{n+m-3}\cdot u_x = V_x^{n+m-3}\cdot(\xi\eta x),$$

so wird wegen $u_\xi = 0$ und $u_\eta = 0$ auch $\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1} = 0$; und wir erhalten so die Gleichung*):

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{i=\mu}\left(\frac{V_x^{n+m-3}\cdot u_x}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right)_i = 0.$$

Diese Gleichung hängt *allein* von den Coordinaten der mn Schnittpunkte der Curven f, φ und von den Coëfficienten ihrer Gleichungen ab (nicht mehr von den willkürlichen Punkten ξ, η) und sind deshalb von besonderer Wichtigkeit. Dieselben sind in der That von der Linie u völlig unabhängig, denn für einen Schnittpunkt von f und φ kann man immer setzen (vgl. p. 769)

---

*) Für diesen Fall ist obiger Satz von Jacobi gegeben: Theoremata nova algebraica, Crelle's Journal, Bd. 14, p. 281. Die allgemeinere Gleichung (17) findet sich bei Cl. u. G. A. F. p. 44. Für die Darstellung des Beweises im Texte benutzte der Herausgeber einige mündliche Bemerkungen von Gordan. — Die Gleichung (18) ist eine Erweiterung eines auf p. 817 f. für eine binäre Veränderliche x ausgesprochenen Satzes, welcher in homogener Form dahin lautet, dass wenn $x_1^{(i)} : x_2^{(i)}$ die Wurzeln einer Gleichung

$$a_x^n \equiv (a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0$$

sind, die Identität besteht:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{V_x^{n-2}u_x}{(au)\,a_x^{n-1}}\right)_i = 0,$$

wo V eine beliebige binäre Form $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. In Betreff einer Erweiterung für beliebig viele Veränderliche vgl. Clebsch, Crelle's Journal, Bd. 63, p. 224 ff.

$$\varrho_i x_k^{(i)} = [(a\alpha)_k a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}]_{x=x^{(i)}}\,.$$

Die Function V_x^{n+m-3} ist noch ganz beliebig; man kann daher alle möglichen Gleichungen (18) aus $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ beliebig gewählten linear zusammensetzen. Aber $V(x^{(i)})$ kann man wegen $f(x^{(i)}) = 0$, $\varphi(x^{(i)}) = 0$ auch durch

$$V(x^{(i)}) + A f(x^{(i)}) + B\varphi(x^{(i)})$$

ersetzen, wo A von der $(m-3)^{\text{ten}}$, B von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung in $x^{(i)}$ ist, ohne dass dadurch die betreffende Gleichung (18) geändert würde. Vermöge $f = 0$, $\varphi = 0$ kann man also alle Gleichungen (18) aus

$$\tfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - \tfrac{1}{2}(m-2)(m-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = mn-1$$

unter ihnen herstellen.

Aus diesen $mn-1$ Gleichungen kann man dann die Verhältnisse der mn Grössen:

$$S_i = \frac{1}{\varrho_i} = \left(\frac{u_x}{(a\alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}}\right)_i$$

linear berechnen. Andererseits aber kann man aus je mn der Gesammtheit der $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ Gleichungen (18) diese Grössen eliminiren und erhält so eine Anzahl von Relationen zwischen den Coordinaten der Schnittpunkte von f und φ, in denen die Coëfficienten von f und φ nicht mehr vorkommen, die also *allein* von jenen Coordinaten abhängen; und zwar wird die Zahl dieser Relationen, da nur die Verhältnisse der mn Grössen S_i vorkommen, gleich

$$\tfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - mn + 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Für $m = n$ stimmt dies überein mit dem früher erhaltenen Resultate, dass zwischen den $2n^2$ Coordinaten der n^2 Punkte $(n-1)(n-2)$ Relationen bestehen sollen (vgl. p. 755). Für $m > n$ können diese Relationen aber nicht von einander unabhängig sein; denn sonst könnte es eintreten, dass

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \geqq 2mn$$

wird, d. h. die Zahl der Relationen die der Unbekannten übertrifft, was nicht sein darf. Die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen zwischen den Coordinaten der mn Punkte haben wir ja auch schon früher gleich $mn - 3n + 1$ gefunden. Man wird indess verlangen müssen, dies Resultat direct aus der Natur der Relationen abzuleiten, zu welchen die Gleichungen (18) Veranlassung gaben, oder aus letzteren Gleichungen selbst; und so ist es in der That von Jacobi geschehen*), doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

*) Vgl. den auf p. 755 erwähnten Aufsatz desselben.

Das Vorstehende gilt zunächst nur für den Fall, dass alle mn Punkte $x^{(i)}$ getrennt liegen. Berühren sich indess die Curven f und φ in einem Punkte $x^{(i)}$, so werden die Grössen $a_x^{n-1} a_i$ und $\alpha_x^{m-1} \alpha_i$ in diesem Punkte (d. h. die Coordinaten der gemeinsamen Tangente) einander proportional, und folglich verschwindet der Nenner des betreffenden Gliedes auf der linken Seite von (17); und diese Gleichung verliert zunächst ihre Gültigkeit. Richten wir es indess so ein, dass auch die Function U des Zählers für den Berührungspunkt ebenfalls verschwindet, und setzen wir für den Augenblick

$$\Phi_x^{m+n-2} = (a\alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1},$$

so treten entsprechend den Punkten $x^{(i)}$ und $x^{(i)} + dx^{(i)}$, in (17) die beiden Glieder auf:

$$\frac{U_x^{m+n-3} U_y}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_y} + \frac{U_x^{m+n-3} U_{dx}}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_{dx}} = 2\, \frac{U_x^{m+n-3} U_y}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_y},$$

wo y ein Punkt der beiden Curven gemeinsamen Tangente von $x^{(i)}$ ist, so dass: $dx_k^{(i)} = \sigma x_k + \tau y_k$. Ebenso tritt ein r-fach zählendes Glied in der Summe (17) auf, wenn sich die Curven f, φ in einem Punkte $(r-1)$-punktig berühren, und wenn die Curve U gleichzeitig beide Curven $(r-2)$-punktig berührt. Analoges gilt für den Fall, dass eine der Curven f, φ durch einen Doppelpunkt der andern hindurchgeht. —

Es soll jetzt aus den Gleichungen (17) *wieder das* Abel'*sche Theorem abgeleitet werden.*

Wir formen zuerst die auf der linken Seite von (17) stehenden Ausdrücke um. Von dem Schnittpunktsysteme $x^{(i)}$ der Curve φ mit f gehen wir über zu dem benachbarten Punktsysteme $x^{(i)} + dx^{(i)}$, welches eine zu φ benachbarte Curve $\varphi + \delta\varphi = 0$ auf f ausschneidet. Hier soll $\delta\varphi$ ein Ausdruck m^{ter} Ordnung in x_i sein, dessen Coëfficienten unendlich kleine Grössen sind, und letztere sollen als Incremente der Coëfficienten $\alpha_{ikh\ldots}$ von φ aufgefasst werden. Für die Punkte $x^{(i)} + dx^{(i)}$ gelten dann der Annahme nach die Relationen

$$(19) \qquad m\,(\alpha_x^{m-1} \alpha_{dx})_i + \delta\varphi\,(x^{(i)}) = 0, \quad (a_x^{n-1} a_{dx})_i = 0.$$

Für die beliebige Function U_x^{m+n-2} wollen wir nun das Product $\Omega_{n-2} \cdot \delta\varphi$ setzen, wo $\Omega = 0$ eine zu f anjungirte Curve ist, welche durch $n-2$ der Schnittpunkte von u mit f hindurchgeht (p. 790). Ferner legen wir die beiden Punkte ξ, η in die beiden übrigen Schnittpunkte von u mit f, so dass:

$$(20) \qquad f(\xi) \equiv a_\xi^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta^n = 0.$$

Schreiben wir in Rücksicht auf (19) noch $m\alpha_x^{m-1}\alpha_{dx}$ statt $-\delta\varphi$, multipliciren Zähler und Nenner jedes Gliedes auf der linken Seite

von (17) mit $a_x^{n-1}a_c$, wo c ein beliebiger Punkt ist, und fügen im Zähler den wegen $a_x^{n-1}a_{dx}=0$ verschwindenden Term $\Omega\,.\,a_x^{n-1}a_{dx}\,.\,\alpha_x^{m-1}\alpha_c$ hinzu, so wird:

$$\left(\frac{U_x^{m+n-2}}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right)_i=-\,m\left(\frac{\Omega_x^{n-2}\quad(a_c\,\alpha_{dx}-\alpha_c\,a_{dx})\,a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}{a_x^{n-1}a_c\,.\,(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right)_i.$$

Hierin können wir endlich noch setzen:

$$(a\alpha)_k a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}=\varrho x_k\,,$$

und dadurch erhalten wir für $u_i=(\xi\eta)_i$:

$$(21)\qquad\left(\frac{U_x^{m+n-2}}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{n-1}}\right)_i=m\left(\frac{\Omega_x^{n-2}\,(c\,x\,dx)}{(\xi\eta x)\,.\,a_x^{n-1}a_c}\right)_i,$$

wo nun rechts ein Differential dritter Gattung steht, wie im Abel'schen Theoreme.

Die Umformung der rechten Seite von (17) knüpft an die für Ω bestehende Identität an (p. 791):

$$(22)\qquad\Omega_x^{n-2}\,(\eta\zeta x)\,(\zeta\xi x)=(\xi\eta\zeta)^2\,.\,f(x)+(\xi\eta x)\,.\,N\,.$$

Wir haben Θ durch $\Delta\,.\,\Omega\,.\,\delta\varphi$ zu ersetzen, wo Δ durch Gleichung (16) definirt ist. Dann wird nach beregter Identität:

$$\Theta_x^{2\mu-2}\,(\eta\zeta x)\,(\zeta\xi x)=(\xi\eta\zeta)^2\,.\,f(x)\,.\,\Delta\,(x)\,.\,\delta\varphi\,(x)+(\xi\eta x)\,.\,N\,.\,\Delta\,.\,\delta\varphi\,.$$

Aus den Gleichungen (15) folgt aber:

$$\Delta(x)\,f(x)=D(x)\,.\,(\chi x\xi)^\mu-B(x)\,.\,(\chi x\eta)^\mu\,;$$

und wenn wir dies in die letzte Gleichung eintragen und dann die μ^{te} Polare von η für $x=\xi$ bilden (d. h. $x=\xi+\lambda\eta$ setzen und beiderseits den Coëfficienten von λ^μ aufsuchen), so kommt:

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1}.\,\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}(\xi\eta\zeta)^2=(\xi\eta\zeta)^2\left\{(\chi\eta\xi)^\mu\,.\,D(\xi)\,.\,\delta\varphi(\xi)-(\chi\xi\eta)^\mu\,.\,B(\eta)\,.\,\delta\varphi(\eta)\right\}.$$

Nach (15) ist ferner:

$$(\chi\eta\xi)^\mu=B(\eta)\,.\,\varphi(\eta)\,,\qquad(\chi\xi\eta)^\mu=D(\xi)\,.\,\varphi(\xi)\,;$$

und sonach findet man:

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1}\cdot\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\,\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2}\,(-1)^{\mu-1}=\frac{\delta\varphi\,(\eta)}{\varphi\,(\eta)}-\frac{\delta\varphi\,(\xi)}{\varphi\,(\xi)}\,.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die rechte Seite von (17) erhält man endlich wegen (21):

$$(23)\qquad\sum_{i=1}^{i=nm}\left(\frac{\Omega_{n-2}\,(c\,x\,dx)}{(\xi\eta x)\,.\,n\,.\,a_x^{n-1}\,a_c}\right)_i=\frac{\delta\varphi\,(\eta)}{\varphi\,(\eta)}-\frac{\delta\varphi\,(\xi)}{\varphi\,(\xi)}=d\left(\log\frac{\varphi\,(\eta)}{\varphi\,(\xi)}\right);$$

und dies ist nichts anderes, als die Differentialgleichung (8), aus der

durch Integration das Abel'sche Theorem in bekannter Form folgte. *Damit wäre auch der zweite, directe Beweis dieses Theorems erbracht.*

Wenn von den Punkten $x^{(i)}$ einzelne (z. B. r) einander unendlich nahe rücken, so werden in der links stehenden Summe r Differentiale einander gleich; eine weitere Besonderheit aber tritt nicht ein, denn der Nenner des Differentials wird nicht unendlich, wie dies doch beim Jacobi'schen Satze eintrat. Dies liegt daran, dass durch $r-1$ der benachbarten Punkte dann auch die Curve $\varphi + \delta\varphi = 0$ hindurchgeht; dass also für $U = \Omega . \delta\varphi$ der Zähler immer in ebenso hoher Ordnung verschwindet, wie der Nenner, d. i. wie die Functionaldeterminante von f, φ und u; und dies stimmt mit den Bemerkungen auf p. 824 überein. —

Man übersieht leicht, dass man statt der Gleichung (17) des Jacobi'schen Satzes nur die einfachere Gleichung (18) zu benutzen braucht, wenn man das Abel'sche Theorem allein für Integrale *erster* Gattung ableiten will; und dem entsprechend wird sich dann der Beweis vereinfachen lassen, indem man zunächst direct die Gleichung (18) aufstellt. Es ist nun aber wichtig, dass *man auch umgekehrt aus letzterer Gleichung das* Abel'*sche Theorem für Integrale dritter Gattung herleiten kann;* und zwar geschieht dies auf Grund folgender Ueberlegung.*) Beim Beweise des Jacobi'schen Satzes wurde an keiner Stelle die Irreducibilität der Curve $f \equiv a_x^n = 0$ vorausgesetzt; *die Gleichung gilt daher auch, wenn die Curve f oder φ zerfällt.* Setzen wir nun insbesondere

$$a_x^n = b_x^p \, . \, c_x^q, \quad \text{wo also} \quad n = p + q,$$

so wird:

$$n\,(a\alpha u)a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1} = \alpha_x^{m-1}\left\{p\,b_x^{p-1}(b\alpha u)c_x^q + q\,c_x^{q-1}(c\alpha u)b_x^p\right\}.$$

Bezeichnen wir sonach mit $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $b_x^p = 0$ und $\alpha_x^m = 0$, mit $z^{(i)}$ die von $c_x^q = 0$ und $\alpha_x^m = 0$, so geht die Gleichung (18) über in:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=mp}\left(\frac{V_y^{m+p+q-3}u_y}{c_y^q\,(b\alpha u)\,b_y^{p-1}\alpha_y^{m-1}}\right)_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=mq}\left(\frac{V_z^{m+p+q-3}u_x}{b_z^p\,(c\alpha u)\,c_z^{p-1}\alpha_z^{m-1}}\right)_i = 0.$$

Die hier auftretenden Quotienten sind von den Grössen u_i voll-

---

*) Vgl. Harnack: Ueber eine Behandlungsweise algebraischer Differentiale in homogenen Coordinaten, Math. Annalen, Bd. 9, p. 371 ff. Die Gleichung (18) wird hier durch Discussion derjenigen Gleichung $(mn)^{\text{ten}}$ Grades gewonnen, welche die Werthe des Quotienten

$$\frac{V_x^{m+n-3}u_x}{(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\alpha_x^{m-1}}$$

in den mn Punkten $x^{(i)}$ bestimmt; vgl. die Anmerkung auf p. 811.

ständig unabhängig; in der ersten Summe kann man also auch setzen: $u_i = c_i c_y^{q-1}$, und in der zweiten Summe: $u_i = b_i b_z^{p-1}$, so dass die Gleichung resultirt:

$$(24)\quad q \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{V_y^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_y^{p-1} \alpha_y^{m-1} c_y^{q-1}} \right)_i = p \sum_{i=1}^{i=mq} \left(\frac{V_z^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1} c_z^{q-1}} \right)_i;$$

und der vollständigen Symmetrie wegen sind beide Summen auch gleich:

$$m \sum_{i=1}^{i=pq} \left(\frac{V_x^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_x^{p-1} \alpha_x^{m-1} c_x^{q-1}} \right)_i,$$

wo $x^{(i)}$ die Schnittpunkte von $b_x^p = 0$ mit $c_x^q = 0$ bedeuten. Wählt man aber insbesondere $c_x^q = (\xi \eta x) = u_x$, so geht die gewonnene Gleichung (24) über in:

$$(25)\quad \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{V_y^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_y^{p-1} \alpha_y^{m-1}} \right)_i = p \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{V_z^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1}} \right)_i.$$

Von hier ausgehend gelangt man in folgender Weise wieder zum Abel'schen Theoreme. Die linke Seite geht vermöge (21) für $V = \Omega_{p-2} \delta \varphi$ unmittelbar in die Summe von Differentialen dritter Gattung über (bis auf einen Zahlenfactor m), welche in (23) auftreten, wenn man nur a_x^n durch b_x^p ersetzt. Ganz analog kann man aber auch die rechte Seite unserer Gleichung behandeln, indem man nur die Rollen der Curven $b_x^p = 0$ und $u_x = 0$ vertauscht. Es wird dann zunächst, wenn man wie bei Bildung der Gleichung (21) verfährt:

$$(26)\quad \frac{V_z^{m+p-2}}{(u\alpha b)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1}} = -m \frac{\Omega_z^{p-2} (u_c \alpha_{dz} - \alpha_c u_{dz})\, \alpha_z^{m-1}}{u_c \,.\, (u\alpha b)\, \alpha_z^{m-1} b_z^{p-1}},$$

oder wegen $\varrho z_k = (u\alpha)_k \alpha_z^{m-1}$:

$$= m \frac{\Omega_z^{p-2} (c z dz)}{b_z^p \,.\, u_c},$$

wobei nun $u_z = 0$ und $u_{dz} = 0$ vorausgesetzt wird. Das Differential rechts bezieht sich also auf die Gerade $u_z = 0$, statt auf die Curve $a_x^n = 0$. Wir können daher für die Punkte dieser Geraden eine neue binäre Veränderliche $\varkappa_1 : \varkappa_2$ einführen mittelst der Substitution:

$$z_k = \varkappa_1 \xi_k + \varkappa_2 \eta_k, \quad dz_k = \xi_k d\varkappa_1 + \eta_k d\varkappa_2.$$

Dann wird wegen der für Ω bestehenden Identität (22):

$$(\varkappa_1 \Omega_\xi + \varkappa_2 \Omega_\eta)^{p-2} \varkappa_1 \varkappa_2 = (\varkappa_1 b_\xi + \varkappa_2 b_\eta)^p;$$

und es geht das in (26) rechts stehende Differential, $d\,a(c\,\xi\eta) = u_c$ über in:

$$m \frac{\varkappa_1 d\varkappa_2 - \varkappa_2 d\varkappa_1}{\varkappa_1 \varkappa_2} = m\, d \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}.$$

Die Summe dieser Differentiale ausgedehnt über alle Wurzeln der Gleichung $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^m = 0$ haben wir zu bilden. Diese Summe ist aber

$$(27)\qquad \begin{aligned} &= m\,d \log \frac{x_2^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_2^{(m)}}{x_1^{(1)} x_1^{(2)} \ldots x_1^{(m)}} = m\,d \log \left((-1)^m \frac{\alpha_1^m}{\alpha_2^m} \right) \\ &= -\,m\,d \log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

Da aber der Zahlenfactor m nach der angegebenen Umformung in gleicher Weise auf der linken Seite von (25) auftritt, so haben wir in der That aus (25) wieder das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung gewonnen.

Ebenso wie der Jacobi'sche Satz, gilt aber auch das Abel'sche Theorem für zerfallende Grundcurven; setzt man letzteres als bekannt voraus für solche Integrale, die nur in Doppelpunkten von f unendlich werden, so kann man also daraus die Gestaltung desselben für andere Integrale ableiten, ohne zu dem Zwecke auf den Jacobi'schen Satz zurückzugehen. Setzt man nämlich

$$a_x^n = \beta_x^p \cdot \gamma_x^q,$$

und bezeichnet mit $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\alpha_x^m = 0$ und $\beta_x^p = 0$, mit $z^{(i)}$ die von $\alpha_x^m = 0$ und $\gamma_x^q = 0$, so geht die Gleichung des Abel'schen Theorems unmittelbar über in:

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \left(\frac{\varphi_x^{n-3} (c\,x\,dx)}{n\,a_x^{n-1} a_c} \right)_i \equiv \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{\varphi_y^{n-3} (c\,y\,dy)}{p \cdot \gamma_y^q \cdot \beta_y^{p-1} \beta_c} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=mq} \left(\frac{\varphi_z^{n-3} (c\,z\,dz)}{q \cdot \beta_z^p \cdot \gamma_z^{q-1} \gamma_c} \right)_i = 0.$$

Eine Summe von Differentialen, welche zu der Grundcurve $\beta_x^p = 0$ gehören und in einigen) Schnittpunkten derselben mit $\gamma_x^q = 0$ unendlich werden, erscheint also zurückgeführt auf eine Summe von Differentialen, ausgedehnt über die Grundcurve $\gamma_x^q = 0$, welche in denselben Schnittpunkten der letzteren mit $\beta_x^p = 0$ unendlich werden.* Hieraus wird sich uns sogleich ergeben, dass auch eine Summe von Integralen mit beliebigen Unendlichkeitspunkten, ausgedehnt über die Schnittpunkte der Grundcurve $\beta_x^p = 0$ mit einer Curve $\alpha_x^m = 0$, durch Logarithmen und algebraische Functionen darstellbar ist, was übrigens auch schon aus der früher gegebenen Zurückführung eines beliebigen Integrals auf Summen von Integralen mit einer linearen Function im Nenner hervorgeht (p. 778 ff.). Auf eine analoge Zerlegung, wie sie damals angewandt wurde, muss man auch in vorliegendem Falle zurückgehen, um die Auswerthung der Integralsumme wirklich auszuführen. Bezeichnen wir nämlich mit $u_\psi{}^{pq} = 0$ die Gleichung der Schnittpunkte von $\gamma_x^q = 0$ mit $\beta_x^p = 0$, so ist (vgl. p. 778):

---

*) Durch die anderen Schnittpunkte beider Curven geht dann auch die Curve $\Theta = 0$.

$$(\psi x \xi)^{pq} = B\beta_x^p + C\gamma_x^q,$$

und also $\frac{1}{\gamma_x^q} = \frac{C}{(\psi x \xi)^{pq}}$ vermöge $\beta_x^p = 0$, folglich auch:

$$\sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{\varphi_y^{n-3}(c y d y)}{p \cdot \gamma_y^q \cdot \beta_y^{p-1} \beta_c} \right)_i = - \sum_{i=1}^{i=pqm} \left(\frac{\varphi_z^{n-3} C (c z d z)}{pq \cdot \beta_z^p \cdot (\psi x \xi)^{pq-1} (\psi c \xi)} \right)_i.$$

Hier stehen rechts Differentiale, welche sich auf die Curve $(\psi x \xi)^{pq} = 0$ als Grundcurve beziehen. Letztere aber zerfällt in lauter gerade Linien; man kann daher die rechts stehende Summe weiter in Summen von Differentialen zerlegen, deren jedes sich nur auf *eine* dieser pq Geraden bezieht und also durch Einführung einer binären Veränderlichen direct ausgewerthet werden kann, wie es soeben beim Differentiale dritter Gattung geschah. Man kommt so natürlich zu demselben Resultate, wie es eine Partialbruchzerlegung des links stehenden Differentials ergeben würde.

Betrachten wir noch als Anwendung des hier erörterten Princips den besonderen Fall, wo die Grundcurve in drei gerade Linien zerfällt, sagen wir in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Für die Schnittpunkte $x^{(i)}$ derselben mit $\alpha_x^m = 0$ erhalten wir dann:

$$\sum_{i=1}^{i=3m} \left(\frac{(c x d x)}{x_1 x_2 c_3 + x_2 x_3 c_1 + x_3 x_1 c_2} \right)_i = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(y d y)_1}{y_2 y_3} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(z d z)_2}{z_3 z_1} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(t d t)_3}{t_1 t_2} \right)_i = 0,$$

wo durch $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\alpha_x^m = 0$ mit $x_1 = 0$, durch $z^{(i)}$ die mit $x_2 = 0$, durch $t^{(i)}$ die mit $x_3 = 0$ bezeichnet sind. Analog wie bei Gleichung (26) wird dann aber:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(y d y)_1}{y_2 y_3} \right)_i = d \log \frac{y_3^{(1)} y_3^{(2)} \ldots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_2^{(m)}} = d \log \left(- \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right)^m.$$

Ebenso findet man für die zu den Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gehörigen Summen bez. die Werthe:

$$d \log \left(- \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right)^m \quad \text{und} \quad d \log \left(- \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^m.$$

Das Integral der Summe dieser drei Werthe aber ist gleich $\log(-1)^m = m i \pi$. Und somit besteht die Relation:

$$(28) \quad \frac{y_3^{(1)} y_3^{(2)} \ldots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_2^{(m)}} \cdot \frac{z_1^{(1)} \cdot z_1^{(2)} \ldots z_1^{(m)}}{z_3^{(1)} z_3^{(2)} \ldots z_3^{(m)}} \cdot \frac{t_2^{(1)} t_2^{(2)} \ldots t_2^{(m)}}{t_1^{(1)} t_1^{(2)} \ldots t_1^{(m)}} = (-1)^m.$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem sogenannten Carnot'schen Theoreme, welches man gewöhnlich in der folgenden Fassung ausspricht:

Sind $y_3^{(i)} : y_2^{(i)}$, $z_1^{(i)} : z_3^{(i)}$, $t_2^{(i)} : t_1^{(i)}$ *die Abstandsverhältnisse der Schnittpunkte einer Curve* m^{ter} *Ordnung mit den Seiten eines Dreiecks von*

den Ecken dieses Dreiecks, so besteht zwischen diesen Abstandsverhältnissen die Relation (28).

Analoge Sätze bestehen für die Schnittpunkte der C_m mit einer beliebigen Zahl von Geraden.*) —

Endlich sei noch daran erinnert, dass man aus dem Abel'schen Theoreme für Integrale dritter Gattung nach p. 792 durch Anwendung des Processes $\Sigma \frac{\partial}{\partial \xi_i} \zeta_i$ auch *das* Abel'*sche Theorem für Integrale zweiter Gattung* leicht ableiten kann; an Stelle der Logarithmen auf der rechten Seite treten dann algebraische Functionen. Es soll hierauf aber nicht mehr eingegangen werden. —

Es liegt die schon oben berührte Frage nahe (p. 818), ob das Abel'sche Theorem umkehrbar ist, d. h. ob man aus den Gleichungen (8) oder aus deren p Integralgleichungen:

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h = 0$$

$$(h = 1, 2, 3 \ldots p),$$

immer schliessen kann, dass die μ Punkte $x^{(i)}$ sämmtlich auf einer adjungirten Curve liegen. Dabei sei bemerkt, dass μ nicht nothwendig durch n theilbar sein muss, denn nach dem Obigen fallen alle diejenigen Schnittpunkte fort, welche gleichzeitig auf der die unteren Grenzen bestimmenden Curve liegen. Da man nun durch $mn - \Sigma\alpha_i i\,(i-1) - p$ beliebige Punkte immer eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung legen kann, so kommt unsere Frage wesentlich darauf hinaus, ob durch die Gleichungen des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung**) im Allgemeinen p Punkte *ein*deutig durch die übrigen bestimmt sind. Dies ist aber in der That der Fall, wie die Behandlung des sogenannten Jacobi'*schen Umkehrproblems der* Abel'*schen Integrale lehrt*. Letzteres lässt sich in folgender Weise formuliren***):

*) Man beweist dieselben sonst algebraisch in elementarer Weise; vgl. Carnot's géométrie de position, sowie die Anmerkung auf p. 754.

**) In Betreff entsprechender Fragen bei Integralen dritter Gattung vgl. den weiterhin folgenden Abschnitt über Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven.

***) Dasselbe wurde von Jacobi in der Weise für hyperelliptische Integrale formulirt (jedoch nicht erledigt): Crelle's Journal, Bd. 9 und 13. Davon wird unterschieden das sogenannte Riemann'sche Umkehrproblem, welches verlangt, *eine* obere Grenze zu bestimmen, wenn die Werthe v_h der p Integrale u_h für diese obere Grenze gegeben sind, und welches aus dem Jacobi'schen hervorgeht, wenn man $p-1$ der Punkte $x^{(i)}$ mit den entsprechenden Punkten $c^{(i)}$ zusammenfallen lässt. Dasselbe ist natürlich nur lösbar, wenn zwischen den Grössen v_h gewisse $p-1$ Relationen bestehen. Vgl. darüber C. Neumann, a. a. O., p. 393 ff. und p. 514, Prym, a. a. O.

Es sind die p Gleichungen gegeben

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1\,,\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_2 = v_2\,,\ \ldots \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p\,,$$

*wo die $v_1, v_2, \ldots v_p$ von einander unabhängige Constante (nämlich die negativen Integralsummen über die $\mu - p$ übrigen bekannten Punkte) sind, und wo die $c^{(i)}$ beliebige ein für allemal als fest angenommene Punkte bedeuten, welche möglicher Weise auch alle oder theilweise in einen zusammenfallen können: man soll die p oberen Grenzen $x^{(i)}$ als Functionen der gegebenen Grössen v_k darstellen.**)

Die wirkliche Lösung dieses Problems liegt ausserhalb der Grenzen unserer Betrachtungen; sie geschieht nach Riemann mit Hülfe der sogenannten Θ-Functionen**); und zwar kann man zwei verschiedene Wege einschlagen.

Zunächst nämlich kann man darauf ausgehen, die Gleichung einer Curve $\varphi = 0$ zu finden, welche auf $f = 0$ die $\mu - p$ gegebenen und die p gesuchten Punkte ausschneidet. Dies wird dadurch möglich, dass man — die p Grössen v_k als bekannt vorausgesetzt — den Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ zweier ganzen homogenen Functionen in x_1, x_2, x_3 durch einen Quotienten von Θ-Functionen darstellen kann der Art, dass φ vermöge $f = 0$ ausser in den gegebenen Punkten, für welche auch ψ Null ist, nur in den p gesuchten Punkten $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ verschwindet, dagegen ψ ausserdem nur in den p ebenfalls bekannten Punkten $c^{(i)}$, welche in den unteren Grenzen auftreten.***) In den Argumenten der benutzten Θ-Functionen treten dabei neben anderen Constanten die Grössen v_k auf, d. h. die gegebenen Integralsummen.

Der zweite Weg löst das Problem durch Vermittlung von Integralen dritter Gattung, indem er zunächst eine Methode entwickelt,

---

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 138. — In den p Gleichungen (29) gehört zu derselben oberen Grenze $x^{(i)}$ immer dieselbe untere Grenze $c^{(i)}$. Dies ist verschieden von Riemann's Bestimmungsweise der unteren Grenzen; derselbe benutzt in derselben Summe, auch wenn die oberen Grenzen verschieden sind, immer dieselbe, dagegen in jeder der p Summen je eine andere untere Grenze; vgl. R. A. F. §. 15 und 16.

**) Vgl. R. A. F. §. 17 und 22. Die Theorie dieser Functionen findet man ausführlich bei Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1865, p. 28 ff. und p. 242 ff. — Es ist zu bemerken, dass die Riemann'sche Definition der Θ-Function von der bei Cl. u. G. A. F. p. 195 getroffenen abweicht, indem die Argumente um einen Zahlenfactor $\frac{1}{2}$ verschieden sind, was durch die verschiedene Wahl der normalen Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung (vgl. oben p. 803) bedingt ist.

***) Vgl. R. A. F. §. 27; Roch, Crelle's Journal, Bd. 66, p. 99 und Weber, ib. Bd. 70, p. 316.

vermöge deren eine Summe von p Normalintegralen dritter Gattung mit denselben Grenzen $c^{(i)}$ und $x^{(i)}$ als Functionen der gegebenen Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ darstellbar ist.*) Um die p Punkte $x^{(i)}$ zu bestimmen, kann man zunächst die p Strahlen eines Büschels $u_x - \lambda v_x = 0$ bestimmen, welche durch diese Punkte hindurchgehen, d. h. die Gleichung p^{ten} Grades für λ aufstellen, welche diese Strahlen bestimmt. Sucht man dann die entsprechenden Strahlen eines zweiten Büschels, so kann man die Punkte $x^{(i)}$ als deren Schnittpunkte durch lineare Gleichungen finden. Dabei ist zu bemerken, dass die genannten Strahlen des zweiten Büschels sich rational (und zwar mittelst linearer Gleichungen) bestimmen lassen, wenn die des ersten bekannt sind.**) Es kommt also darauf an, den Werth der algebraischen Function $\frac{u_x}{v_x}$ in den p Punkten $x^{(i)}$ durch eine Gleichung p^{ten} Grades zu bestimmen. Diese Aufgabe kann man noch dadurch verallgemeinern, dass man statt $\frac{u_x}{v_x}$ den Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ betrachtet, dessen Zähler und Nenner von gleich hoher Ordnung sein sollen, d. h. die Curven des Büschels $\varphi - \lambda\psi = 0$ aufsucht, welche durch die Punkte $x^{(i)}$ hindurchgehen. Die Werthe, welche $\frac{\varphi}{\psi}$ in letzteren Punkten annimmt, werden sich dann durch eine algebraische Gleichung

$$(30) \quad \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p + M_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-1} + M_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-2} + \ldots + M_p = 0$$

bestimmen, deren Coëfficienten M_i zu bestimmende Functionen der Integralsummen v_h sind; und man braucht nur für eine Function $\frac{\varphi}{\psi}$ die Wurzeln zu kennen, um dieselben für jede andere Function $\frac{\varphi'}{\psi'}$ berechnen zu können (wie beim Strahlbüschel $u - \lambda v$).

Diese Functionen M_i, oder allgemeiner *symmetrische Functionen der p Werthe, welche eine homogene Function nullter Dimension in p verschiedenen Punkten annimmt, nennt man* Abel'*sche Functionen der durch* (29) *definirten Argumente v.****) *Es sind* 2*p-fach periodische*

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 138—200.

**) ib. p. 142 f.

***) Andere Grössen sind es, welche Riemann (in seinen Vorlesungen) als Abel'sche Functionen bezeichnet hat. Seien nämlich $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p-1)}$ $p-1$ Punkte, in denen die Grundcurve von einer adjungirten C_{n-3} berührt wird, was im Allgemeinen nur in einer endlichen Anzahl von Punktsystemen geschehen kann, und sei $\varphi = 0$ die Gleichung dieser C_{n-3}, $\psi = 0$ die Gleichung einer anderen C_{n-3} derselben Art mit den Berührungspunkten $y^{(i)}$, so ist der

Functionen dieser Grössen, da die p Integrale erster Gattung (nach p. 804) $2p$ Systeme von Periodicitätsmoduln haben, und also die Grössen v noch beliebig um solche Perioden vermehrt werden können, und zwar

$$v_h \quad \text{um} \quad 2m_h\pi i + a_{1h}q_1 + a_{2h}q_2 + \ldots + a_{ph}q_p,$$

ohne dass dadurch die Gleichung (30) geändert werden dürfte.

Denken wir uns die Gleichung (30) vorerst wirklich gebildet und andererseits auf dem zuerst geschilderten Wege eine algebraische Function χ bestimmt, welche in den p Punkten $x^{(i)}$ verschwindet. *Dann kann man die Gleichung* (30) *auffassen als das Resultat der Elimination der Veränderlichen* x_k *aus den Gleichungen* $f=0$, $\chi=0$ *und* $\varphi-\lambda\psi=0$. Diese zweite Lösung des Umkehrproblems geht also, insofern es auf wirkliche Bestimmung der Punkte $x^{(i)}$ ankommt, noch einen Schritt weiter als jene erste.

Die Einführung der Integrale dritter Gattung geschieht nun in folgender Weise. Wir betrachten die Summe von p Integralen $\Pi_{\xi\eta}$, welche zwischen denselben Grenzen $c^{(i)}$, $x^{(i)}$ geführt sind und zwei beliebige Unendlichkeitspunkte ξ, η haben. Diese Summe

$$\sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = \mathrm{T}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \ldots & x^{(p)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & \ldots & c^{(p)} \end{pmatrix} \tag{31}$$

können wir, da sie als symmetrische Function der oberen Grenzen erscheint, die symmetrischen Functionen der letzteren aber schon als Functionen der v betrachtet wurden, auch als Function der v selbst ansehen, wie sogleich noch näher angegeben werden soll. Und auf die wirkliche Darstellung dieser Function $\mathrm{T}_{\xi\eta}$ lässt sich das Umkehrproblem zurückführen. Die Coëfficienten der Gleichung (30) lassen sich nämlich in folgender Weise durch Functionen T ausdrücken.

Wir setzen in der Gleichung (9) des Abel'schen Theorems (p. 815 und p. 816 Anm.) für ξ der Reihe nach $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$, für η zugleich der Reihe nach $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$; ferner nehmen wir an Stelle der Curve $\varphi=0$ irgend eine Curve des Büschels $\varphi-\lambda\psi=0$

Quotient $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ proportional zu einem Quotienten von Θ-Functionen, deren Argumente sich von den Grössen

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_z^{x^{(i)}} du_h + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h, \qquad w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_z^{y^{(i)}} + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h,$$

in denen η und z beliebig gewählte Punkte sind, nur um Constante unterscheiden. Die so zu bildenden Verhältnisse $\sqrt{\varphi}:\sqrt{\psi}$ sind dann Abel'*sche Functionen der Grössen* v_h, w_h in Riemann's Sinne. Vgl. darüber Roch, a. a. O., p. 104.

und bezeichnen durch $\eta^{(i)}$ die Schnittpunkte von $f=0$ mit $\psi=0$, welche nicht zugleich auf $\varphi=0$ liegen, durch $\xi^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\varphi-\lambda\psi=0$ mit $f=0$, welche nicht auf φ oder ψ liegen: Dann erhalten wir aus dem Abel'schen Theoreme und dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument (p. 805) die folgenden Gleichungen:

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
&\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(1)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},\\
&\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(2)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(p)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(p)}}^{x^{(p)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}.
\end{aligned}
$$

Die Paare $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sind einander so zugeordnet, wie es das Abel'sche Theorem vorschreibt (p. 816), und die Summen rechts beziehen sich auf die so gebildeten Schnittpunktepaare. Ebenso sind die Integrationswege hier durch jenes Theorem bedingt; sie sind daher möglicher Weise nicht dieselben, welche in den Gleichungen (29) auftreten, sondern würden statt der v_h Integralsummen v_h' liefern, welche sich durch Periodicitätsmoduln von den v_h unterscheiden. Aber die Summen rechts ändern sich (nach p. 805) durch Abänderung der Integrationswege bez. nur um Vielfache der Ausdrücke $\Sigma_i\int_{\eta^{(i)}}^{\xi^{(i)}}du_h$ (abgesehen von der links ebenso auftretenden Periode $2i\pi$); und letztere Summen verschwinden nach dem Abel'schen Theoreme, da die ξ, η Schnittpunktsysteme sind, welche direct in einander übergeführt werden können. Man braucht also hierauf gar keine Rücksicht zu nehmen.

Addirt man nun die Gleichungen (32) und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so findet man wegen (31):

$$
(33)\quad \prod_{i=1}^{i=p}\frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}-\lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}}-\lambda}=e^{-\sum\limits_i \mathsf{T}_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}\left(\begin{smallmatrix}x^{(1)}\,x^{(2)}\,\ldots\,x^{(p)}\\ c^{(1)}\,c^{(2)}\,\ldots\,c^{(p)}\end{smallmatrix}\right)};
$$

und in dieser Gleichung liegt die Lösung unserer Aufgabe, sobald die Functionen T noch durch die v ausgedrückt sind. Setzt man nämlich:

$$
M=\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}}-\lambda\right]\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}-\lambda\right]\cdots\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}}-\lambda\right].e^{-\Sigma\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}},
$$

wo also M ausser Constanten (denn der Grösse λ hatten wir einen beliebigen Werth beigelegt) nur Functionen T enthält, so kann man die Gleichung (33) mit Rücksicht auf die Coëfficienten M_i der Gleichung (30) auch in der Form schreiben:

$$\lambda^p + M_1 \lambda^{p-1} + \ldots + M_p = M.$$

Man braucht nur diese Gleichung p-mal hinter einander für ebenso viele verschiedene Werthe von λ zu bilden, um ebenso viele Gleichungen als Unbekannte M_i vor sich zu haben, welche man dann mittelst dieses Systems linearer Gleichungen durch Functionen T ausdrücken kann. *Die Coëfficienten der Gleichung p^{ten} Grades, deren Wurzeln die p Functionen $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}$ sind, werden also rationale Verbindungen verschiedener Transscendenten $e^{T_{\xi\eta}}$.*

Es kommt daher nur noch auf ein näheres Studium der Function $T_{\xi\eta}$ an; und dabei ergibt sich dann, dass dieselbe durch Θ-Functionen darstellbar ist, deren Argumente wesentlich von den gegebenen Grössen v_h abhängen. Für die Bestimmung dieser Constanten ist es nun vortheilhaft statt der Grössen $c^{(i)}$ andere untere Grenzen $\alpha^{(i)}$ zu wählen, die in folgender Weise definirt werden: Man ziehe in einem beliebigen Punkte μ die Tangente an $f = 0$; diese schneidet f noch in $n-2$ Punkten, und durch letztere Punkte lege man eine adjungirte Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche $f = 0$ in allen anderen Punkten, in denen sie f noch trifft, d. h. in p Punkten berührt. Zu jedem μ kann man noch 2^{2p} solche C_{n-2} finden, wie wir später sehen werden, aber unter diesen ist für die unteren Grenzen (je nach der Wahl des zur Definition der Perioden a_{ik} benutzten kanonischen Querschnittsystems der Riemann'schen Fläche, p. 801 ff.) eine ganz bestimmte ausgezeichnet; die Berührungspunkte derselben sollen mit $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)}$ bezeichnet werden. Setzt man nun diese an Stelle der Punkte $c^{(i)}$ in den Gleichungen (29) des Umkehrproblems, und schreibt gleichzeitig ω statt v_h, so dass für $h = 1, 2, \ldots p$:

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \omega_h \quad \left(= v_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} du_h\right);$$

dann findet man das Resultat*):

---

*) Vgl. Cl. u. G. A. F., a. a. O. — Man kann diese Formeln und insbesondere die Bestimmung der Argumente der Θ-Function durch die Punkte μ und $\alpha^{(i)}$ auch mittelst Riemann'scher Principien unter Benutzung von R. A. F. §. 25 ableiten; vgl. darüber Weber, Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale, Crelle's Journal, Bd. 70, und Fuchs: Zur Theorie der Abel'schen Functionen, ib. Bd. 73, p. 306. — Für $p = 2$ ist die entsprechende Formel auf dem von Weber eingeschlagenen Wege auch schon von Roch abgeleitet, ib. Bd. 65, p. 42, vgl. für diesen Fall auch Brill, ib. p. 275.

$$(35) \qquad \mathsf{T}_{\xi\eta}\left(\frac{x}{c}\right) = \log \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)};$$

so dass die Gleichung (33) übergeht in:

$$(36) \qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)};$$

wobei die Θ-Function durch folgende p-fach unendliche Reihe definirt ist:

$$\Theta(w_h) = \Theta(w_1, w_2, \dots w_p)$$
$$= \sum_{r_1=-\infty}^{r_1=+\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{r_2=+\infty} \cdots \sum_{r_p=-\infty}^{r_p=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Sigma_h \Sigma_k r_h r_k a_{hk} + \Sigma_i r_i w_i}.$$

In Gleichung (36) *ist jetzt die Lösung des Umkehrproblems gegeben*, wie aus den obigen Erörterungen hervorgeht. An Stelle der $\alpha^{(i)}$ und ω_h kann man nun auch wieder die Grössen $c^{(i)}$ und v_h einführen. Denn setzt man:

$$(37) \qquad k_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{c^{(i)}} du_h, \quad \text{so dass:} \quad \omega_h = v_h + k_h,$$

so ist natürlich auch, wie in (36):

$$(38) \qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)};$$

und indem man die linke Seite von (38) in die von (36) dividirt, erhält man wieder die linke Seite der Gleichung (33). *Die in den Argumenten der Function* Θ *auftretenden Grössen* ω_h *und* k_h *sind dabei durch die Gleichungen* (34) *und* (37) *definirt; und die* $\alpha^{(i)}$ *sind die Berührungspunkte einer bestimmten unter den* 2^{2p} *Curven* $(n-2)^{ter}$ *Ordnung**), *welche durch die* $n-2$ *weiteren Schnittpunkte der in* μ *an*

*) Welche von diesen Curven zu wählen ist, hängt davon ab, welches System von normalen Periodicitätsmoduln man zu Grunde legt, d. h. wie man das kanonische Schnittsystem in der Riemann'schen Fläche (p. 802) wählt. Jedem solchen Periodensysteme ist *eine* solche C_{n-2} bei gegebenem μ zugeordnet und umgekehrt; vgl. darüber auch Cl. u. G. A. F. p. 314 und 331, sowie Fuchs a. a. O. und für $p = 2$ den weiterhin folgenden Abschnitt XI.

$f=0$ gezogenen Tangente gehen und ausserdem die Curve $f=0$ in p Punkten berühren. —

In einem Schnittpunktsysteme sind bekanntlich p Punkte nicht durch die übrigen bestimmt, wenn das System durch eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten wird; und dieser Umstand muss auch beim Umkehrprobleme hervortreten, indem letzteres dann kein Resultat mehr liefern darf. In der That verschwinden dann auch die benutzten Θ-Functionen identisch, d. h. unabhängig von den in ihren oberen Grenzen auftretenden Punkten ξ, η; denn es gilt der Satz*), dass die Function $\Theta(w)$, wenn die Argumente w wie in (35) bestimmt sind, als Function von ξ betrachtet, in den Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ verschwindet, d. h. für $\xi = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$; dieselbe wird sonach Null, wenn die p Argumente w_h die Form haben (z. B. für $\xi = x^{(p)}$):

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h, \tag{39}$$

wo $x^{(1)} \ldots x^{(p-1)}$ *ganz beliebige* Punkte sind, während die $\alpha^{(i)}$ von μ abhängen. Liegen nun die Punkte $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ mit $p-2$ anderen Punkten $x^{(p+1)} \ldots x^{(2p-2)}$ auf einer adjungirten C_{n-3}, so bildet letztere zusammen mit der Tangente von μ eine adjungirte C_{n-2}. Durch $n-2$ Schnittpunkte der letzteren mit f (nämlich die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ) geht auch die C_{n-2}, welche in den Punkten $\alpha^{(i)}$ berührt. Es ist also nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0;$$

und folglich nehmen die Argumente w_h die Form an:

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\xi}^{\mu} du_h = -\sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h.$$

Wegen $\Theta(w_h) = \Theta(-w_h)$ stimmt die Form der Argumente aber gerade mit der Form (39) überein; denn es ist abgesehen von dem Vorzeichen hier nur ξ statt $x^{(p-1)}$ gesetzt; und dies ist gleichgültig, da die Lage der $p-1$ Punkte $x^{(i)}$ in (39) völlig beliebig war. *Die Function $\Theta(\omega_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h)$ verschwindet daher identisch (d. i. unabhängig von ξ), sobald die p Punkte $x^{(i)}$ der Gleichungen* (29) *mit $p-2$ anderen*

*) Vgl. R. A. F. §. 22 und 23. Cl. u. G. A. F. p. 206.

Punkten auf einer adjungirten Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung liegen, und die ω_h durch (34) *definirt sind.*

Das Umkehrproblem wird alsdann unbestimmt, und man muss einen weiteren $(p-1)^{ten}$ Punkt als bekannt annehmen, um die $p-1$ übrigen Punkte wieder eindeutig bestimmen zu können. Noch weitere Besonderheiten treten ein, wenn die Punkte $x^{(i)}$ durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden, deren Ordnung kleiner als $n-3$ ist, indem alsdann auch noch die Differentialquotienten der Θ-Function nach den w_h bis zu einer gewissen Ordnung verschwinden; wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.*)

IX. Berührungscurven. — Die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.**)

Während das Abel'sche Theorem an sich den Inhalt des Restsatzes in einfachen Formeln aussprechen lehrt (p. 809), erlaubt die Möglichkeit und Bestimmtheit des Umkehrproblems eine Reihe anderer geometrischen Anwendungen, deren Resultate (soweit es sich um Fragen aus der Geometrie der Anzahl handelt) sich allerdings auch auf rein algebraischem Wege ableiten lassen, wenn man das früher behandelte Correspondenzprincip benutzt (p. 441 ff.). Diese Anwendungen gehen ebenso, wie die früher für $p=1$, d. h. für die Theorie der elliptischen Functionen gegebenen (p. 602 ff.), von der Theilung aus und zeigen, wie die Lösungen von gewissen in der Geometrie auftretenden algebraischen Gleichungen mit Hülfe der Theilung der Abel'schen Functionen einfach dargestellt werden können. Dies ist von um so grösserem Werthe, weil die eigenthümlichen Beziehungen resp. *Gruppirungen der Wurzeln unter einander* dabei aufs Klarste hervortreten, während das Correspondenzprincip zunächst nur die *Zahl* der Lösungen liefern würde, und es noch einer complicirten Anwendung der Sätze über Schnittpunktsysteme bedürfte, um die Gruppirung zu erforschen. Wir behandeln nun zunächst die folgende Aufgabe, bei der wir wieder voraussetzen, dass die Grundcurve $f=0$ von der n^{ten} Ordnung und vom Geschlechte p sei und α_i i-fache Punkte habe, *ohne dass zwischen ihren Moduln specielle Relationen beständen.*

Es sei $m>n-3$; auf der Grundcurve sind $mn-\Sigma\alpha_i i(i-1)-pr$ Punkte beliebig gegeben; man soll durch sie eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung legen, welche die Grundcurve in p Punkten je $(r-1)$-punktig berührt (d. i. r-punktig schneidet).

---

*) Vgl. darüber Riemann: Ueber das Verschwinden der Θ-Functionen, Crelle's Journal, Bd. 65, sowie R. A. F. §. 14 und 16.

**) Vgl. für den Inhalt dieses Abschnittes Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Crelle's Journal, Bd. 63, p. 189 ff.

Wir setzen der Kürze wegen

$$mn - \Sigma \alpha_i i(i-1) - pr = \lambda. \tag{1}$$

Es seien nun $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ Punkte, in welchen die Grundcurve $f = 0$ durch eine adjungirte C_m $(r-1)$-punktig berührt wird. Letztere Curve möge ausserdem durch gewisse Punkte $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(\lambda)}$ gehen. Diese eine Curve nehmen wir als bekannt an*); es ist dann unsere Aufgabe durch die λ gegebenen Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\lambda)}$ eine andere adjungirte C_m zu legen, welche $f = 0$ in p Punkten $(r-1)$-punktig berührt, d. h. deren Berührungspunkte $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$ zu finden. Letztere nun genügen nach dem Abel'schen Theoreme den p transcendenten Gleichungen:

$$r \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots p), \tag{2}$$

wo einzelne Glieder der zweiten Summe ausfallen werden, wenn von den Punkten $x^{(i)}$ einzelne mit den Punkten $a^{(i)}$ zusammenfallen sollten; dies kann immer eintreten, ohne dass dadurch die folgenden Erörterungen beeinflusst würden. Insofern man unter den Integralen dieser zweiten Summe die Werthe versteht, welche dieselben auf bestimmten, *willkürlich* gewählten Integrationswegen annehmen, kann man auf der rechten Seite von (2) die Null durch das allgemeinste System von Periodicitätsmoduln P_h des Integrals u_h ersetzen, wo (p. 804):

$$P_h = 2 m_h i\pi + q_1 a_{1h} + q_2 a_{2h} + \ldots + q_p a_{ph} \tag{3}$$

und findet dann durch Division mit r**):

$$\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} P_h \tag{4}$$

$$(h = 1, 2, \ldots p),$$

wo nun auf der rechten Seite lauter bekannte Grössen stehen; so dass diese Gleichungen die Form des Umkehrproblems haben, welch' letzteres

*) Dies ist erlaubt, da sich die Existenz solcher Curven aus einer einfachen Constantenzählung ergibt.

**) Wollte man die unteren Curven $c^{(i)}$ anders wählen, so würden sich die rechten Seiten dieser Gleichungen nur um Constante ändern Seien z. B. $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(rp)}$ die weiteren Schnittpunkte einer durch die Punkte $a^{(i)}$ gehenden adjungirten C_m, und sei z ein beliebiger Punkt der Curve, so würde man an Stelle von (2) erhalten:

$$r \sum_{i=1}^{i=p} \int_{z}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=rp} \int_{c^{(i)}}^{z} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0.$$

für $m \gtrless n - 3$ im Allgemeinen lösbar ist, wie auch die in den Gleichungen (29) p. 831 auftretenden Grössen v_h beschaffen sein mögen. Man sieht hieraus, dass bei bestimmter Wahl der Periodicitätsmoduln P_h das System der p Punkte $y^{(i)}$, also auch die gesuchte Berührungscurve, vermöge des Umkehrproblems *ein*deutig bestimmt werden kann. Die resultirenden Punkte $y^{(i)}$ aber ändern sich nicht, wenn man die P_h gleichzeitig um das r-fache eines Systems von Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert, denn dadurch bleiben die Werthe der im Umkehrprobleme zu benutzenden Θ-Functionen völlig ungeändert. Daher braucht man, um alle möglichen Berührungscurven zu erhalten, den in den P_h auftretenden ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_p$, $q_1, q_2, \ldots q_p$ nur die Werthe $0, 1, \ldots r-1$ beizulegen. Man erhält so r^{2p} Systeme von Grössen P_h und sonach auch ebenso viele Berührungscurven: *Das vorgelegte Problem hat r^{2p} Lösungen.**) Unter den gefundenen Berührungscurven ist insbesondere wieder die als bekannt angenommene, in den Punkten $c^{(i)}$ berührende Curve enthalten. Dieselbe ergibt sich, wenn man gleichzeitig allen Zahlen m_i, q_i den Werth Null beilegt.

Die entsprechenden r^{2p} Systeme von je p Berührungspunkten y haben eine sehr merkwürdige Lage gegen einander: Unterscheidet man beliebig ausgewählte r Systeme der Art durch beigesetzte obere Indices, so dass die Punkte dieser Systeme bez. durch $y^{(1\,i)}, y^{(2\,i)}, \ldots y^{(r\,i)}$ und die entsprechenden Werthe P_h durch $P_h^{(1)}, P_h^{(2)}, \ldots P_h^{(r)}$ bezeichnet sind, und addirt die entsprechenden Gleichungen (4), so erhält man für $h = 1, 2, \ldots p$:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(1\,i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(2\,i)}} du_h + \cdots + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(r\,i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{i=r} P_h^{(i)}.$$

Bestimmt man also die in den P_h vorkommenden Zahlen m, q so, dass

$$(6)\quad \begin{aligned} m_h^{(1)} + m_h^{(2)} + \cdots + m_h^{(r)} &\equiv 0 \quad (\text{mod. } r), \\ q_h^{(1)} + q_h^{(2)} + \cdots + q_h^{(r)} &\equiv 0 \quad (\text{mod. } r), \end{aligned}$$

*) Die Auflösung der entsprechenden Gleichung vom Grade r^{2p} kann man durch Wurzelausziehen bewerkstelligen, sobald man eine *specielle Theilungsaufgabe* als gelöst betrachtet, welche entsteht, wenn man in (4) die a mit den x zusammenfallen lässt, analog wie bei den elliptischen Functionen; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 235 ff. In besonderen Fällen (z. B. bei Curven mit speciellen Moduln) können unendlich viele Lösungen auftreten. — Insbesondere folgt aus dem Satze des Textes, dass es 2^{2p} Curven $(n-2)$ter Ordnung gibt, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte einer Tangente von f gehen und letztere Curve noch in p Punkten berühren (p. 835). Wir werden aber später sehen, dass gewisse dieser C_{n-2} in besagte Tangente und eine C_{n-3} zerfallen.

so kann man statt der rechten Seite von (5) Null setzen; und diese Gleichung sagt dann aus, dass die r Systeme von Berührungspunkten y mit den gegebenen Punkten x auf einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung liegen. Aus (6) sieht man, dass von den r Systemen $r-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch dann das r^{te} sich nach den Gesetzen des Jacobi'schen Umkehrproblems bestimmt. Man hat also den Satz:

*Legt man eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung durch die λ gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten, so geht dieselbe noch durch ein r^{tes} System.**)

Wir lassen in dem vorliegenden Probleme von den gegebenen Punkten, deren Anzahl grösser als $\mu . r$ vorausgesetzt werden mag (wo μ eine ganze Zahl), μ-mal r Punkte zusammenfallen, so dass nur die übrigen $\lambda - \mu r$ Punkte gegeben sind; dann bietet sich die unbestimmte Aufgabe: *Eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung soll durch $\lambda - \mu r = mn - \Sigma \alpha_i i (i-1) - (p+\mu) r$ auf der Grundcurve n^{ter} Ordnung gegebene Punkte gehen und diese Curve ausserdem in $p+\mu$ Punkten je $(r-1)$-punktig berühren.*

Diese Aufgabe ist für $m > n-3$ im Allgemeinen wie die vorige lösbar, und zwar sind μ Berührungspunkte noch willkürlich, die p übrigen dann aber bestimmt (nach dem Jacobi'schen Umkehrprobleme). Durch die gegebenen Punkte lassen sich also noch μ-fach unendlich viele Curven der gesuchten Art legen, und noch r^{2p} verschiedene, wenn μ Berührungspunkte willkürlich angenommen sind. Geht man in letzterem Falle von einer der r^{2p} Curven aus, für welche das in den Gleichungen (4) auftretende Periodensystem den Werth P_h' haben möge, und lässt dann die μ willkürlich gewählten Punkte allmählich auf der Grundcurve alle möglichen (∞^{μ} verschiedenen) Lagen annehmen, so erhält man μ-fach unendlich viele andere Berührungscurven, welchen allen in den Gleichungen (4) *dasselbe* Periodensystem P_h' zukommt. Und man kann durch Variiren jener μ Punkte zu keiner Curve gelangen, die durch ein anderes Periodensystem gegeben wird; denn letztere Systeme sind völlig discret und unabhängig von den μ beweglichen Punkten charakterisirt. Alle so aus einer Curve durch einen continuirlichen Process ableitbaren Curven bilden ein

---

*) Von ersteren Systemen können in Folge besonderer Lagen der λ gegebenen Punkte mehrere gruppenweise zusammenfallen; es kann aber auch eintreten, dass dies r^{te} System mit einem der ersteren zusammenfällt. Letzteres geschieht immer bei $r=2$, da p Schnittpunkte durch die übrigen gerade bestimmt sind, man also durch die λ Punkte und eines der 2^{2p} Systeme nur noch *eine* adjungirte C_m legen kann. Diese *eine* Curve ist dann eben die gefundene Berührungscurve. — Fallen μ Systeme zusammen, so hat in den betreffenden Punkten die neue C_m eine $(\mu-1)$-punktige Berührung mit $f=0$.

sogenanntes *System von Berührungscurven.**) Wir können sonach folgenden Satz aussprechen.

Man kann für $m > n - 3$ unendlich viele adjungirte Curven m^{ter} Ordnung bestimmen, welche die vorliegende Grundcurve in $p + \mu$ Punkten je $(r - 1)$-punktig berühren, während der Rest der Schnittpunkte gegeben ist, vorausgesetzt dass $\mu r \leq mn - \Sigma \alpha_i \, i\,(i-1) - rp$. Diese Curven theilen sich in r^{2p} völlig getrennte Systeme ein dergestalt, dass es nicht möglich ist, von einer Curve eines Systems durch lauter Berührungscurven hindurch zu einer Curve eines andern Systems stetig überzugehen.

Ist nun irgend eine adjungirte Curve der Ordnung m gegeben, welche in $p + \mu$ Punkten $c^{(i)}$ $(r - 1)$-punktig berührt und durch $\lambda - \mu r$ feste Punkte $a^{(i)}$ geht, so haben wir:

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{i=\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} P_h.$$

Betrachten wir jetzt r Curven desselben Systems (für die also P_h denselben Werth hat) und addiren die entsprechenden Gleichungen, so kommt analog den Gleichungen (5):

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \sum_{k=1}^{k=r} \int_{c^{(i)}}^{y^{(ki)}} du_h = - \sum_{i=1}^{i=\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h, \quad h = 1, 2, \ldots p.$$

Also: *Die Berührungspunkte von irgend r Berührungscurven desselben Systems liegen jederzeit auf einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gegebenen festen Punkte hindurchgeht.*

Ausserdem ergibt sich wie in dem vorhin behandelten Falle der Satz: *Legt man durch die gegebenen Punkte und durch $r - 1$ Systeme von je $p + \mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung, so geht dieselbe immer noch durch ein r^{tes} System;* und der frühere Satz (p. 841) kann als specieller Fall dieses letzteren aufgefasst werden. —

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in welchen die Zahl $mn - \Sigma \alpha_i i\,(i - 1)$ durch r theilbar ist, so dass

$$mn - \Sigma \alpha_i i\,(i-1) = (p + \mu)\, r.$$

Denn dann treten adjungirte Berührungscurven auf, welche die Grund-

*) Dieser Begriff ist von Hesse in die Geometrie eingeführt und zunächst für Curven dritter und vierter Ordnung verwerthet worden: Crelle's Journal, Bd. 49. Vgl. auch p. 706 und die dritte Anmerkung auf p. 697. — Verschiedene Beispiele für den Fall $n = 4$ werden wir sogleich noch erwähnen. Für $n = 3$, $m = 2$ vgl. p. 533 f.

curve f überall $(r-1)$-punktig berühren, wo sie derselben begegnen (ausgenommen die singulären Punkte von f); und die entstehenden Systeme sind allein von der Grundcurve selbst und der Ordnung m der Berührungscurve abhängig, nicht mehr, wie im Vorigen, ausserdem durch besondere auf ersterer beliebig gewählte Punkte charakterisirt. Die Anzahl der verschiedenen Systeme kann hier aber unter Umständen eine andere werden, als durch die Zahl r^{2p} angegeben wird, während die übrigen oben gefundenen Sätze ihre Gültigkeit behalten.

Nehmen wir nämlich an, es habe die Zahl M $(= mn - \Sigma \alpha_i i (i-1))$ der beweglichen Schnittpunkte einer adjungirten C_m mit r einen gemeinsamen Factor, so dass $M = M'.s$, $r = r'.s$, also auch $r'(p+\mu) = M'$, wo M', r' relative Primzahlen sein mögen. So oft nun alle in den P_h vorkommenden Zahlen m, q den Factor s enthalten, hat man:

$$\frac{1}{r} P_h = \frac{1}{r'} P_h' \qquad (h = 1, 2 \ldots p),$$

wo die P_h' Ausdrücke nach Art der P_h sind. Dann ist immer:

$$r' \left\{ \int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p+\mu)}}^{y^{(p+\mu)}} du_h \right\} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P'_h).$$

eine Gleichung, welche lehrt, dass die den $y^{(i)}$ entsprechende Curve nicht $(r-1)$-punktig, sondern nur $(r'-1)$-punktig berührt und also bei dem vorliegenden Probleme nur insofern in Frage kommt, als sie, s-fach gerechnet, eine uneigentliche $(r-1)$-punktig berührende Curve darstellt. Indem man von diesen Ausnahmecurven abstrahirt und bemerkt, dass die Zahl solcher Systeme nach dem Vorigen gleich r'^{2p} ist*), gelangt man zu dem Satze:

Wenn die Zahl M aller beweglichen Schnittpunkte einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung, wo $m > n-3$, gleich $(p+\mu) r$ ist, so gibt es Systeme von solchen Berührungscurven, welche die Grundcurve in $p+\mu$ Punkten $(r-1)$-punktig berühren, von denen μ beliebig sind. Ist $M = M'.s$, $r = r'.s$, wo M', r' relative Primzahlen sind, so ist die Anzahl der Systeme gleich $r^{2p} - r'^{2p}$; nur wenn M und r relative Primzahlen sind, ist die Anzahl derselben gleich r^{2p}.

Im Allgemeinen wird man die Zahl r in der Form $r_1^{\alpha_1} . r_2^{\alpha_2} \ldots$ voraussetzen müssen, wo $r_1, r_2 \ldots$ Primzahlen sind; und es treten

*) Wenn ein solches System aus adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung besteht, so kann die Mannigfaltigkeit desselben grösser als μ sein, indem dann erst $p-1$ oder weniger Punkte durch das Umkehrproblem bestimmt werden (p. 837 f). So gibt es z. B. zu einer C_4 2^6-1 verschiedene Systeme von je *einfach* unendlich vielen eigentlichen C_2, welche die C_4 in je vier Punkten berühren; gleichzeitig tritt das System der doppelt zählenden Geraden auf, und letzteres besteht aus *zweifach* unendlich vielen Curven.

dann entsprechend dem Charakter der Zahl r noch weitere Besonderheiten ein; was hier aber nicht näher erörtert werden soll*), da es sich nur um weitläufige Unterscheidungen, nicht um neue Untersuchungen handelt. — An das zuletzt gefundene Resultat knüpft sich ferner eine Anzahl von Sätzen über diejenigen Fälle, in denen die Berührungspunkte mehrerer Berührungscurven zusammen wieder auf einer anderen adjungirten Curve liegen. Solche Sätze gelten auch noch, wenn man nicht Berührungscurven gleicher Ordnung betrachtet. Es ist nämlich, wenn M', r', μ'; M'', r'', μ''; ... $M^{(\varrho)}, r^{(\varrho)}, \mu^{(\varrho)}$ die den verschiedenen zusammen betrachteten Berührungscurven entsprechenden Zahlen bezeichnen (so dass $M^{(i)} = (p + \mu^{(i)})\, r^{(i)}$), nur nöthig, dass die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{1}{r'} P_h' + \frac{1}{r''} P_h'' + \ldots + \frac{1}{r^{(\varrho)}} P_h^{(\varrho)} \equiv 0\,,$$

damit die $\varrho p + \Sigma \mu^{(i)}$ Berührungspunkte der Curven mit bez. M', M'', ... $M^{(\varrho)}$ beweglichen Schnittpunkten auf einer neuen adjungirten Curve liegen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Zahl

$$\varrho p + \mu' + \mu'' + \ldots + \mu^{(\varrho)} = hn - \Sigma \alpha_i i\,(i-1)$$

gesetzt werden kann, wo dann h eben die Ordnung dieser neuen Curve ist. — Von den zahlreichen Sätzen, welche aus der so bezeichneten Quelle fliessen, möge hier nur ein Beispiel hervorgehoben werden.

Für den Fall, dass $M = pr$ wird, erhalten wir durch obige Sätze Klassen von völlig bestimmten Berührungscurven, für die kein Berührungspunkt mehr willkürlich gewählt werden darf. Dies tritt z. B. ein für $n = 4$, $p = 3$, $m = 3$ (also $M = 12$), $r = 4$; und wir erhalten unmittelbar den Satz:

Es gibt $4^6 = 4096$ *Curven* 3ter *Ordnung, welche eine gegebene Curve* 4ter *Ordnung ohne Doppelpunkte in drei Punkten je dreipunktig berühren.*

Bezeichnet man hier die den verschiedenen Berührungscurven entsprechenden Zahlen, welche in den Periodensystemen P_h vorkommen, durch obere Indices, so *liegen immer die Berührungspunkte dreier Curven auf einer neuen Curve dritter Ordnung, sobald:*

$$m_h' + m_h'' + m_h''' + m_h'''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)\,,$$
$$q_h' + q_h'' + q_h''' + q_h'''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)\,.$$

Die so erhaltenen Curven dritter Ordnung gruppiren sich in drei Klassen. Die Curven der ersten Klasse berühren einfach in den Berührungspunkten zweier der gefundenen Curven, die der zweiten

*) Vgl. darüber Cl. u. G. A. F. p. 242 ff.

berühren einfach in den Berührungspunkten einer Curve und gehen durch die Berührungspunkte zweier anderen hindurch; die der dritten endlich gehen durch die Berührungspunkte von vier verschiedenen Curven. Die erste Klasse erhält man, wenn man zweimal zwei der Zahlen m, q einander gleich annimmt, also z. B. $m' = m'''$, $m'' = m''''$, $q' = q'''$, $q'' = q''''$, so dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$2(m_h' + m_h'') \equiv 0, \quad 2(q_h' + q_h'') \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4).$$

Die zweite Klasse resultirt, wenn wan etwa $m''' = m''''$ wählt, m' und m'' aber verschieden nimmt, so dass:

$$m_h' + m_h'' + 2m_h''' \equiv 0, \quad q_h' + q_h'' + 2q_h''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4).$$

Bei der dritten Klasse dagegen sind alle vier Zahlen m, q verschieden zu nehmen.

Zu den *völlig bestimmten* Problemen gehört auch das folgende, welches für die Geometrie auf der Curve f sowie für das Umkehrproblem der Abel'schen Integrale von hervorragender Wichtigkeit ist, sich jedoch von den bisher betrachteten Fragen unterscheidet, insofern es sich nunmehr um *Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung* handelt. Insbesondere werden wir dadurch weiterhin zu Betrachtungen über die Doppeltangenten der allgemeinen Curve 4. Ordnung, und über die Lage der Punkte $\alpha^{(i)}$ geführt werden, welche beim Umkehrprobleme passend zu unteren Grenzen der Integrale gewählt wurden. Die betreffende Aufgabe fordert, *eine adjungirte Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung so zu legen, dass sie die gegebene Curve* n^{ter} *Ordnung, vom Geschlechte* p *in* $p-1$ *Punkten je einfach berührt.*

Indem wir bei unserer bisherigen Bezeichnungsweise bleiben, stellen sich die Gleichungen zwischen den Integralen, auf welche diese Aufgabe führt, folgendermassen dar, wenn R_h eine ganzzahlige Combination der Perioden bezeichnet*):

$$(7) \qquad \int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p-1)}}^{y^{(p-1)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} R_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots p).$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist um Eins grösser als die der Unbekannten. Dennoch sind die Gleichungen mit einander verträglich; denn es besteht zwischen den Summen der Integrale u_h eine Relation, wenn deren obere Grenzpunkte auf einer adjungirten C_{n-3} liegen; und

*) Es wird hier wieder eine solche Curve mit den Berührungspunkten $c^{(i)}$ als bekannt angenommen; vgl. die erste Anmerkung auf p. 839.

diese Relation ist, wie schon oben (p. 837) erwähnt wurde, durch das identische Verschwinden der Function $\Theta(v_1 \ldots v_p)$ gegeben, wo:

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

wenn wieder $\alpha^{(i)}$ die Berührungspunkte der in bestimmter Weise zu μ gehörigen C_{n-2} bedeuten (p. 835), während μ beliebig ist. Nun bildet die Tangente von μ zusammen mit der C_{n-3}, deren Berührungspunkte $c^{(i)}$ in den unteren Grenzen von (7) auftreten, auch eine adjungirte C_{n-2}, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte jener Tangente mit f geht, und sonach die Grundcurve allenthalben zweipunktig trifft, wo sie ihr noch begegnet. Es muss daher ein gewisses System Q_h von Periodicitätsmoduln geben, für welches nach dem Abel'schen Theoreme:

(8) $$\int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p-1)}}^{\alpha^{(p-1)}} du_h + \int_{\mu}^{\alpha^{(p)}} du_h = \tfrac{1}{2} Q_h .$$

Die Argumente v_h der soeben erwähnten Θ-Function werden unter Berücksichtigung von (7):

(9) $$v_h = \tfrac{1}{2} R_h - \tfrac{1}{2} Q_h .$$

Sollen also die Gleichungen (7) zusammen bestehen, so muss die Function $\Theta(\frac{1}{2} R_h - \frac{1}{2} Q_h)$ verschwinden, oder $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$, wenn $P_h = R_h - Q_h$ gesetzt wird, so dass P_h wieder ein Periodensystem bedeutet. Nun folgt aber aus den Periodicitäts-Eigenschaften der Θ-Function unmittelbar der Satz*), dass *die Function* $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$ *immer und im Allgemeinen nur dann verschwindet, wenn ihre Argumente eines der Systeme von halben Perioden*

$$\tfrac{1}{2} P_h = m_h \pi i + \tfrac{1}{2} \Sigma_k a_{hk} q_k$$

sind, für welche die Summe $m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p$ *eine ungerade Zahl ist; d. h.:*

(10) $$m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p = 2H + 1 .$$

Von den Functionen $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$ verschwinden also immer so viele, als die diophantische Gleichung (10) Lösungen hat. Um die Anzahl der letzteren zu finden, nehmen wir an, es seien k der Zahlen m gleich 0, die übrigen $p-k$ gleich 1; die den ersteren Zahlen m zugehörigen q können dann 0 oder 1 sein, was 2^k Combinationen gibt. Die Summe der anderen q aber muss ungerade sein, d. h. es ist immer die letzte

*) Vgl. Clebsch a. a. O. §. 8 oder z. B. Cl. u. G. A. F. p. 260; Neumann a. a. O. p. 37.

Zahl q durch die übrigen $p-k-1$ bestimmt. Diese anderen Zahlen q können daher noch auf 2^{p-k-1} verschiedene Arten gewählt werden, oder es gibt im Ganzen in diesem Falle 2^{p-1} Systeme der q. Je nachdem man nun unter den p Zahlen m_h solche k herauswählt, welche gleich Null sein sollen, hat man

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}$$

verschiedene Fälle und daher im Ganzen

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}.2^{p-1}$$

Systeme der Zahlen m, q für ein gegebenes k. Endlich kann k die Werthe $0, 1, \ldots p-1$ annehmen; die Anzahl aller möglichen Lösungen ist daher:

$$2^{p-1}\left\{1+\frac{p}{1}+\frac{p(p-1)}{1.2}+\ldots+p\right\}=2^{p-1}(2^p-1).$$

Dieses ist also die Anzahl der Systeme P_h von halben Periodicitätsmoduln, für welche die Function $\Theta(\frac{1}{2}P_h)$ verschwindet.

Nun hatten wir $P_h = R_h - Q_h$ gesetzt, wo Q_h durch die Gleichung (8) vollständig bestimmt ist, indem Q_h allein von den Punkten $c^{(i)}$ und $\alpha^{(i)}$ abhängt. Zu jedem der $2^{p-1}(2^p-1)$ Werthsysteme P_h gehört somit ein ganz bestimmtes Periodensystem R_h, für welches die Gleichungen (7) bestehen können; und also auch ein ganz bestimmtes System von Berührungspunkten $y^{(i)}$ einer adjungirten C_{n-3}. Wir haben also den Satz:

Es gibt $2^{p-1}(2^p-1)$ adjungirte Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche die Curve $f=0$ in $p-1$ Punkten je einfach berühren.

Diese Curven bestimmen sich, wenn wir obige Erörterungen zusammenfassen, aus den Gleichungen:

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h \equiv \tfrac{1}{2}P_h \qquad (h=1, 2, \ldots p),$$

in denen μ und $\alpha^{(i)}$ die bekannten Bedeutungen haben (p. 835), und welche zusammen bestehen können, sobald die in den P_h auftretenden ganzen Zahlen m, q der Gleichung (10) genügen.

Man bemerkt sofort, dass die Gleichungen (11) aus den Gleichungen (p. 839):

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2}P_h \qquad (h=1, 2, \ldots p)$$

hervorgehen, wenn man einen der Punkte $y^{(i)}$ mit dem Punkte μ zu-

sammenfallen lässt. Die letzteren Gleichungen bestimmen indess zunächst die $2^{2p}-1$ adjungirten Berührungscurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ hindurchgehen, wenn eine dieser Curven (mit den Berührungspunkten $\alpha^{(i)}$) bekannt ist. Da aber auch jede der gefundenen in $p-1$ Punkten berührenden C_{n-3} zusammen mit der Tangente von μ eine C_{n-2} der genannten Art bildet, so wird es nur noch

$$2^{2p}-2^{p-1}(2^p-1)=2^{p-1}(2^p+1)$$

nicht zerfallende C_{n-2} geben, deren Berührungspunkte den Gleichungen (12) genügen. Wir haben also den folgenden Satz, welcher den vorhergehenden ergänzt:

Es gibt $2^{p-1}(2^p+1)$ adjungirte Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $n-2$ Schnittpunkte der in einem beliebigen Punkte μ gelegten Tangente mit $f=0$ hindurchgehen und die Curve $f=0$ in p Punkten je einfach berühren.

Die Berührungspunkte dieser Curven findet man aus den Gleichungen (12), wenn man für die P_h alle diejenigen Systeme von Periodicitätsmoduln setzt, für welche die Gleichung (10) nicht erfüllt ist, d. h. für welche:

$$m_1q_1+m_2q_2+\ldots+m_pq_p=2H.$$

Insbesondere ist hierunter auch das System enthalten, für welches $m_i=q_i=0$, entsprechend der in den Punkten $\alpha^{(i)}$ selbst berührenden Curve, welche durch die Wahl des benutzten Systems normaler Periodicitätsmoduln vor den übrigen C_{n-2} ausgezeichnet ist (p. 836 Anmk.). Die wirkliche Aufsuchung der verschiedenen Systeme von Berührungspunkten wird durch eine Gleichung vom Grade $2^{p-1}(2^p+1)$ möglich sein; es ist aber zu bemerken, dass sich die Wurzeln dieser Gleichung rational durch die Wurzeln der Gleichung vom Grade $2^{p-1}(2^p-1)$ ausdrücken lassen, von welcher die Bestimmung der in $p-1$ Punkten berührenden adjungirten C_{n-3} abhängt, wie in der Theorie der Theilung der Abel'schen Functionen gelehrt wird.*)

In ähnlicher Weise, wie hier die zum Punkte μ gehörigen Berührungscurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in zwei völlig verschiedene Klassen getheilt sind, sondern sich überhaupt alle Systeme von adjungirten Berührungscurven, welche die Grundcurve überall berühren, wo sie derselben begegnen, in zwei verschiedene Klassen, von denen dann die Systeme der einen Klasse in besonderer Beziehung zu den $2^{p-1}(2^p-1)$ Gruppen von Berührungspunkten der adjungirten C_{n-3} stehen. Eine adjungirte Curve nämlich möge die Grundcurve, abgesehen von den singulären Punkten der letzteren, in $M=2\mu$ Punkten

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 266 ff.

treffen, und es möge eine solche Curve in $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(\mu)}$ die Grundcurve berühren; dann bestehen für die übrigen $2^{2p}-1$ Systeme von Berührungscurven die p Gleichungen:

$$(13)\qquad \int_{a^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{x^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} R_h,$$

wenn R_h irgend ein Periodensystem bedeutet. Wir legen nun den in R_h vorkommenden ganzen Zahlen insbesondere solche Werthe bei, dass auch die Gleichungen (7) bestehen können; dann wird, wenn wir unter R_h in (13) und (7) dieselben Grössen verstehen, immer:

$$(14)\qquad \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv 0\,.$$

Ist also die Zahl $\mu + p - 1 + \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1)$ durch n theilbar*), so liegen die Punkte $x^{(i)}$ und $y^{(i)}$ wieder auf einer adjungirten Curve; oder mit anderen Worten: die Gruppe der Punkte $x^{(i)}$ ist residual zu der Gruppe der Punkte $y^{(i)}$ (p. 431). Wir haben also den Satz:

Unter den 2^{2p} Systemen von adjungirten Berührungscurven, welche die Grundcurve f in μ Punkten je einfach berühren und sonst, die singulären Punkte ausgenommen, nicht mehr treffen, gibt es, wenn

$$\mu + p - 1 + \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) = hn\,,$$

immer $2^{p-1}(2^p-1)$ solche, dass die Gruppe der Berührungspunkte jeder Curve des Systems mit den $p-1$ Berührungspunkten einer bestimmten der obigen Berührungscurven $(n-3)^{ter}$ Ordnung auf einer adjungirten Curve h^{ter} Ordnung liegt. — Ist dagegen:

$$\mu + p + \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) = hn\,,$$

so gibt es unter jenen 2^{2p} Systemen, wie man in analoger Weise erkennt, $2^{p-1}(2^p+1)$ solche, dass ihre Berührungspunkte mit den p Berührungspunkten einer bestimmten der obigen C_{n-2} auf einer C_h liegen.

Nehmen wir z. B. $n=4$, $p=3$, so sind die betreffenden C_{n-3} durch die $2^2(2^3-1)=28$ Doppeltangenten der C_4 gegeben. Legt man nun durch die Berührungspunkte einer dieser Doppeltangenten eine Schaar von Kegelschnitten, so schneiden dieselben noch eine

---

*) Andernfalls würden die Punkte $x^{(i)}, y^{(i)}$ mit einer Anzahl fester Punkte auf einer adjungirten Curve liegen, und mit denselben festen Punkten die Punkte $a^{(i)}$ und $c^{(i)}$. — Ist $p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ und $2\mu = mn$, so wird $h=\frac{1}{2}(m+n-3)$; es muss also eine der Zahlen m, n gerade, die andere ungerade sein; ist hier m gerade, $=2\nu$, so ist unter den 2^{2p} Systemen das der doppelt zählenden Curven ν^{ter} Ordnung enthalten.

Schaar von 6 beweglichen Punkten auf der C_4 aus; und in den 6 Punkten einer jeden so erhaltenen G_6 kann eine C_3 je einfach berühren. Es gibt aber auch überall berührende C_3, welche nicht in dieser Weise bestimmt werden können. —

Wir wollen nun die gewonnenen allgemeinen Resultate für die Untersuchung der *Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung* verwerthen.

Die Anzahl derselben ist, wie soeben erwähnt und wie aus den Plücker'schen Formeln bekannt ist, gleich 28. Eine jede von ihnen mag bezeichnet werden durch die in Klammern geschlossene Reihe der ihr entsprechenden Zahlen m, q, welche in den Periodensystemen P_h der Gleichungen (12) vorkommen, also durch

$$(m_1, m_2, m_3; \;\; q_1, q_2, q_3) .$$

Diese Zahlen können 0 oder 1 sein, doch so, dass immer:

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2) .$$

Nehmen wir also für die m alle möglichen aus den Zahlen 0 und 1 bestehenden Systeme, nur das System 0, 0, 0 ausgeschlossen, und bestimmen obiger Gleichung gemäss die zugehörigen q, so erhalten wir die 28 Doppeltangenten in folgendem Schema:

(100, 100) (010, 010) (001, 001) (011, 010)
(100, 110) (010, 110) (001, 011) (011, 001)
(100, 101) (010, 011) (001, 101) (011, 110)
(100, 111) (010, 111) (001, 111) (011, 101)
(101, 100) (110, 100) (111, 100)
(101, 110) (110, 101) (111, 010)
(101, 001) (110, 010) (111, 001)
(101, 011) (110, 011) (111, 111).

Je m solche Doppeltangenten kann man als eine zerfallene adjungirte Berührungscurve m^{ter} Ordnung ansehen; je nachdem man die Zahl m wählt, ergibt sich dann aus obigen allgemeinen Theoremen sofort eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage der Doppeltangenten, wie diese von Hesse und Steiner zum grösseren Theile auf algebraischem Wege gefunden sind.*) Wir betrachten zuerst die einfachsten Fälle, wo $m = 2$ und $m = 3$:

*) Vgl. Hesse: Crelle's Journal, Bd. 49, 55 und 59; Steiner: ib. Bd. 49, sowie Cayley: ib. Bd. 68. Algebraische Beweise für andere von Steiner ohne Beweis mitgetheilte Sätze über Doppeltangenten gab Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen etc. §. 10, Crelle's Journal, Bd. 63, geometrische Beweise Geiser: Crelle's Journal, Bd. 73 (der letzte § dieses Aufsatzes ist nach einer Note von Frahm: Math. Annalen, Bd. 7, p. 635 zu berichtigen).

Es gibt (nach p. 840) $2^6 - 1 = 63$ Systeme von Kegelschnitten*), welche die C_4 in 4 Punkten berühren. Ein solcher Berührungskegelschnitt, dessen zugehöriges Periodensystem durch die Zahlen m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3 bestimmt sein mag (wo die m, q nur nicht gleichzeitig alle 0 sein dürfen, sonst aber alle Werthe 0, 1 annehmen können), zerfällt immer in zwei Doppeltangenten:

$$(m_1', m_2', m_3'; \; q_1', q_2', q_3'), \quad (m_1'', m_2'', m_3''; \; q_1'', q_2'', q_3''),$$

sobald gleichzeitig ($i = 1, 2, 3$):

$$(14) \qquad m_i' + m_i'' \equiv m_i, \quad q_i' + q_i'' \equiv q_i \quad (\text{mod. } 2),$$

vorausgesetzt, dass (ebenfalls mod. 2):

$$(15) \quad m_1'q_1' + m_2'q_2' + m_3'q_3' \equiv 1, \quad m_1''q_1'' + m_2''q_2'' + m_3''q_3'' \equiv 1.$$

Es sind dabei entweder die q oder die m nicht sämmtlich Null. Wir wollen z. B. annehmen, die Zahlen q_1, q_2 seien nicht Null (andernfalls hätte man in der folgenden Bestimmung nur die q mit den m zu vertauschen). Dann zeigen erstlich die Gleichungen (14), dass man für gegebene q_i die q_i', q_i'' auf 6 verschiedene Arten wählen kann. Ueberhaupt nämlich existiren 8 Combinationen, welche jene Gleichungen erfüllen; von diesen aber sind die beiden auszuschliessen, für welche sämmtliche q' oder sämmtliche q'' Null, was nach unserm Schema nicht eintreten kann. Diese 6 Arten geben 3 Paare von Systemen q_i', q_i'', indem immer zwei Arten desselben Paares sich nur durch Vertauschung der q' mit den q'' unterscheiden. In jedem dieser Paare sind nun wenigstens drei der Grössen q_i' (und ebenso der q_i'') von einander verschieden, also gleich 0 und 1, demnach irgend ein anderes 1 und 0 oder 1 und 1. Es existiren daher ein q' und ein q'' mit verschiedenem unteren Index, welche gleich 1 sind. Bestimmt man nun die dem dritten unteren Index entsprechenden Zahlen m so, dass sie der betreffenden Gleichung (14) genügen

— Eine Frage anderer Art ist die nach der *Realität* der Doppeltangenten. Schon Plücker hatte gezeigt, dass sie sämmtlich reell sein können (vgl. dessen Theorie der algebraischen Curven; seine Zahlenresultate sind indess nicht alle correct). Eine vollständige Darstellung aller möglichen Fälle (sowie überhaupt der möglichen Gestalten einer C_4) gab Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 7, p. 410. — Ueber den Zusammenhang dieser Theorien mit denjenigen der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung vgl. Geiser: Math. Annalen, Bd. 1 und Zeuthen: ib. Bd. 8. — Eine Zusammenstellung verschiedener Behandlungsweisen findet man in Salmon's higher plane curves, art. 251 ff. — Dass man nach Hesse eine Curve 14[ter] Ordnung angeben kann, welche die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten auf der C_4 ausschneidet, ist schon in der Anmerkung auf p. 350 hervorgehoben.

*) Von den zunächst gefundenen 64 Systemen nämlich ist das der doppelt zählenden Geraden abzuziehen; vgl. die Anmerkung auf p. 843.

(was auf *zwei* Arten geschehen kann), so bestimmen die übrigen m sich aus (14) und (15) successive. Jedem der 3 Paare q', q'' entsprechen also zwei Paare m', m''; oder man hat den Satz:

In jedem der 36 Systeme von Berührungskegelschnitten kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor.

Da für irgend zwei solcher demselben Systeme angehörigen Paare die Summe aller m_i so wie die Summe aller q_i stets gerade ist, so hat man ferner den Satz (auch als Specialfall eines Satzes auf p. 842):

*Die Berührungspunkte je zweier Paare, welche demselben Systeme angehören, liegen auf einem Kegelschnitte.**)

Die Zahl der so erhaltenen Kegelschnitte ist gleich der der 63 Systeme, multiplicirt mit der Anzahl 15 der Combinationen von 6 Paaren zu zweien, und dividirt durch 3, da jede vier Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, auf 3 Arten in zwei Paare zerlegt werden können, also jeder Kegelschnitt 3-mal vorkommt. *So findet man die Zahl dieser Kegelschnitte gleich 315.* Das Obige erlaubt sofort, die ihnen bez. entsprechenden Doppeltangenten zusammenzustellen.

Es gibt ferner 64 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung je in 6 Punkten berühren (nach p. 840). Die

---

*) Es seien:

$$uu' = 0, \quad vv' = 0, \quad ww' = 0$$

die Gleichungen dreier Paare von Doppeltangenten desselben Systems. Durch die Berührungspunkte eines vierten Paares dieses Systems und durch die Berührungspunkte je eines der genannten drei Paare kann man dann einen Kegelschnitt legen. Man erhält so drei Kegelschnitte, welche demselben Büschel angehören, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, so dass:

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3 = 0\,.$$

Die Quotienten $\sqrt{uu'} : \sqrt{ww'}$ und $\sqrt{vv'} : \sqrt{ww'}$ werden dann bez. in denselben Punkten Null und unendlich von der ersten Ordnung, wie die Quotienten $\sigma_1 : \sigma_3$ und $\sigma_2 : \sigma_3$; bei passender Bestimmung der Constanten kann man also setzen:

$$\sqrt{uu'} : \sqrt{vv'} : \sqrt{ww'} = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3\,;$$

und *es besteht daher zwischen je 3 Paaren desselben Systems eine Gleichung der Form*:

$$k_1\sqrt{uu'} + k_2\sqrt{vv'} + k_3\sqrt{ww'} = 0\,.$$

Ebenso besteht zwischen je drei beliebigen Berührungskegelschnitten desselben Systems $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ vermöge $f = 0$ eine Identität der Form:

$$k_1\sqrt{S_1} + k_2\sqrt{S_2} + k_3\sqrt{S_3} = 0.$$

Vgl. auch Hesse a. a. O. Auf die hiermit zusammenhängenden Untersuchungen von Aronhold kommen wir bei Gelegenheit des Connexes [1, 2] zurück. — Die Verhältnisse $\sqrt{u} : \sqrt{w}$, $\sqrt{v} : \sqrt{w}$ etc. sind dann Abel'sche Functionen im Sinne Riemann's, vgl. Roch, Crelle's Journal, Bd. 66, p. 105, sowie obige Anmerkung auf p. 832.

den Berührungspunkten entsprechenden Integrale genügen dann immer den Gleichungen

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(6)}}^{y^{(6)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} R_h;$$

und die 64 Systeme sondern sich in der oben angegebenen Weise in zwei Klassen, je nachdem das Periodensystem R_h auch zugleich in den für die Doppeltangenten bestehenden Gleichungen (7):

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} R_h$$

vorkommt oder nicht; d. h. je nachdem in dem Systeme $P_h = R_h - Q_h$, welches in (11) vorkommt, $\Sigma mq \equiv 1$ (was 28-mal geschieht) oder $\Sigma mq \equiv 0$ mod. 2 (was 36-mal geschieht). Man hat darnach den Satz (p. 849):

Von den 64 Systemen der Curven dritter Ordnung haben 28 die Eigenschaft, dass in jedem die 6 Berührungspunkte jeder Curve auf einem Kegelschnitte liegen, welcher noch durch die Berührungspunkte einer bestimmten Doppeltangente hindurchgeht; diese Doppeltangente ist für dasselbe System immer dieselbe. Die Berührungspunkte von Curven der übrigen 36 Systeme liegen nicht mit denen einer Doppeltangente in einem Kegelschnitte.

Dagegen haben (nach p. 842) beide Klassen die gemeinsame Eigenschaft, dass *die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung liegen.*

Die 36 Systeme, von denen die zweite Klasse gebildet wird, und von denen jedes noch 3-fach unendlich ist, da für jede Curve noch 3 Berührungspunkte beliebig sind, stehen nun in besonderer Beziehung zu den 36 je einfach unendlichen Systemen von Kegelschnitten, welche in 3 Punkten berühren und durch die 2 Schnittpunkte einer beliebigen Tangente von f gehen. Jeder dieser Kegelschnitte nämlich bildet zusammen mit der Tangente ebenfalls eine C_3, welche in 6 Punkten berührt; nur ist hier die Berührung in zwei Punkten (den Schnittpunkten der gewählten Tangenten) eine uneigentliche, indem die C_3 daselbst Doppelpunkte besitzt. Man erkennt demnach sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes: *Jedes der 36 Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung, welche zu den Doppeltangenten nicht in obiger ausgezeichneten Beziehung stehen, enthält ein einfach unendliches System von Curven, von denen jede in eine Tangente von f und einen der zu dieser gehörenden 36 Kegelschnitte zerfällt. Diese Kegelschnitte gehören für dasselbe System der C_3 immer demselben Systeme aller solchen*

*C_2 an. — Die 6 Berührungspunkte jeder Curve eines Systems von C_3 liegen mit den 3 Berührungspunkten eines jeden Kegelschnittes aus dem zugehörigen C_2-Systeme sowie den 2 Schnittpunkten der betreffenden Tangente und dem Berührungspunkte der letzteren auf einer C_3.**)

Zu den hier betrachteten Systemen von C_3 gehören auch die schon oben erwähnten 4096 Curven 3ter Ordnung, welche die C_4 in 3 Punkten je 4-punktig treffen (3-punktig berühren), indem hier die 6 Berührungspunkte paarweise zusammengerückt sind (vgl. p. 844). Für dieselben ist nämlich:

$$2\left(\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h\right) \equiv \tfrac{1}{2} R_h ;$$

jede solche C_3 gehört also zu demjenigen Systeme von Berührungscurven, welchem das Periodensystem R_h zukommt. Umgekehrt aber folgt aus dieser Gleichung:

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{4} R_h + \tfrac{1}{2} R_h' ,$$

wo jetzt in R_h und R_h' die Zahlen m, q überall nur die Werthe 0 und 1 erhalten dürfen. Ist über die R_h verfügt, so können also die R_h' noch auf 64 verschiedene Arten gewählt werden. *Daher gehören in jedes der 64 Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung 64 solche Curven, welche die Curve 4ter. Ordnung in 3 Punkten je 3-punktig berühren.* Dies stimmt damit überein, dass (nach p. 840) durch je zwei beliebige Punkte einer C_4 64 Kegelschnitte gelegt werden können, welche die C_4 in 3 Punkten berühren. Legt man nun diese C_2 durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, so sind die Berührungspunkte der C_2 zugleich diejenigen, in welchen eine C_3 4-punktig schneiden kann (vgl. p. 853). *So erhält man die 28 . 64 Berührungscurven, welche den erwähnten 28 Systemen angehören;* aber man sieht, dass es noch 36 . 64 solcher Berührungscurven gibt, in deren Berührungspunkten *nicht* zugleich ein Kegelschnitt der C_4 berühren kann, welcher durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente geht. — Diese Beispiele werden hinreichen, um den Charakter der hier auftretenden Sätze zu bezeichnen. Wir können dieselben zu folgendem allgemeineren Theoreme zusammenfassen:

Es gibt je 63 Systeme von Curven $(2m)^{ter}$ Ordnung und je 64 Systeme von Curven $(2m+1)^{ter}$ Ordnung, welche die C_4 einfach berühren, wo sie derselben begegnen. Und diese letzteren 64 Systeme

---

*) Ein ganz analoger Satz gilt natürlich für die adjungirten Berührungscurven $(n-2)^{ter}$ Ordnung bei Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlecht p, vgl. p. 849.

theilen sich immer so in 28 und 36, dass die Berührungspunkte jeder Curve aus einem der 28 Systeme immer mit den Berührungspunkten einer bestimmten unter den 28 Doppeltangenten auf einer Curve $(m+1)^{ter}$ *Ordnung liegen, während etwas Aehnliches bei den anderen 36 Systemen nicht eintritt. Aber alle Systeme haben die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve derselben Ordnung liegen.*

Man kann von diesen Sätzen leicht zu einer genaueren Discussion derjenigen Fälle übergehen, in denen die Berührungspunkte von 6, 8 ... Doppeltangenten auf einer C_3, C_4 ... liegen, worüber ebenfalls von Hesse und Steiner Sätze aufgestellt sind; u. s. w. — Es soll hier nur noch ein Beispiel für Sätze anderen Charakters angeführt werden. Nach p. 843 *gibt es* $3^6 - 1 = 728$ *Systeme von Curven* 3ter *Ordnung, welche die* C_4 *in 4 Punkten je 3-punktig treffen.* Zwischen den Integralen bestehen hier die Gleichungen:

$$\int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{y^{(4)}} du_h \equiv \tfrac{1}{3} P_h;$$

wo das System der P_h, wenn wir annehmen, dass die Punkte $c^{(i)}$ die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der C_4 seien, niemals verschwinden darf, weil sonst die C_3 aus einer dreifach zählenden Geraden bestehen würde. Betrachtet man hier eine Curve, welche demjenigen anderen Systeme angehört, für das immer $2P_h$ an Stelle von P_h tritt, und addirt die einer solchen Curve entsprechenden Gleichungen zu den vorigen, so findet man die Summe analoger Integrale immer der Null congruent. *Die erwähnten 728 Systeme theilen sich also in 364 Paare zu zweien, so dass die Berührungspunkte jeder Curve des einen Systems mit denen jeder Curve des zugehörigen Systems auf einem Kegelschnitte liegen.*

Man kann leicht ähnliche Sätze für die Berührungscurven dieser und anderer Ordnung in Menge aufstellen.

X. Das Verschwinden der Θ-Function. — Beziehungen zum Riemann-Roch'schen Satze.

Wir haben früher hervorgehoben (p. 837), dass die Function $\Theta(v_1, v_2, \ldots v_p)$, deren p Argumente definirt sind durch*):

$$v_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h,$$

*) In Betreff der Bedeutung der Punkte μ und $\alpha^{(i)}$ vgl. p. 835 und 874.

unabhängig von ξ verschwindet, wenn die p Punkte $x^{(i)}$ auf einer zu $f=0$ adjungirten C_{n-3} liegen, d. h. wenn die durch $p-1$ der Punkte $x^{(i)}$ bestimmte C_{n-3} auch den p^{ten} Punkt enthält, oder — was sich für $\xi = x^{(p)}$ ergibt — dass die Θ-Function immer verschwindet, wenn ihre Argumente von der Form sind:

$$v_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \dots + \int_{\alpha^{(p-1)}}^{x^{(p-1)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

wo dann die Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(p-1)}$ völlig beliebig sein können. Dieser Fall ist ein erstes Beispiel dafür, wie sich algebraische Relationen für Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} in einfachster Weise ausdrücken lassen, sobald man die transscendenten Θ-Functionen zu Hülfe nimmt. Durch weitere Verfolgung dieser Bemerkung lassen sich aber auch *alle* diejenigen Sätze über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} erledigen, welche wir früher im Anschlusse an den Restsatz behandelt haben, und welche insbesondere zu dem sogenannten Riemann-Roch'schen Satze führten. Die Entwicklung dieser Verhältnisse soll uns hier zunächst beschäftigen.

Die Einführung der Θ-Function in diese Theorien beruht nach dem Obigen auf der Lösung des Umkehrproblems, welche eben durch sie vermittelt wird, oder (nach den Entwicklungen auf p. 831) auf der Darstellbarkeit algebraischer wie f verzweigter Functionen durch Quotienten von Θ-Functionen. Solche algebraische Functionen lassen sich aber noch in anderer Weise auf transscendentem Wege herstellen, nämlich durch Vermittlung von Integralen zweiter Gattung; und an diese Darstellung derselben lässt sich dann ebenfalls eine Behandlung der *Specialgruppen* und *Specialschaaren* anknüpfen. Wir wollen auf letztere Methoden nachher um so mehr eingehen, als wir bisher noch nicht Gelegenheit fanden, uns mit Integralen zweiter Gattung eingehender zu beschäftigen.

Wenn es uns so gelingt, mit Hülfe des einfachen Formalismus, welchen die Theorie der Abel'schen Integrale an die Hand gibt, die beregten Fragen directer zu behandeln, als es uns auf dem rein algebraischen Wege möglich war (indem dies z. B. bei dem Satze auf p. 437 nur durch einen Schluss von q auf $q+1$ geschah), wenn man auch historisch zuerst auf ersterem Wege zur Stellung und Beantwortung der bezeichneten Probleme geführt wurde, so ist dagegen doch das principielle Interesse nicht gering anzuschlagen, welches ein algebraischer Beweis rein algebraischer Sätze für sich in Anspruch nehmen muss. Die folgenden Untersuchungen sollen daher keineswegs jene früheren Beweise ersetzen, sondern nur eine andere Seite der durch diese Fragestellung gebotenen Probleme beleuchten. Hervor-

gehoben mag ferner werden, dass die Theorie der transscendenten Functionen bisher nicht dazu verwendet werden konnte, die *Anzahl* der möglichen Special-Gruppen, bez. -Schaaren einer bestimmten Art anzugeben, während wir früher solche Zahlenbestimmungen, wenigstens für einzelne Fälle, mit Hülfe des erweiterten Correspondenzprincips wirklich ausgeführt haben (p. 743 f. und p. 749 ff.). —

Dass *jede Specialschaar* $g_Q^{(q)}$, *d. h. jede Schaar* $g_Q^{(q)}$, *für welche* (p. 699):

$$q > Q - p + 1$$

durch adjungirte Curven $(n-3)^{ter}$ *Ordnung ausgeschnitten werden kann*, ergibt sich hier in folgender Weise. Zunächst betrachten wir eine Punktgruppe, in welcher nur $p-1$ (nicht p) Punkte durch die übrigen bestimmt sind. Dann muss von den p Gleichungen des Umkehrproblems:

$$\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h = v_h\,,$$

oder von den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\varphi_h(x^{(i)})\cdot(c x^{(i)}\, dx^{(i)})}{n a_{x^{(i)}}^{\,n-1} a_c} = dv_h$$

eine die Folge der übrigen sein; oder mit anderen Worten: Es müssen sich Constante $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ so bestimmen lassen, dass:

$$(2) \qquad c_1\varphi_1(x^{(i)}) + c_2\varphi_2(x^{(i)}) + \ldots + c_p\varphi_p(x^{(i)}) = 0.$$

Diese p Gleichungen aber sagen eben nichts anderes aus, als dass die Punkte $x^{(i)}$ auf der C_{n-3}: $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$ liegen. Wenn nun von den Punkten einer Gruppe noch weniger durch die übrigen bestimmt sind (wie eben im Falle $q > Q - p + 1$), so müssen von den Gleichungen (1) mehrere eine Folge der übrigen sein; und man wird in gleicher Weise zu einer grösseren Zahl von Relationen der Form (2) geführt. Letztere aber sagen immer aus, dass die betreffenden Punkte (zusammen mit festen Punkten einer residualen Gruppe) auf verschiedenen adjungirten C_{n-3} liegen, und also durch eine lineare Schaar solcher Curven ausgeschnitten werden können, wie behauptet wurde.

Den Beweis für den Riemann-Roch'schen Satz mittelst Θ-Functionen führen wir zuerst an einigen besonderen Fällen durch. Der einfachste Fall ist der, wo durch $p-1$ Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p-1)}$ noch ∞^1 C_{n-3} hindurchgehen.*) Dann liegen diese Punkte mit jedem

*) Es ist also $Q = R = p - 1$, $r = 1$, und es ergibt sich, dass auch $q = 1$, denn es ist immer $Q + R = 2p - 2$, $Q - R = 2q - 2r$. Vgl. p. 688 und 701.

beliebigen p^{ten} Punkte z von f auf einer C_{n-3}, d. h. es besteht nach dem Eingangs erwähnten Satze unabhängig von z und ξ die Relation:

$$(3) \qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0.$$

Andererseits ist nach dem Abel'schen Theoreme, da die C_{n-3} durch die Tangente von μ zu einer C_{n-2} ergänzt wird, wenn durch $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots y^{(p-1)}$ die $p-1$ übrigen Schnittpunkte einer durch die $x^{(i)}$ gehenden C_{n-3} bezeichnet werden:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0.$$

Die Argumente der in (3) auftretenden Θ-Function werden daher gleich:

$$-\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h - 2\int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h + \int_{\mu}^{z} du_h.$$

Aus (3) folgt also, da Θ eine gerade Function ihrer Argumente ist, unabhängig von ξ und z die weitere Relation:

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int_{\mu}^{z} du_h\right) = 0,$$

welche aussagt, dass die $p-1$ Punkte $y^{(i)}$ mit jedem beliebigen Punkte ξ von f auf einer adjungirten C_{n-3} liegen, d. h. dass auch durch die $y^{(i)}$ noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} geht; und dies ist wieder der auf p. 688 gefundene Satz.

Ein anderes Beispiel soll uns der Fall $Q = p$ (also $R = p-2$), $r = 1$ geben, wo durch p Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ noch ∞^1 C_{n-3} hindurchgehen. Es liegen dann *je* $p-1$ dieser Punkte $x^{(i)}$ mit jedem beliebigen Punkte z*) auf einer C_{n-3}, d. h. wir haben die p Relationen:

$$(5) \qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p}{}_k\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots p,$$

*) Es sind hier natürlich immer nur Punkte von $f = 0$ gemeint; vgl. die algebraische Behandlung dieses Beispiels auf p. 694 ff.

wo der Index k an dem Summenzeichen andeuten mag, dass in der Summe das dem Index $i = k$ entsprechende Glied ausgelassen werden soll. Sind wieder $y^{(1)}, \ldots y^{(p-1)}$, worunter jedoch $y^{(k)}$ auszulassen ist, die $p - 2$ zu den $x^{(i)}$ residualen Punkte, so können wir hier nach dem Abel'schen Theoreme die Gleichung (4) durch die folgende ersetzen:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0 .$$

Die Argumente der in (5) vorkommenden Θ-Function werden daher gleich

$$- \sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h$$

$$= - \sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h + \int_{\mu}^{z} du_h .$$

Die Gleichungen (5) sagen somit auch aus, dass man durch die $p - 2$ Punkte $y^{(i)}$, durch *irgend einen* der p Punkte $x^{(i)}$ und durch einen *beliebigen* Punkt ξ noch eine C_{n-3} legen kann; durch die $y^{(i)}$ gehen also p *verschiedene* Büschel von C_{n-3} und somit auch zum Mindesten eine ∞^2-Schaar solcher Curven. Dass die Mannigfaltigkeit der letzteren Schaar auch nicht grösser als 2 sein kann, erkennt man durch Umkehrung dieser Schlussweise. Wir haben also $q = 2$, wie es der Riemann-Roch'sche Satz verlangt.

Zur Durchführung des allgemeinen Beweises setzen wir:

$$Q = p - 1 + \varrho , \quad \text{also:} \quad R = p - 1 - \varrho .$$

Durch die Q Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(Q)}$ sollen der Annahme nach ∞^r C_{n-3} gehen; d. h. es sollen alle $(p - r)$-gliedrigen Determinanten aus dem folgenden Schema verschwinden*):

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(Q)}) & \varphi_2(x^{(Q)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(Q)}) \end{matrix} \right\| .$$

Das Verschwinden dieser Determinanten sagt aber nichts anderes aus, als dass *je* $p - r$ der Punkte $x^{(i)}$ mit r beliebigen Punkten auf einer adjungirten C_{n-3} liegen. Die betreffenden Relationen werden daher

*) Vgl. p. 702, wo R durch Q, q durch r, t durch $p - 1$ zu ersetzen ist.

auch vollständig dargestellt durch das folgende System von Gleichungen:*)

$$(7)\qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=Q}{}_{k_1,k_2,\ldots k_{r+\varrho-1}}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\alpha^{(k_i)}}^{z^{(k_i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0,$$

wo die Indices $k_1, k_2, \ldots k_{r+\varrho-1}$ an dem ersten Summenzeichen andeuten sollen, dass in der Summe die den Werthen $i = k_1, k_2, \ldots k_{r+\varrho-1}$ entsprechenden Glieder ausgelassen werden sollen, so dass die Summe nur noch aus $Q - r - \varrho + 1 = p - r$ Gliedern besteht, und wo durch $z^{(k_i)}$ r beliebige Punkte bezeichnet sind. In diesen Gleichungen ist die Zuordnung der unteren Grenzen $\alpha^{(i)}$ zu den oberen Grenzen $x^{(i)}$ noch eine sehr willkürliche. Um uns von dieser Willkürlichkeit frei zu machen und im Folgenden die Bezeichnungsweise einfacher zu gestalten, führen wir als untere Grenze immer denselben Punkt μ ein und ausserdem Constante K_h, definirt durch**):

$$K_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{\mu} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h.$$

Die Gleichungen (7) gehen dann über in:

$$(8)\ \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=Q}{}_{k_1,k_2,\ldots k_{r+\varrho-1}}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h + K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0.$$

Bezeichnen wir ferner mit $x^{(Q+1)}, x^{(Q+2)}, \ldots x^{(Q+R)}$ die Gruppe der R zu den $x^{(i)}$ residualen Punkte, so ist nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\sum_{i=1}^{i=Q}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=R}\int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h + 2K_h = 0.$$

Die Argumente der Θ-Function (8) gehen daher über in:

$$-\sum_{i=1}^{i=R}\int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h - \sum_{i=1}^{i=r+\varrho-1}\int_{\mu}^{x^{(k_i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h - K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h.$$

*) Von den durch das Verschwinden beregter Determinanten dargestellten Gleichungen sind nur $(r+1)(Q-p+r+1)$ von einander unabhängig (p. 704); dem entsprechend sind auch die hier aufgestellten Θ-Relationen noch von einander abhängig. Dass diese Gleichungen auch umgekehrt hinreichen, um alle $(p-r)$-gliedrigen Determinanten obigen Schemas zum Verschwinden zu bringen, erkennt man durch einen analogen Schluss, wie er in der Anmerkung auf p. 692 angedeutet ist.

**) Dies sind dann die bei R. A. F. §. 22 mit k_μ bezeichneten Constanten; vgl. die Anmerkungen auf p. 835 und 836.

Da nun jedenfalls $r < R$ ist, so können wir hierin $r-1$ der Punkte $z^{(k_i)}$ bez. mit $r-1$ beliebigen der Punkte $x^{(Q+i)}$ zusammenfallen lassen, also z. B. setzen:

$$z^{(k_1)} = x^{(Q+1)}, \quad z^{(k_2)} = x^{(Q+2)}, \ldots z^{(k_{r-1})} = x^{(Q+r-1)},$$

Schreiben wir dann kurz z statt $z^{(k_r)}$, so geht die Gleichung (8) über in:

$$(9)\quad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=R}{}_{k_1, k_2, \ldots k_{r-1}} \int_\mu^{x^{(Q+i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r+\varrho-1} \int_\mu^{x^{(k_i)}} du_h + \int_\mu^{\xi} du_h + K_h - \int_\mu^{z} du_h\right) = 0.$$

Andererseits hätten wir z. B. auch $z^{(k_1)}$ mit $x^{(k_1)}$, und nicht mit $x^{(Q+k_1)}$, zusammenfallen lassen können, wodurch die Gleichung (9) sonst ungeändert bliebe; es würde nur in dem ersten Integrale der zweiten Summe die obere Grenze $x^{(Q+k_1)}$ auftreten. Da nun die Punkte $x^{(k_i)}$ aus den Q Punkten $x^{(i)}$ beliebig gewählt waren, so besteht die Gleichung (9), auch wenn man irgend einen anderen dieser Punkte für $x^{(k_1)}$ wählt; nur darf derselbe nicht unter den Punkten $x^{(k_2)}, x^{(k_3)}, \ldots x^{(k_{r+\varrho-1})}$ enthalten sein. Für $x^{(k_1)}$ kann man also noch $Q - r - \varrho + 2 = p - r + 1$ andere Punkte $x^{(i)}$ setzen, ferner nach der eben gemachten Bemerkung auch jeden der R Punkte $x^{(Q+i)}$. Als Function von $x^{(k_1)}$ aufgefasst, verschwindet daher die in (9) links stehende Θ-Function für $R + p + 1 - r = 2p - r - \varrho$ verschiedene Werthe von $x^{(k_1)}$. Da nun immer $R > r$ ist, so ist auch:

$$p - 1 - \varrho - r > 0$$

oder:

$$2p - \varrho - r > p + 1.$$

Als Function von $x^{(k_1)}$ verschwindet also die Θ-Function für mehr als p Werthe von $x^{(k_1)}$ und somit*) überhaupt *unabhängig von* $x^{(k_1)}$. Analoges gilt für $x^{(k_2)}, \ldots x^{(k_{r+\varrho-1})}$; bezeichnen wir also mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(r+\varrho)}$, ξ beliebige Punkte von f, so besteht immer die Gleichung:

$$(10)\quad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=R}{}_{k_1, k_2, \ldots k_{r-1}} \int_\mu^{x^{(Q+i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r+\varrho} \int_\mu^{z^{(i)}} du_h + K_h - \int_\mu^{\xi} du_h\right) = 0;$$

---

*) Vgl. R. A. F. §. 22 und Riemann: Ueber das Verschwinden der Θ-Functionen, §. 2. Crelle's Journal, Bd. 65. Die in §. 3 des letzteren Aufsatzes angestellten Betrachtungen über einige besondere Fälle von Specialschaaren stimmen im Wesentlichen mit denen des Textes überein; ein Unterschied in der Behandlung ist nur durch die verschiedene Wahl der unteren Grenzen bedingt. — Nach §. 4 ff. des genannten Aufsatzes lässt sich der Fall, wo die Θ-Function unabhängig von gewissen Theilen der Argumente verschwindet, immer auf das Verschwinden aller Differentialquotienten bestimmter Ordnung nach den Argumenten zurückführen.

und diese sagt aus, dass *durch je $R - r + 1$ Punkte der Residualgruppe G_R noch eine $\infty^{r+\varrho}$-Schaar von C_{n-3} geht.* Nun ist aber $R - r + 1 = p - r - \varrho$; sind also $y^{(1)}, \ldots y^{(p-r-\varrho)}$ irgend welche der R Punkte $x^{(Q+i)}$, so besteht immer die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(y^{(p-r-\varrho)}) & \varphi_2(y^{(p-r-\varrho)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(p-r-\varrho)}) \\ \varphi_1(z^{(1)}) & \varphi_2(z^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(z^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(z^{(r+\varrho)}) & \varphi_2(z^{(r+\varrho)}) & \ldots & \varphi_p(z^{(r+\varrho)}) \end{vmatrix} = 0;$$

oder mit anderen Worten (vgl. p. 692, Anmk.): Es verschwinden alle $(r + \varrho)$-gliedrigen Unterdeterminanten der Matrix (wo $y^{(i)} = x^{(Q+i)}$):

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(y^{(R)}) & \varphi_2(y^{(R)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(R)}) \end{Vmatrix}.$$

Dies sagt aber eben aus, dass durch alle R Punkte der G_R noch eine $\infty^{r+\varrho}$-Schaar von C_{n-3} geht (p. 703). *Die Specialgruppen, von denen eine als Gruppe G_Q gegeben war, bilden sonach selbst eine Specialschaar $g_Q^{(q)}$, wo:*

$$q = r + \varrho = \tfrac{1}{2}(Q - R) + r$$

oder:

$$2(q - r) = Q - R,$$

was wieder die Gleichung des Riemann-Roch'schen Satzes ist. Dass q auch nicht grösser als $r + \varrho$ sein kann, erkennt man daraus, dass derselbe Beweisgang auch umgekehrt verfolgt werden kann, die Annahme $q = r + \varrho + 1$ also auf die Zahl $r + 1$ statt auf r für die Mannigfaltigkeit der Gruppen G_R führen würde.

Ein anderer Beweis unseres Fundamentalsatzes knüpft, wie erwähnt, an die Darstellbarkeit algebraischer Functionen durch Integrale 2. Gattung an.*) Wir sprechen das zu beweisende Theorem zunächst in etwas anderer Fassung aus.

Die Mannigfaltigkeit der zu einer gegebenen G_Q residualen G_R kann man in folgender Weise algebraisch definiren. Man lege durch G_Q eine beliebige adjungirte Curve $\psi = 0$, welche die Gruppe G_R auf f ausschneidet; durch letztere lege man eine andere Curve gleicher

*) Vgl. Roch: Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 64, p. 372; und für den einfachsten Fall R. A. F. §. 5.

Ordnung $\chi = 0$, die sonst ganz beliebig sein kann. Dann ist $\lambda = \frac{\chi}{\psi}$ eine algebraische Function, welche in den Punkten G_Q unendlich wird; und die Mannigfaltigkeit q der Schaar $g_Q^{(q)}$, die zu demselben Residuum G_R gehört, ist dann offenbar um Eins kleiner als die Zahl der willkürlichen Coëfficienten, die in der Curve $\chi = 0$ noch verfügbar sind, wenn letzterer keine andere Bedingung auferlegt wird als die, durch die Punkte der Gruppe G_R zu gehen und zu f adjungirt zu sein. Diese Zahl aber wird sich bei näherer Untersuchung von der Zahl $r+1$ der linear von einander unabhängigen adjungirten C_{n-3} abhängig zeigen, welche man durch die Gruppe G_Q legen kann. Der von uns zu beweisende Satz ist daher folgender:

Wird eine algebraische Function λ in Q Punkten G_Q unendlich gross von der ersten Ordnung, und können in diesen Q Punkten $r+1$ Functionen $\varphi(x)$ verschwinden, zwischen denen keine lineare Relation besteht, (d. h. geht durch G_Q eine ∞^r-Schaar von C_{n-3}), so enthält λ die Zahl $Q-p+r+2$ willkürlicher Coëfficienten (d h. die Gruppe G_Q gehört einer ∞^q-Schaar an, für die $q = Q-p+r+1$).

Zum Beweise stellen wir die Function λ in anderer Form dar. Eine Function, welche in Q Punkten $x^{(1)}, \ldots x^{(Q)}$ algebraisch unendlich erster Ordnung wird, ist offenbar gegeben durch eine Summe von Q Integralen zweiter Gattung, deren jedes in je einem der Punkte $x^{(i)}$ unendlich gross wird (p. 792); und diesem Integrale kann man noch beliebige lineare Combinationen von (überall endlichen) Integralen erster Gattung hinzufügen, so dass man den Ausdruck erhält*):

$$(11) \quad \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \ldots + \beta_Q Z_Q + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p,$$

wo die β_i und α_i Constante bedeuten. Unter Z_i ist dabei das Normalintegral zweiter Gattung verstanden, welches im Punkte $x^{(i)}$ unendlich wird und durch diesen Punkt völlig bestimmt ist, so dass:

$$dZ_i = \frac{\Omega_{n-2}(c\,x\,dx)}{n^2\, a_{x^{(i)}}^{\,n-1} a_x \cdot a_x^{\,n-1} a_c},$$

während die erste Reihe der Periodicitätsmoduln von Z_i verschwindet und der Periodicitätsmodul von Z_i am Querschnitte b_ν gegeben ist durch eine *algebraische Function*, nämlich (p. 805):

$$\mathrm{H}_i^{(\nu)} = \left(\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_k} \alpha_k\right)_i = \left(\frac{\varphi_\nu(x)\,(c\,x\,\alpha)}{n\, a_x^{\,n-1} a_c}\right)_i,$$

wobei $(a_x^{\,n-1} a_\alpha)_i = 0$. Die Summe (11) ändert sich daher an einem Querschnitte a_ν der zerschnittenen Riemann'schen Fläche um $2\pi i \alpha_\nu$, dagegen an einem Querschnitte b_ν um

*) Zur unteren Grenze der Integrale Z_i ist ein beliebiger fester Punkt von f gewählt, obere Grenze ist der bewegliche Punkt x.

$\beta_1 \mathsf{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathsf{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_Q \mathsf{H}_Q^{(\nu)} + \alpha_1 a_{1\nu} + \alpha_2 a_{2\nu} + \ldots + \alpha_p a_{p\nu}$.

Bestimmt man also die noch willkürlichen Constanten α_i und β_i so, dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0 \\ \beta_1 \mathsf{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathsf{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_Q \mathsf{H}_Q^{(\nu)} = 0 \\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots p),\end{gathered} \tag{12}$$

so stellt der Ausdruck (11) eine Function dar, welche in der ganzen zu $f = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig und stetig, und mit Ausnahme der Q Punkte $x^{(i)}$ auch überall endlich bleibt, in letzteren aber algebraisch unendlich wird; d. h. derselbe ist eine algebraische Function von x_1, x_2, x_3. Und umgekehrt kann sich die in denselben Q Punkten ebenso unendlich werdende Function λ von dem Ausdrucke (11) nur um eine Constante C unterscheiden. Man hat folglich:

$$\lambda = \frac{\chi}{\psi} = \beta_1 \mathsf{Z}_1 + \beta_2 \mathsf{Z}_2 + \ldots + \beta_Q \mathsf{Z}_Q + C. \tag{13}$$

Hier bestehen zwischen den Grössen β_i die p Gleichungen (12); es können also von denselben $Q - p$ willkürlich angenommen werden. Die Function λ enthält dann noch $Q - p + 1$ willkürliche Coëfficienten, d. h. die Curven $\chi = 0$ bestimmen auf f noch eine ∞^{Q-p}-Schaar von Gruppen G_Q, von denen eine durch $\psi = 0$ ausgeschnitten wird. Dies stimmt damit überein, dass im Allgemeinen p Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind. Ist insbesondere $Q = p + 1$, so sind die Verhältnisse der Grössen β_i vollständig bestimmt, und wir haben eine ∞^1-Schaar von Gruppen G_{p+1}, welche durch den Büschel $\chi - \lambda\psi = 0$ gegeben werden. Für besondere Lagen der Punkte x_i kann es jedoch eintreten, dass die Gleichungen (12) nicht von einander unabhängig sind. So wird z. B. eine die Folge der anderen, wenn $Q = p$, und wenn die Determinante von (12) verschwindet. Von letzterer aber lässt sich das Product:

$$\left(\frac{(c x \alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_1 \left(\frac{(c x \alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_2 \cdots \left(\frac{(c x \alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_p$$

absondern, welches, da $\mu\,(x\alpha)_i = a_x^{n-1} a_i$, von den Punkten $x^{(i)}$ unabhängig ist. Die betreffende Gleichung geht daher über in:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

In dem Falle liegen also die $Q = p$ Punkte $x^{(i)}$ auf einer Curve $\varphi = 0$, und die Anzahl der in λ willkürlichen Coëfficienten ist gleich

$Q - p + 1 + 1 = 2$, d. h. durch das Residuum von $p - 2$ Punkten kann man noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen, *was mit den bekannten Resultaten übereinstimmt.* Ganz ebenso wird für einen beliebigen Werth von Q die Zahl der willkürlichen Constanten um $r + 1$ vermehrt, wenn zwischen den Gleichungen (12) $r + 1$ Relationen der Form:

$$c_1 \varphi_1 (x^{(i)}) + c_2 \varphi_2 (x^{(i)}) + \ldots + c_p \varphi_p (x^{(i)}) = 0$$

bestehen, wo die c_i Constante sind, d. h. wenn durch die Punkte $x^{(i)}$ $r + 1$ verschiedene Curven φ hindurchgehen, wodurch dann wieder der oben ausgesprochene Satz gewonnen ist. Gleichzeitig ist hiermit wieder gezeigt, dass jede *Specialschaar durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann.*

Zur Erläuterung betrachten wir noch ein einfaches Beispiel; es sei eine Grundcurve $f = 0$ 5ter Ordnung ohne Doppelpunkte gegeben, also $p = 6$. Hier ist jede ganze Function zweiter Ordnung der x_i eine Function φ. Die Function

$$\lambda = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3} = \frac{a_x}{b_x}$$

wird in den 5 Schnittpunkten von $b_x = 0$ mit $f = 0$ unendlich. In denselben verschwinden 3 von einander unabhängige Functionen φ, nämlich $b_x x_1$, $b_x x_2$, $b_x x_3$; daher enthält λ die Anzahl $5 - 6 + 2 + 2 = 3$ willkürlicher Coëfficienten, in der That die Grössen a_1, a_2, a_3. —

Man erkennt übrigens leicht, dass der vorstehende Satz auch für Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven gültig bleibt. Gehen nämlich die Curven $\chi = 0$, $\psi = 0$ durch einen Doppelpunkt von f, in dem die Punkte ξ und η der Riemann'schen Fläche vereinigt liegen mögen, nicht hindurch, so nimmt die algebraische Function $\lambda = \frac{\chi}{\psi}$ für $x = \xi$ und für $x = \eta$ denselben Werth an, indem nur *eine* Curve des Büschels $\chi - \lambda \psi = 0$ durch den Doppelpunkt geht. Soll also wieder die Gleichung (13) bestehen, so erhalten wir für die Coëfficienten β_i neben den Gleichungen (12) zunächst noch die Relation:

$$\beta_1 \int_\eta^\xi dZ_1 + \beta_2 \int_\eta^\xi dZ_2 + \ldots + \beta_Q \int_\eta^\xi dZ_Q = 0. \tag{15}$$

Diese Gleichung aber ist identisch erfüllt. Durch nähere Untersuchung des Integrals $\int \frac{\chi}{\psi} d\Pi_{\alpha\beta}$ nämlich wird man, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll*), zu der Formel geführt:

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 128 f.

$$(16)\qquad \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\alpha - \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta = -\sum_{i=1}^{i=Q} \left(\frac{\chi}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}\right)_i \int_\alpha^\beta dZ_i ,$$

wo α, β zwei beliebige Punkte sind, und wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} a_3 ,$$

unter a einen Punkt der Tangente von x an die Grundcurve verstanden. Die Indices α, β, i an den eingeklammerten Ausdrücken sollen andeuten, dass in diesen bez. $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = x^{(i)}$ zu setzen ist, wo $x^{(i)}$ die Q Verschwindungspunkte von ψ sind. Die Gleichung (16) nun ist mit der Gleichung (14) identisch, wenn man setzt:

$$\alpha = x , \qquad \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta = C , \qquad \beta_i = \left(\frac{\chi}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}\right)_i .$$

Setzt man aber in (16) $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, so wird $\left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\alpha = \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta$, und wir erhalten die Gleichung (15), q. e. d. *Der oben ausgesprochene Satz* (p. 863) *bleibt also auch für Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven ebenso bestehen.*

In obigem Beispiele können wir also der C_5 auch einen Doppelpunkt beilegen und die Function $\lambda = \frac{a_x}{b_x}$ betrachten. Dann wird $Q = 5$, $p = 5$, $r = 1$ (denn die Linie $b_x = 0$ wird durch jede Gerade durch den Doppelpunkt zu einer Curve φ ergänzt). Es folgt also $q = 5 - 5 + 1 + 1 = 2$, wie es geometrisch evident war.

XI. Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven mit der Grundcurve. — Das erweiterte Umkehrproblem.

Die geometrischen Untersuchungen, welche wir bisher an das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem anknüpften, bezogen sich namentlich auf Schnittpunktsysteme adjungirter Curven; und es reichte dabei aus, Integralsummen *erster* Gattung zu betrachten (p. 817). In der That stimmt in dem Falle die Zahl p der Gleichungen mit der Zahl der zwischen den Schnittpunkten bestehenden Relationen überein; und das Jacobi'sche Umkehrproblem lehrte uns die Bestimmung von p Schnittpunkten durch die übrigen aus jenen p Integralgleichungen, vorausgesetzt, dass die Ordnung der schneidenden Curve grösser als $n - 3$ ist. Hat man es dagegen mit nicht adjungirten Curven zu thun, so sind mehr Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt; es müssen somit zu jenen p Gleichungen für Integrale erster Gattung, welche immer bestehen bleiben, noch andere Gleichungen hinzutreten,

so dass durch die Gesammtheit derselben das Schnittpunktsystem wieder vollkommen charakterisirt wird. Man übersieht dies leicht, wenn man sich die Grundcurve allmählich so degenerirt denkt, dass sie einen Doppelpunkt erhält. Dann sinkt das Geschlecht der Curve um eine Einheit; und es gehen, wie früher erwähnt wurde, $p-1$ der p Normalintegrale erster Gattung in die *Normal*integrale *erster* Gattung der neuen Curve über, das p^{te} Integral dagegen verwandelt sich (bei passender Wahl des Querschnittsystems der Riemann'schen Fläche) in ein *Normalintegral dritter Gattung* für die neue Curve, deren Unendlichkeitspunkte ξ, η in dem neu entstandenen Doppelpunkte vereinigt liegen (vgl. p. 807). An Stelle der p Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems treten daher, wenn wir mit $\pi = p-1$ das Geschlecht der neuen Curve bezeichnen, jetzt die $\pi + 1$ Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = v_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots \pi),$$

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = v_{\pi+1};$$

und aus ihnen hat man wieder die oberen Grenzen $x^{(i)}$ zu bestimmen. Ebenso erhält man q Gleichungen mit Integralen dritter Gattung, wenn die betrachteten Curven durch q Doppelpunkte der Grundcurve nicht hindurchgehen; und solche q Gleichungen bestehen ja dann auch in der That nach dem Abel'schen Theoreme für Integrale dritter Gattung. Das Problem der Bestimmung der Punkte $x^{(i)}$ aus den $p+q$ Gleichungen ist es, welches man als *das erweiterte Umkehrproblem**) bezeichnet.

Die Lösung des letzteren ergibt sich indess nicht ohne Weiteres aus der des Jacobi'schen Problems durch den angedeuteten Grenzübergang. Da nämlich bei diesem eine Periode des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$ unendlich gross wird, so kann man die beim Jacobi'schen Probleme verwendete Θ-Function nicht mehr unmittelbar benutzen; man muss vielmehr eine andere Function einführen, welche sich übrigens aus den gewöhnlichen Θ-Functionen und aus Exponentialfunctionen zusammensetzt. Im Folgenden sollen diese Verhältnisse,**) insbesondere

*) Für $p=1$, $q=1$ ist dasselbe von Rosenhain (unter anderen Gesichtspunkten) behandelt: Mémoires des savants étrangers, t. 11, p. 376, allgemein für $p=1$ von Clebsch: Crelle's Journal, Bd. 64, für $p=2$ von Brill: ib. Bd. 64, für Curven mit beliebigem Geschlechte von Clebsch und Gordan: Cl. u. G. A. F. p. 148 und 270 ff.

**) In Betreff des Jacobi'schen Umkehrproblems für $p=2$ sei nochmals auf den Aufsatz von Prym, der schon p. 765 erwähnt wurde, verwiesen.

die Eigenschaften dieser neuen Function, nur für den Fall $p=2$ erörtert werden (wo wir wieder p statt π schreiben); an diesem Beispiele wird hinreichend hervortreten, wie man im allgemeinen Falle zu verfahren hat. Die Resultate wollen wir für die Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte verwerthen, insbesondere für *die Bestimmung ihrer Doppeltangenten.* —

Wir bezeichnen die beiden Normalintegrale erster Gattung mit u_1, u_2, das zum Doppelpunkte der C_4 gehörige Normalintegral dritter Gattung mit u_3. Für die Betrachtung legen wir eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 6 Verzweigungspunkten zu Grunde, wie sie der Gleichung der C_4 (p. 797):

$$y^2\varphi_2(x)+y\varphi_3(x)+\varphi_4(x)=0$$

entspricht, wenn man y als Function von x auffasst. Die sechs Verzweigungspunkte sind durch drei Verzweigungsschnitte paarweise mit einander verbunden; um die letzteren legen wir die Schnitte a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 in der Weise, wie es für $p=3$ in Fig. 71, p. 800 veranschaulicht ist. Vermöge dieser Schnitte ist die Fläche dann in eine einfach zusammenhängende zerlegt, deren Rand eben durch diese Schnitte gebildet wird. Die Werthe einer Function φ an zwei gegenüberliegenden Punkten dieses Randes wollen wir mit φ^+ und φ^- bezeichnen, indem wir in bekannter Weise eine positive und eine negative Seite der Randcurve unterscheiden.

Zufolge unserer früheren Festsetzungen über die Normalintegrale bestehen dann für jeden Punkt des Schnittes a_1 die Gleichungen:

$$(1)\quad (u_1^+-u_1^-)_{a_1}=2\pi i,\quad (u_2^+-u_2^-)_{a_1}=0,\quad (u_3^+-u_3^-)_{a_1}=0,$$

wobei die untere Grenze der Integrale u_i beliebig und constant gewählt ist. Ebenso haben wir für die Schnitte a_2, b_1, b_2:

$$(2)\quad (u_1^+-u_1^-)_{a_2}=0,\quad (u_2^+-u_2^-)_{a_2}=2\pi i,\quad (u_3^+-u_3^-)_{a_2}=0,$$

$$(3)\quad \begin{cases} (u_1^+-u_1^-)_{b_1}=a_{11},\ (u_2^+-u_2^-)_{b_1}=a_{12},\ (u_3^+-u_3^-)_{b_1}=\int_\eta^\xi du_1=A_1, \\ (u_1^+-u_1^-)_{b_2}=a_{21},\ (u_2^+-u_2^-)_{b_2}=a_{22},\ (u_3^+-u_3^-)_{b_2}=\int_\eta^\xi du_2=A_2, \end{cases}$$

und es ist gleichzeitig, wenn unter $\int_a$ das über den ganzen Schnitt a geführte Integral verstanden wird, bei richtiger Wahl des Sinnes, in welchem man das Integral führt*):

$$a_{11}=\int_{a_1} du_1,\ a_{12}=a_{21}=\int_{a_2} du_1=\int_{a_1} du_2,\ a_{22}=\int_{a_2} du_2,\ 2i\pi=\int_{b_1} du_1=\int_{b_2} du_2.$$

*) Vgl. z. B. Neumann a. a. O. p. 126, Note.

Das Integral u_3 endlich ändert sich noch um $\pm 2i\pi$ bei jedem Umgange um einen der Unendlichkeitspunkte ξ, η. Die Schnitte c_1, c_2 kommen für die Periodicitäts-Eigenschaften der Integrale nicht weiter in Betracht.

Für die von den Integralen u_1, u_2 abhängende Θ-Function (p. 836):

$$\Theta(u_1, u_2) = \Sigma\Sigma e^{-\frac{1}{2}(r_1^2 a_{11} + 2 r_1 r_2 a_{12} + r_2^2 a_{22}) + r_1 u_1 + r_2 u_2}$$

haben wir ferner bekanntlich die Gleichungen ($\nu = 1, 2$):

$$(4) \qquad (\Theta^+ : \Theta^-)_{a_\nu} = 1, \quad (\Theta^+ : \Theta^-)_{b_\nu} = e^{u_\nu + \frac{1}{2} a_{\nu\nu}};$$

und wenn

$$(5) \qquad v_\nu' = v_\nu + 2 m_\nu \pi i + a_{1\nu} q_1 + a_{2\nu} q_2$$

gesetzt wird, so ist allgemein:

$$(6) \qquad \Theta(v') = \Theta(v) \,.\, e^{q_1 v_1 + q_2 v_2 + \frac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2 q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22})}.$$

Die von uns zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, *aus den drei Gleichungen:*

$$(7) \qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h = w_h \qquad (h = 1, 2, 3)$$

die Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ in Function der gegebenen Grössen w_1, w_2, w_3 zu bestimmen. Aus dem über das Jacobi'sche Umkehrproblem Gesagten (p. 833) ist sofort klar, dass man eine Gleichung für die Werthe einer algebraischen Function $\frac{\varphi}{\psi}$ in den Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ aufstellen kann, wenn es gelingt, die Summe der Werthe eines Integrals dritter Gattung mit beliebigen Unendlichkeitspunkten ζ, ϑ als Function der Grössen w_1, w_2, w_3 darzustellen, d. h. die Summe:

$$(8) \qquad T_{\zeta\vartheta}\left(\frac{x}{c}\right) = \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} d\Pi_{\zeta\vartheta}.$$

Es kommt also im Folgenden nur darauf an, diese Darstellung zu leisten.

Letzteres gelingt nun mit Hülfe einer von den drei Grössen u_1, u_2, u_3 (jedoch nicht symmetrisch) abhängenden Function $\Theta'(u_1, u_2, u_3)$ oder kurz $\Theta'(u)$, welche wir durch folgende Gleichung definiren:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Theta'(u) = \; & \Theta(u_1 - \tfrac{1}{2}A_1, \; u_2 - \tfrac{1}{2}A_2) \,.\, e^{\frac{1}{2}u_3} \\ & + \Theta(u_1 + \tfrac{1}{2}A_1, \; u_2 + \tfrac{1}{2}A_2) \,.\, e^{-\frac{1}{2}u_3}, \end{aligned}$$

wo A_1, A_2 die in (3) ebenso bezeichneten Integrale bedeuten. In Rücksicht auf (3) ist nun an den Schnitten b_h für $h = 1, 2$:

$$\left(\Theta\,(u_\nu \pm \tfrac{1}{2} A_\nu)^+ : \Theta\,(u_\nu \pm \tfrac{1}{2} A_\nu)^-\right)_{b_h} = e^{u_h \pm \frac{1}{2} A_h + \frac{1}{2} a_{hh}}.$$

Wegen der in (3) ausgesprochenen Eigenschaften des Integrals u_3 haben wir also aus (9):

$$(10)\quad (\log \Theta'(u)^+ - \log \Theta'(u)^-)_{b_h} = u_h + \tfrac{1}{2} a_{hh} \qquad (h = 1,\, 2);$$

definirt man ferner v_3' durch die Gleichung:

$$(11)\qquad v_3' = v_3 + 2\,g\,i\,\pi + q_1 A_1 + q_2 A_2,$$

v_1', v_2' dagegen wieder durch (5), *so findet man allgemein:*

$$(12)\ \log\Theta'(v') = \log\Theta'(v) + q_1 v_1 + q_2 v_2 + \tfrac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2\,q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22}) + g i \pi,$$

und man verificirt leicht, dass:

$$(13)\qquad \Theta'(-v) = \Theta'(v).$$

Die Periodicitätseigenschaften der Function Θ' sind hiernach ganz analoge wie die der gewöhnlichen Θ-Function. Die erstere ist dagegen in der zerschnittenen Riemann'schen Fläche nicht mehr wie letztere eine überall eindeutige Function, denn durch das Zerschneiden längs der Querschnitte ist ein Umgang um einen der Punkte ξ, η noch nicht unmöglich gemacht, und ein solcher ändert das Vorzeichen von Θ'. Jedem Punkte der Fläche entsprechen daher *zwei* Werthe dieser Function; nur für die Punkte ξ und η fallen beide zusammen. In ihnen nämlich wird u_3 unendlich gross wie $\log(x - \xi)$ bez. $\log(x - \eta)$ in $x = \xi$ bez. $x = \eta$ und also Θ' *algebraisch unendlich wie* $(x - \xi)^{-\frac{1}{2}}$ *bez.* $(x - \eta)^{-\frac{1}{2}}$. *Die Punkte* ξ, η *sind daher Verzweigungspunkte der Function* Θ'; und zwar hat letztere (ausgebreitet über die zerschnittene Fläche) *keine anderen* Verzweigungspunkte, wie man aus der Art ihrer Bildung aus den gewöhnlichen Θ-Functionen erkennt. *Wenn also* $\Theta'(u)$ *in einem Punkte der Fläche verschwindet, so geschieht dies mindestens von der ersten Ordnung*, d. h. wie $(x - a)$ für $x = a$. —

Zur Lösung des in den Gleichungen (7) gegebenen Umkehrproblems verfahren wir nun genau so, wie es Riemann für das Jacobi'sche Umkehrproblem gethan hat.*) Unter u_1, u_2, u_3 verstehen wir unsere drei Integrale, deren gemeinsame untere Grenze beliebig und constant, deren gemeinsame obere Grenze variabel sein mag; ferner mögen v_1, v_2, v_3 drei beliebig gegebene Constante bedeuten. Wir beweisen alsdann zunächst den Satz, dass *die Function* $\Theta'(u - v)$ *in drei Punkten der* Riemann'*schen Fläche verschwindet*, es sei denn, dass sie identisch Null ist; letzteres soll aber zunächst

*) Vgl. R. A. F. §. 22, sowie die näheren Ausführungen bei Neumann und Prym a. a. O.

ausgeschlossen werden. Nach den eben gemachten Bemerkungen über das Verschwinden von Θ' brauchen wir nur zu zeigen, dass das Quadrat von $\Theta'(u-v)$ in *sechs* Punkten Null von der ersten Ordnung wird; diese sechs Punkte müssen dann eben aus drei Paaren von je zwei zusammenfallenden Punkten bestehen, damit $\Theta'(u-v)$ in ihnen unendlich von der ersten Ordnung werden kann. Wir bezeichnen deshalb im Folgenden mit $2V$ die zu suchende Zahl der Verschwindungspunkte von $[\Theta'(u-v)]^2$, dann ist V die entsprechende Zahl für $\Theta'(u-v)$.

Die Function:

$$[\Theta'(u-v)]^2 = \Theta^2(u_\nu - \tfrac{1}{2}A_\nu)\, e^{u_3} + \Theta^2(u_\nu + \tfrac{1}{2}A_\nu)\, e^{-u_3}$$
$$+ 2\,\Theta(u_\nu - \tfrac{1}{2}A_\nu)\,.\,\Theta(u_\nu + \tfrac{1}{2}A_\nu)$$

ist in der durch die Schnitte a, b, c zerschnittenen Fläche sonst überall eindeutig und stetig; nur in den Punkten ξ und η wird sie algebraisch unendlich von der *ersten* Ordnung. Es ist also nach einem bekannten Satze:

$$(14)\quad \int d\log\left[\Theta'\right]^2 = 2\int\frac{d\Theta'}{\Theta'} = 2i\pi\,(2V-1-1) = 4i\pi\,(V-1),$$

wenn man das links stehende Integral über die ganze Begrenzung der zerschnittenen Fläche führt, d. h. in beiden Richtungen über alle Schnitte a, b, c. Dies Integral ist andererseits gleich

$$2\int d\,(\log\Theta'+ - \log\Theta'-),$$

geführt in nur einer Richtung über die Schnitte a, b, c. Nun folgt aber aus (10) und (12) für die Schnitte a und c:

$$\log\Theta'(u-v)^+ - \log\Theta'(u-v)^- = 0$$

und für die Schnitte b:

$$\int\left(d\log\Theta'(u-v)^+ - d\log\Theta'(u-v)^-\right)_{b_h} = \int_{b_h} du_h = 2\pi i\,.$$

Aus (14) erhalten wir somit:

$$\int d\log\Theta' \equiv 4i\pi = 2i\pi\,(V-1),$$

oder: $$V = 3,\ \text{q. e. d.}$$

Es kommt jetzt weiter darauf an, die Abhängigkeit dieser drei Verschwindungspunkte der Function $\Theta'(u-v)$ von den gegebenen Constanten v_1, v_2, v_3 näher zu bestimmen: Wir werden zu zeigen haben, dass *diese Abhängigkeit eben durch die Gleichungen* (7) *unseres Umkehrproblems dargestellt wird, wenn man auf den rechten Seiten derselben noch gewisse Constante hinzufügt* (oder — was dasselbe ist — ohne Vermittlung solcher Constanten, wenn man die unteren Grenzen $c^{(i)}$ passend wählt). Die drei Verschwindungspunkte von $\Theta'(u-v)$

würden dann mit den in (7) auftretenden Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ zusammenfallen und sollen daher sogleich mit diesen Buchstaben bezeichnet werden.

Auf der Begrenzung der durch die Linien a, b, c zerschnittenen Fläche nehmen wir nun irgendwo drei Punkte $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$ an. Von $\zeta^{(1)}$ aus legen wir eine Schleife l_1, welche den Punkt $x^{(1)}$ umkreist und dann zu $\zeta^{(1)}$ zurückkehrt; ebenso verbinden wir die Punkte $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ bez. mit den Punkten $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$ durch Schleifen l_2, l_3 und denken uns die Fläche längs der Linien l_1, l_2, l_3 aufgeschnitten; endlich legen wir noch einen Schnitt a_3 um die Punkte ξ, η und verbinden ihn durch einen weiteren Schnitt mit der Randcurve unserer Fläche. In der so zerschnittenen Fläche ist jetzt $\log \Theta'(u-v)$ eine überall endliche stetige und eindeutige Function des veränderlichen Punktes x; Gleiches gilt von den Integralen u_1, u_2 und daher besteht die Relation:

$$W \equiv \int \log \Theta'(u-v) \,.\, du_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2),$$

wenn man das links stehende Integral über die ganze Randcurve der Fläche erstreckt, d. h. in beiden Richtungen über alle Schnitte a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, l_1, l_2, l_3. Andererseits ist dieses Integral gleich der Summe der Integrale

$$W = \int \left\{ \log \Theta'(u-v)^+ - \log \Theta'(u-v)^- \right\} du_\nu,$$

geführt über alle Linien a, b, c, l. Nun haben wir aber

an den Linien l_1, l_2, l_3: $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = -2i\pi$,

„ „ „ c_1, c_2 : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = 0$,

„ „ „ a_h : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = 2 g_h i\pi \quad (h = 1, 2, 3)$,

„ „ „ b_ν : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = u_\nu - v_\nu + \frac{1}{2} a_{\nu\nu} + 2 h_\nu i\pi$.

Es bedeuten hier die Grössen g und h ganze Zahlen, welche hinzugefügt werden müssen, da die Differenzen von $\log \Theta'$ nur bis auf Vielfache von $2i\pi$ definirt sind. Bezeichnen wir nun mit $\alpha_\nu^{(1)}$, $\alpha_\nu^{(2)}$, $\alpha_\nu^{(3)}$ die Werthe von u_ν in den Punkten $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$, mit $a_\nu^{(1)}$, $a_\nu^{(2)}$, $a_\nu^{(3)}$ die in den Punkten $x^{(i)}$, so wird:

$$\int_{l_i} dW = 2i\pi \int_{\zeta^{(i)}}^{x^{(i)}} du_\nu = (a_\nu^{(i)} - \alpha_\nu^{(i)})\, 2i\pi,$$

$$\int_{a_h} dW = 2\pi i g_\nu \int_{a_h} du_\nu = 2 g_\nu i\pi \,.\, a_{h\nu}, \qquad (h = 1, 2)$$

$$\int_{a_3} dW = 2i\pi g_3 \int_{a_3} du_\nu = 0$$

$$\int_{b_h} dW = \int_{b_h} u_h^- du_\nu + (\tfrac{1}{2} a_{hh} - v_h + 2 h_h \pi i) \int_{b_h} du_\nu,$$

Hier ist $\int\limits_{b_h} du_\nu$ gleich $2\pi i$ oder 0, je nachdem $h = \nu$ oder $h \gtrless \nu$, das Integral $\int\limits_{b_h} u_h^- du_\nu$ hängt nur von dem constanten Anfangswerthe des Integrals u_ν ab; ebenso sind die Integrale $\alpha_\nu^{(i)}$ von den $x^{(i)}$ unabhängig. Bezeichnen wir also mit k_ν solche von den $x^{(i)}$ unabhängige Constante, so wird schliesslich für $\nu = 1, 2$:

$$0 = W \equiv (a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} - v_\nu + 2 h_\nu i\pi + g_1 a_{1\nu} + g_2 a_{2\nu} + k_\nu)\, 2 i\pi\,.$$

Eine ganz analoge Gleichung leitet man aber in derselben Weise auch für u_3 ab. Es wird also schliesslich bis auf vollständige Periodensysteme für $\nu = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} v_\nu &= a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} + k_\nu \\ &= w_\nu + k_\nu - b_\nu^{(1)} - b_\nu^{(2)} - b_\nu^{(3)} = w_\nu + \varkappa_\nu\,, \end{aligned}$$

wo $b_\nu^{(i)}$ den Werth des Integrals u_ν im Punkte $c^{(i)}$ bedeutet, wo ferner die $\varkappa_\nu$ neue Constante sind, und die w_ν mit den in den Gleichungen (7) gegebenen Grössen übereinstimmen sollen. Wir haben also den Satz:

Setzt man die Argumente der Function Θ', *welche durch* (9) *definirt ist, gleich* $u_\nu - w_\nu - \varkappa_\nu$, *wo die* $\varkappa_\nu$ *gewisse Constante und die* w_ν *durch* (7) *gegeben sind, so verschwindet die Function* Θ' *in den drei Punkten* $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$.

Um die Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ genauer zu bestimmen, verfahren wir nun in folgender Weise.*) Die constante untere Grenze der Integrale soll mit μ bezeichnet sein; dann verschwindet nach dem eben ausgesprochenen Satze die Function

$$\Theta'\left(\int\limits_{\mu}^{x} du_h - \int\limits_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int\limits_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int\limits_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right)$$

für $x = x^{(1)}$ unabhängig von den Punkten $x^{(2)}, x^{(3)}$; oder mit anderen Worten: *Die Function*

$$\Theta'\left(\int\limits_{\mu}^{c^{(1)}} du_h - \int\limits_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int\limits_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right) \tag{15}$$

verschwindet unabhängig von der Lage der Punkte $x^{(2)}, x^{(3)}$.

Die Punkte $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ sind hier noch ganz beliebig; mit ihnen müssen nur immer die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ gleichzeitig passend geändert werden. Wir bestimmen dieselben jetzt durch folgende Con-

*) Diese Bestimmungsweise der Constanten ist der von Weber (Crelle's Journal, Bd. 70) für das Jacobi'sche Umkehrproblem gegebenen nachgebildet. Das Resultat stimmt mit dem bei Cl. u. G. A. F. p. 184 auf anderem Wege (für den allgemeinen Fall) gewonnenen überein.

struction. Die Tangente der C_4 im Punkte μ schneidet die C_4 noch in zwei Punkten; durch letztere legen wir einen Kegelschnitt, welcher die C_4 noch in drei Punkten berührt und nicht durch den Doppelpunkt geht. Solche Kegelschnitte gibt es in endlicher Zahl; und *mit den drei Berührungspunkten eines zunächst beliebig ausgewählten lassen wir die Punkte $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ zusammenfallen.* Es soll dies jedoch ein eigentlicher Kegelschnitt der Art sein, d. h. er soll nicht in die Tangente von μ selbst und eine Doppeltangente der C_4 zerfallen. Nun schneidet die Verbindungslinie von $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ die C_4 noch in zwei Punkten, die mit $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ bezeichnet seien. Dann ist nach dem Abel'schen Theoreme für $h = 1, 2, 3$:

$$(16) \qquad 2\int_{c^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h = 0\,.$$

Hieraus folgt, da Θ' eine gerade Function ist, dass neben der durch das Verschwinden von (15) gegebenen Gleichung auch die Gleichung besteht:

$$(17) \qquad \Theta'\left(\int_{\mu}^{c^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \varkappa_h\right) = 0,$$

und zwar unabhängig von $y^{(2)}$, $y^{(3)}$. Man kann also in letzterer Gleichung auch $y^{(2)} = x^{(2)}$, $y^{(3)} = x^{(3)}$ setzen; und dann stimmt die Gleichung (17) mit (15) bis auf das Vorzeichen von $\varkappa_h$ überein.

Statt $x = x^{(1)}$ zu setzen, hätte man aber auch $x = x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ nehmen können. Es ergibt sich somit, dass unabhängig von dem Vorzeichen der Grösse $\varkappa_\nu$ die Function

$$\Theta'\left(\int_{\mu}^{x} du_h - \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \pm \varkappa_\nu\right)$$

für $x = x^{(1)}$, $x = x^{(2)}$, $x = x^{(3)}$ verschwindet. Dies ist aber nur möglich, wenn sich die Argumente der von $+\varkappa_\nu$ und der von $-\varkappa_\nu$ abhängenden Function Θ' um ein Vielfaches von Periodensystemen unterscheiden; d. h. wir haben:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \tfrac{1}{2}(2\mu_1\pi i + \mu_2\,.\,0 \;+ \mu_3\,.\,0 \;+ \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{22})\\
\varkappa_2 &= \tfrac{1}{2}(\mu_1\,.\,0 \;+ 2\mu_2\pi i + \mu_3\,.\,0 \;+ \gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22})\\
\varkappa_3 &= \tfrac{1}{2}(\mu_1\,.\,0 \;+ \mu_2\,.\,0 \;+ 2\mu_3 i\pi + \gamma_1 A_1 \;+ \gamma_2 A_3)\,,
\end{aligned}$$

wo nun die Zahlen μ, γ ganz bestimmt gegebene Werthe ($\equiv 0$ mod. 2) haben und eben dadurch definirt sind, dass die Function $\Theta'(\int_{\mu}^{x} du_h + \varkappa_\nu)$ in den drei Punkten $c^{(i)}$ verschwindet.

Legt man durch die beiden weiteren Schnittpunkte der Tangente von μ mit der C_4 einen anderen Kegelschnitt, der die C_4 in den Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ berührt, so ist nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{\alpha^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h, \tag{18}$$

wenn k_h ein bestimmtes Periodensystem bedeutet. Die Function $\Theta'(\int_\mu^x + \frac{1}{2} k_h + \frac{1}{2} \varkappa_h)$ verschwindet dann in den drei Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$. *Besonders ausgezeichnet ist aber hierdurch das System von Punkten $\alpha^{(i)}$, für welches $k_h = \varkappa_h$ wird, welches also die Eigenschaft besitzt, dass die Function $\Theta'(\int_\mu^x du_h)$ in den Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ Null wird.* Es ist daher zweckmässig, dieses bestimmte Punktsystem für die unteren Grenzen der Integrale in den Gleichungen (7) zu wählen, wie es im Folgenden (analog unseren früheren Bemerkungen über das Jacobi'sche Problem p. 835 f.) geschehen soll. Es sei noch hervorgehoben, dass *der in diesen ausgezeichneten Punkten $\alpha^{(i)}$ berührende Kegelschnitt im Allgemeinen nicht in die Tangente von μ und eine Doppeltangente der C_4 zerfallen kann.* Alsdann nämlich wäre der Punkt μ unter den Punkten $\alpha^{(i)}$ enthalten, und es müsste die Function $\Theta'(\int_\mu^x du_h)$ für $x = \mu$ verschwinden, d. h. die Gleichung bestehen:

$$\Theta'(0, 0, 0) = 0,$$

was im Allgemeinen offenbar nicht eintritt.

Auf die Doppeltangenten der C_4 kommen wir sogleich noch zurück. Zuvor mögen die bisher gewonnenen Resultate für die Lösung des in den Gleichungen (7) gegebenen Umkehrproblems benutzt werden. Dasselbe erledigt sich einfach, wenn man die Function Θ' anwendet. In der That verificirt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

$$T'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{\alpha} = \log \frac{\Theta'\left(w_h - \int_\mu^\vartheta du_h\right) \cdot \Theta'\left(\int_\mu^\zeta du_h\right)}{\Theta'\left(w_h - \int_\mu^\zeta du_h\right) \cdot \Theta'\left(\int_\mu^\vartheta du_h\right)}, \tag{19}$$

wo:

$$T'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\zeta\vartheta}, \qquad w_h = \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h;$$

man braucht zu dem Zwecke nur die Periodicitäts-Eigenschaften sowie die Null- und Unendlichkeitspunkte auf beiden Seiten der Gleichung zu vergleichen. *Damit ist dann nach den obigen Bemerkungen* (p. 869) *das erweiterte Umkehrproblem gelöst.* —

Letzteres kann man nun zur Bestimmung von *Berührungscurven* benutzen, *welche durch den Doppelpunkt nicht hindurchgehen*, wie wohl nicht weiter ausgeführt zu werden braucht (vgl. p. 838 ff.). Es sei nur bemerkt, dass jetzt, wie man leicht übersieht, die Gleichungen:

$$(20) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{r}(v_h + k_h),$$

wo die v_h Constante, die k_h Periodensysteme bedeuten, $r^5 = r^{2p+1}$ Lösungen erlauben.*) Für $r = 2$ folgt hieraus, dass *es* 31 *Systeme von je einfach unendlich vielen eigentlichen Kegelschnitten gibt, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen und die C_4 überall berühren, wo sie ihr begegnen;* denn unter den zunächst gefundenen 32 Systemen ist das der doppelt zählenden Geraden mit enthalten. —

Von besonderem Interesse ist hier indess wieder das auch für den Fall $p = 3$ schon behandelte *Problem der Doppeltangenten*, zu dessen Erledigung wir jetzt übergehen. Haben wieder $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ die angegebene Bedeutung, und sollen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ die Berührungspunkte einer Doppeltangente sein, so bildet letztere zusammen mit der Tangente von μ eine C_2, für welche nach dem Abel'schen Theoreme analog zu (18) die Gleichungen bestehen:

$$(21) \qquad \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h \qquad (h = 1, 2, 3),$$

wo die k_h Periodensysteme sind. Hier haben wir aber *drei* Gleichungen zur Bestimmung der *zwei* Unbekannten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$; sollen dieselben zusammen bestehen können, so muss also zwischen den in ihnen vorkommenden Constanten noch eine Relation erfüllt sein. Die letztere nun ist uns sofort durch den oben bewiesenen Satz gegeben, dass die Function:

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h\right)$$

unabhängig von den Punkten $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ verschwindet. Setzen wir also $y^{(1)} = x^{(1)}$, $y^{(2)} = x^{(2)}$, so haben wir die Bedingung, dass die Gleichung erfüllt sei:

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h\right) \equiv \Theta'(\tfrac{1}{2} k_h) = 0.$$

*) Die Zahl ist hingegen wieder gleich r^{2p}, wenn der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, denn dann verwandelt sich das Integral dritter Gattung in ein Integral zweiter Gattung; und letzteres hat keine logarithmische Periode mehr.

Wir müssen daher fragen, ob es Systeme von halben Perioden $\frac{1}{2}k_1$, $\frac{1}{2}k_2$, $\frac{1}{2}k_3$ gibt, für welche, als Argumente der Function Θ', diese letztere gleich Null wird. Setzen wir nun:

$$(22) \qquad \begin{aligned} k_\nu &= 2i\pi m_h + q_1 a_{1\nu} + q_2 a_{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2) \\ k_3 &= 2i\pi g \quad + q_1 A_1 \ + q_2 A_2 . \end{aligned}$$

Die Function $\Theta'(\frac{1}{2}k_h)$ entsteht dann aus $\Theta'(-\frac{1}{2}k_h)$, indem man die Argumente der letzteren um ein ganzes Periodensystem k_h vermehrt; und folglich wird nach (12):

$$\begin{aligned} \log\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) &= \log\Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22} - q_1 k_1 - q_2 k_2) + g i\pi \\ &= \log\Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) - \pi i(m_1 q_1 + m_2 q_2 - g) \end{aligned}$$

oder:

$$\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) = \Theta'(-\tfrac{1}{2}k) \cdot (-1)^{m_1 q_1 + m_2 q_2 - g} .$$

Da aber Θ' eine gerade Function war, so ist auch

$$\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) = \Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) .$$

Beide Gleichungen können nur zusammen bestehen: entweder, wenn $m_1 q_1 + m_2 q_2 - g$ eine gerade Zahl ist, oder *wenn* $\Theta'(\frac{1}{2}k_h) = 0$ *ist. Letzteres tritt also immer ein, wenn* $m_1 q_1 + m_2 q_2 - g$ *eine ungerade Zahl ist, d. h. wenn:*

$$(23) \qquad m_1 q_1 + m_2 q_2 - g \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Nur wenn die Congruenz (23) *erfüllt ist, können daher die Gleichungen* (21) *zur Bestimmung der Doppeltangenten dienen.*

Hierdurch ist uns nun die Zahl der Doppeltangenten und ihre gegenseitige Gruppirung gegeben.*) Die Zahl derselben findet man gleich 16, was mit den Plücker'schen Formeln in Uebereinstimmung ist (p. 353), und zwar haben wir für die mit den Ziffern 1, 2, ... 16 bezeichneten Doppeltangenten folgende Werthsysteme der Zahlen m, q:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
m_1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
q_1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
m_2	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
q_2	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1

*) Die Untersuchung der Doppeltangenten einer C_4 mit Doppelpunkt ist von Brill gegeben: Math. Annalen, Bd. 6, p. 66, und zwar im Anschlusse an seine Behandlung des erweiterten Umkehrproblems für $p = 2$; vgl. die Anmerkung auf p. 867. Vgl. auch Roch: Crelle's Journal, Bd. 66, p. 114 ff.

Die Berührungspunkte dieser 16 Doppeltangenten sind auch, wie schon bemerkt wurde, unter den Lösungen der Gleichungen enthalten:

$$(24)\qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h$$

welche die Berührungspunkte der durch die übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ gehenden Berührungs-Kegelschnitte bestimmen: Man kann hier eben einen der Punkte $x^{(i)}$ mit dem Punkte μ zusammenfallen lassen, wenn für die in den Grössen k_h vorkommenden Zahlen m, q, g die Bedingung (23) erfüllt ist. Ist diese Bedingung jedoch nicht erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen (24) die Berührungspunkte eines eigentlichen Kegelschnittes. *Die Zahl der letzteren ist also gleich* $2^{2 \cdot 2+1} - 16 = 16$.

Zu weiteren Sätzen über die *gegenseitige Gruppirung der Doppeltangenten* gelangt man nun (wie im Falle $p = 3$), wenn man von den Systemen der (jetzt nicht adjungirten) Berührungs-Kegelschnitte ausgeht. Die Berührungspunkte $x^{(1)}, \ldots x^{(4)}$ eines solchen bestimmen sich, wenn $c^{(1)}, \ldots c^{(4)}$ die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der C_4 sind (die doppelt zählend einen Berührungs-Kegelschnitt gibt), aus den Gleichungen:

$$(25)\qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{x^{(4)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h\,,$$

wo die k_h wieder durch (22) definirt sind. Es ist indess bei Lösung des Umkehrproblems geschickter andere Gleichungen zu Grunde zu legen, in denen die zu μ gehörigen Punkte $\alpha^{(i)}$ als untere Grenzen vorkommen. Nun gehen durch die beiden übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ zwei Curven vierter Ordnung, von denen die eine aus dem doppelt zählenden, in $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ berührenden Kegelschnitte besteht, die andere durch den in $x^{(1)}, \ldots x^{(4)}$ berührenden Kegelschnitt und die doppelt zählende Tangente von μ gebildet wird. Wir können daher die Punkte $x^{(i)}$ auch aus den folgenden drei Gleichungen bestimmen:

$$(26)\qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h\,,$$

wo die k_h von den in (25) so bezeichneten Periodensystemen verschieden sind, wenn beide zu denselben oberen Grenzen gehören. In ihnen kann immer noch ein Punkt x beliebig angenommen werden;

die anderen drei sind dadurch nach den Gesetzen des erweiterten Umkehrproblems festgelegt; in der That stimmen dann die Gleichungen (26) mit den Gleichungen (20) überein, wenn man in letzteren die v_h passend wählt. Es gibt, wie schon erwähnt, 31 *Systeme eigentlicher Berührungskegelschnitte;* dazu tritt noch das zweifach unendliche System der doppelt zählenden Geraden, deren Schnittpunkte $x^{(i)}$ sich aus (26) für $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ergeben. In der That bildet ja jede Gerade zusammen mit der Tangente von μ eine C_2, so dass nach dem Abel'schen Theoreme:

$$(27) \quad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h = 0 .$$

Soll nun ein solcher Berührungskegelschnitt, dessen Periodensysteme k_h durch die Zahlen m_1, m_2, q_1, q_2, g gegeben sind, in zwei Doppeltangenten zerfallen, welche bez. durch die Zahlen m_1', m_2', q_1', q_2', g' und m_1'', m_2'' q_1'', q_2'', g'' charakterisirt sind, so muss sein (mod. 2):

$$m_1 \equiv m_1' + m_1'', \quad m_2 \equiv m_2' + m_2'', \quad g \equiv g' + g'',$$
$$q_1 \equiv q_1' + q_1'', \quad q_2 \equiv q_2' + q_2'',$$
$$m_1'q_1' + m_2'q_2' - g' \equiv 1, \quad m_1''q_1'' + m_2''q_2'' - g'' \equiv 1 .$$

Man erkennt hieraus leicht, dass *jedes der* 31 *Systeme, mit Ausnahme des durch die Zahlen* $q_1 = q_2 = m_1 = m_2 = 0$, $g = 1$ *bestimmten* 4 *Paare von Doppeltangenten (also je* 8 *Doppeltangenten) enthält; und diese* 30 *Systeme werden weiter nach dem Werthe von g paarweise einander so zugeordnet, dass immer zwei alle* 16 *Doppeltangenten enthalten. Jede Doppeltangente kann somit, je nachdem sie mit den andern gruppirt wird, als* 15 *Systemen zugehörig betrachtet werden*, wie die folgende Tabelle veranschaulicht. Dieselbe ist durch die in der vorstehenden Tabelle eingeführte Bezeichnung der Doppeltangenten mittelst der Zahlen 1, 2, ... 16 vereinfacht. Die römischen Ziffern beziehen sich auf die 15 Paare von je zwei Kegelschnittsystemen, welche den 15 Paaren von Werthsystemen m, q, g entsprechen, wobei sich letztere Zahlen in jedem Paare nur durch den Werth von g unterscheiden. Die unter einander stehenden Doppeltangenten bilden je ein Paar; den römischen Ziffern sind die Werthe der zugehörigen Zahlen m_1, q_1, m_2, q_2 in Klammern beigesetzt, während die zugehörigen Werthe von g links am Rande bemerkt sind. Man erhält die Tabelle:

	I. (0011)	II. (1101)	III. (1110)	IV. (1100)	V. (1001)
$g=1$	1 4 7 10	2 4 6 8	3 9 5 4	4 1 2 3	5 6 7 3
	11 12 14 16	11 14 15 16	11 15 16 13	11 12 14 13	11 12 14 16
$g=0$	2 5 6 13	3 5 7 12	1 6 8 12	5 6 7 15	1 2 4 13
	3 8 9 14	1 10 9 13	2 7 10 14	9 8 10 16	8 10 9 15

	VI. (0110)	VII. (1000)	VIII. (1010)	IX. (0101)	X. (0100)
$g=1$	6 5 2 10	7 5 1 8	8 9 2 7	9 8 10 3	10 9 1 6
	11 12 15 13	11 14 15 13	11 12 16 13	11 12 14 15	11 14 16 13
$g=0$	1 3 4 14	2 3 4 12	1 3 4 14	1 2 4 13	2 3 4 12
	9 7 8 16	9 6 10 16	5 10 6 15	6 7 5 16	5 8 7 15

	XI. (1111)	XII. (0010)	XIII. (0001)	XIV. (1011)	XV. (0111)
$g=1$	2 10 7 3	2 5 9 1	3 1 8 6	10 8 4 5	7 6 4 9
	13 15 16 14	12 15 16 14	12 13 15 16	12 14 16 13	12 14 15 13
$g=0$	1 5 8 11	3 6 7 11	2 5 9 11	1 2 3 11	1 2 3 11
	4 6 9 12	4 10 8 13	4 7 10 14	7 6 9 15	10 8 2 16

In jedem dieser 15 Kegelschnittsysteme ist aber ausser den vier Paaren eigentlicher Doppeltangenten ein Paar uneigentlicher Doppeltangenten enthalten (und zwar doppelt zählend), d. i. ein Paar der vom Doppelpunkte aus an die C_4 zu legenden Tangenten. Da nämlich jeder Kegelschnitt eines solchen Systems die C_4 zweipunktig trifft, wo er ihr auch begegnet, so muss die in ξ berührende C_2 nothwendig gleichzeitig in η berühren, denn jede Curve, die ξ enthält, geht auch durch η; und dies ist nur möglich, wenn die C_2 im Doppelpunkte selbst einen Doppelpunkt hat. Der Berührungspunkt y einer vom Doppelpunkte ausgehenden Tangente bestimmt sich nun bekanntlich aus den beiden Gleichungen ($\nu = 1, 2$):

$$(28)\qquad \int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\mu} du_\nu \equiv \tfrac{1}{2}(2m_\nu' i\pi + q_1' a_{1\nu} + q_2' a_{2\nu}) = \tfrac{1}{2}k_\nu',$$

wenn $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$ die dem Punkte μ so zugeordneten Punkte sind, dass die Function $\Theta(\int_\mu^x du_1, \int_\mu^x du_2)$ für $x = \beta^{(1)}$ und $x = \beta^{(2)}$ verschwindet, und wenn zwischen den rechts stehenden Zahlen die Bedingung erfüllt ist, welche aussagt, dass die Function $\Theta(\int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\mu} du_\nu)$ verschwindet, nämlich (vgl. p. 850):

$$(29)\qquad m_1' q_1' + m_2' q_2' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Um jedoch die Gleichungen (28) im Zusammenhange mit den Gleichungen (21) und (26) zu untersuchen, ist es nöthig die unteren Grenzen in ihnen übereinstimmend zu wählen. Nun ist zunächst nach dem Abel'schen Theoreme ($\nu = 1, 2$):

$$(30) \qquad \int_{\beta^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\alpha^{(3)}} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\alpha^{(2)}} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\alpha^{(2)}} du_\nu = \frac{1}{2} R_\nu,$$

wenn R_1, R_2 Periodensysteme bedeuten. In Folge dessen gehen die Gleichungen (28) über in:

$$(31) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \frac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu \equiv \frac{1}{2}(k_\nu' - R_\nu).$$

Ist ferner k_ν'' ein anderes Periodensystem, dessen Zahlen der Bedingung (29) genügen und z der zugehörige Berührungspunkt, so besteht zwischen z und k_ν'' eine ganz analoge Gleichung, in der dasselbe Periodensystem R_ν vorkommt. Durch Addition beider ergibt sich:

$$(32) \quad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(1)}}^{z} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu \equiv \frac{1}{2}(k_\nu' + k_\nu''),$$

eine Gleichung, welche aus (26) für $y = x^{(1)}$, $z = x^{(3)}$, $\xi = x^{(2)}$, $\eta = x^{(4)}$, $k_\nu' + k_\nu'' = k_\nu$ entsteht. Nun geschieht aber die Bestimmung der Punkte y, z allein durch das gewöhnliche Umkehrproblem, ist also völlig unabhängig von dem Integrale dritter Gattung u_3, folglich auch unabhängig von dem Werthe der Zahlen g', g'', g. Letztere können vielmehr beliebig gleich Null oder Eins gesetzt werden. In der That würde ja auch die entsprechende Summe von Integralen dritter Gattung einen unbestimmten Werth annehmen. Hieraus folgt, dass *jede der vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten als Doppeltangente zweifach zu zählen ist, dass je zwei der 30 Kegelschnittsysteme, welche zu einem Paare gehören (sich nur durch den Werth von g unterscheiden), dasselbe Paar solcher uneigentlichen Doppeltangenten enthalten, und dass letzteres in jedem der beiden Systeme als Berührungskegelschnitt doppelt zählt.**)

*) In der That müssen auch in jedem zu einer C_4 gehörenden Systeme von Berührungskegelschnitten *sechs* Paare zerfallender C_2 enthalten sein; denn die Gleichung eines solchen Systems ist, wenn $P = 0$, $R = 0$ zwei C_2 desselben sind, von der Form:

$$P + 2\lambda Q + \lambda^2 R = 0.$$

Es ist dann $PR - Q^2 = 0$ die Gleichung der C_4 und $Q = 0$ die einer C_2, welche durch die Berührungspunkte von $P = 0$, $R = 0$ mit der C_4 geht. Vgl. z. B. Salmon's Higher plane curves, n. 251.

Bezeichnen wir nun mit $(m_1 q_1 m_2 q_2)$ die zu der in y berührenden Tangente vermöge (28) und (29) gehörenden Zahlen, so haben wir die 6 Tangenten (Berührungscurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung):

1'.	2'.	3'.	4'.	5'.	6'.
(0011)	(1101)	(1110)	(1100)	(1011)	(0111);

und dieselben vertheilen sich auf die 15 Paare von Kegelschnittsystemen nach dem Schema:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2'3'	1'3'	1'2'	5'6'	3'6'	2'5'	1'5'	2'6'

IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
3'5'	1'6'	1'4'	3'4'	2'4'	4'6'	4'5'

Das 31te System von Berührungskegelschnitten endlich enthält jede der sechs vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten als in eine Doppelgerade ausgeartete Curve, wie man sofort bestätigt; es enthält also dieselben uneigentlichen Doppeltangenten, wie das zu demselben Werthe von g gehörige 32te System, welches aus den doppelt zählenden Geraden der Ebene besteht.

Die uneigentlichen Doppeltangenten nun stehen wieder zu den 15 Systemen von adjungirten Berührungs-Kegelschnitten in besonderen Beziehungen; doch gehen wir darauf hier nicht mehr näher ein. Man wird ferner über die Lage der Berührungspunkte leicht ähnliche Sätze aufstellen, wie im Falle $p = 3$. So liegen z. B. die acht Berührungspunkte je zweier Paare von Doppeltangenten desselben Systems auf einem Kegelschnitte, u. s. f. —

Nach diesen ausführlichen Erörterungen für den Fall $p = 2$ hat man Gesichtspunkte, um das erweiterte Umkehrproblem im allgemeinen Falle zu behandeln. Die sich dann bietende Aufgabe kann man in folgender Form aussprechen:

Es seien p Summen von je $p + q$ gleichartigen Normalintegralen erster Gattung mit den oberen unbekannten Grenzpunkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p+q)}$ und den unteren bekannten Grenzpunkten $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p+q)}$ gleich gegebenen Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$; ausserdem aber q Summen von je $p + q$ gleichartigen Normalintegralen dritter Gattung mit den nämlichen Grenzen gleich gegebenen Grössen $w_1, w_2, \ldots w_q$; und die Unendlichkeitspunkte der letzteren Integrale seien bez. $\xi^{(1)}, \eta^{(1)}; \xi^{(2)}, \eta^{(2)}; \ldots \xi^{(q)}, \eta^{(q)}$; d. h. es seien die folgenden $p + q$ Gleichungen gegeben:

$$(33) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1, \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p,$$

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(1)}\eta^{(1)}} = w_1, \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(q)}\eta^{(q)}} = w_q.$$

Die Aufgabe ist, die Coordinaten der oberen Grenzpunkte $x^{(i)}$ als Functionen der Grössen v, w darzustellen, oder als solche die Coëfficienten einer Gleichung

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q} + N_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-1} + N_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-2} + \ldots + N_{p+q} = 0$$

darzustellen, deren $p+q$ Wurzeln die den oberen Grenzen entsprechenden Werthe einer homogenen Function $\frac{\varphi}{\psi}$ sind, deren Zähler und Nenner gleich hohe Ordnung haben.

In dieser Form ist das Problem zunächst unabhängig davon, ob die Unendlichkeitspunkte $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ paarweise in Doppelpunkten vereinigt liegen oder nicht. Für die geometrische Anwendung ist jedoch der erstere Fall von hervorragender Bedeutung, und auf ihn kann der andere durch eindeutige Transformation der Grundcurve zurückgeführt werden. Von besonderem Interesse ist wieder die Frage nach denjenigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch q Doppelpunkte der Grundcurve nicht hindurchgehen und dieselbe überall berühren, wo sie ihr begegnen, indem dann zwischen den Grössen $v_1, \ldots v_{p+q}$ des Umkehrproblems, d. i. zwischen den entsprechenden halben Periodensystemen, noch eine Relation erfüllt sein muss, wenn das Problem lösbar sein soll. Alle diese Fragen wird man in analoger Weise erledigen können, wie dies für $p=2$ geschah. Besondere Betrachtungen sind indess immer anzustellen, wenn unter den q Doppelpunkten auch Rückkehrpunkte enthalten sind.

XII. Curven vom Geschlechte $p = 0$.

Bei unseren Untersuchungen über die Geometrie auf einer algebraischen Curve waren die Fälle $p=0$, $p=1$ zunächst ausgeschlossen, wenigstens bei allen Problemen, die sich auf adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bezogen; denn Schaaren solcher Curven gibt es eben nicht, wenn $p<2$. Diese beiden Fälle sollen nun im Folgenden nach einander betrachtet werden; insbesondere wird uns die Parameterdarstellung der Grundcurve genauer beschäftigen, die wir dann auch für $p=2$ und überhaupt für hyperelliptische Curven ausführen wollen.*)

Wir beginnen mit den Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p=0$, welche also $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Rückkehrpunkte**) besitzen. Wir wollen zunächst zeigen, dass *dieselben immer in eine*

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 67 ff.

**) Diese werden immer getrennt liegend angenommen. In Betreff höherer Singularitäten vgl. das auf p. 491 ff. und 678 Gesagte.

gerade Linie eindeutig transformirt werden können. *) Die Doppelpunkte betrachten wir zusammen mit $2n-3$ anderen beliebig auf der Curve gewählten Punkten als Grundpunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieser Büschel ist dadurch vollständig bestimmt, denn durch die $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1$ festen Punkte sind die Constanten einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis auf eine gegeben. Sei diese eine, willkürlich gebliebene, mit λ bezeichnet, so ist die Gleichung des Büschels von der Form

$$\varphi+\lambda\psi=0, \tag{1}$$

wo φ und ψ Functionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche, gleich Null gesetzt, irgend zwei Curven des Büschels darstellen.

Verbinden wir die Gleichung (1) mit der Gleichung $f=0$ der gegebenen Curve und einer Gleichung $u_x=0$, so erhalten wir durch Elimination der x_i das Product der Gleichungen der $n(n-1)$ Schnittpunkte in Liniencoordinaten; und dieses ist vom Grade n in λ, vom Grade $n(n-1)$ in den u_i. Die $n(n-1)$ Schnittpunkte aber bestehen aus den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ festen, je doppelt zählenden Doppel- und Rückkehrpunkten von f, aus den $2n-3$ willkürlich gewählten festen Punkten und aus

$$n(n-1)-(n-1)(n-2)-(2n-3)=1$$

beweglichen, d. h. von λ abhängenden, Schnittpunkten. Von dem Eliminationsresultate muss sich daher ein Factor vom Grade $[n(n-1)-1]$ in den u_i absondern lassen, welcher λ nicht enthält; und nach dessen Absonderung wird die Eliminationsgleichung von der Form:

$$f_1u_1+f_2u_2+f_3u_3=0,$$

wo die f_i Functionen n^{ten} Grades in λ sind. Dieses ist die Gleichung des beweglichen Schnittpunktes; seine Coordinaten verhalten sich also zu einander wie die f_i; und *man hat die Coordinaten x_i des beweglichen Schnittpunktes als rationale Functionen n^{ten} Grades eines Parameters λ dargestellt mit Hülfe der Gleichungen:*

$$\varrho x_1=f_1,\quad \varrho x_2=f_2,\quad \varrho x_3=f_3. \tag{2}$$

wobei ϱ ein willkürlicher Factor ist.

Setzen wir noch $\lambda=\frac{y_1}{y_2}$, so haben wir die x_i als homogene Functionen n^{ter} Ordnung von y_1, y_2 dargestellt. Sehen wir nun y_1, y_2, y_3 als Coordinaten eines Punktes der transformirten Curve an, so können

*) Das Folgende gilt jedoch nur für irreducible Curven; so stellt z. B. eine allgemeine C_3 zusammen mit einer Geraden eine C_4 vom Geschlechte Null dar; die Coordinaten ihrer Punkte können jedoch nicht rational durch einen Parameter ausgedrückt werden.

wir die x_i als Functionen der y_i betrachten, bei welchen $y_3 = 0$; es ist also letzteres die Gleichung der transformirten Curve, d. h. dieselbe ist eine Gerade, wie es sein sollte.

Wir können so jede Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Doppel- und Rückkehrpunkten in eine Gerade überführen mit Hülfe der Transformation* (2), *welche von der* n^{ten} *Ordnung und eindeutig umkehrbar ist.*

Dass umgekehrt jede Curve, für welche sich die Coordinaten ihrer Punkte rational durch einen Parameter darstellen lassen, vom Geschlechte $p = 0$ ist, ist evident; denn diese Darstellung ist eben nichts anderes als die eindeutige Transformation der Curve in eine Gerade*); und bei einer solchen bleibt das Geschlecht erhalten. Man kann sich aber weiter die Aufgabe stellen, wirklich die Gleichungen anzugeben, von denen die verschiedenen singulären Punkte abhängen, und so die Plücker'schen Zahlen direct bestimmen; damit wollen wir uns im Folgenden beschäftigen, um dann weiterhin noch zu sehen, wie sich das Abel'sche Theorem und überhaupt die Sätze über Schnittpunktsysteme hier gestalten.**)

Wenn wir nun eine Curve durch die Gleichungen (2) oder für $\lambda = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a_\varkappa^n \\ \varrho x_2 = f_2(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a'^n_\varkappa \\ \varrho x_3 = f_3(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv a''^n_\varkappa \end{cases}$$

gegeben annehmen, so setzen wir dabei voraus, dass die Functionen f_i von einander unabhängig sind, vor Allem, *dass nicht* f_3 *in der Form* $kf_1 + lf_2$ *darstellbar ist.* — Zunächst bietet sich naturgemäss die Aufgabe, aus den Gleichungen (3) die Gleichung der Curve selbst in Punktcoordinaten herzuleiten. Letztere wird dabei von der Ordnung

---

*) Ist für eine Curve die rationale Parameterdarstellung gegeben, so braucht jedoch nicht immer jedem Punkte der Curve auch nur ein Werth des Parameters zu entsprechen. Man kann dann aber immer einen neuen Parameter einführen, so dass dies der Fall ist; vgl. darüber Lüroth: Math. Annalen, Bd. 9, p. 163.

**) Vgl. im Folgenden besonders: Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind, Crelle's Journal, Bd. 64. Einzelne Eigenschaften dieser Curven waren schon früher von Salmon in der ersten Auflage von dessen Treatise on the higher plane curves behandelt; vgl. auch den barycentrischen Calcul von Möbius. — Auf die Gestaltung der Sätze über specielle Punktsysteme (p. 702 ff. und p. 742 und 749) im Falle $p = 0$ gehen wir im Texte nicht ein. Dieselben erledigen sich hier wesentlich einfacher, da man (in Folge der Parameterdarstellung) nur in einem binären Gebiete, also auf einer Geraden, operirt; vgl. darüber Brill: Math. Annalen, Bd. 5, p. 395.

n, denn die Parameter der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden u mit ihr sind die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades:

$$(4) \qquad u_1 a_x^n + u_2 a'^n_x + u_3 a''^n_x = 0 .$$

Die gesuchte Curvengleichung*) erhält man durch Elimination von ϱ, x_1, x_2 aus den Gleichungen (3); es soll auch sogleich noch gezeigt werden, wie diese Elimination sich in den einfachsten Fällen, d. i. für $n = 2$ und $n = 3$, wirklich ausführen lässt. Aber auch für die Liniencoordinatengleichung der Grundcurve lässt sich allgemein ein Bildungsgesetz angeben. Soll nämlich eine Gerade u die Curve berühren, so müssen zwei Wurzeln $x_1 : x_2$ der Gleichung (4) einander gleich werden; d. h. *die Liniengleichung der Grundcurve ist durch das Verschwinden der Discriminante des in* (4) *links stehenden Ausdrucks gegeben.* Andererseits kann man die Coordinaten einer Tangente in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter des Berührungspunktes einfach darstellen. Für einen zu x benachbarten Punkt $x + dx$ nämlich haben wir nach (3):

$$\sigma dx_1 = a_x^{n-1} a_{dx}, \quad \sigma dx_2 = a'^{n-1}_x a'_{dx}, \quad \sigma dx_3 = a''^{n-1}_x a''_{dx} .$$

Die Coordinaten der Verbindungslinie von x mit $x + dx$ sind daher:

$$\begin{aligned} u_3 = \varrho\sigma (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) &= a_x^{n-1} a'^{n-1}_x (a_x a'_{dx} - a'_x a_{dx}) \\ &= (x\,dx) \,.\, (a a')\, a_x^{n-1} a'^{n-1}_x, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

oder, da der Factor $(x\,dx)$ in den drei Coordinaten gleichmässig vorkommt:

$$(5) \qquad \begin{cases} \tau u_1 = (a' a'')\, a'^{n-1}_x a''^{n-1}_x \equiv \vartheta_{23}, \\ \tau u_2 = (a'' a)\, a''^{n-1}_x a_x^{n-1} \equiv \vartheta_{31}, \\ \tau u_3 = (a a')\, a_x^{n-1} a'^{n-1}_x \equiv \vartheta_{12} . \end{cases}$$

Diese Gleichungen stehen den Gleichungen (3) *dualistisch gegenüber; sie geben die Parameterdarstellung für die Tangenten der Grundcurve. — Man erhält daher auch bis auf einen Factor die Gleichung der letzteren in Punktcoordinaten, wenn man die Discriminante des Ausdrucks*

$$x_1 \vartheta_{23} + x_2 \vartheta_{31} + x_3 \vartheta_{12}$$

gleich Null setzt.

Da nun der Berührungspunkt einer Tangente immer auf der Tangente selbst liegt, so besteht die (auch leicht direct abzuleitende) Identität:

$$(6) \qquad f_1 \vartheta_{23} + f_2 \vartheta_{31} + f_3 \vartheta_{12} = 0 .$$

*) Das Resultat der Elimination gibt nichts anderes als die Relation, welche nach einer Bemerkung auf p. 222 zwischen je drei beliebigen binären Formen bestehen muss; die drei Formen sind im Texte nur von der gleichen Ordnung angenommen.

Für $n = 2$ würde man also unter Hinzunahme dieser Gleichung, wenn

$$\vartheta_x^2 = x_1 \vartheta_{23} + x_2 \vartheta_{31} + x_3 \vartheta_{12} = \vartheta_0 \varkappa_1^2 + 2 \vartheta_1 \varkappa_1 \varkappa_2 + \vartheta_2 \varkappa_2^2$$

gesetzt wird, die Gleichung des Kegelschnittes durch Elimination von ϱ, $\varkappa_1^2$, $2\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_2^2$ aus (3) und (6) in der Form erhalten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ x_2 & a_0' & a_1' & a_2' \\ x_3 & a_0'' & a_1'' & a_2'' \\ 0 & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

wo a_i, a_i', a_i'' die Coëfficienten der drei Formen f_1, f_2, f_3 bedeuten. Eleganter gestaltet sich diese Elimination, wenn man zuerst die Gleichung in Liniencoordinaten bildet. Letztere wird gegeben durch Verschwinden der Discriminante der Gleichung:

$$u_1 a_\varkappa^2 + u_2 a'_\varkappa{}^2 + u_3 a''_\varkappa{}^2 = 0,$$

also durch:

$$(7) \quad D_{11} u_1^2 + D_{22} u_2^2 + D_{33} u_3^2 + 2 D_{23} u_2 u_3 + 2 D_{31} u_3 u_1 + 2 D_{12} u_1 u_2 = 0,$$

wo die D_{ik} die aus je zwei Formen f_i zu bildenden Invarianten bezeichnen:

$$D_{11} = (ab)^2, \quad D_{12} = (aa')^2, \quad D_{13} = (aa'')^2, \text{ etc.}$$

Nach bekannten Sätzen der Kegelschnitttheorie *ist daher die Gleichung des durch die Gleichungen* (3) *für* $n = 2$ *dargestellten Kegelschnittes in Punktcoordinaten, d. i. das Resultat der Elimination von* ϱ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *aus den Gleichungen* (3)*):

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & x_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & x_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) Für $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$, $x_3 = f_3$ ist dies eine Identität, vgl. Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 205. — Wegen (5) und (7) bestehen auch zwischen den f_i und ϑ_{ik} die drei Identitäten:

$$\varrho f_i = D_{i1} \vartheta_{23} + D_{i2} \vartheta_{31} + D_{i3} \vartheta_{12},$$

wo man für ϱ durch weitere Rechnung den Werth findet:

$$-R = -(aa')(a'a'')(a''a).$$

Hierin ist der geometrische Inhalt des von Clebsch a. a. O. p. 418 studirten Dualismus gegeben, welcher zwischen den drei quadratischen Formen und deren Functionaldeterminanten besteht. Auch das sogenannte Hesse'sche Uebertragungsprincip (vgl. Hesse: Crelle's Journal, Bd. 66) findet in den Gleichungen (3) für $n = 2$ seinen einfachsten algebraischen Ausdruck.

Für $n = 3$ haben wir zu beachten, dass durch jeden Punkt x der Curve ausser seiner Tangente auch die Tangente des Punktes $x + dx$ hindurchgeht, d. h. dass neben (6) auch die Gleichung besteht:

$$f_1 d\vartheta_{23} + f_2 d\vartheta_{31} + f_3 d\vartheta_{12} = 0 .$$

Da aber immer $dx_2 = 0$, oder $dx_1 = 0$ genommen werden darf, so dürfen wir diese Gleichung und (6) ersetzen durch die beiden folgenden:

$$(9) \quad \begin{aligned} f_1 \frac{\partial \vartheta_{23}}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \vartheta_{31}}{\partial x_1} + f_3 \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ f_1 \frac{\partial \vartheta_{23}}{\partial x_2} + f_2 \frac{\partial \vartheta_{31}}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_2} = 0 . \end{aligned}$$

Setzen wir also:

$$\vartheta_{23} x_1 + \vartheta_{31} x_2 + \vartheta_{12} x_3 = \vartheta_0 x_1^4 + 4\vartheta_1 x_1^3 x_2 + 6\vartheta_2 x_1^2 x_2^2 + 4\vartheta_3 x_1 x_2^3 + \vartheta_4 x_2^4 ,$$

so erhalten wir für $n = 3$ *die Gleichung der Curve 3ter Ordnung* durch Elimination der Grössen ϱ, x_1, x_2 aus (3) und (9) in der Gestalt*):

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x_1 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & x_2 \\ a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' & x_3 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Wir gehen dazu über, die Gleichungen aufzustellen, von denen die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen für unsere Curve abhängt. Diese Gleichungen sind selbstverständlich unabhängig von der Lage des Coordinatensystems, auf welches sich die Parameterdarstellung (3) gründet. Sie dürfen sich daher nur um einen Factor (Potenz der Substitutionsdeterminante) ändern, wenn man statt der Formen f_i beliebige lineare Combinationen der f_i zu Grunde legt; und Analoges gilt überhaupt für Gleichungen, welche invariante Eigenschaften von Punktsystemen auf der Grundcurve oder solche Punktsysteme selbst bestimmen. *Die linken Seiten aller solchen Gleichungen sind daher Combinanten der drei binären Formen f_1, f_2, f_3.* Dass dieselben überhaupt *simultane Invarianten* der drei letzteren Formen sein müssen, ist evident, da die Parameterdarstellung von dem binären Coordinatensysteme $x_1 : x_2$ nicht wesentlich abhängt.

Um zunächst die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte der Grundcurve zu bestimmen, gehen wir von der Bedingung aus, dass drei Punkte x, λ, μ auf einer Geraden liegen, welche hier in der Form erscheint:

*) Vgl. Rosenow: Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, Breslau 1873, p. 48.

$$(11) \qquad R \equiv \begin{vmatrix} f_1(\varkappa) & f_2(\varkappa) & f_3(\varkappa) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \end{vmatrix} = 0 .$$

Die links stehende Determinante verschwindet für $\varkappa = \lambda$ oder $\lambda = \mu$ oder $\mu = \varkappa$; sie muss daher durch $(\varkappa\lambda)$, $(\lambda\mu)$ und $(\mu\varkappa)$ theilbar sein, d. h. wir dürfen setzen:

$$R = (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) . R' ,$$

wo nun R' symmetrisch von $\varkappa$, λ, μ abhängt und in jeder dieser Veränderlichen vom Grade $n-2$ ist. Symbolisch sei daher*):

$$R' = \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_\mu^{n-2} ,$$

so dass erst je $n-2$ Symbole α zusammen mit je $n-2$ Symbolen β und je $n-2$ Symbolen γ wirkliche Bedeutung haben. Sind die Punkte λ, μ gegeben, so findet man aus der Gleichung $R' = 0$ die $n-2$ weiteren Schnittpunkte μ der Verbindungslinie von $\varkappa$ und λ mit der Curve; und für $\varkappa = \lambda$ gibt die Gleichung $\alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\varkappa^{n-2}\gamma_\mu^{n-2} = 0$ zu jedem gegebenen Punkte μ die Berührungspunkte der $2n-4$ von μ an die Curve zu ziehenden Tangenten.

Doppelpunkte der Curve nun sind diejenigen Punkte, für welche zwei Werthsysteme ($\varkappa_i$ und λ_i) des Parameters dieselben Werthe der Coordinaten ergeben, so dass:

$$(12) \qquad \sigma f_1(\varkappa) = f_1(\lambda), \quad \sigma f_2(\varkappa) = f_2(\lambda), \quad \sigma f_3(\varkappa) = f_3(\lambda).$$

Hier wird die Verbindungslinie der (über einander liegenden) Punkte $\varkappa$ und λ unbestimmt; es besteht also *unabhängig von* μ_1, μ_2 die Gleichung: $\alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_\mu^{n-2} = 0$, d. h. wir haben das System von $n-1$ Gleichungen:

$$(13) \quad \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_1^{n-2} = 0, \quad \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_1^{n-3}\gamma_2 = 0, \ldots \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\lambda^{n-2}\gamma_2^{n-2} = 0.$$

Aus ihnen können wir die $n-1$ Grössen λ_1^{n-2}, $\lambda_1^{n-3}\lambda_2$, ... λ_2^{n-2} eliminiren; setzen wir also

$$\varrho_{i,k} = \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_1^{n-k-2}\beta_2^k\gamma_1^{n-i-2}\gamma_2^i ,$$

so ist ein Doppelpunkt $\varkappa$ bestimmt durch die Gleichung**):

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \varrho_{0,1} & \cdots & \varrho_{0,n-2} \\ \varrho_{1,0} & \varrho_{1,1} & \cdots & \varrho_{1,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{n-2,0} & \varrho_{n-2,1} & \cdots & \varrho_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = 0 .$$

*) Ueber die Bildung des Ausdrucks R' vgl. Gordan, Math. Annalen, Bd. 5, p. 118 ff. — Für die im Folgenden zur Bestimmung der Plücker'schen Zahlen angewandte Schlussweise vgl. auch eine Note von Weyr: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16.

**) Ueber die Bildung dieser Gleichung vgl. auch Haase, Math. Annalen, Bd. 2, p. 525.

Dieselbe ist vom Grade $(n-1)(n-2)$ in $\varkappa$. Auf die nämliche Gleichung, geschrieben in λ, wird man auch geführt, wenn man aus (13) die Grössen $\varkappa_i$ eliminirt; je *zwei* Wurzeln von (14) geben daher denselben Doppelpunkt. *Es gibt also in der That* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Doppelpunkte**), *und dieselben werden durch* (14) *bestimmt; letztere Gleichung aber kann auf eine Gleichung vom Grade* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *und auf* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.* Letzteres ergibt sich nach bekannten Sätzen daraus, dass man von je zwei zusammengehörigen Wurzeln die eine rational berechnen kann, wenn die andere gegeben ist.

Zur Bestimmung der Wendepunkte unserer Curve haben wir die Bedingung aufzustellen, dass drei benachbarte Punkte $\varkappa$, $\varkappa+d\varkappa$, $\varkappa+2d\varkappa+d^2\varkappa$ auf einer Geraden liegen. Da wir nun immer $d\varkappa_2=0$ annehmen dürfen, so ist für einen Wendepunkt $\varkappa$:

$$\begin{vmatrix} a_\varkappa^n & a'^n_\varkappa & a''^n_\varkappa \\ a_\varkappa^{n-1}a_1 & a'^{n-1}_\varkappa a'_1 & a''^{n-1}_\varkappa a''_1 \\ a_\varkappa^{n-2}a_1^2 & a'^{n-2}_\varkappa a'^2_1 & a''^{n-2}_\varkappa a''^2_1 \end{vmatrix}=0,$$

oder nach dem Satze von den homogenen Functionen:

$$\Delta \equiv a_\varkappa^{n-2}a'^{n-2}_\varkappa a''^{n-2}_\varkappa \begin{vmatrix} a_2^2 & a'^2_2 & a''^2_2 \\ a_1a_2 & a'_1a'_2 & a''_1a''_2 \\ a_1^2 & a'^2_1 & a''^2_1 \end{vmatrix}$$

$$(15)\qquad \equiv (aa')(a'a'')(a''a)\,a_\varkappa^{n-2}a'^{n-2}_\varkappa a''^{n-2}_\varkappa = 0.$$

Die Zahl der Wendepunkte ist daher gleich $3(n-2)$.**)

Andererseits müssen sich die Wendepunkte aus der Gleichung $R'=0$ für $\varkappa=\lambda=\mu$ ergeben. Wir können daher auch setzen:

$$(16)\qquad \Delta = \alpha_\varkappa^{n-2}\beta_\varkappa^{n-2}\gamma_\varkappa^{n-2}.$$

---

*) Die *Zahl* der Doppelpunkte ergibt sich auch einfach durch Betrachtung des übervollständigen Systems von Gleichungen:

$$\begin{Vmatrix} f_1(\varkappa) & f_2(\varkappa) & f_3(\varkappa) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \end{Vmatrix}=0,$$

welches mit den Gleichungen (12) äquivalent ist.

**) Die Wendepunkte werden also unbestimmt, wenn die Combinante Δ identisch Null ist; *dann geben aber die Gleichungen* (3) *überhaupt nicht die Parameterdarstellung einer Curve* n^{ter} *Ordnung.* Das Verschwinden von Δ nämlich sagt aus, dass die $(n-2)^{ten}$ Polaren eines beliebigen Punktes $\varkappa$ Punktepaare einer Involution sind (p. 520), d. h. dass unabhängig von $\varkappa$ und λ:

$$a_\varkappa^{n-2}a_\lambda^2=\alpha\,.\,a'^{n-2}_\varkappa a'^2_\lambda+\beta\,.\,a''^{n-2}_\varkappa a''^2_\lambda.$$

Insbesondere folgt hieraus für $\varkappa=\lambda$: $f_1=\alpha f_2+\beta f_3$, so dass die Elimination von $\varkappa$ aus den Gleichungen (3) das Resultat gibt: $x_1-\alpha x_2-\beta x_3=0$; *die Curve besteht also aus einer* (*n-fach dargestellten*) *Geraden*: ein Fall, der schon auf p. 885 ausgeschlossen wurde.

Die Doppeltangenten findet man durch dualistische Uebertragung des bei Aufsuchung der Doppelpunkte angewandten Verfahrens, d. h. indem man die Formen f_1, f_2, f_3 bez. mit den Functionaldeterminanten ϑ_{23}, ϑ_{31}, ϑ_{12} vertauscht. Man erhält dadurch zunächst eine Gleichung vom Grade $(2n-3)(2n-4)$, entsprechend der Gleichung (14). Es ist aber zu bemerken, dass in letzterer Gleichung zwei zusammengehörige (d. i. denselben Doppelpunkt liefernde) Wurzeln einander gleich werden müssen, wenn einer der Doppelpunkte in einen Rückkehrpunkt ausarten soll. Da nun jede Wendetangente dualistisch entsprechend als Ausartung einer Doppeltangente aufzufassen ist, so wird die erwähnte Gleichung vom Grade $(2n-3)(2n-4)$ neben den Doppeltangenten auch je zweifach zählend die Wendetangenten liefern, d. h. von ihrer linken Seite wird sich der Factor Δ^2 absondern lassen. Weil ferner je zwei Wurzeln der übrig bleibenden Gleichung sich auf *dieselbe* Doppeltangente beziehen, *so ist die Zahl der Doppeltangenten gleich*

$$\tfrac{1}{2}\left\{(2n-3)(2n-4)-6(n-2)\right\}=2(n-2)(n-3).$$

Wenn man die der Form Δ dualistisch entsprechende Form Δ', welche vom Grade $3(2n-4)$ wird, aus den Functionaldeterminanten ϑ_{ik} bildet, so würde die Gleichung $\Delta'=0$ nach den vorstehenden Bemerkungen die Rückkehrpunkte von f liefern; solche sind aber auf der Grundcurve im Allgemeinen nicht vorhanden (d. h. wenn die f_i von einander unabhängig gewählt sind), während andererseits keine Wendepunkte auftreten würden, wenn die ϑ_{ik} von einander unabhängig gewählt werden. Die Rückkehrpunkte müssen daher sämmtlich durch die Wendetangenten absorbirt sein, d. h. *die Combinante Δ' muss zu dem Quadrate der Combinante Δ proportional werden.**)

Die Gleichung (14) muss, wie soeben bemerkt wurde, eine Doppelwurzel haben, wenn ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen soll. Wenn aber andererseits die Discriminante von (14) verschwindet, so hat man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem zwei zusammengehörige Wurzeln jener Gleichung einander gleich werden, oder zwei nicht zusammengehörige. Im letzteren Falle tritt kein Rückkehrpunkt ein, sondern es erscheinen zwei unendlich nahe Doppelpunkte, wobei dann freilich auch die beiden Tangenten eines jeden von ihnen in eine zusammenfallen. Dieses Vorkommen führt keine weitere Reduction der *Klasse* mit sich, als diesen zwei

*) Und zwar hat man nach Gleichung (19) p. 207 in Clebsch's Theorie der binären Formen: $\Delta'=\frac{1}{4}\Delta^2$; die daselbst für $n=2$ ausgeführten Rechnungen sind nämlich allgemein gültig, wenn man nur alle Gleichungen mit symbolischen Factoren des Typus $a_x^{n-2}a'^{n-2}_x a''^{n-2}_x$ multiplicirt; in Gleichung (19) daselbst hat man dann noch die Indices 3, 4, 5, 6 bez. durch 2, 3, 3, 1 zu ersetzen.

Doppelpunkten überhaupt zukommt; eine solche Reduction tritt jedoch im zweiten Falle ein, indem man einen wirklichen Rückkehrpunkt erhält. In den Gleichungen (12) hat man dann nämlich $\lambda_1 = x_1 + \varepsilon$, $\lambda_2 = x_2$ zu setzen, so dass z. B. die erste dieser Gleichungen übergeht in:

$$(17) \qquad (\sigma - 1)\, a_x^n = n\varepsilon \,.\, a_x^{n-1} a_1$$

und für $\lambda_2 = x_2 + \eta$, $\lambda_1 = x_1$:

$$(18) \qquad (\sigma - 1)\, a_x^n = n\eta \,.\, a_x^{n-1} a_2 \,.$$

Aus beiden Gleichungen folgt aber, wenn man für f_2 und f_3 eine analoge Ueberlegung anstellt:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \zeta a_x^{n-1} a_1 &= a_x^{n-1} a_2 \quad (\equiv \alpha_1)\,, \\ \zeta a_x'^{n-1} a'_1 &= a_x'^{n-1} a'_2 \quad (\equiv \alpha_2)\,, \\ \zeta a''^{n-1}_x a''_1 &= a''^{n-1}_x a''_2 \quad (\equiv \alpha_3)\,. \end{aligned}$$

Nun wurde die Liniencoordinatengleichung der Grundcurve durch das Verschwinden der Discriminante von (4) gegeben, d. h. durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{aligned} u_1 a_x^{n-1} a_1 + u_2 a'^{n-1}_x a'_1 + u_3 a''^{n-1}_x a''_1 &= 0 \\ u_1 a_x^{n-1} a_2 + u_2 a'^{n-1}_x a'_2 + u_3 a''^{n-1}_x a''_2 &= 0 \end{aligned}$$

gewonnen. Von letzteren aber wird wegen (19) eine die Folge der andern; und die Discriminante muss dann nothwendig den Factor $u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3$ enthalten, durch dessen Verschwinden beide Gleichungen (20) befriedigt werden, wobei nach (3) die Grössen α_i die Coordinaten des betreffenden Rückkehrpunktes sind. *Ist also x die Anzahl von Rückkehrpunkten, so ist die Klasse der Grundcurve gleich* $2(n - 1) - x$. In ähnlicher Weise bestimmt man leicht den Einfluss eines Rückkehrpunktes auf die übrigen Plücker'schen Zahlen.*) —

Betrachten wir nun *die Schnittpunkte der Grundcurve mit einer anderen Curve*, so werden wir wieder auf das Abel'sche Theorem geführt; da aber die Grundcurve vermöge der Gleichungen (3) auf eine Gerade abgebildet ist, enthalten die betreffenden Integrale jetzt keine Irrationalität mehr und können daher einzeln wirklich ausgewerthet werden. Des Näheren gestalten sich diese Verhältnisse in folgender Weise.

Wir setzen der Kürze wegen $x_1 = \lambda$ und $x_2 = 1$; sodann bezeichnen wir durch $a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(2)}, b^{(2)}; a^{(3)}, b^{(3)}; \ldots a^{(\nu)}, b^{(\nu)}$, wo $\nu = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$, die bez. den verschiedenen Doppelpunkten entsprechenden Werthepaare von λ. Die Durchschnitte der gegebenen Curve mit einer Curve m^{ter} Ordnung

$$(21) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

*) Vgl. Clebsch in Crelle's Journal a. a. O.

werden gefunden, indem man in dieser Gleichung für die x_i ihre Werthe (3) einsetzt. Man erhält dann eine Gleichung in λ von der Form:

$$(22)\quad \Omega(\lambda) \equiv c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{nm}) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo die Parameterwerthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{nm}$ den mn Schnittpunkten entsprechen. Setzen wir nun in (22) λ einmal gleich $a^{(i)}$, das andere Mal gleich $b^{(i)}$, so bleiben dabei die x bis auf einen gemeinschaftlichen Factor $c^{(i)}$, also auch φ und Ω bis auf den Factor $(c^{(i)})^m$, ungeändert; und man erhält: $\Omega(a^{(i)}) = (c^{(i)})^m \Omega(b^{(i)})$, oder:

$$(23)\qquad \frac{(a^{(i)} - \lambda_1)(a^{(i)} - \lambda_2) \ldots (a^{(i)} - \lambda_{nm})}{(b^{(i)} - \lambda_1)(b^{(i)} - \lambda_2) \ldots (b^{(i)} - \lambda_{nm})} = (c^{(i)})^m$$

$$\text{für}\quad i = 1, 2, 3 \ldots \nu, \quad \text{wo}\quad \nu = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Diese ν Gleichungen sind für die Theorie der vorliegenden Curven von der höchsten Wichtigkeit. Sie treten hier an Stelle des Systems von $\nu + p$ Gleichungen, welche für den allgemeinen Fall aus dem Abel'schen Theoreme hervorgehen, und welche für eine Curve vom Geschlechte p mit ν Doppelpunkten aussagen, dass mn Punkte der Curve auf einer nicht durch die Doppelpunkte gehenden Curve m^{ter} Ordnung liegen (p. 882). Weil es nämlich für $p = 0$ keine Integrale erster Gattung gibt, so bleiben hier nur die ν Gleichungen für Integrale dritter Gattung; diese Integrale sind einzeln bez. gleich $\log \frac{a^{(i)} - \lambda}{b^{(i)} - \lambda}$ für $i = 1, 2, \ldots \nu$; und in (23) treten eben die Summen solcher logarithmischen Integrale auf.*)

Wenn also mn Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{mn}$ der durch (3) *dargestellten Curve auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen sollen, so ist es nothwendig und hinreichend, dass ihre Parameter den Gleichungen* (23) *genügen.*

Die letzteren erleiden eine leichte Modification, wenn einer der Doppelpunkte (z. B. $a^{(i)}, b^{(i)}$) in einen Rückkehrpunkt übergeht. Man hat dann $a^{(i)} = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)} = \alpha^{(i)} + \varepsilon$, $c^{(i)} = 1 - \varkappa^{(i)}\varepsilon$, wo ε unendlich klein ist, und also:

$$\frac{a^{(i)} - \lambda}{b^{(i)} - \lambda} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha^{(i)} - \lambda} \cdots$$

Die Gleichung (23) geht daher über in folgende (vgl. für $n = 3$ p. 592):

$$(24)\qquad \frac{1}{a^{(i)} - \lambda_1} + \frac{1}{a^{(i)} - \lambda_2} + \cdots + \frac{1}{a^{(i)} - \lambda_{nm}} = m\varkappa^{(i)}.$$

Die Integralsummen dritter und zweiter Gattung, welche, gleich Null gesetzt, bez. die Stelle der Gleichungen (23) und (24) vertreten,

*) Vgl. für $n = 3$ p. 586 und p. 592.

wie soeben erwähnt wurde, findet man, indem man erstere Gleichung logarithmisch, letztere gewöhnlich differentiirt, und dann von $\varrho^{(i)}$ bis λ bez. von $\sigma^{(i)}$ bis λ integrirt. Man erhält so statt (23) und (24) die Gleichungen (für $\mu = mn$):

$$(25)\begin{cases} \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} + \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} + \cdots + \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} = 0, \\ \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} + \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} + \cdots + \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} = 0; \end{cases}$$

und die unteren Grenzen ϱ, σ bestimmen sich aus der Vergleichung mit (23), (24) durch die Gleichungen:

$$(26) \qquad \frac{a^{(i)} - \varrho^{(i)}}{b^{(i)} - \varrho^{(i)}} = (c^{(i)})^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{a^{(i)} - \sigma^{(i)}} = \frac{x^{(i)}}{n}.$$

Durch Veränderung des Integrationsweges kann man auf der rechten Seite der ersten dieser Gleichungen 0 in $2h\pi\sqrt{-1}$ verwandeln, so dass diese Integralsummen die Periode $2i\pi$ zulassen; die Integrale der zweiten Gleichung dagegen haben immer die Periode Null, da sie nur paarweise zusammenfallende Unendlichkeitspunkte besitzen. Dies kommt damit überein, dass man in (23) rechts $(c^{(i)})^m e^{2ki\pi}$ für $(c^{(i)})^m$ setzen kann, während $m x^{(i)}$ auf der rechten Seite von (24) sich durch nichts anderes ersetzen lässt. Man kann sonach folgenden Satz aussprechen:

Für eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- bez. Rückkehrpunkten, ist, wenn (für $x_1 = \lambda$, $x_2 = 1$) $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ die Parameter eines Doppelpunktes sind, immer die Summe gleichartiger Integrale

$$(a^{(i)} - b^{(i)}) \int\limits_{\varrho}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)}$$

gleich $2h\pi\sqrt{-1}$, hingegen, wenn $a^{(i)}$ der Parameter eines Rückkehrpunktes ist, die Summe der Integrale $\int\limits_{\sigma}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2}$ gleich Null; wo die Summen auf alle Parameter erstreckt werden, welche den Schnittpunkten der Grundcurve mit einer anderen algebraischen Curve entsprechen.

Hieraus geht sofort hervor, dass alle *Aufgaben über Berührungscurven*, welche im allgemeinen Falle mit Hülfe des sogenannten *erweiterten Umkehrproblems* der Abel'schen Integrale und der Theilungsprobleme für die dabei auftretenden Transscendenten gelöst werden (p. 866 ff.), bei den hier vorliegenden Curven auf die *Kreistheilung* zurückkommen und auf die Auflösung einer Gleichung q^{ten} Grades,

wenn die Berührungscurve durch q von den v Doppelpunkten nicht hindurchgehen soll. In der That lässt sich dies aus den Gleichungen (23), (24) direct nachweisen. In allen jenen Aufgaben sind nämlich $k = nm - \mu q$ Schnittpunkte gegeben (von denen $2(v - q)$ in Doppelpunkten liegen), während von den übrigen q-mal μ zusammenfallen sollen. Bezeichnen wir die den ersteren entsprechenden (gegebenen) Parameter durch $l_1, l_2, \ldots l_k$, die der gesuchten Punkte durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$, so gehen die Gleichungen (25), von denen hier nur noch q in Betracht kommen, über in:

$$(27)\qquad \begin{cases} \prod_{r=1}^{r=q} \dfrac{a^{(i)} - \lambda_r}{b^{(i)} - \lambda_r} = e^{\frac{2h^{(i)}\pi\sqrt{-1}}{\mu}} \sqrt[\mu]{(c^{(i)})^m \prod_{r=1}^{r=k} \dfrac{b^{(i)} - l_r}{a^{(i)} - l_r}} \\ \sum_{r=1}^{r=q} \dfrac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_r} = \dfrac{1}{\mu} \left\{ m\varkappa^{(i)} - \sum_{r=1}^{r=k} \dfrac{1}{\alpha^{(i)} - l_r} \right\}. \end{cases}$$

Diese q Gleichungen genügen völlig, um die symmetrischen Functionen der λ_r durch bekannte Grössen auszudrücken, und so eine Gleichung q^{ten} Grades für λ anzusetzen. Man bemerkt zugleich, dass der Einfluss eines Rückkehrpunktes darin besteht, eine der v Perioden $2i\pi$ zu entfernen (indem dieselbe unendlich gross werden würde). Wenn, wie dies bei den Curven vierter Ordnung noch geschehen kann, sämmtliche Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen, so hört die Benutzung der Kreistheilungs-Gleichungen überhaupt auf. Es haben dann die betreffenden Aufgaben nur je eine Lösung.

Wie die Bestimmung der Berührungscurven und der Systeme von solchen in einzelnen Fällen zu geschehen hat, braucht nach den früheren allgemeinen Erörterungen wohl kaum noch wieder besprochen zu werden. Insbesondere ist für $m \geqq n - 2$ und $q = v = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ hier immer die Aufgabe lösbar, *durch $mn - vr$ Punkte der Curve n^{ter} Ordnung eine Curve m^{ter} Ordnung zu legen, welche die erstere in v Punkten je $(r-1)$-punktig berührt;* und die Gesammtzahl der Lösungen findet man, wenn keine Rückkehrpunkte vorhanden sind, gleich r^v. Ausgezeichnet sind jedoch, wie bei den Curven von allgemeinem Geschlechte, (nach unseren Fundamentalsätzen über Schnittpunktsysteme) die Fälle, wo $m \leqq n - 3$. Z. B. für $m = n - 3$ sind $\frac{1}{2}n(n-3)$ Schnittpunkte einer nicht durch die Doppelpunkte gehenden C_{n-3} durch die übrigen $\frac{1}{2}n(n-3)$ bestimmt; man kann daher nur noch die Forderung stellen, *eine C_{n-3} so zu legen, dass sie die C_n überall, wo sie derselben begegnet, also in $\frac{1}{2}n(n-3)$ Punkten, berührt.*

Diese Aufgabe führt zur Aufstellung einer Relation zwischen v Grössen $v^{(i)}$, welche bestehen muss, wenn dieselben gleich Summen von

je $\nu - 1$ Integralen dritter Gattung der obigen Form sollen gesetzt werden dürfen. Wir wollen sie für $n = 4$ noch behandeln, wo sie uns die Bestimmung der *Doppeltangenten einer C_4 mit drei Doppelpunkten* gibt.*) Zuvor sei bemerkt, dass man die in (23) auftretenden Grössen $c^{(i)}$ leicht durch die $a^{(i)}$ und $b^{(i)}$ ausdrücken kann, was für das Folgende nützlich ist. Sondert man nämlich den Doppelpunkt $a^{(i)}, b^{(i)}$ von den übrigen $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkten ab, so bilden diese übrigen (je doppelt zählend) den vollständigen Durchschnitt der C_n mit einer C_{n-3}, welche durch dieselben gerade bestimmt ist. Stellt man nun für die Schnittpunkte dieser C_{n-3} die Gleichungen (23) auf, so bleibt nur die eine Gleichung bestehen, welche sich auf den Doppelpunkt $a^{(i)}, b^{(i)}$ bezieht, durch den die C_{n-3} nicht hindurchgeht; und in dieser Gleichung hat man den $n(n - 3)$ Grössen λ die $n(n - 3)$ Werthe a, b beizulegen, welche den Index i nicht haben; setzt man also der Kürze wegen:

$$(x - a^{(1)})(x - a^{(2)}) \ldots (x - a^{(\nu)}) = \varphi(x),$$
$$(x - b^{(1)})(x - b^{(2)}) \ldots (x - b^{(\nu)}) = \psi(x),$$

so besteht die Gleichung:

$$(28) \qquad (c^{(i)})^{n-3} = -\frac{\varphi'(a^{(i)}) \cdot \psi(a^{(i)})}{\varphi(b^{(i)}) \cdot \psi'(b^{(i)})}.$$

Die zuletzt erwähnte Aufgabe gibt nun nach (23) zwischen den $\nu - 1$ Grössen λ die ν Gleichungen:

$$(29) \qquad \frac{(a^{(i)} - \lambda_1)(a^{(i)} - \lambda_2) \ldots (a^{(i)} - \lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)} - \lambda_1)(b^{(i)} - \lambda_2) \ldots (b^{(i)} - \lambda_{\nu-1})} = (c^{(i)})^{\frac{1}{2}(n-3)} e^{h^{(i)} \pi \sqrt{-1}}.$$

Zwischen den Zahlen $h^{(i)}$ muss daher, wie erwähnt, noch eine Relation bestehen; um letztere zu finden, gehen wir zunächst von dem allgemeineren Gleichungssysteme aus:

$$(30) \qquad \frac{(a^{(i)} - \lambda_1) \ldots (a^{(i)} - \lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)} - \lambda_1) \ldots (b^{(i)} - \lambda_{\nu-1})} = e^{v^{(i)}} (c^{(i)})^{\frac{n-3}{2}} = \zeta^{(i)}$$

und fragen nach der zwischen den $v^{(i)}$ nothwendig bestehenden Relation.**) Diese ergibt sich direct durch Elimination der $\nu - 1$ symmetrischen Functionen der λ_i aus den ν Gleichungen (30) in der Form:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} a^{(1)\nu-1} - \zeta^{(1)} b^{(1)\nu-1}, & a^{(1)\nu-2} - \zeta^{(1)} b^{(1)\nu-2}, & \ldots & 1 - \zeta^{(1)} \\ a^{(2)\nu-1} - \zeta^{(2)} b^{(2)\nu-1}, & a^{(2)\nu-2} - \zeta^{(2)} b^{(2)\nu-2}, & \ldots & 1 - \zeta^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(\nu)\nu-1} - \zeta^{(\nu)} b^{(\nu)\nu-1}, & a^{(\nu)\nu-2} - \zeta^{(\nu)} b^{(\nu)\nu-2}, & \ldots & 1 - \zeta^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0.$$

*) Vgl. das entsprechende Problem für $n = 4$ und $p = 2$ auf p. 876.

**) Man würde dieselbe natürlich auch aus der allgemeinen Behandlung des erweiterten Umkehrproblems ableiten können, wie dieselbe oben angedeutet und bei Cl. u. G. A. F. p. 270 ausgeführt ist.

Ordnet man die links stehende Determinante nach den $\zeta^{(i)}$ und ersetzt letztere Grössen durch die in (30) gegebenen Werthe, so resultirt eine Gleichung in den e^v, welche jede dieser Grössen nur auf lineare Weise enthält.

Für $n = 4$, d. i. $\nu = 3$, erhalten wir also insbesondere eine Gleichung der Form*):

$$(32)\quad A + B_1 e^{v^{(1)}} + B_2 e^{v^{(2)}} + B_3 e^{v^{(3)}} + B_{12} e^{v^{(1)}+v^{(2)}} + B_{23} e^{v^{(2)}+v^{(3)}} + B_{31} e^{v^{(3)}+v^{(1)}} + C e^{v^{(1)}+v^{(2)}+v^{(3)}} = 0,$$

in welcher die Coëfficienten A, B, C noch näher zu bestimmen sind. Nun ist zunächst:

$$A = \begin{vmatrix} a^{(1)2} & a^{(1)} & 1 \\ a^{(2)2} & a^{(2)} & 1 \\ a^{(3)2} & a^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = (a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)}),$$

und ebenso:

$$C = -(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)}) \cdot (c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)})^{\frac{1}{2}}.$$

Andererseits folgt aus (28):

$$(33)\qquad c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)} = \left\{\frac{(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)})}{(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)})}\right\}^2,$$

und somit wird:

$$(34)\qquad C = -A.$$

Für B_1 dagegen findet man unter Benutzung von (28):

$$B_1 = -(b^{(1)} - a^{(2)})(b^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)})(c^{(1)})^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\left\{\frac{(b^{(1)} - a^{(2)})(b^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - b^{(2)})(a^{(1)} - b^{(3)})}{(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})}\right\}^{\frac{1}{2}}(a^{(2)} - a^{(3)}).$$

Der hier rechts stehende Werth ergibt sich aber bis auf das Vorzeichen auch für B_{23}, d. i. für

$$B_{23} = (a^{(1)} - b^{(2)})(a^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)})(c^{(2)}c^{(3)})^{\frac{1}{2}},$$

wenn man darin $c^{(2)}$ und $c^{(3)}$ nach (28) durch a, b ausdrückt. Es folgt also, da Analoges für B_2 und B_3 gilt:

$$(35)\qquad B_{23} = -B_1, \quad B_{31} = -B_2, \quad B_{12} = -B_3;$$

und die Gleichung (32) geht wegen (34) und (35) über in:

$$(36)\qquad A(1 - e^S) + \sum_i B_i (e^{v^{(i)}} - e^{S - v^{(i)}}) = 0,$$

wenn $S = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}$ gesetzt wird. *Diese Bedingung muss für* $n = 4$, $\nu = 3$ *erfüllt sein, wenn die Gleichungen* (30) *zusammen bestehen sollen.*

*) Vgl. die allgemeine Behandlung der Aufgabe bei Clebsch a. a. O.

Nehmen wir nun, wie in (29), $v^{(i)} = h^{(i)}\pi\sqrt{-1}$, so werden alle Grössen e^v gleich ± 1, und die Gleichung (36) geht einfach über in: $e^S = 1$, oder:

$$(37) \qquad h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Die vier Doppeltangenten unserer C_4 bestimmen sich also aus den Gleichungen (29) für $n = 4$, $v = 3$, wenn man bez. setzt:

$$\begin{aligned}
h^{(1)} &= 0, & h^{(2)} &= 0, & h^{(3)} &= 0;\\
h^{(1)} &= 0, & h^{(2)} &= 1, & h^{(3)} &= 1;\\
h^{(1)} &= 1, & h^{(2)} &= 1, & h^{(3)} &= 0;\\
h^{(1)} &= 1, & h^{(2)} &= 0, & h^{(3)} &= 1.
\end{aligned}$$

Von Interesse ist hier, wie im Falle $n = 4$ und $p = 1$, die Vertheilung der Doppeltangenten auf die verschiedenen Systeme von Berührungskegelschnitten. Letztere bestimmen sich aus den drei Gleichungen:

$$\frac{(a^{(i)} - \lambda_1)(a^{(i)} - \lambda_2)(a^{(i)} - \lambda_3)(a^{(i)} - \lambda_4)}{(b^{(i)} - \lambda_1)(b^{(i)} - \lambda_2)(b^{(i)} - \lambda_3)(b^{(i)} - \lambda_4)} = c^{(i)} e^{g^{(i)} i\pi},$$

worin λ_4 noch willkürlich gewählt werden kann. *Es gibt daher 7 Systeme von je einfach unendlich vielen Kegelschnitten, welche die C_4 in vier Punkten berühren;* und es gilt (wie immer) der Satz, dass die Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte desselben Systems auf einem Kegelschnitte liegen. Bezeichnen wir mit $(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)})$ das durch die drei Zahlen g besimmte System, so sind jene sieben Systeme:

$$(0, 0, 1),\ (0, 1, 0),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1);$$

denn das System (0, 0, 0) besteht aus der Gesammtheit der je doppelt zählenden Geraden der Ebene. Man erkennt hieraus, dass *drei dieser Systeme je zwei Paare von Doppeltangenten enthalten*, nämlich

(0, 1, 1) die Paare {(0, 0, 0), (0, 1, 1)} und {(1, 1, 0), (1, 0, 1)},
(1, 0, 1) „ „ {(0, 0, 0), (1, 0, 1)} „ {(1, 1, 0), (0, 1, 1)},
(1, 1, 0) „ „ {(0, 0, 0), (1, 1, 0)} „ {(1, 0, 1), (0, 1, 1)},

Die vier übrigen Systeme enthalten keine eigentlichen Doppeltangenten. Unter ihnen ist noch das System (1, 1, 1) ausgezeichnet, insofern dasselbe *drei* Paare *uneigentlicher* Doppeltangenten enthält, nämlich die drei Paare von Tangenten, welche man bez. von den drei Doppelpunkten aus an die C_4 legen kann. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man beachtet, dass sich z. B. die von dem Doppelpunkte $a^{(1)}, b^{(1)}$ ausgehenden Tangenten aus den Gleichungen bestimmen ($k = 2, 3$):

$$\frac{a^{(k)} - \lambda_1}{b^{(k)} - \lambda_1} = (c^{(k)})^{\frac{1}{2}} e^{h^{(k)}\pi i} \left\{\frac{(b^{(k)} - b^{(1)})(b^{(k)} - a^{(1)})}{(a^{(k)} - b^{(1)})(a^{(k)} - a^{(1)})}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und dass hier wieder $h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0$ (mod. 2) sein muss.*)

*) Die 6 anderen Systeme enthalten auch Paare uneigentlicher Doppeltangenten in anderer Gruppirung, denn in jedem Systeme müssen 6 Paare zerfallender Kegelschnitte vorkommen; vgl. die Anmerkung auf p. 881.

Diese Resultate erleiden Modificationen, wenn einige der Doppelpunkte in Rückkehrpunkte ausarten, wie man nach dem Obigen leicht näher verfolgt. Tritt *ein Rückkehrpunkt* auf, so hat man noch zwei Doppeltangenten, und es gibt drei Systeme von Berührungs-Kegelschnitten, deren eines das Paar der Doppeltangenten enthält. Bei *zwei Rückkehrpunkten* ist noch eine Doppeltangente und ein System von Berührungskegelschnitten vorhanden; die Berührungspunkte der letzteren aber liegen nicht mit denen der Doppeltangente auf einem Kegelschnitte. Endlich bei *drei Rückkehrpunkten* hat man zwar noch eine Doppeltangente, aber kein System von Berührungskegelschnitten mehr. Die Curve ist von der dritten Klasse geworden, ihre nähere Behandlung also ganz analog der für die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt früher gegeben (p. 587 ff.). —

Besonders einfach gestaltet sich die Aufstellung der Gleichungen für die Singularitäten der Grundcurve in dem Falle $n = 3$; und bei diesem wollen wir daher noch etwas verweilen*); dadurch werden dann gleichzeitig unsere früheren Untersuchungen über die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte vervollständigt. Es seien also an Stelle von (3) die Gleichungen gegeben:

$$\varrho x_1 = a_\varkappa^3, \quad \varrho x_2 = a'^3_\varkappa, \quad \varrho x_3 = a''^3_\varkappa. \tag{38}$$

Wir haben zunächst die Form $\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu$ aufzustellen, deren Verschwinden aussagt, dass die Punkte $\varkappa$, λ, μ auf einer Geraden liegen. Nun war aber:

$$\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu \,.\, (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) = \begin{vmatrix} a_\varkappa^3 & a'^3_\varkappa & a''^3_\varkappa \\ a_\lambda^3 & a'^3_\lambda & a''^3_\lambda \\ a_\mu^3 & a'^3_\mu & a''^3_\mu \end{vmatrix}.$$

Die hier rechts stehende Determinante ändert sich nicht, wenn man a mit $\varkappa$, a' mit λ, a'' mit μ vertauscht; sie muss daher neben dem wirklichen Factor $(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa)$ auch den symbolischen Factor $(a a')(a' a'')(a'' a)$ enthalten. Der übrig bleibende Factor muss linear und symmetrisch, sowohl in $\varkappa$, λ, μ, als in a, a', a'' sein; er hat daher den Werth:

$$a_\varkappa a'_\lambda a''_\mu + a_\mu a'_\varkappa a''_\lambda + a_\lambda a'_\mu a''_\varkappa \,.$$

Bezeichnet also $\Delta_\varkappa^3$ wieder die in (15) eingeführte Combinante, von welcher die 3 Wendepunkte abhängen, so kann man setzen**):

*) Vgl. Rosenow a. a. O., sowie die Anmerkung auf p. 584.

**) Nicht so einfach gestaltet sich die Berechnung der Determinante (11), wenn $n > 3$. Man hat dieselbe dann mit Hülfe der Reihenentwicklungen zu behandeln, welche für binäre Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen gelten (vgl. Clebsch's Theorie der binären Formen, p. 15 ff.); dabei können in

(39) $$\alpha_x \beta_\lambda \gamma_\mu = C \,.\, \Delta_x \Delta_\lambda \Delta_\mu \,,$$

wo C einen Zahlenfactor bedeutet.

Die Gleichung $\Delta_x \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ *sagt sonach aus, dass die Punkte* x, λ, μ *in einer Geraden liegen;* $\Delta_x^2 \Delta_\lambda = 0$ *gibt die zwei Berührungs-*

---

der Entwicklung der Form $\alpha_x^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_\mu^{n-2}$ nur gerade Potenzen von $(x\lambda)$, $(\lambda\mu)$, (μx) auftreten, denn diese Form ändert sich nicht, wenn man zwei der Grössen x, λ, μ mit einander vertauscht. In Rücksicht hierauf findet man z. B. für $n = 4$:

$$\alpha_x^2 \beta_\lambda^2 \gamma_\mu^2 = p \Delta_x^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2 + q \left\{ (x\lambda)^2 D_\mu^2 + (\lambda\mu)^2 D_x^2 + (\mu x)^2 D_\lambda^2 \right\},$$

wo p, q Zahlenfactoren bedeuten, wo Δ_x^6 durch (15) definirt ist, und wo:

$$D_x^2 = (aa')(a'a'')(a''a) \left\{ (a'a'')^2 a_x^2 + (a''a)^2 a'^2_x + (aa')^2 a''^2_x \right\}.$$

Insbesondere kann hier die Form D_x^2 identisch Null sein; dann sagt die einfachere Gleichung $\Delta_x^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2 = 0$ aus, dass x, λ, μ in gerader Linie liegen: und hieraus findet man leicht, dass die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten durch die Hesse'sche Form von Δ, d. i. durch die Gleichung:

$$H_\Delta \equiv (\Delta\Delta')^2 \Delta_x^4 \Delta'^4_x = 0$$

gegeben werden, die Paare von Parameterwerthen für die drei Doppelpunkte dagegen durch die Gleichung:

$$j \equiv (\Delta\Delta')^2 (\Delta'\Delta'')^2 (\Delta''\Delta)^2 \Delta_x^2 \Delta'^2_x \Delta''^2_x = 0\,.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Falles ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Man kann drei binäre biquadratische Formen immer als zweite Polaren einer Grundform 6ter Ordnung auffassen, wie in Rücksicht auf die typische Darstellung der Formen gerader Ordnung durch quadratische Covarianten (vgl. Clebsch a. a. O.) oder nach dem Hesse'schen Uebertragungsprincipe (vgl. p. 887, Anmk.) daraus folgt, dass ein Kegelschnittnetz im Allgemeinen Polarennetz einer C_3 ist. Sei also $f = \alpha_x^6$ diese Grundform, so kann man setzen:

$$a_x^4 = \alpha_x^4 \alpha_1^2\,, \qquad a'^4_x = \beta_x^4 \beta_1 \beta_2\,, \qquad a''^4_x = \gamma_x^4 \gamma_2^2\,,$$

und es wird:

$$\Delta = \tfrac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\beta\gamma)^2 (\gamma\alpha)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \gamma_x^2 = \tfrac{1}{6} j_f$$

$$D_x^2 = -\tfrac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\alpha\gamma)^2 (\beta\gamma)^4 \alpha_x^2 = -\tfrac{1}{6} (i, f)_4 = -\tfrac{1}{6} l\,,$$

wenn i und l die bei Clebsch (a. a. O. p. 283 ff.) so genannten Formen sind. Ist aber $l \equiv 0$ und $i \gtrless 0$, so kann man setzen (a. a. O. p. 446): $f = x_1^6 + x_2^6$, und dann wird auch $j_f \equiv 0$. Dieser Fall gibt keine eigentliche C_4. Ist dagegen $l \equiv 0$ dadurch, dass i identisch verschwindet; dann zerfallen die 6 Grundpunkte von f (wie bei der Covariante T einer biquadratischen Form) in drei Paare, von denen je zwei zu einander harmonisch liegen (ib. p. 447), und man kann setzen: $f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4)$; dann wird aber $\frac{1}{6} j_f \equiv \Delta = -\frac{1}{108} x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = -\frac{1}{108} f$. Es wird daher auch j_Δ zu Δ proportional; d. h. die sechs Wendepunkte liegen paarweise in den Doppelpunkten vereinigt. *Durch die Bedingung* $D_x^2 \equiv 0$ *sind also diejenigen* C_4 *charakterisirt, welche in jedem Doppelpunkte gleichzeitig zwei Wendepunkte haben* (es sei denn, dass keine eigentliche C_4 überhaupt vorliegt; vgl. p. 890, 2. Anmk.). Ein Beispiel hierfür gibt die gewöhnliche *Lemniscate;* bei ihr liegen zwei Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten.

punkte x der von λ ausgehenden Tangenten oder den Tangentialpunkt λ des Punktes x, und $\Delta_x^3 = 0$ gibt die drei Wendepunkte.

Ist insbesondere x ein Wendepunkt, d. i. eine Wurzel von $\Delta_x^3 = 0$, so besteht die erste Polare von x in Bezug auf Δ aus dem Punkte x selbst und dem vierten harmonischen Punkte ν von x in Bezug auf die beiden andern Wurzeln von Δ (wobei dann ν ein Wurzelpunkt der Covariante Q von Δ ist). Die Gleichung $\Delta_x \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ sagt dann also aus, dass λ und μ zu x und ν harmonisch liegen; diese Bedingung ist aber nach dem eben Gesagten erfüllt, wenn λ, μ die beiden anderen Wendepunkte von Δ sind; und somit ergibt sich der bekannte Satz, dass *die drei Wendepunkte auf einer Geraden liegen.*

Die Bestimmung des Doppelpunktes geschieht vermöge obiger Gleichung (14), d. h. durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen:

$$\Delta_x \Delta_\lambda \Delta_1 = 0\,, \qquad \Delta_x \Delta_\lambda \Delta_2 = 0\,.$$

Die beiden Parameter des Doppelpunktes sind daher die Grundpunkte der Hesse*'schen Form τ_x^2 von Δ, d. h. die Wurzeln der Gleichung:*

$$\tau_x^2 \equiv 2\,(\Delta\Delta')\Delta_1\Delta_2'\Delta_x\Delta_x' \equiv (\Delta\Delta')^2\Delta_x\Delta_x' = 0\,.$$

Gleichzeitig folgt hieraus, dass das Verschwinden der Determinante von τ, d. h. der Invariante $R = (\tau\tau')^2$ von Δ, die *Bedingung für das Auftreten eines Rückkehrpunktes* liefert.

Aber auch für die Polare $\tau_x\tau_\lambda$ von τ_x^2 ist leicht eine Bedeutung anzugeben. Die Gleichung $\tau_x\tau_\lambda = 0$ nämlich ergibt sich durch Elimination von μ aus den beiden Gleichungen:

$$\Delta_x^2\Delta_\mu = 0, \qquad \Delta_\lambda^2\Delta_\mu = 0\,.$$

Zunächst erhält man das Resultat $(\Delta\Delta')\Delta_x^2\Delta'^2_\lambda = 0$. Nun ist aber:

$$\begin{aligned}(\Delta\Delta')\,\Delta_x^2\Delta'^2_\lambda &= \tfrac{1}{2}(\Delta\Delta')\,(\Delta_x^2\Delta'^2_\lambda - \Delta_\lambda^2\Delta'^2_x)\\ &= \tfrac{1}{2}(\Delta\Delta')^2\,(\Delta_x\Delta'_\lambda + \Delta_\lambda\Delta'_x)\,(x\lambda)\\ &= (\Delta\Delta')^2\Delta_x\Delta'_\lambda\,(x\lambda) = \tau_x\tau_\lambda\,.\,(x\lambda)\,.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\tau_x\tau_\lambda = 0$ sagt also aus, dass die Punkte x, λ einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben)*; d. h. dass sie ein conjugirtes Polepaar auf der Grundcurve bilden, wenn man letztere als Hesse'sche Curve einer anderen Curve dritter Ordnung auffasst (was beim Auftreten eines Doppelpunktes nur noch auf eine Weise möglich ist).

Besonders ausgezeichnet sind noch auf der Curve die Berührungspunkte λ der drei von den Wendepunkten x ausgehenden Tangenten. Dieselben findet man durch Elimination von x aus den Gleichungen:

*) Hierin liegt dann wieder der auf p. 587 im Anschlusse an die kanonische Form von Δ nämlich ($\Delta = \lambda^3 + \mu^3$) ausgesprochene Satz über die von den Verbindungslinien zweier Punkte, die gemeinsamen Tangentialpunkt haben, mit dem Doppelpunkte gebildete Involution.

$$\Delta_x^3 = 0, \quad \Delta_x \Delta_\lambda^2 = 0.$$

Letztere kann man aber durch einfachere ersetzen. Da nämlich die eine der beiden vom Wendepunkte ausgehenden Tangenten mit der Wendetangente zusammenfällt, so bildet der Wendepunkt x mit dem zugehörigen Berührungspunkte λ selbst ein conjugirtes Polepaar, so dass $\tau_x \tau_\lambda = 0$; und die Elimination von x aus dieser Gleichung und aus $\Delta_x \Delta_\lambda^2 = 0$ gibt:

$$Q \equiv q_\lambda^3 \equiv (\Delta\tau)\Delta_\lambda^2 \tau_\lambda = 0.$$

*Die Grundpunkte der Covariante Q von Δ sind also die Berührungspunkte der von den Wendepunkten ausgehenden Tangenten.**)

Die Bedeutung der Polaren der Form Q endlich ergibt sich in folgender Weise. Es seien x, λ, μ die drei Punkte einer Geraden, in μ ziehen wir die Tangente, welche die Curve noch in dem Tangentialpunkte μ' von μ trifft; von μ' aus ziehen wir die zweite Tangente, deren Berührungspunkt μ'' sei, so dass μ und μ'' ein conjugirtes Polepaar bilden. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\Delta_x \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0, \quad \tau_\mu \tau_{\mu''} = 0;$$

und durch Elimination von μ ergibt sich:

$$\Delta_x \Delta_\lambda \tau_{\mu''} (\Delta\tau) = 0.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} 3 q_x^2 q_{\mu''} &= (\Delta\tau) \left\{\Delta_x^2 \tau_{\mu''} + 2 \Delta_x \Delta_{\mu''} \tau_x\right\} \\ &= (\Delta\tau) \left\{3 \Delta_x^2 \tau_{\mu''} + 2 \Delta_x (\Delta_{\mu''} \tau_x - \tau_{\mu''} \Delta_x)\right\} \\ &= 3 (\Delta\tau) \Delta_x^2 \tau_{\mu''} - 2 (\Delta\tau)^2 \Delta_x \,.\, (x\mu''). \end{aligned}$$

Da aber nach Gleichung (10) p. 219 die zweite Ueberschiebung von Δ mit τ identisch Null ist, so wird $q_x^2 q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_x^2 \tau_{\mu''}$; und also auch durch Polarenbildung:

$$q_x q_\lambda q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_x \Delta_\lambda \tau_{\mu''}.$$

*Die Gleichung $q_x q_\lambda q_{\mu''} = 0$ sagt somit aus, dass die Verbindungslinie von x und λ die Grundcurve in einem dritten Punkte trifft, welcher durch μ'' zu einem conjugirten Polepaare ergänzt wird.***)

---

*) Es sei bemerkt, dass drei binäre Formen dritter Ordnung keine anderen Combinanten haben, als die Formen Δ, τ, Q und R; vgl. Gordan: Math. Annalen, Bd. 5, p. 117 ff.

**) Hieraus folgt dann weiter, dass x, λ, μ'' drei Punkte sind, in denen ein Kegelschnitt je einfach die Grundcurve berühren kann, denn die Tangentialpunkte von x, λ, μ'' liegen wieder in einer Geraden (p. 533); vgl. auch Steiner in Crelle's Journal, Bd. 66 und Schröter's Bearbeitung von Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, Bd. 2.

Mit Hülfe der entwickelten Relationen kann man nun weiter die Probleme des fortgesetzten Tangentenziehens (p. 588) und andere Fragen der Art behandeln; doch soll darauf hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, dass sich die vorstehenden Sätze über die Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve dritter Ordnung unmittelbar auf die Schnittpunktsysteme von je drei beweglichen Punkten übertragen lassen, welche auf einer C_n mit $p = 0$ von den zweifach unendlich vielen C_{n-2} ausgeschnitten werden, die durch $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkte und durch $n - 3$ feste einfache Punkte der C_n hindurchgehen. Von je drei solchen Punkten nämlich ist (wie bei der C_3) einer durch die beiden anderen bestimmt; und man kann daher durch Benutzung eines solchen Netzes von C_{n-2} die vorliegende C_n in eine Curve 3[ter] Ordnung mit einem Doppelpunkte eindeutig transformiren; auf letzterer wird dann eben die entsprechende zweifach unendliche Schaar von je drei Punkten durch die geraden Linien der Ebene ausgeschnitten.

XIII. Die Curven vom Geschlechte $p = 1$.

Gehen wir jetzt zu den Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkten über, für welche $p = 1$ ist. Wir untersuchen zuerst (wie bei $p = 0$) die rein algebraischen Fragen, welche sich den betreffenden allgemeineren Erörterungen nicht unterordnen*); nämlich: die Transformation auf eine *Normalcurve* und die Bestimmung von *Anzahl und Bedeutung der Moduln*. Daran knüpfen wir dann noch einige Bemerkungen über die Einführung der elliptischen Functionen und Integrale; bei letzteren können wir uns kurz fassen, da dieselben nur Anwendungen unserer allgemeinen Theorien bieten, und da wir entsprechende Verhältnisse bei den Curven dritter Ordnung schon eingehend besprochen haben.

Als Normalcurve findet man hier die *allgemeine Curve dritter Ordnung*, und zwar in folgender Weise.**) Man betrachte die $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppel- und Rückkehrpunkte nebst $2n - 3$ anderen, auf der Curve beliebig gewählten, festen Punkten als die $\frac{1}{2} (n + 2)(n - 1) - 2$ Grundpunkte eines Curvennetzes der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Curven des letzteren treffen die C_n dann noch in

$$n (n - 1) - n (n - 3) - (2n - 3) = 3$$

*) Durch die $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkte nämlich ist im Allgemeinen gerade *eine* adjungirte C_{n-3} bestimmt; dieselbe schneidet f aber sonst nicht, so dass die früheren Untersuchungen über C_{n-3} illusorisch werden.

**) Vgl. Clebsch: Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, Crelle's Journal, Bd. 64 und: Cl. u. G. A. F. p. 69 ff.

beweglichen Punkten; benutzt man sie also als Transformationscurven, so resultirt in der That eine Curve der dritten Ordnung. Eine weitere Reduction der Ordnung ist nicht möglich, da es eine Curve von niedrigerer als der dritten Ordnung mit dem Geschlechte $p = 1$ nicht gibt.

Bei der Transformation entsprechen den Curven des Netzes, welche durch einen beliebigen Punkt x der C_n gehen, eindeutig die Strahlen des durch den entsprechenden Punkt y der C_3 gehenden Büschels, insbesondere also den vier berührenden Curven jenes Curvenbüschels die vier Tangenten dieses Strahlbüschels; und daraus folgt, dass das Doppelverhältniss der vier Tangenten jener vier Curven in einem der Basispunkte (z. B. x) des Büschels gleich ist dem (von y unabhängigen) Doppelverhältnisse der vier von y aus an die C_3 gehenden Tangenten (vgl. p. 578 und 715). *Dieses Doppelverhältniss gibt daher den einen Modul unserer elliptischen Curve;* dass letztere in der That auch *nur* einen Modul besitzt, erkennt man daraus, dass die C_3 auch gegenüber linearen Transformationen nur eine absolute Invariante hat (nämlich eben jenes Doppelverhältniss). Da nun das Doppelverhältniss der vier von y ausgehenden Tangenten unabhängig von der Lage des Punktes y auf der C_3 ist, so können wir auch folgenden Satz aussprechen:

In einem Büschel von adjungirten Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, von dessen Basispunkten $2n-3$ in einfachen Punkten der Grundcurve n^{ter} Ordnung (vom Geschlechte Eins) liegen, gibt es im Allgemeinen vier Curven, welche diese C_n in einem Punkte berühren, der mit keinem der $2n-3$ Basispunkte zusammenfällt, und das Doppelverhältniss der vier Tangenten dieser Curven in einem der Basispunkte ist unabhängig von der Lage dieser letzteren auf der C_n. Dasselbe gibt gleichzeitig den Modul der Curve.

Statt der Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung hätten wir aber auch irgend ein Netz von adjungirten Curven s^{ter} Ordnung zur Transformation benutzen können, welche die C_n in *drei* beweglichen Punkten treffen; und ein solches ist auch immer angebbar, wenn nur $s > n-3$. Man hat nämlich nur noch $n(s-n+3)-3$ feste Punkte auf der C_n beliebig anzunehmen*), dann ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte in der That gleich

$$ns - n(n-3) - n(s-n+3) + 3 = 3.$$

Hieraus folgt, dass *der zuletzt für Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung ausgesprochene Satz, ebenso für Büschel von adjungirten Curven s^{ter} Ordnung, von deren Basispunkten $n(s-n+3)-2$ in einfachen Punkten der*

*) Das Netz selbst ist dann im Allgemeinen noch nicht nothwendig völlig bestimmt, wohl aber die Schaar $g_3^{(2)}$ von Durchschnittspunkten, welche von den Curven desselben auf der C_n bestimmt werden.

*C_n liegen, gültig ist, wenn nur $s > n - 3$**); *und dies gilt auch insbesondere wieder für eine Grundcurve dritter Ordnung.* In der That hängt ja die Zahl der berührenden Curven eines Büschels nur von der Zahl der beweglichen Schnittpunkte und dem Geschlechte der Grundcurve ab, (p. 460), ist also von s nicht wesentlich abhängig.

Die Coordinaten der Punkte einer allgemeinen Curve vom Geschlechte Eins kann man nun in ganz ähnlicher Weise als Function eines Parameters darstellen, wie dies bei den Curven dritter Ordnung gelang (p. 627 und 647 ff.). Diese Darstellung ist von selbst gegeben, sobald die Transformation der vorliegenden C_n auf die C_3 und die Umkehrung derselben bekannt ist; man kann sie aber auch direct in folgender Weise herstellen.**) Wir betrachten einen Büschel $\varphi + \lambda\psi = 0$ von adjungirten Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche sämmtlich durch $2n-2$ beliebige Punkte der C_n hindurchgehen und also die C_n in zwei beweglichen Punkten treffen. Die Gleichung der letzteren in Liniencoordinaten u_i ergibt sich durch Elimination der x_i aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad f = 0, \quad \varphi + \lambda\psi = 0, \quad u_x = 0.$$

Von der Resultante wird sich ein Factor vom Grade $n(n-1) - 2$ in den u_i absondern, welcher λ nicht enthält; die erwähnte Gleichung, dargestellt durch Nullsetzen des übrig bleibenden Factors, wird daher von der Form:

$$(2) \quad 0 = w_{11}u_1^2 + w_{22}u_2^2 + w_{33}u_3^2 + 2w_{23}u_2u_3 + 2w_{31}u_3u_1 + 2w_{12}u_1u_2,$$

wo die w_{ik} Functionen n^{ten} Grades in λ sind. Da die rechte Seite sich in zwei lineare Factoren auflösen lässt, so verschwindet die Determinante der w_{ik}, d. h. es ist:

$$W = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte sollen nun bez. mit x_1, x_2, x_3 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet werden; es seien ferner l_1, l_2, l_3 die Coordinaten der Verbindungslinie von x und ξ. Dann kann man setzen:

$$(2) \qquad W_{ik} = -l_i l_k Q,$$

wenn W_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante W bedeuten; die Grössen l_i, l_k, Q hängen hier selbstverständlich von λ ab, und zwar

---

*) Vgl. auch Cayley: Proceedings of the London Mathematical Society, 16. Octb. 1865.

**) Für das Folgende, sowie auch für die weiterhin gegebenen Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen vgl. immer Clebsch a. a. O., Crelle's Journal, Bd. 64.

in sogleich noch zu bestimmender Weise. Für die Coordinaten x_i, ξ_i selbst findet man zufolge früherer Betrachtungen die Relationen*):

$$
(3)\qquad \begin{array}{lll}
x_1\xi_1 = w_{11} & x_2\xi_1 = w_{21} - l_3\sqrt{Q} & x_3\xi_1 = w_{31} + l_2\sqrt{Q} \\
x_1\xi_2 = w_{12} + l_3\sqrt{Q}, & x_2\xi_2 = w_{22} & x_3\xi_2 = w_{32} - l_1\sqrt{Q} \\
x_1\xi_3 = w_{13} - l_2\sqrt{Q} & x_2\xi_3 = w_{23} + l_1\sqrt{Q} & x_3\xi_3 = w_{33}\,.
\end{array}
$$

Hieraus erhält man aber unmittelbar die Verhältnisse der Grössen x und ξ. Durch Einführung willkürlicher Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, mit denen wir bez. diese Gleichungen multipliciren und dann addiren, erhalten wir für $\varrho = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3$ die Verhältnisse der x_i insbesondere in der Form:

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
\varrho x_1 &= w_{11}\gamma_1 + w_{12}\gamma_2 + w_{13}\gamma_3 + (\gamma_2 l_3 - \gamma_3 l_2)\sqrt{Q} \\
\varrho x_2 &= w_{21}\gamma_1 + w_{22}\gamma_2 + w_{23}\gamma_3 + (\gamma_3 l_1 - \gamma_1 l_3)\sqrt{Q} \\
\varrho x_3 &= w_{31}\gamma_1 + w_{32}\gamma_2 + w_{33}\gamma_3 + (\gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1)\sqrt{Q}\,.
\end{aligned}
$$

Lässt man hier das Vorzeichen von $\sqrt{Q}$ unbestimmt, so geben diese Gleichungen sowohl die x als die ξ, indem man der Wurzel nur einmal das positive, einmal das negative Zeichen beizulegen braucht.**)

Es kommt jetzt nur noch darauf an, den Grad der Function Q in dem Parameter λ anzugeben. Die Gleichung $Q = 0$ bestimmt offenbar diejenigen Curven des Büschels $\varphi + \lambda\psi = 0$, welche die Grundcurve berühren; andererseits wissen wir, dass es vier Curven dieser Art in dem Büschel gibt: Die Function Q ist also vom vierten Grade in λ; die Grössen l_i werden dann nach (2) in λ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade.***)

---

*) Vgl. die Gleichungen (9) auf p. 104; es ist daselbst α durch x, β durch ξ, $\varrho^2 = -\mu$ durch Q, ξ durch l zu ersetzen.

**) Die Ausdrücke (4) gestatten eine sehr einfache geometrische Deutung. Betrachtet man nämlich die γ_i als Coordinaten einer Geraden, so sind die Coëfficienten von $\sqrt{Q}$ die Coordinaten des (veränderlichen) Punktes, in dem die willkürlich (aber fest) gewählte Gerade γ von der Linie l (d. i. der Verbindungslinie der beiden beweglichen Punkte) getroffen wird. Die ersten Theile der rechten Seiten sind die Coordinaten des Poles von γ in Bezug auf jenes Punktepaar selbst, d. i. die Coordinaten des Punktes, welcher mit dem erwähnten Punkte und mit dem Paare, zu welchem x gehört, auf der Linie l ein harmonisches System bildet.

***) Für $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ können wir also die Gleichungen (4) in der Form schreiben:

$$
\varrho x_1 = a_\lambda{}^n + \alpha_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4}, \qquad \varrho x_2 = a'_\lambda{}^n + \alpha'_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4},
$$
$$
\varrho x_3 = a''_\lambda{}^n + \alpha''_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4}.
$$

Dann wird:

$$
\sqrt{q_\lambda{}^4}\left(\varrho\, dx_1 + x_1\, d\varrho\right) = n a_\lambda{}^{n-1} a_{d\lambda}\sqrt{q_\lambda{}^4} + (n-2)\,\alpha_\lambda{}^{n-3}\alpha_{d\lambda}\, q_\lambda{}^4 + 2\alpha_\lambda{}^{n-3} q_\lambda{}^3 q_{d\lambda},
$$

u. s. f.

Nach den Gleichungen (2) *ist also die Parameterdarstellung der Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins rational bis auf die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke Q der vierten Ordnung;* letzterer ist multiplicirt in rationale Functionen der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, die übrigen Theile der Ausdrücke x_i sind rationale Functionen n^{ter} Ordnung; die Grössen γ_i kommen in den Gleichungen (4) nur formell vor, wie aus den Gleichungen (3) hervorgeht.

Durch die Gleichungen (4) ist übrigens auch wieder die Abbildung der C_n auf eine C_3 von selbst gegeben, wie hier noch kurz erwähnt sein möge. Schreiben wir nämlich Q in der Form

$$Q=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)$$

und setzen:

$$(5)\quad y_1=(\lambda-a_1)(a_3-a_2),\quad y_2=(\lambda-a_2)(a_3-a_1),\quad y_1y_3=\frac{\sqrt{Q}}{m},$$

$$m^2=\frac{a_4-a_2}{(a_3-a_1)(a_1-a_2)^2(a_3-a_2)^2},$$

so lassen sich die w_{ik}, l_i als Functionen w_{ik}', l_i' in y_1, y_2 darstellen, welche in letzteren Grössen von demselben Grade sind wie die w_{ik}, l_i in λ, und $\sqrt{Q}$ wird bis auf eine Constante m gleich y_1y_3. Man findet daher die x_i in folgender Weise ausgedrückt:

$$(6)\qquad \varrho x_i=\gamma_1 w_{i1}'+\gamma_2 w_{i2}'+\gamma_3 w_{i3}'+m(\gamma l')_i y_1 y_3,$$

wo $(\gamma l')_1=\gamma_2 l_3'-\gamma_3 l_2'$, etc. Die x_i sind also als ganze Functionen n^{ter} Ordnung der y_i dargestellt, und zwischen letzteren besteht nach (5) die Identität:

$$(7)\qquad F(y)\equiv y_3^2y_1-y_2(y_1-y_2)(y_1-k^2y_2)=0,$$

wo
$$k^2=\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}\cdot\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}:$$

Somit findet man für die Coordinaten u_i der Tangente des Punktes x:

$$\begin{aligned}\sigma u_3&=\tau(x_1dx_2-x_2dx_1)\\&=2nq_\lambda^4\left\{(a\alpha')a_\lambda^{n-1}\alpha_\lambda'^{n-3}+(\alpha a')\alpha_\lambda^{n-3}a_\lambda'^{n-1}\right\}\\&+2q_\lambda^3\left\{a_\lambda'^n(\alpha q)a_\lambda^{n-3}-a_\lambda^n(\alpha' q)\alpha_\lambda'^{n-3}\right\}\\&+\sqrt{q_\lambda^4}\left\{n(aa')a_\lambda^{n-1}a_\lambda'^{n-1}+(n-2)q_\lambda^4(\alpha\alpha')\alpha_\lambda^{n-3}\alpha_\lambda'^{n-3}\right\},\end{aligned}$$

u. s. w.

Dadurch ist auch *die Parameterdarstellung der C_n, aufgefasst als Tangentengebilde,* gegeben. Dass die letzten Gleichungen in der That eine Curve $2n^{ter}$ Klasse darstellen, wie es sein soll, erkennt man auf analogem Wege, wie im Texte sogleich gezeigt werden wird, dass die durch (4) dargestellte Curve nur von der n^{ten} Ordnung ist, indem die Ordnungen der rechts stehenden Ausdrücke noch reducirt werden können.

in der That *die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, deren Doppelverhältniss (Modul) gleich k^2 ist.* Die Gleichungen (6) geben also die Umkehrung der Formeln $\varrho y_i = \Phi_i(x)$, durch welche dieselbe Transformation hergestellt wird, wenn $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ drei zu der gegebenen C_n adjungirte Curven aus einem Netze mit drei beweglichen Schnittpunkten sind. Man kann übrigens auch aus den Gleichungen (6) wieder umgekehrt die y_i als Function der x_i berechnen; denn es ist $\lambda = -\frac{\varphi}{\psi}$ eine rationale Function der x_i, wodurch y_1, y_2 sofort dargestellt sind, und y_3 kommt in den Gleichungen (6) nur linear vor.

Geht man andererseits von der Curve (7) aus, die durch die Formeln (6) in eine C_n transformirt werden soll, so müssen durch die Gleichungen, welche entstehen, wenn man die rechten Seiten der Ausdrücke (6) gleich Null setzt, drei Curven n^{ter} Ordnung dargestellt werden, und die Curven des durch sie bestimmten Netzes müssen die C_3 noch in n beweglichen Schnittpunkten treffen; d. h. *es muss auf der C_3 (7) $2n$ feste Punkte geben, durch welche alle Curven des so entstehenden Netzes n^{ter} Ordnung hindurchgehen.* Diese $2n$ Punkte kann man nun auch leicht direct aus den Formeln (6) bestimmen. Betrachten wir die durch irgend eine lineare Verbindung der rechten Theile von (6) dargestellte Curve, bilden also mittelst der drei willkürlichen Grössen β_1, β_2, β_3 die Gleichung:

$$\Sigma\Sigma\gamma_i\beta_k w_{ik}' + m y_1 y_3 (\gamma l' \beta) = 0. \tag{8}$$

Diese Curve enthält ebenfalls jene $2n$ constanten Schnittpunkte. Aber in der Nähe von $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ geht (8) in den Büschel von $n-1$ Geraden

$$y_1 \cdot (\gamma\beta l') = 0$$

über. Die Curve (8) hat also im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ einen $(n-1)$-fachen Punkt, dessen eine Tangente ($y_1 = 0$) die Curve (7) berührt. *Daher fallen in diesen Punkt n Schnittpunkte der beiden Curven* (7) *und* (8). Ferner folgt aus (8):

$$(\Sigma\Sigma\gamma_i\beta_i w_{ik}')^2 = m^2 y_1^2 y_3^2 (\gamma\beta l')^2, \tag{9}$$

wo nun y_3^2 mit Hülfe von (7) eliminirt werden kann. Aber dann wird nach (2) und (5)

$$m^2 y_1^2 y_3^2 l_i' l_k' = Q l_i' l_k' = -W_{ik}', \tag{10}$$

wenn mit W_{ik}' die aus den w_{ik}' zu bildenden Unterdeterminanten bezeichnet werden; und die rechte Seite von (9) geht daher über in die Determinante

$$-\begin{vmatrix} W_{11}' & W_{12}' & W_{13}' & \gamma_1 & \beta_1 \\ W_{21}' & W_{22}' & W_{23}' & \gamma_2 & \beta_2 \\ W_{31}' & W_{32}' & W_{33}' & \gamma_3 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\beta_k)^2 - (\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k)(\Sigma\Sigma w_{ik}'\beta_i\beta_k).$$

Die Gleichung (9) zerfällt daher in die beiden Gleichungen:

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0, \quad \Sigma\Sigma w_{ik}'\beta_i\beta_k = 0.$$

Nur die zweite von den letzteren ist von den speciellen Constanten β der Curve (8) abhängig; die erste liefert also n constante Verhältnisse $y_1 : y_2$, und jedem solchen Verhältnisse entspricht aus (8) ein Werth von y_3, welcher gleichfalls von den β unabhängig ist, *so dass man aus der Gleichung:*

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0 \tag{11}$$

in Verbindung mit (8) *die n weiteren constanten Schnittpunkte findet.* Was nämlich den Werth von y_3 betrifft, so ist, wenn wirklich der aus (8) gefundene Werth von den β_i unabhängig sein soll, nothwendig:

$$m y_1 y_3 = \frac{w_{11}'\gamma_1 + w_{12}'\gamma_2 + w_{13}'\gamma_3}{\gamma_3 l_2' - \gamma_2 l_3'} = \frac{w_{21}'\gamma_1 + w_{22}'\gamma_2 + w_{23}'\gamma_3}{\gamma_1 l_3' - \gamma_3 l_1'} = \frac{w_{31}'\gamma_1 + w_{32}'\gamma_2 + w_{33}'\gamma_3}{\gamma_2 l_1' - \gamma_1 l_2'}.$$

Setzt man aber diese Quotienten paarweise einander gleich, so hat man die drei Bedingungen:

$$\gamma_r \Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i l_k' - l_r'\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0 \quad (r = 1, 2, 3),$$

welche sich wegen (11) auf die eine Bedingung

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i l_k' = 0$$

reduciren. Letztere aber geht, mit $m^2 y_1^2 y_3^2 l_h'$ multiplicirt, wegen (10) über in:

$$\sum_i \sum_k w_{ik}'\gamma_i W_{kh}' \equiv W' . \gamma_h = 0;$$

und diese Bedingung ist in der That erfüllt, da die Determinante W' der Grössen w_{ik}' verschwindet. —

Durch die Gleichungen (6) ist nun auch die Einführung der elliptischen Functionen sofort gegeben. Mittelst derselben werden nämlich die Punkte der Curve (7) nach Früherem dargestellt durch die Gleichungen (p. 604):

$$\varrho y_1 = \sin^3 \operatorname{am} u, \quad \varrho y_2 = \sin \operatorname{am} u, \quad \varrho y_3 = \cos \operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u,$$

Dividirt man also in (6) auf beiden Seiten mit $\sin^n \operatorname{am} u$, so erhält man Formeln von der Gestalt:

(12) $\sigma x_i = F_i^{(n)}(\sin^2 \operatorname{am} u) + F_i^{(n-2)}(\sin^2 \operatorname{am} u) \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du},$

wo der Grad der Functionen F_i in ihrem Argumente durch den oberen Index angezeigt ist; diesen Grad können wir indess, wie sich weiterhin ergeben wird, noch mehr erniedrigen.

In die Gleichungen (12) kann man (analog wie auf p. 629) die Function $\mathrm{H}(u)$ statt sin am u einführen, um sodann sofort wieder auf das Abel'sche Theorem geführt zu werden. Jeder der in (12) rechts stehenden Ausdrücke verschwindet nämlich für $2n$ Werthe des Arguments u. Bezeichnen wir diese Werthe bez. mit

$$\begin{array}{l} \alpha_1', \ \alpha_2', \ \ldots \alpha_n', \ \alpha_{n+1}', \ \ldots \alpha_{2n}' \\ \alpha_1'', \ \alpha_2'', \ \ldots \alpha_n'', \ \alpha_{n+1}'', \ \ldots \alpha_{2n}'' \\ \alpha_1''', \ \alpha_2''', \ \ldots \alpha_n''', \ \alpha_{n+1}''', \ \ldots \alpha_{2n}''', \end{array}$$

so wird nach den schon bei den C_3 benutzten Satze*), wenn wir für $\sigma \Theta^{2n}(u)$ wieder σ schreiben und unter den C_i Constante verstehen:

(13) $\sigma x_i = C_i \mathrm{H}(u - \alpha_1^{(i)}) \cdot \mathrm{H}(u - \alpha_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha_{2n}^{(i)}).$

Die Linie $x_i = 0$ schneidet aber die C_n nur in n Punkten; es müssen daher n von den $2n$ Verschwindungswerthen des Arguments u, welche rechts auftreten, für uns unbrauchbar sein, indem sie den drei Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gleichmässig zukommen. Dies bestätigt sich in der That direct aus den Gleichungen (4). Bestimmt man nämlich den Schnitt einer beliebigen Geraden $\beta_x = 0$ mit der C_n, so muss dies durch eine Gleichung n^{ten} Grades für den Parameter λ geschehen. Setzt man jedoch in $\beta_x = 0$ die Werthe der x_i aus (4) ein, so kommt:

$$\Sigma \Sigma w_{ik} \beta_i \gamma_k + \sqrt{Q}\,(\beta \gamma l) = 0)$$

und dies ist wegen (5) wieder die Gleichung (8), von welcher wir bereits nachgewiesen haben, dass sie n von den β_i völlig unabhängige Wurzeln besitzt, nämlich die Wurzeln der Gleichung (11). Wir können also setzen:

$$\alpha'_{n+1} = \alpha''_{n+1} = \alpha'''_{n+1}, \ \alpha'_{n+2} = \alpha''_{n+2} = \alpha'''_{n+2}, \ldots \alpha'_{2n} = \alpha''_{2n} = \alpha'''_{2n};$$

und wenn wir dann den in allen drei Gleichungen (13) auftretenden Factor

$$\mathrm{H}(u - \alpha'_{n+1}) \cdot \mathrm{H}(u - \alpha'_{n+2}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha'_{2n})$$

in den Proportionalitätsfactor σ eingehen lassen, so wird:

(14) $\sigma x_i = C_i \mathrm{H}(u - \alpha_1^{(i)}) \cdot \mathrm{H}(u - \alpha_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha_n^{(i)}).$

*) Dieser Hermite'sche Satz ist im Grunde für $p = 1$ identisch mit dem auf p. 831 erwähnten allgemeinen Satze über die Darstellbarkeit algebraischer Functionen durch Quotienten von Θ-Functionen.

Für die mn Argumente $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{mn}$ der Schnittpunkte unserer C_n mit einer Curve m^{ter} Ordnung wird jetzt nach dem bekannten Hermite'schen Satze (p. 629 f.), wie wohl nicht noch einmal ausgeführt zu werden braucht:

$$(15) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_{mn} \equiv m\vartheta,$$

wenn $\vartheta = -\alpha'_{n+1} - \alpha'_{n+2} \ldots - \alpha'_{2n}$, und dies ist wieder nichts anderes, als das Abel'sche Theorem, denn der Parameter u ist eben gleich dem *einen* zu der C_n gehörigen endlichen Integrale (p. 603):

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{für} \quad z = \sin \operatorname{am} u.$$

Auf Anwendungen des Abel'schen Theorems zur Bestimmung von Berührungscurven (p. 838) soll für diesen besonderen Fall ($p = 1$) hier nicht noch einmal eingegangen werden. Es sei nur daran erinnert, dass auch hier das *erweiterte Umkehrproblem* zur Anwendung kommen muss (p. 866), sobald man Curven betrachtet, welche nicht durch sämmtliche Doppelpunkte der Grundcurve C_n hindurchgehen.*) —

Wie bei den Curven vom Geschlechte Null (p. 889) kann man nun auch hier wieder umgekehrt fragen, ob durch Gleichungen der Form (4) oder (14) *immer* eine Curve vom Geschlechte Eins dargestellt wird, und wie sich, wenn dies der Fall ist, die Singularitäten dieser Curve bestimmen. Dass erstere Frage im Allgemeinen zu bejahen ist**), bedarf kaum der Erörterung; was die andere Frage angeht, so sollen hier noch die Doppelpunkte der C_n aus der Parameterdarstellung bestimmt werden, wodurch dann übrigens auch erstere Frage mit erledigt ist. Es könnte dies zunächst, indem man die Gleichungen (6) in Verbindung mit (7) zu Grunde legt, in der Weise geschehen, wie es in der allgemeinen Theorie der eindeutigen Transformationen gelehrt wurde (also mittelst der Curve $M = 0$, vgl. p. 644); es soll jedoch hier unsere Aufgabe sein, diese Bestimmung unter alleiniger Benutzung der in den Gleichungen (4) eingeführten binären Veränderlichen zu leisten.

---

*) Vgl. in Betreff des Näheren Clebsch a. a. O. Man findet daselbst genauer die Curven 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten als Beispiel behandelt, insbesondere auch die Bestimmung ihrer Doppeltangenten. — Rein algebraisch sind diese Curven (doch in wesentlich anderer Richtung) von Casey, Chasles, Quetelet, Cayley, Hart untersucht; vgl. darüber Salmon's Higher plane curves. Besonders sind die metrischen Eigenschaften von Curven 4ter Ordnung studirt, deren beide Doppelpunkte in den Kreispunkten liegen.

**) Ausnahmen könnten z. B. bei zerfallenden Curven vorkommen.

Zu dieser Untersuchung sind jedoch letztere Gleichungen selbst nicht ohne Weiteres brauchbar. Wir haben nämlich gesehen, dass die in ihnen rechts stehenden Ausdrücke gleichzeitig verschwinden, sobald die Bedingung $\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0$ erfüllt ist; und zwar muss dies dadurch geschehen, dass alle drei Ausdrücke den Factor $\sqrt{\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k}$ enthalten, denn das Quadrat des letzteren trat als Factor der durch Quadriren aus (8) entstandenen Gleichung (9) auf. Um nun die rechten Seiten von (4) durch eine irrationale Substitution in eine möglichst einfache Gestalt zu bringen, knüpft man am besten wieder an die Darstellung durch elliptische Functionen, d. i. an die Gleichungen (12) und (14) an. In ihnen führen wir an Stelle von u einen neuen Parameter*)

$$(16) \qquad v = u - \frac{\vartheta}{n}$$

ein und an Stelle der α die constanten Werthe:

$$\beta_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} - \frac{\vartheta}{n},$$

so dass man die Gleichungen (14) in der Form schreiben kann:

$$(17) \qquad \varrho x_i = C_i \mathrm{H}(v - \beta_1^{(i)}) \,.\, \mathrm{H}(v - \beta_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(v - \beta_n^{(i)}).$$

wo nun:

$$\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} + \ldots + \beta_n^{(i)} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wegen der letzteren Relation kann man jetzt nach der Umkehrung des mehrfach benutzten Hermite'schen Satzes den Gleichungen (17), wenn n gerade ist, die Form geben:

$$(18) \quad \varrho x_i = C_i \left\{F_i^{\left(\frac{n}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, F_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu)\right\},$$

wo $\mu = \sin^2 \mathrm{am}\, v$, und wo die oberen Indices der F_i wieder die Ordnungen dieser Functionen anzeigen, dagegen, wenn n ungerade ist**):

$$(19) \quad \varrho x_i = C_i \left\{F_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu)\sqrt{\mu} + \sqrt{(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, F_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu)\right\},$$

oder wenn wir auf den rechten Seiten mit $\sqrt{\mu}$ multipliciren:

$$(19^*) \quad \varrho x_i = C_i \left\{F_i^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \,.\, F_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu)\right\}.$$

---

*) Analog wie bei den C_3 auf p. 630.

**) Die Modification jenes Satzes für diesen Fall kann man aus dem vorigen dadurch ableiten, dass man etwa $\beta_n^{(i)} = 0$ nimmt, dann muss sich links ein Factor $\sqrt{\mu} = \sin \mathrm{am}\, v$ absondern; und es bleiben die hier angegebenen Ausdrücke. Das in (19*) gewonnene Resultat stimmt mit dem für die Curven 3ter Ordnung auf p. 647 gewonnenen überein, denn für sie ist $\frac{1}{2}(n+1) = 2$, $\frac{1}{2}(n-3) = 0$.

In die Gleichungen (4) hatten wir die elliptischen Functionen eingeführt mittelst der Substitution:

$$(20)\qquad \frac{\lambda - a_1}{\lambda - a_2}\cdot\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \equiv \lambda' = \sin^2 \mathrm{am}\, u\,.$$

Die jetzt in (18) und (19) auftretende Variable μ dagegen hat die Bedeutung:

$$(21)\quad \sqrt{\mu} = \sin \mathrm{am}\left(u - \frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{\sqrt{\lambda'(1-\varepsilon)(1-k^2\varepsilon)} - \sqrt{\varepsilon(1-\lambda')(1-k^2\lambda')}}{1 - k^2\varepsilon\lambda'},$$

wo λ' durch (20) definirt ist, und ε durch:

$$(22)\qquad \sqrt{\varepsilon} = \sin \mathrm{am}\, \frac{\vartheta}{n},$$

Wir sind also von den Gleichungen (4) *zu den reducirten Gleichungen* (18) *und* (19) *mittelst einer irrationalen Substitution* (21) *übergegangen*, welche die Entfernung der überflüssigen Factoren ermöglichte. Denken wir uns schliesslich statt μ wieder einen neuen Parameter z eingeführt, so dass $\mu = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$, so können wir die gewonnenen Resultate in folgender Form aussprechen:

Die Coordinaten eines Punktes einer Curve $2m^{ter}$ Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ lassen sich immer in der Form darstellen:

$$\varrho x_i = f_i^{(m)}(z) \pm \varphi_i^{(m-2)}(z)\sqrt{R^{(3)}(z)}$$

und diejenigen eines Punktes einer Curve $(2m+1)^{ter}$ Ordnung in der Form:

$$\varrho x_i = f_i^{(m)}(z)\sqrt{P^{(1)}(z)} \pm \varphi_i^{(m-1)}(z)\sqrt{Q^{(3)}(z)}\,.$$

Beide Darstellungen können wir für eine Curve n^{ter} Ordnung in der einen Formel zusammenfassen*):

$$(23)\qquad \varrho x_i = f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} \pm \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N}\,,$$

wenn wir festsetzen, dass $k \gtreqless \frac{1}{2}n$, $h \leqq \frac{1}{2}n$ und immer $h + k = n - 2$, dass ferner M von der Ordnung $n - 2k$, N von der Ordnung $n - 2h$ sei (so dass das Product MN immer von der 4ten Ordnung ist). Die Gleichungen (23) stellen dann in der That immer eine C_n dar, denn für die Schnittpunkte mit einer Geraden $\beta_x = 0$ findet man die Gleichung n^{ten} Grades in z:

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3)^2 M - (\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \beta_3\varphi_3)^2 N = 0\,.$$

Die Doppelpunkte der Curve (23) bestimmen sich nun dadurch, dass

*) Dies Resultat hätte man auch ohne Vermittelung der H-Functionen directer finden können (vgl. den folgenden Abschnitt); mit Hülfe der elliptischen Functionen konnten wir indess auch in (21) *die Substitution wirklich angeben*, welche die verlangte Umformung leistet.

sich für zwei verschiedene Werthe z, z' einander proportionale Werthe der x_i ergeben. Dann müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(24)\qquad f_i\sqrt{M}+\varphi_i\sqrt{N}=\sigma\,(f_i'\sqrt{M'}+\varphi_i'\sqrt{N'}),$$

wo auf der rechten Seite die oberen Striche auf das Argument z' hinweisen sollen. Die dreigliedrigen Determinanten, welche man aus dem Schema

$$\begin{matrix} f_1 & \varphi_1 & f_1' & \varphi_1' \\ f_2 & \varphi_2 & f_2' & \varphi_2' \\ f_3 & \varphi_3 & f_3' & \varphi_3' \end{matrix}$$

durch Weglassen je einer Verticalreihe bilden kann, dividirt durch $z-z'$, bezeichnen wir bez. mit

$$F,\quad \Phi,\quad F',\quad \Phi';$$

so dass diese Functionen in z bez. von den Ordnungen sind:

$$h-1,\quad k-1,\quad h+k-1,\quad h+k-1$$

und in z' bez. von den Ordnungen:

$$h+k-1,\quad h+k-1,\quad h-1,\quad k-1.$$

Dann folgt aus (24)

$$\sqrt{M}:\sqrt{N}:\sigma\sqrt{M'}:\sigma\sqrt{N'}=F:\Phi:F':\Phi',$$

oder:

$$(25)\qquad \begin{aligned} F^2N-\Phi^2M &\equiv \Omega(z,z')=0, \\ F'^2N'-\Phi'^2M' &\equiv \Omega(z',z)=0. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind für das erste Argument vom Grade $n-2$, für das zweite vom Grade $2n-6$, und beide unterscheiden sich nur durch Vertauschung von z mit z'. Eliminirt man also z' aus ihnen, so ist das Resultat durch $\Omega(z,z)$ theilbar, und also der nach Absonderung dieses Factors übrig bleibende Ausdruck vom Grade

$$(n-2)^2+(2n-6)^2-3n-8=(n-3)(5n-16).$$

Aber auch die so erhaltene Gleichung besitzt noch einen überflüssigen Factor; denn die Gleichungen (25) bedingen rückwärts die Gleichungen (24) nur dann, wenn nicht F, Φ, F', Φ' gleichzeitig verschwinden. Letzteres kann aber in der That eintreten. Von den Gleichungen:

$$(26)\qquad F=0,\quad \Phi=0,\quad F'=0,\quad \Phi'=0$$

ist nämlich die dritte und vierte immer eine Folge der beiden ersten. Denn da zufolge der Entstehung dieser Ausdrücke immer identisch:

$$Ff_i+\Phi\varphi_i+F'f_i'+\Phi_i'\varphi_i'=0,$$

so finden für $F=0$, $\Phi=0$ immer die drei Gleichungen statt:

$$F'f_i' + \Phi'\varphi_i' = 0,$$

aus denen im Allgemeinen immer $F' = 0$, $\Phi' = 0$ folgt (d. h. wenn nicht gleichzeitig etwa $f_1' = 0$, $\varphi_1' = 0$ und $f_2'\varphi_3' - f_3\varphi_2' = 0$). Nun sind nach dem Obigen die Ordnungen von F und Φ in z gleich $h - 1$ und $k - 1$, in z' gleich $h + k - 1$. Die Zahl der den Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsamen Werthepaare z, z' ist also gleich

$$(h + k - 1)(h + k - 2) = (n - 3)(n - 4).$$

Es ist aber jede der Gleichungen (25) in Folge von (26) quadratisch erfüllt; betrachten wir dieselben daher als Gleichungen zweier Curven in den Coordinaten z, z', so sind die jenen $(n - 3)(n - 4)$ Werthepaaren z, z' zugehörigen Punkte der Ebene Doppelpunkte beider Curven; und folglich fallen in diese Punkte $4(n - 3)(n - 4)$ Schnittpunkte derselben. Von der durch Elimination von z' aus (25) entstehenden Gleichung muss sich daher ein Factor vom Grade $4(n - 3) . (n - 4)$ absondern lassen; der Rest bleibt dann vom Grade

$$(n - 3)(5n - 16) - 4(n - 3)(n - 4) = n(n - 3).$$

Dies stimmt mit der Existenz von $\frac{1}{2}n(n - 3)$ Doppelpunkten überein, da jedem Doppelpunkte *zwei* Argumente, also zwei Wurzeln dieser Gleichung zukommen. Die letztere hat zugleich die Eigenschaft, dass aus (25) immer eine Wurzel z' eine rationale Function einer bestimmten Wurzel z wird und z dieselbe rationale Function von z'. Man löst also jene Gleichung $n(n - 3)^{\text{ten}}$ Grades mit Hülfe einer Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}n(n - 3)$ und $\frac{1}{2}n(n - 3)$ quadratischer Gleichungen.

XIV. Die Curven vom Geschlechte $p = 2$.

Wir wollen endlich noch *die Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte* $p = 2$ näher studiren. Schon aus unseren früheren allgemeinen Untersuchungen ging hervor, dass diese Curven immer zu den hyperelliptischen gehören (vgl. p. 717, Anmk.), d. h. dass man einen Büschel von adjungirten C_{n-3} angeben kann, welcher sie nur in zwei beweglichen Punkten trifft (auf der C_n eine $g_2^{(1)}$ ausschneidet); und daraus folgte dann weiter, dass *jede Curve vom Geschlechte $p = 2$ in eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte übergeführt werden kann*, und zwar immer in die Form (p. 720):

$$x_2^2\varphi_2(x_1, x_3) - \psi_4(x_1, x_3) = 0. \tag{1}$$

Dass hier ein solcher Büschel von C_{n-3} existirt, ist in der That evident; denn, da $p - 1 = 1$ und $2p - 2 = 2$, gibt es eben nur *eine einfach* unendliche Schaar von je *zwei* Punkten, die durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann.

Diesen Büschel von C_{n-3} wird man nun, ganz wie den Büschel von C_{n-1} bei den Curven vom Geschlechte $p = 1$, zur Durchführung der Parameterdarstellung unserer C_n benutzen können. Dies Verfahren ist jedoch ebenso bei hyperelliptischen Curven höheren Geschlechtes anwendbar; wir wollen daher im Folgenden die Parameterdarstellung sogleich für beliebige hyperelliptische Curven durchführen. Eine solche war ja dadurch definirt, dass auf ihr eine Schaar $g_2^{(1)}$ existirt; es gibt also jedenfalls einen Büschel

$$(2) \qquad \chi_1 + \lambda \chi_2 = 0$$

von C_{n-3}, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet. Durch Elimination der x_i aus (1), (2) und aus den Gleichungen $u_x = 0$ erhält man wieder mit Uebergehung der von λ unabhängigen Factoren*) das Product der Gleichungen der beiden beweglichen Schnittpunkte in der Form:

$$(3) \qquad \Sigma \Sigma w_{ik} u_i u_k = 0 .$$

wo die w_{ik} ganze Functionen n^{ter} Ordnung in λ sind, deren Determinante verschwindet. Man hat daher auch, wie im Falle $p = 1$, für die Coordinaten der beweglichen Schnittpunkte als Functionen von λ die Ausdrücke (p. 906):

$$(4) \qquad \varrho x_i = w_{i1} \gamma_1 + w_{i2} \gamma_2 + w_{i3} \gamma_3 + (\gamma l)_i \sqrt{Q} ,$$

wo wieder die γ_i willkürliche Grössen sind, und Q, l_1, l_2, l_3 rationale Functionen von λ, so dass

$$(5) \qquad l_i l_k Q = - W_{ik} .$$

Aber der Grad der Function Q in λ ist jetzt ein anderer als im Falle $p = 1$. Er ist nämlich offenbar wieder gleich der Zahl der im Büschel (2) enthaltenen berührenden Curven, d. h. (nach p. 460) gleich**)

$$2(2 + p - 1) = 2p + 2 .$$

Wegen (5) werden dann die l_i vom Grade $n - p - 1$ in λ, denn die W_{ik} sind ja vom Grade $2n$.

Setzt man also:

$$(6) \qquad Q = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \ldots (\lambda - a_{2p+2}) ,$$

und sodann:

---

*) Es liegen nämlich noch $2p - 4$ Basispunkte des Büschels (1) in festen einfachen Punkten der C_n. — Für $p = 2$ sind unter Benutzung eines Büschels von C_{n-1} analoge Betrachtungen wie im Texte bei Cl. u. G. A. F. p. 77 gegeben; vgl. dazu einige Correctionen von Clebsch: Math. Annalen, Bd. 1, p. 170. — Für beliebige hyperelliptische Curven vgl. auch die auf p. 720 erwähnte Note von Cremona.

**) Man bestätigt dies wieder direct durch Untersuchung der Functionaldeterminante von f, χ_1, χ_2, welche ja die Berührungspunkte auf $f = 0$ bestimmt.

$$(7)\quad \begin{cases} y_1 = (\lambda - a_1)(a_3 - a_2), \quad y_2 = (\lambda - a_2)(a_3 - a_1) \\ y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \ldots (y_1 - k^2_{p-2} y_2) = \frac{\sqrt{Q}}{m}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung:

$$(8)\qquad k_r^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \cdot \frac{a_{r+3} - a_1}{a_{r+3} - a_2} \qquad (r = 1, 2, \ldots 2p - 1),$$

$$(9)\qquad m^2 = \frac{(a_4 - a_2)(a_5 - a_2) \ldots (a_{2p+2} - a_2)}{(a_1 - a_2)^{2p} (a_3 - a_2)^{2p} (a_3 - a_1)},$$

so kann man die Functionen w_{ik}, l_i als homogene Functionen w_{ik}' n^{ter} und l_i' $(n - p - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y_1, y_2 darstellen und *erhält so für die x die in den y rationalen Ausdrücke:*

$$(10)\quad \varrho x_i = \gamma_1 w_{i1}' + \gamma_2 w_{i2}' + \gamma_3 w_{i3}' + m(\gamma l')_i y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2) \ldots (y_1 - k^2_{p-2} y_2).$$

Ferner ergeben sich aus (7) und (8) die Relationen:

$$(11)\quad \begin{aligned} y_1 - y_2 &= (a_1 - a_2)(\lambda - a_3) \\ y_1 - k_r^2 y_2 &= \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}{a_{r+3} - a_2} (\lambda - a_{r+3}), \end{aligned}$$

so dass wegen (6):

$$(12)\quad Q = m^2 \cdot y_1 y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{2p-1}^2 y_2).$$

Zwischen den y selbst besteht demnach wegen (7) *die Gleichung:*

$$(13)\quad y_3^2 y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{p-2} y_2) = (y_1 - y_2)(y_1 - k^2_{p-1} y_2) \ldots (y_1 - k^2_{2p-1} y_2).$$

Durch die Substitution (11) *ist also unsere C_n wirklich auf die früher angegebene und näher charakterisirte Normalform gebracht* (vgl. p. 720).

Denkt man sich wieder umgekehrt die Gleichung (13) gegeben und die dadurch dargestellte C_{p+2} mittelst der Formeln (10) in eine C_n, $f(x) = 0$, transformirt, so müssen den durch das Verschwinden der in (10) rechts stehenden Ausdrücke dargestellten drei Curven n^{ter} Ordnung sämmtliche Schnittpunkte mit der Curve (13) bis auf n gemeinsam sein; d. h. wenn β_1, β_2, β_3 homogene Parameter sind, so dürfen die Curven des Netzes:

$$(14)\quad \Sigma\Sigma w_{ik}' \gamma_i \beta_k + m(\beta\gamma l') y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2) \ldots (y_1 - k^2_{p-2} y_2) = 0$$

die in (13) gegebene Curve $(p + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung nur in n beweglichen Punkten treffen. Letzteres bestätigt man ebenso wie im Falle $p = 1$. In der Nähe des Punktes $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ nämlich kann man die Curve (14) ersetzen durch das System von $(n - 1)$ Geraden:

$$(\beta\gamma l') y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_1) \ldots (y_1 - k_{p-2}^2 y_2) = 0,$$

von denen p unabhängig von den β_i und gleichzeitig Tangenten der C_{p+2} in deren p-fachem Punkte sind. In letzterem haben also alle

Curven des Netzes (14) einen $(n-1)$-fachen Punkt; es fallen in ihm daher

$$(n-1)p+p=np$$

Schnittpunkte jeder dieser C_n mit der C_{p+2}. Man weist ferner (analog wie auf p. 909) leicht nach, dass weitere $n(p+2)$ feste Punkte jenes Netzes durch die Gleichung:

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k=0$$

auf der C_{p+2} gegeben sind. Dann ist aber die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der letzteren und der Curven des Netzes in der That gleich

$$n(p+2)-np-n=n.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (10) können noch in der Weise reducirt werden, dass in ihnen keine gemeinsamen Verschwindungspunkte auftreten; und zwar in folgender Weise. Der Quotient $\frac{x_1}{x_3}$ ist eine algebraische Function von $y_1:y_2$ und $y_3:y_2$, deren Irrationalität nur durch die Gleichung (13) bedingt wird, und welche in n Punkten unendlich klein, in n anderen Punkten unendlich gross von der n^{ten} Ordnung wird, in allen anderen Punkten der Curve (13) dagegen endlich bleibt. Von den n Verschwindungspunkten der Function $\frac{x_1}{x_3}$ sind dabei nach den Sätzen über Schnittpunktsysteme (oder nach dem Abel'schen Theoreme) p durch die übrigen $n-p$ bestimmt; und Gleiches gilt von den n Unendlichkeitspunkten jener Function; in der That stellen ja $x_1=0$, $x_2=0$ zufolge unserer letzten Betrachtungen Curven dar, die jedenfalls zu der Grundcurve C_{p+2} adjungirt sind, und deren Ordnung grösser als $p-1$ vorausgesetzt wurde (denn bei hyperelliptischen Curven mit $p>2$ konnte ja ein Netz von adjungirten C_{n-3} nicht zur Transformation benutzt werden, vgl. p. 687).

Ist nun erstens n gerade: $n=2m$, so können wir eine Function von genau denselben Eigenschaften auch in der Form

$$\frac{f_1^{(m)}(y_1,y_2)+\varphi_1^{(m-p-1)}(y_1,y_2)\sqrt{Y}}{f_2^{(m)}(y_1,y_2)+\varphi_2^{(m-p-1)}(y_1,y_2)\sqrt{Y}}$$

darstellen, wenn die f_i, φ_i homogene Function von y_1, y_2 der Ordnung m bez. $m-p-1$ bedeuten, und wenn:

$$(15)\qquad Y=y_1y_2(y_1-y_2)(y_1-k_1^2y_2)\ldots(y_1-k_{2p-1}^2y_2).$$

Der Zähler des angegebenen Quotienten nämlich verschwindet in der That in $2m=n$ Punkten, bestimmt durch die Gleichung:

$$[f_1^{(m)}(y_1,y_2)]^2-[\varphi_1^{(m-p-1)}(y_1,y_2)]^2\,Y=0,$$

und derselbe enthält $2m-p$ willkürliche Constanten, so dass man

$2m - p$ dieser Verschwindungspunkte mit $2m - p$ Verschwindungspunkten von x_1 zusammenfallen lassen kann*); nach den Schnittpunktsätzen müssen dann auch die übrigen p übereinstimmen, denn die durch Verschwinden des Zählers obiger Function dargestellte Curve (wenn man vermöge (7) y_3 statt $\sqrt{Y}$ einführt) ist ja zu der Grundcurve adjungirt. Analoges gilt für den Nenner; man kann daher, wenn C eine Constante bedeutet, setzen:

$$\frac{x_1}{x_3} = C \frac{f_1^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_1^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_3^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}$$

und ebenso, unter C' eine zweite Constante verstanden:

$$\frac{x_2}{x_3} = C' \frac{f_2^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_2^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_3^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}.$$

Damit ist die erwähnte Reduction der Parameterdarstellung geleistet.

Ist zweitens n ungerade: $n = 2m + 1$, so beweist man auf analoge Art die Richtigkeit folgender Gleichungen ($i = 1, 2$):

$$\frac{x_i}{x_3} = C^{(i)} \cdot \frac{f_i^{(m)}(y_1, y_2)\sqrt{y_1} + \varphi_i^{(m-p)}(y_1, y_2)\sqrt{Y'}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2)\sqrt{y_1} + \varphi_3^{(m-p)}(y_1, y_2)\sqrt{Y'}}.$$

wo: $\quad Y' = y_2(y_1 - y_2)(y_1 - k_1^2 y_2) \ldots (y_1 - k^2_{2p-1} y_2).$

Die so gewonnen Resultate lassen sich noch in mannigfach anderer Weise aussprechen je nachdem, wie man die verschiedenen Factoren von Q auf die beiden Wurzelzeichen vertheilt. Allgemein können wir sie daher in folgendem Satze zusammenfassen:

Die Coordinaten der Punkte einer hyperelliptischen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p lassen sich als Functionen eines Parameters z darstellen in der Form:

$$\varrho x_i = f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} + \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N}, \tag{16}$$

wo immer: $k \leq \frac{1}{2}n$, $h \gtrless \frac{1}{2}n$, $h + k = n - p - 1$, *und wo M von der Ordnung $n - 2k$, N von der Ordnung $n - 2h$ in z sein muss.*

Die Gleichungen (16) kann man zunächst wieder benutzen, um die Doppelpunkte der C_n zu bestimmen. Die Zahl der letzteren ist

*) Schreibt man kurz y für $y_1 : y_2$ und $f(y)$, $\varphi(y)$ statt $f(y_1, y_2)$, $\varphi(y_1, y_2)$, indem man gleichzeitig die Indices an f_1 und φ_1 fortlässt, und bezeichnet diese $n - p$ Punkte durch $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-p}$, so kann man den Zähler in der Form darstellen ($\nu = 2m - p$):

$$f(y) + \varphi(y)\sqrt{Y} = \begin{vmatrix} y^{m-p-1}\sqrt{Y}, & y^{m-p-2}\sqrt{Y}, & \ldots \sqrt{Y}, & y^m, & y^{m-1}, & \ldots y, & 1 \\ y_1^{m-p-1}\sqrt{Y_1}, & y_1^{m-p-2}\sqrt{Y_1}, & \ldots \sqrt{Y_1}, & y_1^m, & y_1^{m-1}, & \ldots y_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_\nu^{m-p-1}\sqrt{Y_\nu}, & y_\nu^{m-p-2}\sqrt{Y_\nu}, & \ldots \sqrt{Y_\nu}, & y_\nu^m, & y_\nu^{m-1}, & \ldots y_\nu, & 1 \end{vmatrix}.$$

gleich der Zahl der Werthepaare z, z', welche den Gleichungen genügen:

$$f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} + \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N} = \sigma\left\{f_i^{(k)}(z')\sqrt{M'} + \varphi_i^{(h)}(z')\sqrt{N'}\right\}.$$

Bildet man hier, wie auf p. 914, die Functionen F, Φ, F', Φ' und mit Hülfe derselben die Gleichungen:

$$F^2 N - \Phi^2 M \equiv \Omega(z, z') = 0,$$
$$F'^2 N' - \Phi'^2 M' \equiv \Omega(z', z) = 0,$$

so sind letztere für das erste Argument vom Grade $n - 2$, für das zweite Argument vom Grade $2n - 2p - 4$; und durch Elimination von z' ergibt sich (nach Absonderung eines Factors $\Omega(z, z)$ von dem Resultate) eine Gleichung vom Grade

$$(n-2)^2 + 4(n-p-2)^2 - (3n - 2p - 6).$$

Von den Lösungen der letzteren sind noch je vierfach zählend die den Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ zugleich genügenden Werthepaare z, z' abzuziehen, deren Zahl gleich

$$(h + k - 1)(h + k - 2) = (n - p - 2)(n - p - 3)$$

gefunden wird. Es bleibt daher, wie es sein muss, *eine Gleichung vom Grade*

$$(n-2)^2 + 4(n-p-2)^2 - (3n-2p-6) - 4(n-p-2)(n-p-3)$$
$$= (n-1)(n-2) - 2p,$$

von deren Wurzeln je zwei zu einem Doppelpunkte gehören.

Dass unsere früheren Erörterungen über das Abel'sche Theorem, über das Jacobi'sche und das erweiterte Umkehrproblem*) und über Berührungscurven hier ebenso gültig bleiben, daran braucht wohl nur kurz erinnert zu werden. Hervorgehoben mag indess werden, dass für die Normalform (13) der hyperelliptischen Curven, jede adjungirte C_{n-3} (d. i. hier C_{p-1}) in $p - 1$ Gerade durch den p-fachen Punkt zerfällt. —

Schliesslich wollen wir noch kurz auf *das Problem der Dreitheilung im Falle* $p = 2$ hinweisen, welches ausführlich in rein algebraischer Weise behandelt worden ist und so zu interessanten Fragen aus der Theorie der binären Formen geführt hat. Die Gleichung der Grundcurve (C_4) sei:

*) In Betreff der hyperelliptischen Integrale vgl. das auf p. 777 Gesagte, und für das Abel'sche Theorem den auf p. 815 erwähnten Aufsatz von Abel. Ueber die Lösung des Umkehrproblems vgl. die auf p. 765 genannten Arbeiten von Weierstrass, Neumann und Prym; für $p = 2$ insbesondere den auf p. 803 genannten Aufsatz von Rosenhain. Das erweiterte Umkehrproblem für $p = 2$ ist oben (p. 866 ff.) behandelt; vgl. auch den dort erwähnten Aufsatz von Brill.

(17) $$z^2\varphi - \psi = 0,$$

wo φ, ψ homogene Functionen bez. 2ter und 3ter Ordnung in x, y sind. Wir bezeichnen durch s und t die beiden Normalintegrale erster Gattung; die oberen Grenzen deuten wir durch hinzugefügte obere Indices an; die untere Grenze wählen wir constant, so dass, wenn σ, τ gegebene Grössen sind, das Jacobi'sche Umkehrproblem in folgenden Gleichungen auftritt:

$$s + s' = \sigma, \quad t + t' = \tau.$$

Es sei nun v eine noch unbestimmte homogene Function dritter Ordnung in x, y; die Gleichung

(18) $$z\varphi - v = 0$$

stellt dann eine Curve dritter Ordnung dar, welche ebenfalls in $x = 0$, $y = 0$ einen Doppelpunkt hat, und zwar berühren dessen Zweige die Zweige der Curve (17). Von den zwölf Schnittpunkten beider Curven fallen daher sechs in den Doppelpunkt; die übrigen erhält man aus der Gleichung 6ten Grades:

(19) $$v^2 - \varphi\psi = 0 \quad \text{oder} \quad v^2 - f = 0, \quad \text{wenn} \quad f \equiv \varphi \,.\, \psi.$$

welche aus (17) und (18) hervorgeht. Insbesondere wollen wir aber solche Functionen v suchen, dass die zugehörigen Curven (18) die C_4 in zwei verschiedenen Punkten je zweipunktig berühren (dreipunktig schneiden). Für diese muss die Gleichung (19) zweimal drei gleiche Wurzeln haben, es muss also identisch

(20) $$v^2 - f = u^3$$

werden, wenn u eine quadratische Form bezeichnet; oder — was dasselbe ist — *die gegebene Form sechster Ordnung f ($= \varphi\psi$) muss in die Form $f = v^2 - u^3$ gebracht werden können.**) Jeder Art, die Function f in dieser Form darzustellen, entspricht eine der gesuchten Berührungscurven, oder vielmehr deren zwei, welche durch die Gleichungen

$$z\varphi - v = 0 \quad \text{und} \quad z\varphi + v = 0$$

gegeben sind.

In transcendenter Form wird dasselbe Problem dargestellt durch die Gleichungen:

$$3\,(s^{(1)} + s^{(2)}) = c, \quad 3\,(t^{(1)} + t^{(2)}) = \gamma,$$

wo c und γ Constanten bedeuten, welche unabhängig von den Con-

*) Dies Transformationsproblem wurde zuerst von Cayley behandelt: Quaterly Journal, Bd. 9. Vollständig und im Zusammenhange mit der Dreitheilungsaufgabe erledigt findet man dasselbe bei Clebsch: Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 14, 1869; vgl. die Noten dazu von Brioschi: Annali di matematica Serie 2, t. VII.

stanten der Function v sind. Aber die Gleichung (18) wird offenbar auch in der hier verlangten Weise befriedigt durch eine uneigentliche Curve dritter Ordnung, welche aus einer dreifach zählenden, durch den Doppelpunkt gehenden Geraden besteht. Mag irgend eine Linie dieser Art die gegebene Curve in zwei Punkten schneiden, denen die Integrale $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ entsprechen; man hat dann auch:

$$3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c, \quad 3(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma;$$

oder endlich, wenn P, Q Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bezeichnen:

$$\begin{aligned} s^{(1)} + s^{(2)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \tfrac{1}{3}P, \\ t^{(1)} + t^{(2)} &= \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \tfrac{1}{3}Q, \end{aligned} \tag{21}$$

was die Gleichungen des Problems der speciellen Dreitheilung sind (vgl. p. 840). Für $P = 0$, $Q = 0$ hat man wieder die eben angedeutete uneigentliche und zugleich unbestimmte Lösung. Es bleiben noch $3^4 - 1 = 80$ *eigentliche Lösungen übrig, welche den verschiedenen Arten entsprechen, die Function f auf die Form $v^2 - u^3$ zu bringen.*

Aber von diesen 80 Lösungen stehen immer zwei in solcher Beziehung zu einander, dass wenn die eine auf v führt, die andere $-v$ ergibt. In der That, betrachten wir zwei Lösungen, für welche die Perioden P, Q einander entgegengesetzt sind (sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden), bezeichnen wir die der einen zugehörigen Integrale durch die Indices 1, 2, die der andern durch 3, 4, so ist nach (21):

$$\begin{aligned} s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + s^{(4)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} &= 3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c \\ t^{(1)} + t^{(2)} + t^{(3)} + t^{(4)} + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} &= 3(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma. \end{aligned}$$

Die Berührungspunkte der beiden benutzten Berührungscurven liegen also mit den Punkten, in welche eine durch den Doppelpunkt gezogene Gerade schneidet, in einer Curve dritter Ordnung der Schaar (18). Aber letztere wird von der beliebig durch den Doppelpunkt gelegten Geraden in vier Punkten geschnitten, besteht also aus ihr und einem Kegelschnitte; dieser endlich muss die C_4 im Doppelpunkte noch in vier Punkten schneiden, also in ihm selbst einen Doppelpunkt besitzen, d. i. in zwei Gerade zerfallen. Daher liegen die Berührungspunkte der einen Berührungscurve mit denen der andern auf zwei durch den Doppelpunkt gehenden Geraden, und zwar so, dass jede der Geraden einen Berührungspunkt von jeder der beiden Curven dritter Ordnung enthält, denn andernfalls müssten auch Gleichungen der Form bestehen:

$$\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = c', \quad \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = \gamma'.$$

Die Gleichung $v^2 - f = 0$ muss also für beide Curven dieselben Wurzeln liefern, d. h. die entsprechenden beiden Functionen v können sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.*) Zwei solche Lösungen führen also auf dieselbe Transformation von f; und man hat nur 40 wesentlich verschiedene Lösungen. Die letzteren zeigen nun weiter eine sehr merkwürdige Gruppirung zu einander, wie sich einerseits aus der Theorie der binären Formen, andererseits aber auch aus der Theorie der Theilungsgleichungen für $p = 2$ ergibt.**) Es ist hier jedoch nicht der Ort, noch näher auf diese Untersuchungen einzugehen. Wir begnügen uns, nochmals auf den innigen Zusammenhang rein algebraischer Fragen mit denjenigen Problemen hinzuweisen, welche aus dem Umkehr- und dem Theilungsprobleme der Abel'schen Integrale entspringen, ein Zusammenhang, den wir für $p = 1$ schon bei Betrachtung der Punktsysteme auf einer Curve dritter Ordnung wiederholt hervorgehoben und erläutert haben (vgl. besonders p. 648 ff.).

*) Dies folgt übrigens auch schon aus dem völlig symmetrischen Verhalten der Grundcurve gegen die Linie $z = 0$.

**) Vgl. Camille Jordan: Comptes rendus, April 1869.

Siebente Abtheilung.

Die Connexe.

I. Ternäre algebraische Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen. — Aequivalente Systeme.

Als Gegenstand unserer Untersuchung, als Grundgebilde, betrachteten wir bisher meist eine einzelne Curve, sei es, dass wir dieselbe als Punkt- oder als Linien-Gebilde auffassten, oder — algebraisch zu reden — als *Grundform* nahmen wir eine einzelne ternäre Form an, deren Verschwinden eben jene Curve darstellte; und das Studium der Invarianten, Covarianten und Zwischenformen dieser Grundform erwies sich als wesentlich identisch mit dem Studium der projectivischen Eigenschaften jener Grundcurve und der aus ihr abgeleiteten Gebilde. Die Algebra an sich jedoch muss sich die Aufgabe stellen, auch alle Grundformen zu untersuchen, welche mehrere Reihen von Veränderlichen, sowohl Punktcoordinaten x_i, y_i, ... als Liniencoordinaten u_i, v_i, ... enthalten, wie ersteres z. B. schon bei den Polaren einer Curve der Fall ist; eine Forderung, welche ihrer Allgemeinheit wegen der Geometrie zunächst ferner liegen würde. Da ist es aber sehr wichtig, dass *das Studium dieser ganz allgemeinen Bildungen immer zurückgeführt werden kann auf das Studium eines simultanen Systems von Formen, deren jede nur eine Reihe von Punkt- oder nur eine Reihe von Linien- oder je eine Reihe von Punkt- und Linien-Coordinaten enthält* (vgl. auch p. 269). Mit der Curve (als Punkt- oder Tangentengebilde) algebraisch in diesem Sinne gleichberechtigt tritt hier also das durch Nullsetzen einer beliebigen Zwischenform*) dargestellte Gebilde auf, welches man als *Connex* bezeichnet, und dessen nähere Betrachtung nun auch von der Geometrie gefordert werden muss, wie ja überhaupt Algebra und Geometrie bestimmt sind, sich in beständiger Wechselwirkung gegenseitig anzuregen und zu fördern. Ehe wir jedoch auf die Connexe weiter eingehen, mögen die angedeuteten

*) Bisher hatten wir dagegen Zwischenformen nur insofern berücksichtigt, als dieselben unter den Functionalinvarianten einer Form mit einer Reihe von Veränderlichen auftreten.

algebraischen Theorien hier mit einigen Worten erörtert und an Beispielen erläutert werden, ohne dass es dabei in der Absicht liegen kann, Vollständigkeit zu erreichen.

Zwei Systeme von algebraischen Formen wollen wir *äquivalent* nennen, wenn sämmtliche Functionalinvarianten des einen unter denen des andern vorhanden sind, und umgekehrt, wenn also die Gesammtheit der zu bildenden Functionalinvarianten für beide Systeme identisch ist; und dies wird immer und nur dann eintreten, wenn alle Formen des einen Systems simultane Covarianten der Formen des andern Systems sind, und umgekehrt. Für ein gegebenes System wird man daher auf sehr mannigfache Weise äquivalente Systeme finden können; man wird aber je nach den für die Untersuchung als massgebend gewählten Gesichtspunkten besonders passende Systeme auswählen. Für unseren Zweck ist besonders ein solches System von Wichtigkeit, welches wir als *„das reducirte äquivalente System"* der vorliegenden Formen bezeichnen wollen, und welches eben dadurch ausgezeichnet ist, dass jede Form desselben nur eine Reihe von Coordinaten gleicher Art enthält, wenn auch in der Grundform mehrere Reihen derselben Art vorkommen sollten. Hervorgehoben sei dabei sogleich, dass jede Form, welche aus einer gegebenen Form Π durch den invarianten Process:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3,$$

d. i. durch Polarenbildung, abgeleitet wird, als Covariante der Form Π zu betrachten ist, wie dies in der That auch immer mit den Polaren einer Grundcurve geschah. Das äquivalente System also einer Form mit z. B. zwei Reihen von Veränderlichen (x_i, y_i), welche Polare irgend einer Ordnung einer Form mit nur einer Reihe von Punktcoordinaten ist, besteht einfach aus dieser letzteren Form selbst. Die vorliegende Fragestellung wird daher erst von Interesse bei Formen, die symbolisch in der Gestalt*):

$$(1) \qquad f = a_x^m b_y^n$$

darstellbar sind, ohne doch aus der Form $a_x^m b_x^n$ durch Polarenbildung zu entstehen. Der einfachste Fall ist hier der, wo $m = n = 1$; dann stellt die Gleichung $a_x b_y = 0$ die allgemeinste dualistische Verwandtschaft dar, indem (für $\alpha_{ik} = a_i b_k$) jedem Punkte y eine Gerade mit den Coordinaten:

$$\varrho v_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \alpha_{i3} y_3$$

zugeordnet wird. Nur für den Fall $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist diese Verwandtschaft identisch mit der durch den Kegelschnitt $\Sigma \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = 0$, d. i. $a_x b_x = 0$,

*) Diese Symbolik wurde schon gelegentlich auf p. 446 ff. benutzt.

begründeten Polarreciprocität; nur in diesem Falle also ist $a_x b_y$ die Polare der Form $a_x b_x$.*)

Wir wollen uns im Folgenden auf das eben angeführte Beispiel beschränken, d. h. auf den Fall, dass *zwei Reihen von Punktcoordinaten* in einer Grundform (1) auftreten. Es wird dies hinreichen, um an ihm das Wesentliche der betreffenden Untersuchungen zu erläutern.**) In diesem Falle behaupten wir, dass *für $m > n$ das System der Formen:*

$$(2)\quad \varphi_0 = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1}(abu), \ldots \varphi_n = (abu)^n a_x^{m-n}$$

mit der Form $f = a_x^m b_y^n$ in angegebenem Sinne äquivalent sei. Die Form f ist dann also durch eine Reihe von Formen ersetzt, die insofern einen einfacheren Charakter zeigen, als nur eine unter ihnen von demselben Gesammtgrade wie f ist, dabei aber nur eine Reihe von Punktcoordinaten enthält, die anderen Formen dagegen sämmtlich von niedrigerem Gesammtgrade sind, wenn man unter Gesammtgrad die Summe der Grade in den x und u versteht, also hier bez. die Zahlen:

$$m + n - 1, \quad m + n - 2, \ldots m.$$

Wir haben nun zu zeigen, dass die φ_i Functionalinvarianten von f sind, und dass umgekehrt f eine simultane Covariante der φ_i ist. Ersteres aber ist schon aus dem symbolischen Bildungsgesetze der φ_i deutlich; überdies sei erwähnt, dass die φ_i aus f durch wiederholte Anwendung eines invarianten Processes entstehen (p. 269). Es entsteht nämlich φ_0 einfach aus f, indem man $x = y$ setzt, und in derselben Weise entstehen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus den folgenden Bildungen:

$$mn\varphi_1' = mn\, a_x^{m-1} b_y^{n-1}(abu)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}\right)u_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}\right)u_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_3$$

$$(m-1)(n-1)\varphi_2' = (m-1)(n-1)\, a_x^{m-2} b_y^{n-2}(abu)^2$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_3 \partial y_2}\right)u_1 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_1 \partial y_3}\right)u_2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_2 \partial y_1}\right)u_3$$

u. s. f. Man hat dann also:

$$\varphi_0 = (f)_{x=y}, \quad \varphi_1 = (\varphi_1')_{x=y}, \quad \varphi_2 = (\varphi_2')_{x=y}, \ldots$$

*) Auf die bilinearen Formen $a_x b_y$ werden wir im Folgenden nicht zurückkommen. Es sei daher hier bemerkt, dass dieselben unter den verschiedensten Gesichtspunkten näher untersucht sind. Für die algebraische Theorie vgl. besonders die Aufsätze von Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1874.

**) Allgemein ist das Problem für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen und mit beliebig vielen Reihen von solchen behandelt von Clebsch in der auf p. 269 erwähnten Abhandlung, welche den Ausführungen des Textes zu Grunde liegt. Eine Inhaltsübersicht über dieselbe findet man auch in Math. Annalen, Bd. 5, p. 427.

Es bleibt uns jetzt nur noch zu beweisen, dass auch f eine simultane Functionalinvariante der φ_i ist. Dies geschieht, indem wir f direct als Aggregat von Formen darstellen, welche aus den Formen φ_i durch einen invarianten Process entstehen. In letzteren nämlich setzen wir zunächst:

$$u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad u_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

d. h. wir bilden aus ihnen die Formen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\psi_0 = a_x^m b_x^n, \qquad \psi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (a_x b_y - a_y b_x), \\ &\psi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (a_x b_y - b_x a_y)^2, \ldots \psi_n = a_x^{m-n} (a_x b_y - b_x a_y)^n. \end{aligned}$$

Ferner bezeichnen wir mit D den invarianten Polarenprocess:

$$\begin{aligned} D\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3 \equiv \Pi' \\ D^2\Pi &= \frac{\partial \Pi'}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_3} y_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dann sind offenbar alle Formen $D^k \psi_i$ Functionalinvarianten der Formen φ_i, und wir behaupten, dass *sich immer die Form* $f = a_x^m b_y^n$ *in der Gestalt darstellen lasse:*

$$(4) \qquad f = \alpha_0 D^n \psi_0 + \alpha_1 D^{n-1} \psi_1 + \alpha_2 D^{n-2} \psi_2 + \ldots + \alpha_n \psi_n,$$

wo die α_i rein numerische, eindeutig bestimmte Zahlenfactoren bedeuten.

Für die Bestimmung der Coëfficienten α_i ergeben sich in der That durch Vergleichung beider Seiten von (4) nur *lineare* Gleichungen, und zwar gerade in der erforderlichen Anzahl. Sei z. B. $m = 3$, $n = 2$, also:

$$f = a_x^3 b_y^2,$$

und ferner zur Abkürzung:

$$f' = a_x^2 a_y b_x b_y, \qquad f'' = a_x a_y^2 b_x^2,$$

so wird:

$$(5) \qquad \begin{aligned} D^2\psi_0 &= 2f + 12f' + 6f'' \\ D\psi_1 &= f + f' - 2f'' \\ \psi_2 &= f - 2f' + f''. \end{aligned}$$

Die Gleichung (4) geht daher über in:

$$f = (2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f + (12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2) f' + (6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2) f'';$$

und also hat man für die α_i die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ 12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösung:

(6) $$\alpha_0 = \tfrac{1}{20}, \quad \alpha_1 = \tfrac{2}{5}, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2},$$

so dass:

$$f = \tfrac{1}{20} D^2\psi_0 + \tfrac{2}{5} D\psi_1 + \tfrac{1}{2}\psi_2 .$$

In gleicher Weise sind im allgemeinen Falle die Glieder der rechten Seite lineare Functionen der $n+1$ Formen:

$$f = a_x{}^m b_y{}^n, \quad f' = a_x{}^{m-1} b_y{}^{n-1} a_y b_x, \ldots f^{(n)} = a_x{}^{m-n} b_x{}^n a_y{}^n,$$

so dass aus (4):

$$f = \beta_0 f + \beta_1 f' + \beta_2 f'' + \ldots + \beta_n f^{(n)},$$

wo nun die β_i lineare Combinationen der α_i sind, und für letztere die Gleichungen bestehen müssen:

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \ldots \beta_n = 0.$$

Wir haben nur noch zu zeigen, dass diese letzteren Gleichungen immer ein *bestimmtes* Werthsystem der α_i ergeben. Nun muss die für f identische Gleichung (4) identisch erfüllt bleiben, wenn man setzt:

$$y_i = x_i + \lambda z_i,$$

und zwar unabhängig von λ; d. h. es müssen dann die Coëfficienten gleicher Potenzen von λ auf beiden Seiten von (4) einander gleich sein. Durch diese Substitution geht aber

ψ_1 über in $\lambda\,(a_x b_z - a_z b_x)\, a_x{}^{m-1} b_x{}^{n-1}$ und

allgemein ψ_i „ „ $\lambda^i (a_x b_z - a_z b_x)^i a_x{}^{m-i} b_x{}^{n-i}$.

Setzen wir also in der so resultirenden Gleichung $\lambda = 0$, so erhalten wir eine Gleichung, in der nur α_0 vorkommt, wodurch diese Zahl vollkommen bestimmt ist. In dem Coëfficienten von λ auf der rechten Seite kommen neben Gliedern, die aus $D^n\psi_0$ entstehen, nur solche vor, welche von $D^{n-1}\psi_1$ herrühren; in ihm kommt also nur α_0 und α_1 vor, wodurch auch α_1 bestimmt ist, u. s. f. In dem Coëfficienten von λ^ν endlich kommt neben den jetzt schon bekannten Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{\nu-1}$ nur noch α_ν vor. Es sind also wirklich alle α_i successive zu berechnen, *wodurch das Bestehen der Gleichung* (4) *erwiesen ist.**)

Führen wir diese Rechnung noch an unserm Beispiele, d. i. für die Form $f = a_x{}^3 b_y{}^2$, durch. Bedienen wir uns der Abkürzungen:

$$f_{00} = a_x{}^3 b_x{}^2, \quad f_{01} = a_x{}^3 b_x b_z, \quad f_{10} = a_x{}^2 a_z b_x{}^2, \quad f_{11} = a_x{}^2 a_z b_x b_z, \text{ etc.,}$$

---

*) Die wirkliche Bestimmung der Zahlen α geschieht im Allgemeinen, indem man von den entsprechenden Reihenentwicklungen für binäre Formen ausgeht, wie dieselben von Gordan (Math. Annalen, Bd. 3) und Clebsch (Theorie der binären Formen §. 8) aufgestellt sind. Vgl. Clebsch a. a. O. und Gordan: Math. Annalen, Bd. 5, p. 100.

wo also die Indices anzeigen sollen, wie viele symbolische Factoren a_x, b_x durch Factoren a_z, b_z zu ersetzen sind, so erhalten wir durch die Substitution $y = x + \lambda z$:

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 (b_x + \lambda b_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{01} \lambda &&+ f_{02} \lambda^2 \\ f' &= a_x^2 b_x (a_x + \lambda a_z)(b_x + \lambda b_z) &&= f_{00} + (f_{01} + f_{10}) \lambda &&+ f_{11} \lambda^2 \\ f'' &= a_x b_x^2 (a_x + \lambda a_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{10} \lambda &&+ f_{20} \lambda^2 . \end{aligned}$$

Es wird ferner auf der linken Seite von (4):

$$f = f_{00} \quad + 2 \lambda f_{01} \qquad + \lambda^2 f_{02}$$

und wegen (5) auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} D^2 \psi_0 &= 20 f_{00} + \lambda (16 f_{01} + 24 f_{10}) + \lambda^2 (2 f_{02} + 12 f_{11} + 6 f_{20}) \\ D \psi_1 &= \lambda (3 f_{01} - 3 f_{10}) + \lambda^2 (f_{02} + f_{11} - 2 f_{20}) \\ \psi_2 &= \lambda^2 (f_{02} - 2 f_{11} + f_{20}) . \end{aligned}$$

Es ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 20 \alpha_0 \\ 2 f_{01} &= (16 \alpha_0 + 3 \alpha_1) f_{01} + (24 \alpha_0 - 3 \alpha_1) f_{10} \\ f_{02} &= (2 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f_{02} + (12 \alpha_0 + \alpha_1 - 2 \alpha_2) f_{11} + (6 \alpha_0 - 2 \alpha_1 + \alpha_2) f_{20} ; \end{aligned}$$

und also für die α_i:

$$1 = 20 \alpha_0 , \qquad 2 = 16 \alpha_0 + 3 \alpha_1 , \qquad 1 = 2 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

woraus man wieder die Werthe (6) findet.

Aus dem Gesagten wird man leicht übersehen, wie man beim Auftreten von mehreren Reihen Punktcoordinaten oder beim gleichzeitigen Auftreten von Liniencoordinaten in der Grundform f zu verfahren hat. Es soll auch dies nur an einem Beispiele erläutert werden: *Wir suchen das reducirte äquivalente System der Form:*

$$f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2 , \tag{7}$$

welche zwei Reihen Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält. Wir verfahren zunächst wie bei der Form (1), indem wir nur die x und y berücksichtigen; an Stelle der Formen (2) treten dann, wenn wir v für den dort gebrauchten Buchstaben u schreiben, die folgenden:

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2 , \qquad \varphi_1 = a_x b_x (a b v) u_\alpha^2 , \qquad \varphi_2 = (a b v)^2 u_\alpha^2 . \tag{8}$$

Von diesen Formen gehört die erste schon dem reducirten Systeme von f an. Die letzte enthält zwei Reihen Liniencoordinaten (u und v) und ist daher in derselben Weise weiter zu behandeln, wie die Form (1), nur dualistisch entsprechend. Die Form φ_2 ist also äquivalent mit dem Systeme folgender Formen:

$$\varphi_{20} = (a b u)^2 u_\alpha^2 , \qquad \varphi_{21} = \tfrac{1}{2} (\Omega_x \varphi_2)_{u=v} , \qquad \varphi_{22} = \tfrac{1}{2} (\Omega_x^2 \varphi_2)_{u=v} ,$$

wenn mit Ω_x der invariante Process:

$$(9)\quad \Omega_x \Pi = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial u_2\partial v_3} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_3\partial v_2}\right)x_1 + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial u_3\partial v_1} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_1\partial v_3}\right)x_2 + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial u_1\partial v_2} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_2\partial v_1}\right)x_3$$

bezeichnet wird. Nun ist aber:

$$\tfrac{1}{2}\,\Omega_x\varphi_2 = (abv)\,u_\alpha\,(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\,, \qquad \tfrac{1}{4}\,\Omega_x{}^2\varphi_2 = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2$$

Das reducirte äquivalente System der Form φ_2 besteht daher aus den Bildungen:

$$(10)\quad \varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha{}^2, \quad \varphi_{21} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)(abu)u_\alpha, \quad \varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2.$$

Es bleibt jetzt noch die Form φ_1 zu behandeln. Dieselbe betrachten wir zunächst als nur von u und v abhängig, wenden also auf sie wieder den durch (9) definirten Process Ω_x an, indem wir nur auf der rechten Seite von (9) y_i statt x_i schreiben. Dann wird φ_1 zunächst äquivalent mit:

$$(11)\quad \varphi_{10} = (abu)\,a_x b_x u_\alpha{}^2 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\,\Omega_y\varphi_1 = (a_y b_\alpha - a_\alpha b_y)\,a_x b_x u_\alpha\,.$$

Letztere Form enthält noch zwei Reihen Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten; ihr reducirtes äquivalentes System ist daher wieder wie für die Form (7) zu bilden. Lassen wir also die u unberücksichtigt, so erhalten wir die Formen:

$$(12)\quad \varphi_{11} = (a_x b_\alpha - a_\alpha b_x)\,a_x b_x u_\alpha\,, \quad \varphi_{12} = -\,\Omega_v{}'\,(\tfrac{1}{2}\,\Omega_y\varphi_1)\,,$$

wenn $\Omega_v{}'$ den zu Ω_x dualistischen Process bedeutet, d. h. durch (9) definirt ist, wenn man auf der rechten Seite x statt u, y statt v und v statt x schreibt. Es ist also:

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= -\,\{b_\alpha u_\alpha\,\Omega_v{}'\,(a_y a_x b_x) - a_\alpha u_\alpha\,\Omega_v{}'\,(b_y a_x b_x)\}\\ &= -\,\{b_\alpha u_\alpha\,(bav)\,a_x - a_\alpha u_\alpha\,(abv)\,b_x\} = (abv)\,(a_x b_\alpha + a_\alpha b_x)\,u_\alpha\,.\end{aligned}$$

Die Formen φ_{11}, φ_{12} stehen dann zu $\Omega_y\varphi_1$ in derselben Beziehung wie die Formen (8) zu (7). Es enthält aber die Form φ_{12} wieder zwei Reihen Liniencoordinaten; sie ist daher äquivalent mit den Formen:

$$(13)\quad \varphi_{12}{}' = (abu)\,u_\alpha\,(a_x b_\alpha + a_\alpha b_x) \quad \text{und} \quad \Omega_y\varphi_{12}\,,$$

wo nun:

$$(14)\quad \Omega_y\varphi_{12} = (a_y b_\alpha - b_y a_\alpha)\,(a_x b_\alpha + a_\alpha b_x)\,.$$

Diese Form aber enthält wieder zwei Reihen Punktcoordinaten, ist also äquivalent mit den Formen:

$$(15)\quad \varphi_{12}{}'' = (a_x{}^2 b_\alpha{}^2 - a_\alpha{}^2 b_x{}^2)\,, \quad \varphi_{12}{}''' = -\,\tfrac{1}{2}\,\Omega_u{}'\,(\Omega_y\varphi_{12}) = (abu)\,a_\alpha b_\alpha\,.$$

Das reducirte äquivalente System der Form (7) würde daher zunächst durch die neun Formen φ_0, φ_{10}, φ_{11}, $\varphi_{12}{}'$, $\varphi_{12}{}''$, $\varphi_{12}{}'''$, φ_{20}, φ_{21}, φ_{22} gegeben sein, welche bez. in den Gleichungen (8), (11), (12), (13),

(15), (10) definirt sind. Aber *von diesen Formen sind noch zwei überflüssig*, insofern dieselben durch einen invarianten Process aus den übrigen sechs Formen entstehen. Dies liegt daran, dass die Form $\varphi_1 = (abv)\, a_x b_x u_\alpha^2$ der Differentialgleichung*)

$$(16) \qquad \delta\varphi_1 \equiv \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1 \partial v_1} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2 \partial v_2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_3 \partial v_3} = 0$$

identisch genügt, wie man leicht verificirt, und dass *das reducirte äquivalente System einer Form dieser Art überhaupt immer eine geringere Zahl von Bildungen umfasst, als das einer der Differentialgleichung* (16) *nicht genügenden Form.*

Letztere Behauptung ist in der That leicht allgemein zu erweisen; es soll dies jedoch hier nur für vorliegendes Beispiel geschehen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\varphi_1 = (abv)\, a_x b_x u_\alpha^2 = r_x^2 u_\sigma^2 v_\tau ,$$

so wird:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\varphi_1 = r_\tau u_\sigma^2 r_x .$$

Der Umstand also, dass φ_1 der Gleichung (16) genügt, kann dadurch ausgesprochen werden, dass alle mit dem symbolischen Factor r_τ behafteten, aus φ_1 ableitbaren, invarianten Bildungen identisch verschwinden. Für das reducirte äquivalente System von φ_1 würden wir dann bei dieser Bezeichnungsweise zunächst die Formen haben:

$$\varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau , \quad \varphi_{11} = (\sigma\tau x)\, r_x^2 u_\sigma , \quad \varphi_{12}' = 2\,(u_\tau r_\sigma - r_\tau u_\sigma)\, r_x u_\sigma ,$$
$$\varphi_{12}'' = 2\,(\sigma\tau x)\, r_x r_\sigma , \quad \varphi_{12}''' = (u_\tau r_\sigma - u_\sigma r_\tau)\, r_\sigma .$$

Da wir aber die Glieder, welche den symbolischen Factor r_τ enthalten, auslassen dürfen, so wird:

$$\varphi_{12}' \equiv 2\, u_\tau r_\sigma r_x u_\sigma = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi_{10}}{\partial x_3 \partial u_3}\right\}$$
$$\varphi_{12}''' \equiv u_\tau r_\sigma^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varphi_{12}'}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi_{12}'}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi_{12}'}{\partial x_3 \partial u_3}\right\}.$$

Unabhängig von der Identität $\delta\varphi_1 = 0$ ist überdies

$$\varphi_{12}'' \equiv 2\,(\sigma\tau x)\, r_x r_\sigma = \delta\varphi_{11} .$$

Hierdurch sind aber die Formen φ_{12}', φ_{12}''', φ_{11}'' als Functionalinvarianten bez. der Formen φ_{10}, φ_{11} charakterisirt und daher in dem mit φ_1 äquivalenten Systeme auszulassen. Das letztere besteht also aus den zwei Formen:

$$(17) \qquad \varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau , \quad \varphi_{11} = (\sigma\tau x)\, r_x^2 u_\sigma .$$

Ebenso gilt allgemein der Satz, dass *das reducirte äquivalente System einer Form φ mit zwei Reihen gleichartiger (cogredienter) Coordi-*

*) Dass der Process $\delta\varphi$ in der That invariant ist, erkennt man sofort an der symbolischen Darstellung des durch ihn erhaltenen Resultats; vgl. auch p. 548.

naten und mit einer Reihe zu ihnen ungleichartiger (contragredienter) Coordinaten, welche der Gleichung (16), *d. i.* $\delta\varphi = 0$, *genügt, gebildet wird, indem man nur in Bezug auf die beiden gleichartigen Reihen reducirt und in dem so entstandenen Systeme die vorkommenden gleichartigen Reihen (der contragredienten Variabeln) einander gleich setzt.* In der That entsteht ja φ_{11} direct aus der Form $\frac{1}{2}\Omega_y \varphi_1$, wenn man in letzterer $x = y$ setzt.

Das reducirte äquivalente System der Form (7), $f = a_x^2 b_y^2 u_a^2$, *besteht also schliesslich aus den sechs Formen:*

$$(18) \begin{cases} a_x^2 b_x^2 u_a^2, \quad (abu)^2 u_a^{2*}, \quad (abu)(a_x b_a - b_x a_a) u_a^*, \\ (a_x b_a - b_x a_a)^{2*}, \quad (abu) a_x b_x u_a^2, \quad (a_x b_a - b_x a_a) a_x b_x u_a, \end{cases}$$

von denen die mit einem Sterne bezeichneten Formen dadurch ausgezeichnet sind, dass sie der Differentialgleichung (16) *genügen.*

Man kann aber die Reduction, welche in der Einführung des reducirten Systems liegt, noch einen Schritt weiter führen. Es ist nämlich möglich, jede Form des reducirten Systems auf eine Anzahl weiterer Formen zurückzuführen, von denen jede die Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3} = 0$$

befriedigt.*) Es folgt daraus dann, dass man sich in der Theorie der ternären algebraischen Formen (insofern es auf Aufstellung vollständiger Systeme ankommt) auf die Untersuchung solcher Formen beschränken darf, welche aus jeder Klasse von Veränderlichen nur eine Reihe enthalten und *ausserdem der Gleichung* (16) *genügen.* Ein System der letzteren Art wollen wir ein *eigentlich reducirtes* nennen. Ein solches ist z. B. für die Form (1) schon durch die in (2) auftretenden Formen φ gegeben, wovon man sich leicht überzeugt. Die Formen (18) dagegen bilden noch nicht ein *eigentlich* reducirtes System.

Es entsteht hier ferner die Frage, in wie weit, wenn man die Coëfficienten der Grundform f als von einander unabhängig voraussetzt, auch die Coëfficienten der Formen des eigentlich reducirten Systems von einander unabhängig seien, abgesehen natürlich von den durch (16) gegebenen linearen Relationen; und da zeigt sich, dass *diese Coëfficienten in der That übrigens von einander unabhängig sind.*

*) Dass jede Zwischenform Θ in eine Reihe der Form:

$$\Theta = [\Theta] + \alpha_1 u_x [\Theta_1] + \alpha_2 u_x^2 [\Theta_2] + \dots$$

entwickelt werden kann, wo alle $[\Theta_i]$ jener partiellen Differentialgleichung genügen, zeigte zuerst Gordan: Ueber Combinanten, Math. Annalen, Bd. 5, p. 102 ff. — Diese Reihenentwicklung ist besonders nützlich, wenn es gilt, von einem gegebenen Ausdrucke einen Factor u_x^λ abzusondern; sie gibt dafür eine allgemeine Methode, denn man braucht dann nur die Formen $[\Theta_\lambda]$, $[\Theta_{\lambda+1}]\dots$ zu berechnen.

Bei ternären Formen ist also die Theorie einer Form f mit beliebig vielen Reihen von Punkt- und Liniencoordinaten nicht nur individuell, *sondern auch generell* durch die eines mit entsprechenden Ordnungszahlen, *übrigens beliebig gebildeten* simultanen Systems ersetzbar, dessen Formen sämmtlich höchstens nur eine Reihe x und eine Reihe u enthalten und die Gleichung (16) befriedigen. Insbesondere ist aber êin solches System für jeden Fall durch das eigentlich reducirte System auf oben angedeutetem Wege zu erhalten. —

Fassen wir nun gleichzeitig die obigen, an dem Beispiele erläuterten Schritte zusammen, so geschieht die Bildung des eigentlich reducirten Systems auf folgende Art.

1. Enthält f eine Reihe von x und eine Reihe von u, so bildet man die Formen:

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial u_3}$$

$$\delta^2 f = \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_3 \partial u_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

und bestimmt die Zahlen $\alpha, \beta \ldots$ so, dass die Formen

$$\varphi = f + \alpha u_x \delta f + \beta u_x^2 \delta^2 f + \ldots$$

$$\varphi_1 = \delta f + \alpha' u_x \delta^2 f + \beta' u_x^2 \delta^3 f + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

sämmtlich der Gleichung (16) genügen. Die $\alpha, \beta, \ldots$ sind hierdurch völlig und eindeutig bestimmt, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll (vgl. Gordan a. a. O.). Die Formen φ bilden das eigentlich reducirte System.

2. Enthält f nur zwei gleichartige Reihen, etwa x und y, so kann man symbolisch setzen: $f = a_x^m b_y^n$. Die Formen des eigentlich reducirten Systems sind dann:

$$\varphi = a_x^m b_x^n\,, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1}(abu)\,, \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2}(abu)^2, \text{ etc.}$$

3. Enthält f mehr als zwei Reihen, so sind unter diesen mindestens zwei gleichartig. In Bezug auf diese ersetzt man f durch dieselben Formen wie unter 2. Die so entstandenen Formen behandelt man in gleicher Weise bezüglich irgend zweier in ihnen auftretenden gleichartigen Reihen weiter und gelangt so schliesslich zu einem eigentlich reducirten Systeme. Aus letzterem fallen nur verschiedene Formen fort, weil die Formen φ unter 2. schon die besondere Eigenschaft haben, der Gleichung (16) in Bezug auf die Reihen x, u zu genügen. Die Fortsetzung der hier zu leistenden Operationen führt daher auf die folgende Aufgabe, durch deren Lösung Alles erledigt ist: *Eine Form f enthält drei Reihen x, y, u und genügt in Bezug auf*

x und u der Gleichung (16): *man soll das eigentlich reducirte System von f angeben.* Zu dem Zwecke wird man sich erst wieder das reducirte System nach dem oben mitgetheilten und an einem Beispiele*) erläuterten Satze (p. 931 f.) bilden und mit denjenigen Formen, welche dem eigentlich reducirten Systeme nicht schon angehören, nach dem unter 1. Gesagten verfahren.

Für unser Beispiel also haben wir aus dem Systeme (18) noch die Formen φ_0, φ_{10}, φ_{11}:

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_{10} = (abu)\, a_x b_x u_\alpha^2, \quad \varphi_{11} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\, a_x b_x u_\alpha$$

auf Formen des eigentlich reducirten Systems zurückzuführen. Beginnen wir mit der Form φ_0. Nach Obigem haben wir dann zunächst zu bilden:

$$\tfrac{1}{4}\,\delta\varphi_0 = a_x b_x u_\alpha\,(a_\alpha b_x + b_\alpha a_x)$$
$$\tfrac{1}{4}\,\delta^2\varphi_0 = a_\alpha^2 b_x^2 + b_\alpha^2 a_x^2 + 4\, a_\alpha b_\alpha a_x b_x.$$

Eine nochmalige Anwendung des δ-Processes würde $\delta^3\varphi_0 \equiv 0$ ergeben. Ferner haben wir in den Formen

$$(19)\qquad \begin{aligned}
[\varphi_0]_0 &= \varphi_0 + \alpha u_x \delta\varphi_0 + \beta u_x^2 \delta^2\varphi_0\\
[\varphi_0]_1 &= \delta\varphi_0 + \alpha' u_x \delta\varphi_0\\
[\varphi_0]_2 &= \delta^2\varphi_0
\end{aligned}$$

die Zahlen α, β, α' so zu bestimmen, dass $\delta\,[\varphi_0]_0 = 0$ und $\delta\,[\varphi_0]_1 = 0$; die Bedingung $\delta\,[\varphi_0]_2 = 0$ ist ja schon erfüllt. Nun ist aber:

$$(20)\qquad \delta\,[\varphi_0]_0 = \delta\varphi_0 + \alpha\delta\,(u_x\delta\varphi_0) + \beta\delta\,(u_x^2\delta^2\varphi_0),$$

und man hat allgemein für $\psi = r_x^m u_\varrho^n$ in Rücksicht darauf, dass $\delta u_x = 3$ ist:

$$\delta\,(\psi\,.\,u_x^h) = u_x^h\delta\psi + 3\,h u_x^{h-1}\psi + \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial u_i} + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial x_i}\right).$$

Die rechts stehende Summe ist aber nach dem Euler'schen Theoreme gleich

$$h u_x^{h-1}\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}x_i + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}u_i\right) = h\,(m+n)\,u_x^{h-1}\psi.$$

Es wird also:

$$(21)\qquad \delta\,(\psi\,.\,u_x^h) = u_x^h\,\delta\psi + h\,(m+n+3)\,u_x^{h-1}\psi.$$

Die Gleichung $\delta\,[\varphi_0]_0 = 0$ geht daher wegen (20) über in

$$0 = \delta\varphi_0\,(1 + 7\,\alpha) + u_x\delta^2\varphi_0\,(\alpha + 10\,\beta).$$

Diese Bedingung soll unabhängig von den u und x erfüllt sein, insbesondere also auch für $u_x = 0$, und somit ergibt sich:

*) Es war dort (p. 931) nur u, v, x statt x, y, u genommen.

$$\alpha = -\tfrac{1}{7}, \quad \beta = \tfrac{1}{70},$$

und:

(22) $$[\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_0 + \tfrac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0 .$$

Zur Bestimmung von $[\varphi_0]_1$ findet man in gleicher Weise mittelst (21) die Relation:

$$0 = \delta^2 \varphi_0 (1 + 5\alpha'), \quad \text{also:} \quad \alpha' = -\tfrac{1}{5}, \quad \text{und:}$$

(23) $$[\varphi_0]_1 = \delta \varphi_0 - \tfrac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0 .$$

Das eigentlich reducirte System der Form φ_0 besteht also aus den drei Formen (22), (23) und $\delta^2 \varphi_0$.

Ebenso findet man für das eigentlich reducirte System von φ_{10} die Bildungen:

$$[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \tfrac{1}{8} u_x \delta \varphi_{10} + \tfrac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}, \quad [\varphi_{10}]_1 = \delta \varphi_{10} - \tfrac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10},$$
$$[\varphi_{10}]_2 = \delta^2 \varphi_{10},$$

wo: $\delta \varphi_{10} = 2\,(abu)\,(a_\alpha b_x + b_\alpha a_x)\, u_\alpha = 2\, \varphi_{12}'$,
$\delta^2 \varphi_{10} = 4\,(abu)\, a_\alpha b_\alpha \quad = 4\, \varphi_{12}'''$.

Es treten hier also wieder die Formen φ_{12}' und φ_{12}''' auf, welche wir früher aus dem nicht eigentlich reducirten Systeme ausschliessen mussten. Das eigentlich reducirte System von φ_{11} endlich besteht aus den Formen:

$$[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_{11}, \quad \delta \varphi_{11} = a_x^2 b_\alpha^2 - b_x^2 a_\alpha^2 = \varphi_{12}'',$$

Das eigentlich reducirte System der Form $f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2$ ist daher schliesslich durch folgende elf Bildungen gegeben

1) $[\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_0 + \tfrac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0$
2) $[\varphi_0]_1 = \delta \varphi_0 - \tfrac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0$
3) $[\varphi_0]_2 = \delta^2 \varphi_0$ wo: $\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^3$;
4) $\varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha^2$, 5) $\varphi_{21} = (abu)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) u_\alpha$, 6) $\varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2$;
7) $[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \tfrac{1}{8} u_x \delta \varphi_{10} + \tfrac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}$
8) $[\varphi_{10}]_1 = \delta \varphi_{10} - \tfrac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10}$
9) $[\varphi_{10}]_2 = \delta^2 \varphi_{10}$ wo: $\varphi_{10} = (abu)\, a_x b_x u_\alpha^2$;
10) $[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_{11}$
11) $[\varphi_{11}]_1 = \delta \varphi_{11}$, wo: $\varphi_{11} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\, a_x b_x u_\alpha$.

Jede dieser Formen ist von gleichem oder niedrigerem Gesammtgrade wie die Form f, und jede von ihnen genügt der partiellen Differentialgleichung (16). Nach der obigen Bemerkung über die Willkürlichkeit der Coëfficienten dieser Formen *ist aber auch umgekehrt die Theorie irgend eines simultanen Systems von elf Zwischenformen, deren Ordnungs- und Klassen-Zahlen bez. mit denen der hier angeschriebenen elf Formen übereinstimmen, und welche sämmtlich die Gleichung* (16) *be-*

friedigen, sonst aber von einander unabhängig sind, identisch mit der Theorie einer Form $f = r_x^2 s_y^2 u_\varrho^2$, *deren* 216 *Coëfficienten von einander unabhängig sind.* —

Durch die vorstehenden Entwicklungen wird es hinreichend klar sein, inwiefern die Algebra ein principielleres Studium der Zwischenformen und also auch der durch das Verschwinden derselben dargestellten sogenannten Connexe (p. 924) fordern muss. Letztere Gebilde nun, deren Untersuchung so zu sagen die ganze analytische Geometrie der Ebene (d. i. Algebra der ternären Formen) in sich schliesst, in einigen ihrer wesentlichen Beziehungen und Eigenschaften darzulegen, ist der Zweck der folgenden Erörterungen; auf eine vollständigere Theorie derselben müssen wir natürlich noch verzichten. Es sei sogleich hervorgehoben, dass wir zunächst ganz allgemeine Connexe $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$ betrachten wollen, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass dieselben noch auf „Normalconnexe“, d. i. solche, für welche die Gleichung (16) erfüllt ist, zurückgeführt werden können. Es fehlt uns eben noch die Möglichkeit, der erwähnten Gleichung einen geometrisch direct verwerthbaren Inhalt abzugewinnen.

II. Connexe. — Coincidenzen. — Curvenpaare.

Das Gebilde, um dessen Untersuchung es sich nunmehr handelt, wird durch eine algebraische Gleichung gegeben, welche die Coordinaten eines beweglichen Punktes (x) und einer beweglichen Geraden (u) je in homogener Weise enthält, d. h. durch eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0,$$

wenn in ihr die x_i zur. m^{ten}, die u_i zur n^{ten} Dimension vorkommen. Wir bezeichnen dieses Gebilde als *Connex* m^{ter} *Ordnung und* n^{ter} *Klasse*, oder kürzer als *Connex* (m, n).

Einem solchen kommt eine eigentliche geometrische Gestalt nicht mehr zu; vielmehr kann man zu *jeder* Linie u der Ebene noch unendlich viele Punkte x und zu *jedem* Punkte x noch unendlich viele Linien u finden, welche der Gleichung der Connexes genügen: Jeder Geraden u entsprechen im Allgemeinen vermöge (1) unendlich viele Punkte x, welche eine Curve C_m der m^{ten} Ordnung bilden; jedem Punkte x unendlich viele Geraden u, welche eine Curve K_n der n^{ten} Klasse umhüllen.*) So gehört z. B. für $m = 1$, $n = 1$ zu jedem Punkte x ein anderer Punkt y als Träger des von den entsprechenden

*) Gleichungen zwischen einer Reihe Punkt- und einer Reihe Liniencoordinaten werden auch bei Plücker kurz erwähnt: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, p. 255.

Linien u gebildeten Strahlbüschels (Curve 1ter Klasse) und jeder Geraden u entspricht wieder eine Gerade v (Curve 1ter Ordnung). In der That gibt ja in diesem Falle die Gleichung

$$f(x, u) \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma\Sigma\beta_{ik} x_i u_k = 0$$

nur eine besondere Darstellung der allgemeinen Collineation; denn für die Coordinaten des zu x gehörenden Punktes y findet man:

$$\varrho y_k = \beta_{1k} x_1 + \beta_{2k} x_2 + \beta_{3k} x_3,$$

und für die Coordinaten der zu u gehörenden Geraden v:

$$\sigma v_i = \beta_{i1} u_1 + \beta_{i2} u_2 + \beta_{i3} u_3 .$$

Da hier Punkt und Gerade immer zusammen auftreten, ist es zur einfacheren Auffassung dieser Verhältnisse zweckmässig, weder den Punkt noch die Gerade an und für sich als Grundelement der Ebene zu betrachten; vielmehr wollen wir als *„Element (x, u)" jede Combination eines Punktes x der Ebene mit einer Geraden u derselben bezeichnen.* Die Gesammtheit der Elemente (x, u) erhält man also, indem man jeden der zweifach unendlich vielen Punkte x mit jeder der zweifach unendlich vielen Geraden u combinirt. *Die gesammten Elemente bilden sonach ein vierfach unendliches System (erfüllen eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen);* und die Ebene ist der Träger dieser Mannigfaltigkeit. Aus ihr hebt die Gleichung eines Connexes die *drei*fach unendliche Schaar der Elemente heraus, welche derselben genügen. Das Obige kann man dann auch in folgender Form aussprechen: *Die Punkte, welche mit einer gegebenen Geraden Elemente eines Connexes (m, n) bilden, liegen auf einer Curve C_m der m^{ten} Ordnung; die Geraden, welche mit einem gegebenen Punkte Elemente des Connexes bilden, umhüllen eine Curve K_n der n^{ten} Klasse.* Sämmtliche so entstehenden Curven K_n bilden ein doppelt unendliches System, dessen Parameter die Verhältnisse der x_i sind; ebenso bilden die C_m ein doppelt unendliches Curvensystem, welches die Verhältnisse der u_i zu Parametern hat.

Nur in besonderen Fällen kann es eintreten, dass jeder Punkt der Ebene mit einer bestimmten Geraden oder jede Gerade mit einem bestimmten Punkte der Ebene ein Element des Connexes bildet: So bildet z. B. in dem Connexe

$$x_1 \varphi(u) + x_2 \psi(u) = 0$$

der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mit jeder Geraden u ein Element. Solche Punkte bez. Gerade sollen *Fundamental-Punkte bez. -Gerade* genannt werden. Dieselben können bei besonderen Connexen in beliebig grosser Anzahl auftreten; ja ihre Zahl kann unendlich gross werden. Dies letztere tritt bei irreducibeln Connexen z. B. ein, wenn die Gleichung $f = 0$ die x oder u gar nicht enthält. Enthält sie die u nicht, so hat man *die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten* vor sich; sie ist

als Connex so aufzufassen, dass jeder Punkt der Curve mit jeder beliebigen Geraden der Ebene ein Element des Connexes bilden kann, dass aber andere (nicht auf der Curve gelegene) Punkte sich mit Geraden überhaupt nicht zu Connexelementen vereinigen lassen. Das dualistisch Entsprechende tritt ein, wenn $f = 0$ die x nicht enthält und also *die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten* darstellt. Ein anderes Beispiel der Art bietet der reducible Connex

$$\varphi(x) \cdot \psi(u) = 0 .$$

Hier bildet jeder Punkt von $\varphi = 0$ mit jeder beliebigen Geraden ein Connexelement; jeder andere Punkt der Ebene dagegen bildet nur mit allen Tangenten von $\psi = 0$ Elemente des Connexes. —

Die Gesammtheit der Elemente, welche in einer Ebene existiren, bildet, wie schon erwähnt, eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen. Man hat daher vier Abstufungen geometrischer Gebilde zu unterscheiden, je nachdem 1, 2, 3 oder 4 Gleichungen zwischen den Coordinaten x, u des Elementes gegeben sind; und jede von diesen muss sowohl in Bezug auf die x als auf die u homogen sein, um geometrischer Interpretation fähig zu werden (d. i. für sich einen Connex darzustellen). Durch vier Gleichungen ist schon eine endliche Zahl von Elementen bestimmt; es tritt dann also nicht mehr ein continuirliches Gebilde, sondern eine Gruppe discreter Elemente auf. Die übrigen drei Stufen bleiben zu betrachten.

Die erste Stufe ist durch den einzelnen *Connex* selbst gegeben.

Die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Elemente, welche zwei Connexen gemeinsam sind, nennen wir eine Coincidenz. Für den Fall aber, wo diese, beiden Connexen gemeinsame, Mannigfaltigkeit reducibel ist, soll auch jeder irreducible Theil derselben einzeln als Coincidenz bezeichnet werden, ebenso wie unter Raumcurve jeder irreducible Theil des Durchschnittes zweier algebraischen Flächen verstanden wird. Demnach ist analytisch die Coincidenz gegeben entweder durch zwei Gleichungen zwischen den x und den u, oder durch mehr als zwei Gleichungen, welche aber eine *doppelt unendliche* Schaar gemeinsamer Lösungen gestatten. Innerhalb einer Coincidenz gehört zu jeder Geraden im Allgemeinen eine endliche Anzahl (μ) von Punkten, welche mit ihr ein Element bilden können; ebenso gehört zu jedem Punkte eine endliche Anzahl (ν) von Geraden. Man kann dann μ die *Ordnung*, ν die *Klasse der Coincidenz* nennen, und diese selbst als Coincidenz (μ, ν) bezeichnen. Man findet die zu einem Punkte gehörigen Geraden, indem man die gemeinsamen Tangenten aller Curven K sucht, welche in den einzelnen, die Coincidenz bestimmenden Connexen dem Punkte entsprechen. Ebenso findet man die zu einer Geraden gehörigen Punkte, indem man in allen jenen Connexen

die ihr entsprechenden Curven C aufsucht und deren gemeinsame Schnittpunkte bestimmt. *So ist insbesondere, wenn zwei Connexe* (m, n) *und* (m', n') *gegeben sind, die beiden gemeinsame (im Allgemeinen irreducible) Coincidenz von der Ordnung* $\mu = mm'$ *und von der Klasse* $\nu = nn'$.

Die Coincidenz deckt sich hiernach mit dem allgemeinsten Begriffe der *dualistischen* (im Allgemeinen indess nicht linearen) *Verwandtschaft*, d. h. einer solchen, bei welcher in zwei auf einander liegenden ebenen Systemen E, E' jedem Punkte von E eine bestimmte Zahl von Geraden in E', jeder Geraden von E' eine bestimmte Zahl von Punkten in E entspricht. Das Umgekehrte ist dabei jedoch im Allgemeinen keineswegs der Fall; den Punkten einer Geraden in E entsprechen vielmehr in E' die Tangenten einer Curve, und umgekehrt entsprechen einem Punkte in E' d. h. den Geraden des durch ihn gehenden Strahlbüschels, Punkte von E, welche eine Curve beschreiben. Durch zwei Connexe (1, 1):

$$a_x u_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad a_x' u_{\alpha'} = 0$$

wird z. B. eine Verwandtschaft gegeben, vermöge deren jedem Punkte x die Verbindungslinie der beiden zu x gehörenden Punkte mit den Coordinaten $a_x \alpha_i$ und $a_x' \alpha_i'$ entspricht. Dieselbe wird, wenn wir mit v_i die Coordinaten dieser Verbindungslinie bezeichnen, dargestellt durch die Gleichungen:

$$\varrho v_i = (\alpha \alpha')_i \, a_x a_x' ;$$

die Verwandtschaft ist also quadratisch, d. h. die Punkte x von E, welche den durch einen festen Punkt y gehenden Linien v von E' entsprechen, liegen auf einem Kegelschnitte. Nur wenn besondere Bedingungen zwischen den beiden Connexen (1, 1) erfüllt sind, wird es eintreten können, dass aus der ihnen gemeinsamen Coincidenz die lineare reciproke Verwandtschaft im gewöhnlichen Sinne hervorgeht; letztere wird dann freilich bei geeigneter Wahl der Connexe hierdurch in allgemeinster Weise erzeugt. —

Die Gesammtheit aller (einfach unendlich vielen) Elemente, welche drei Connexen gemeinsam sind — oder ein rational darstellbarer Theil einer solchen Gesammtheit — *bildet ein* *C u r v e n p a a r*. Es sind vermöge der Gleichungen dieser Connexe im Allgemeinen sowohl die u durch die x, als die x durch die u rational ausdrückbar, während zugleich durch Elimination der x eine Gleichung zwischen den u, durch Elimination der u eine Gleichung zwischen den x erhalten wird. Man hat also eine Curve in Punktcoordinaten und eine Curve in Liniencoordinaten vor sich; und die Punkte der einen sind auf die Tangenten der andern eindeutig bezogen. Ordnung und Klasse dieser Curven, die man bez. als *Ordnung und Klasse des Curvenpaares* bezeichnen

kann, sind nach dem bekannten Satze über den Grad der Resultante in den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen im Allgemeinen leicht zu bestimmen: Sind drei Connexe (m, n), (m', n') und (m'', n'') gegeben, so wird die *Klasse des Curvenpaares* gleich

$$nm'm'' + n'm''m + n''mm', \tag{2}$$

und die *Ordnung des Curvenpaares* gleich

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn'. \tag{3}$$

Es ist nicht ohne Interesse, das eindeutige Entsprechen zweier Curven in der Weise zu betrachten, wie es hier auftritt; denn gerade die nicht aufgelöste Form der Gleichungen, wie sie hier sich theoretisch darbietet, ist es, auf welche man in den meisten Untersuchungen unmittelbar geführt wird, wo man es mit eindeutigen Beziehungen zu thun hat.

Endlich wollen wir noch die Zahl der Elemente bestimmen, welche vier Connexen gemeinsam sind. Die letzteren seien bez. von der Ordnung m, m', m'', m''' und von der Klasse n, n', n'', n'''. Wir betrachten zuerst das Curvenpaar, welches durch die drei Connexe (m, n), (m', n'), (m'', n'') bestimmt wird, und dessen Ordnung μ und Klasse ν bez. durch die Zahlen (3) und (2) gegeben ist. Zu jedem Punkte x der C_μ des letzteren gehört dann vermöge des Connexes (m''', n''') eine Curve $K_{n'''}$ von der Klasse n''', welche mit der K_ν des Curvenpaares $\nu n'''$ Tangenten gemein hat; und jeder der letzteren entspricht vermöge der drei ersten Connexe ein Punkt y der C_μ; fällt letzterer insbesondere mit x zusammen, so haben wir ein allen vier Connexen gemeinsames Element. Die $n'''\nu$ Punkte y der C_μ, welche dem Punkte x entsprechen, können nun jedenfalls zusammen mit anderen *festen* Punkten der C_μ durch eine Curve $\varphi(x, y) = 0$ ausgeschnitten werden, da sie durch eindeutige Transformation aus dem vollständigen Systeme der gemeinsamen Tangenten zweier Curven hervorgehen; zur Bestimmung der Zahl der gemeinsamen Elemente können wir daher das erweiterte Correspondenzprincip anwenden (vgl. p. 446 und 680). Nun entsprechen offenbar jedem Punkte y der C_μ in der oben geschilderten Weise umgekehrt $m'''\mu$ Punkte x, und die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ wird im Allgemeinen für $x = y$ nicht erfüllt, denn sonst müsste jedes Element des Curvenpaares allen vier Connexen angehören. *Die Zahl der den vier Connexen* (m, n), (m', n'), (m'', n''), (m''', n''') *gemeinsamen Elemente* findet man daher bei beliebiger Lage dieser Connexe gegen einander gleich $m'''\mu + n'''\nu$ oder, wenn wir für μ, ν ihre Werthe aus (3) und (2) einsetzen:

$$\begin{aligned} & mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' \\ & + mm''n'n''' + m'm'''n''n + mm'''n''n', \end{aligned} \tag{4}$$

ein (wie es sein muss) in allen Zahlen m, n symmetrisches Resultat.

Für den Fall $m = m' = m'' = m''' = 1 = n = n' = n'' = n'''$ folgt hieraus z. B. insbesondere, dass vier Connexe erster Ordnung und erster Klasse sechs Elemente gemein haben. Die Punkte dieser Elemente müssen allen vier Curven dritter Ordnung gemeinsam sein, welche in den vier aus je dreien der gegebenen Connexe zu bildenden Curvenpaaren vorkommen. Seien also die Gleichungen der vier Connexe:

(5) $$a_x u_\alpha = 0, \quad b_x u_\beta = 0, \quad c_x u_\gamma = 0, \quad d_x u_\delta = 0,$$

so erhält man durch Elimination der u aus je dreien dieser Gleichungen die vier Curven dritter Ordnung:

$$(\beta\gamma\delta) b_x c_x d_x = 0, \quad (\gamma\delta\alpha) c_x d_x a_x = 0, \quad (\delta\alpha\beta) d_x a_x b_x = 0, \quad (\alpha\beta\gamma) a_x b_x c_x = 0;$$

Die Punkte der sechs den Connexen (5) gemeinsamen Elemente sind die gemeinsamen Schnittpunkte dieser vier Curven; und da durch die 6 Punkte nur dreifach unendlich viele Curven dritter Ordnung gehen, kann man in ähnlicher Weise jede solche Curve darstellen, welche die 6 Punkte enthält. Die 6 zugehörigen Geraden sind ebenso die gemeinsamen Tangenten der vier Curven dritter Klasse:

$$(bcd) u_\beta u_\gamma u_\delta = 0, \quad (cda) u_\gamma u_\delta u_\alpha = 0, \quad (dab) u_\delta u_\alpha u_\beta = 0, \quad (abc) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0.$$

Es ist auch leicht, die Correspondenz aufzustellen, welche hier auf der Curve $(\alpha\beta\gamma) a_x b_x c_x = 0$ die 6 Punkte der den Connexen (5) gemeinsamen Elemente bestimmt. Die Punkte und Geraden des den drei ersten Connexen gemeinsamen Curvenpaares sind hier auf einander durch die Gleichungen bezogen*)

(6) $$\varrho u_i = (\alpha\beta)_i \, a_y b_y$$

unter der Voraussetzung, dass $(\alpha\beta\gamma) a_y b_y c_y = 0$. Die drei Kegelschnitte, welche durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ dargestellt werden, haben bekanntlich drei Punkte mit einander gemein, welche auf der Curve $(\alpha\beta\gamma) a_y b_y c_y = 0$ liegen; durch diese drei Punkte gehen also auch alle Kegelschnitte des Netzes $(\alpha\beta v) \alpha_y \beta_y = 0$. Einem Punkte x der C_3 ist nun vermöge des vierten Connexes der Punkt $d_x u_\delta = 0$ zugeordnet; den drei von letzterem an die Curve $(abc) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$ zu legenden Tangenten entsprechen also vermöge (6) drei Punkte der C_3, welche auf dieser durch den Kegelschnitt $(\alpha\beta\delta) a_y b_y d_x = 0$ ausgeschnitten werden. Wir haben also eine Correspondenz mit drei festen Punkten; und die 6 Coincidenzpunkte derselben werden durch die Curve $(\alpha\beta\delta) a_x b_x \delta_x = 0$ bestimmt, welche ausserdem je einfach durch

*) Man verificirt leicht, dass diese Beziehung zwischen beiden Curven dieselbe ist, welche zwischen einer C_3 und K_3 besteht, wenn beide gleichzeitig durch denselben Grassmann'schen Mechanismus erzeugt werden (vgl. p. 538).

jeden der drei festen Punkte geht. Es stimmt dies mit der obigen Angabe über die vier Curven dritter Ordnung überein.

Das nähere Studium der Eigenschaften eines Connexes $a_x^m u_\alpha^n = 0$ führt nun zur Untersuchung der Functionalinvarianten, d. i. der Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen, welche zu der Grundform $a_x^m u_\alpha^n$ gehören; die dabei auftretenden Zwischenformen kann man dann immer nach den obigen Erörterungen (p. 932) durch sogenannte Normalformen ersetzen, d. h. durch solche Formen φ, welche der Differentialgleichung $\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u_i} = 0$ genügen. Alle diese Functionalinvarianten wird man wieder symbolisch darstellen können; und dabei hat man symbolische Factoren der folgenden Typen zu unterscheiden (wenn $a_x^m u_\alpha^n \equiv b_x^m u_\beta^n \equiv c_x^m u_\gamma^n$ gesetzt wird):

$$a_x, \quad (abu), \quad (abc), \quad a_\alpha, \quad u_\alpha, \quad (\alpha\beta x), \quad (\alpha\beta\gamma).$$

Die Mannigfaltigkeit der möglichen Bildungen wird sonach eine sehr grosse; es sind indess bisher wenig allgemeine Untersuchungen angestellt. Erwähnt sei hier nur ein Princip, welches dem in der Curventheorie benutzten *Uebertragungsprincipe* (p. 276) genau analog ist, indem es erlaubt, gewisse Sätze über binäre Formen mit zwei Reihen von Veränderlichen unmittelbar für ternäre Connex-Bildungen zu verwerthen.

Die durch den Connex festgelegte Beziehung zwischen Punkten und Geraden der Ebene kann nämlich noch in anderer Weise aufgefasst werden. Betrachten wir einen beliebigen Punkt, welcher der Durchschnitt zweier Geraden v, w sein und daher mit (v, w) bezeichnet werden mag; ebenso sei eine Gerade (y, z) die Verbindungslinie der Punkte y und z. Beide zusammen bilden dann ein beliebig gewähltes Element, welches im Allgemeinen dem Connexe nicht angehört. *Vermöge des Connexes (m, n) werden indess die Strahlen des Büschels (v, w) den Punkten der Geraden (y, z) zugeordnet;* und zwar ist die beiderseitige Zuordnung eine m-n-deutige, indem jedem Punkte n Strahlen (Γ_n), jedem Strahle m Punkte (G_m) entsprechen. Bezeichnet man nämlich einen Punkt der Reihe mit $\varkappa_1 y + \varkappa_2 z$, einen Strahl des Büschels mit $\lambda_1 v + \lambda_2 w$, so findet für die durch den Connex $a_x^m u_\alpha^n = 0$ einander zugeordneten Punkte und Strahlen die Gleichung statt:

$$(\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^m (\lambda_1 v_\alpha + \lambda_2 w_\alpha)^n = 0,$$

welche von der Ordnung m für $\varkappa_1 : \varkappa_2$, von der Ordnung n für $\lambda_1 : \lambda_2$ ist. Setzen wir nun symbolisch:

$$(7) \qquad a_y = A_1, \quad a_z = A_2, \quad v_\alpha = \mathsf{A}_1, \quad w_\alpha = \mathsf{A}_2,$$

so haben wir die doppelt binäre Form:

$$\varphi = A_x^m \mathsf{A}_\lambda^n, \tag{8}$$

wo dann $\varphi = 0$ die besagte Beziehung vermittelt. Betrachten wir ein dem gegebenen Connexe angehöriges Element x, u, dessen Punkt x der Reihe (y, z), dessen Strahl u dem Büschel (v, w) angehört, und stellen die Forderung, dass die zu x gehörige Γ_n (welche u enthält) eine binäre Invarianteneigenschaft besitze, und dass ebenso G_m dieselbe Eigenschaft oder eine andere habe: dann resultirt daraus eine invariante Bedingung für den Strahl (y, z) und den Punkt (v, w), und *das aus beiden gebildete Element* (y, z), (v, w) *gehört einem invarianten Connexe an*. Die beregte Bedingung wird zunächst durch das Verschwinden einer Invariante der binären Form φ dargestellt, welche auch dann noch die Invarianteneigenschaft haben muss, wenn die eine Reihe von Veränderlichen $(\varkappa)$ einer, die andere (λ) einer beliebigen andern linearen Transformation unterworfen wird; denn die zu jedem *beliebigen* Punkte $x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z$ vermöge (8) gehörige Gruppe Γ_n soll jene Invarianteneigenschaft besitzen, sowie auch die zu jedem *beliebigen* Strahle $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$ gehörige Gruppe G_m. Die hier in Betracht kommenden Invarianten der Form φ sind daher von der Form:

$$I = \Sigma c \Pi (AB) \ldots \Pi (\mathsf{AB}) \ldots \tag{9}$$

wo die c Zahlencoëfficienten, die A, B, ... gleichwerthige Symbole der einen, die A, B, ... solche der andern Art bedeuten, diese beiden Klassen von Symbolen aber niemals vereinigt auftreten; Factoren $(A\mathsf{A})$ dürfen deshalb in I nicht vorkommen. Es ist aber wegen (7):

$$(AB) = a_y b_z - b_y a_z = (a b u),$$

wenn jetzt $u_i = (y z)_i$ gesetzt wird, und ebenso für $x_i = (v w)_i$:

$$(\mathsf{AB}) = v_\alpha w_\beta - w_\alpha v_\beta = (\alpha \beta x).$$

Als Gleichung des gesuchten covarianten Connexes findet man daher aus (9):

$$I \equiv \Sigma c \Pi (a b u) \ldots \Pi)\alpha \beta x) \ldots = 0^{*}).$$

Diese Klasse covarianter Connexe ist also ebenso auf das Studium der Invarianten jener doppelt binären Form zurückgeführt, wie die Liniengleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve auf das Studium der Discriminante einer binären Form mit einer Reihe von Veränderlichen.

Wie von covarianten Connexen, kann man auch von covarianten Coincidenzen und Curvenpaaren sprechen. So erhält man eine einem

*) Ein Beispiel gibt der im folgenden Abschnitte betrachtete conjugirte Connex.

gegebenen Connexe $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$ covariante Coincidenz, wenn man jede Gerade der Ebene nicht mit allen Punkten der zugehörigen C_m, sondern nur mit deren Wendepunkten bez. Berührungspunkten von Doppeltangenten zu Elementen verbindet; die erstere Coincidenz wird dann z. B. aus dem Connexe $f = 0$ durch den Connex

$$(abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n = 0$$

ausgeschnitten. Ebenso kann man jeden Punkt der Ebene mit den Rückkehr- bez. Wendetangenten der zugehörigen K_n zu Elementen einer covarianten Coincidenz zusammenstellen. Ein covariantes Curvenpaar wird gebildet durch die im Systeme der C_m auftretenden Doppel- und Rückkehrpunkte und die zugehörigen Geraden, sowie durch die im Systeme der K_n auftretenden Doppel- und Wendetangenten und die zugehörigen Punkte.

Weiterhin müsste man dann auch Systeme von Connexen, sowie die simultanen Functionalinvarianten solcher Systeme untersuchen, wobei sich auch für diese Systeme eine Art Charakteristikentheorie ergeben würde.*) Besonders nämlich wird man auf diejenigen Connexe zu achten haben, welche mit anderen singulären Elementen behaftet sind als ein beliebiger Connex des Systems, wenn man unter einem *singulären Elemente* ein solches versteht, für welches $f = a_x^m u_\alpha^n$ von höherem als dem ersten Grade verschwindet. Es ist indess zu beachten, dass hier nicht nur einzelne singuläre Elemente auftreten können, sondern auch einfach und zweifach unendlich viele Schaaren von solchen mehrfach zählenden Elementen, d. h. auch *singuläre Curvenpaare* und *singuläre Coincidenzen* (analog wie bei den Flächen im Raume nicht nur einzelne Knotenpunkte sondern auch Doppel- und vielfache Curven vorkommen können). — Derartige Fragen sind indess bisher nicht in Angriff genommen.

III. Der conjugirte Connex. — Eindeutige Transformationen eines Connexes.

In der geschilderten Weise kann man einen besonders merkwürdigen zu f covarianten Connex bilden, der als *conjugirter Connex* bezeichnet werden mag; er ist in folgender Weise geometrisch zu definiren.

Gehen wir von einem beliebigen Elemente y, v der Ebene aus, so entsprechen, wie oben ausgeführt wurde, vermöge $f = 0$ jedem

*) Solche Untersuchungen würden denen analog sein, welche Hirst über Systeme von dualistischen Verwandtschaften (Correlationen), also über Systeme von bilinearen Formen mit zwei Reihen Punktcoordinaten, im Sinne der Charakteristikentheorie angestellt hat; vgl. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 5, p. 40, 1874, und Annali di matem. Ser. 2, t. 6, p. 260.

Punkte x von v n Strahlen durch y und jedem Strahle u durch y m Punkte von v (p. 942). Die n Strahlen sind die Tangenten von y an die zu x gehörige K_n, die m Punkte sind die Schnittpunkte von v mit der zu u gehörigen C_m. Wenn nun die zu x gehörige K_n durch y geht, so fallen von den n Strahlen zwei in die Tangente der K_n im Punkte y zusammen; und ein solcher Doppelstrahl wird, da die K_n im Allgemeinen weder Doppel- noch Wendetangenten besitzt, nicht anders entstehen können. Derselbe bildet mit x ein Element des gegebenen Connexes $f = 0$ und mag insbesondere durch u bezeichnet sein. Ebenso fallen, wenn die zu u gehörige C_m die Gerade v berührt, von den m auf v liegenden Schnittpunkten zwei zusammen. Dieser doppelt zählende Punkt bildet mit u ein Element von $f = 0$ und soll insbesondere mit x bezeichnet werden. Ein jedes Element (y, v), welches zu einem Elemente (x, u) von f in dieser Beziehung steht, ist Element eines covarianten Connexes, den wir dann *den zu f conjugirten* nennen. *Ein Element y, v des letzteren ist also dadurch definirt, dass in Bezug auf den gegebenen Connex sowohl dem Punkte y eine doppelt zählende Gerade u, als der Geraden v ein doppelt zählender Punkt x entspricht.* Dasselbe können wir auch in folgender Weise aussprechen: Ist (x, u) ein Element von $f = 0$, d. h. liegt x auf der zu u gehörigen C_m und berührt u die zu x gehörige K_n, und ist y der Berührungspunkt von u mit dieser K_n, v die Tangente jener C_m in x, so ist (y, v) ein Element des conjugirten Connexes. Und man erhält den ganzen conjugirten Connex, indem man das Element (x, u) den ganzen gegebenen Connex durchwandern lässt. *Man erhält demnach auch die Gleichung $F(y, v) = 0$ des conjugirten Connexes, wenn man aus den Gleichungen:*

$$(1) \qquad \varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0$$

die Grössen ϱ, σ, x_i, u_i eliminirt.

Wie man diese Elimination im Anschlusse an die obigen symbolischen Methoden auf ein binäres Problem zurückführen kann, werden wir später noch erläutern. Es sei hier zunächst darauf hingewiesen, dass die ganze Beziehung zwischen den Elementen des gegebenen zu denen des conjugirten Connexes durchaus analog derjenigen ist, welche zwischen einer Curve als Punktgebilde und derselben Curve als Liniengebilde stattfindet, und dass demgemäss auch der Satz gilt:

Der conjugirte Connex des conjugirten ist wieder der ursprüngliche.

Den Beweis für dieses Reciprocitätsverhältniss führt man in folgender Weise. Schreiben wir in F wieder $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ für v_i, y_i, so muss der Entstehung von F zufolge die so gebildete Function der x, u den Factor f haben; es muss also die Identität bestehen:

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = M \cdot f, \tag{2}$$

wo M eine ganze homogene Function der x, u bedeutet. Ist nun der Kürze wegen:

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

so dass die p, q sich von den y, v nur um unbestimmte Factoren unterscheiden, so ist der conjugirte Connex von F durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \varrho' z_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial Mf}{\partial q_i}, \\ \sigma' w_i &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv \frac{\partial Mf}{\partial p_i}, \end{aligned} \qquad f = 0; \tag{3}$$

und man hat bei der Bildung der Differentialquotienten von Mf sich nur Alles durch die p, q statt durch die x, u ausgedrückt zu denken. Da $f = 0$, so kann man für die ersten Gleichungen (3) auch schreiben:

$$\varrho' z_i = M \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \sigma' w_i = M \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen:

$$mf = \Sigma q_i x_i, \quad nf = \Sigma p_i u_i,$$

dass:

$$m\,df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma x_i dq_i, \quad n\,df = \Sigma p_i du_i + \Sigma u_i dp_i.$$

Da aber andererseits nach der Definition der p, q:

$$df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma p_i du_i,$$

so folgt:

$$(m + n - 1)\, df = \Sigma x_i dq_i + \Sigma u_i dp_i,$$

mithin:

$$x_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad u_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

In (3) werden also die z, w den x, u proportional; d. h. man kommt auf den gegebenen Connex zurück, w. z. b. w.

Wir wollen jetzt die Ordnung m' und die Klasse n' des conjugirten Connexes bestimmen. Zu dem Ende müssen wir die Frage beantworten, wie viele Punkte irgend eine Gerade ($\gamma_y = 0$) der Ebene bei beliebig gegebenem v mit der zu v im conjugirten Connexe gehörigen Curve $C_{m'}$ gemein hat; die Klasse n' bestimmt sich dann durch die dualistisch entsprechende Ueberlegung. Die gestellte Frage lässt sich algebraisch in folgender Weise fassen: Es soll die Zahl der Werthsysteme y_i bestimmt werden, welche gleichzeitig den Gleichungen:

$$f(x, u) = 0, \quad \varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \gamma_y = 0 \tag{4}$$

genügen, wo die v_i beliebig gegeben sind. Hier können wir die Gleichung $f=0$ offenbar ersetzen durch $v_x=0$. Verstehen wir ferner unter y, z zwei Punkte auf dem Strahle v, so dass:

$$x_i = \varkappa y_i + \lambda z_i, \tag{5}$$

so haben wir statt der drei Gleichungen $\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die zwei von ϱ unabhängigen Bedingungen:

$$\Sigma y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Schliesslich geben uns die Gleichungen $\sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ zusammen mit $\gamma_y = 0$ die eine Gleichung:

$$\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0 \tag{7}$$

In (6) und (7) haben wir drei Gleichungen vor uns, welche nach der Substitution (5) in $\varkappa$, λ bez. vom Grade $m-1$, $m-1$, m sind, in den u_i dagegen bez. vom Grade n, n, $n-1$. Die Elimination der u_i aus diesen Gleichungen gibt ein Resultat, dessen Grad in $\varkappa$, λ die Ordnung des conjugirten Connexes ist, denn sie bestimmt wegen (5) auf v diejenigen Punkte x, welche den Gleichungen (6), (7) und also auch (4) genügen. *Die Ordnung des conjugirten Connexes wird daher gleich*

$$\begin{aligned} m' &= n(n-1)(m-1) + n(n-1)(m-1) + n^2 m \\ &= n\{nm + 2(n-1)(m-1)\} \end{aligned} \tag{8}$$

und analog die Klasse desselben gleich

$$n' = m\{nm + 2(n-1)(m-1)\} \tag{9}$$

So haben wir z. B.:

$$\begin{array}{llllll} \text{für} & m=1, & n=1 & : & m'=1, & n'=1 \\ \text{„} & m=2, & n=1 & : & m'=2, & n'=4 \\ \text{„} & m=1, & n=2 & : & m'=4, & n'=2 \\ \text{„} & m=2, & n=2 & : & m'=12, & n'=12. \end{array}$$

Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes sind also, so lange der gegebene allgemeiner Natur ist, höher als für den ursprünglichen, ausgenommen, wenn $m=n=1$. Bildet man indess für den conjugirten Connex wieder den conjugirten, so muss sich die ursprüngliche Ordnung und Klasse wieder ergeben. Daher kann der conjugirte Connex nicht ohne gewisse Eigenschaften sein, welche hierzu mitwirken; und indem man diese aufsucht, gelangt man zum Begriffe der *nothwendigen (oder gewöhnlichen) Singularitäten eines Connexes.* Darunter verstehen wir diejenigen Singularitäten, welche sich bei jedem Connexe oder

doch bei seinem conjugirten finden. Bezeichnet man als *allgemein* einen Connex auch dann noch, wenn er zwar nicht ganz willkürliche Coëfficienten besitzt, die Willkürlichkeit der letzteren jedoch nur auf das Auftreten dieser Art von Singularitäten beschränkt ist, so wird bei dem conjugirten Connexe dasselbe eintreten. Die nur mit solchen Singularitäten behafteten Connexe bilden daher ein in sich geschlossenes System, welchem auch ihre conjugirten angehören. Dieser Begriff ist zunächst an den algebraischen Curven der Ebene gebildet; wo jeder Curve in Punktcoordinaten sie selbst, aufgefasst als Tangentengebilde, in ähnlicher Weise gegenübersteht, wie oben der conjugirte Connex dem ursprünglichen. Die nothwendigen Singularitäten sind sind hier diejenigen, welche in den Plücker'schen Formeln vorkommen: Doppel- und Rückkehrpunkte einerseits, Doppel- und Wendetangenten andererseits. Geht man von einer Curve aus, welche bei übrigens willkürlichen Coëfficienten Doppel- und Rückkehrpunkte von willkürlicher Lage besitzt, so wird zwar die *Zahl* der Doppel- und Wendetangenten dadurch modificirt werden können, dieselben werden sich aber nicht etwa zu höheren Singularitäten zusammenziehen. Die Curve als Ordnungscurve betrachtet kann demnach nothwendige Singularitäten aller Arten enthalten, ohne dass dieselbe Curve, als Klassencurve betrachtet, andere als ebenfalls nothwendige Singularitäten enthält.

In gleicher Weise kann man den Begriff der nothwendigen Singularitäten bei allen algebraischen Gebilden charakterisiren; bei Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension treten aber neben einzelnen discreten singulären Punkten etc. auch ganze Mannigfaltigkeiten singulärer Punkte etc. auf. So sind bei den algebraischen Flächen im Raume (Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen) neben einzelnen Doppel- bez. dreifachen Punkten auch Doppelcurven als nothwendige Singularitäten zu berücksichtigen; so hat man bei den Connexen (dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten) doppelte, dreifache und vierfache Gebilde zu unterscheiden, welche die nothwendigen Singularitäten ausmachen. Und zwar erheben sich die Doppelgebilde bis zur zweifachen Mannigfaltigkeit, also bis zur Coincidenz, die dreifachen bis zum Curvenpaare, während vierfache Elemente als nothwendige Singularitäten nur discret auftreten. *Ein singuläres Element* ist dabei als ein solches zu definiren, dem nicht ein einziges, sondern *mehrere* Elemente des conjugirten Connexes entsprechen (wie dem Doppelpunkte einer Curve *zwei* Tangenten derselben). Es können deren zwei oder mehr sein; dieselben können verschieden oder theilweise gleich oder sämmtlich gleich sein; und dem entsprechend treten die singulären Elemente in verschiedener Mannigfaltigkeit auf. Das genauere Studium dieser Verhältnisse bei den Connexen wird sich sehr vereinfachen,

wenn man sich zuvor über die analogen Verhältnisse bei Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen, also z. B. bei algebraischen Flächen, orientirt hat; wir wollen daher hier nicht weiter auf den Gegenstand eingehen.

Hervorgehoben sei nur noch, dass *es Connexe geben kann, welche sich selbst conjugirt sind.* Es gibt nämlich in $f=0$ im Allgemeinen eine Coincidenz $f=0$, $\varphi=0$, welche gleichzeitig dem gegebenen und dem conjugirten Connexe angehört. Man braucht in der That wegen (1) nur zu setzen

$$f(y,\,v)=0 \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{\partial f}{\partial u},\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)=0.$$

Dieses ist die Gleichung $\varphi=0$, welche zusammen mit $f=0$ die fragliche Coincidenz bestimmt. Aber es kann geschehen, dass φ für besondere Connexe $f=0$ selbst den Factor f hat; alsdann ist *jedes* zu einem Elemente $(x,\,u)$ von $f=0$ conjugirte Element $(y,\,v)$ auch ein Element von $f=0$, und dieser Connex ist sich selbst conjugirt.*) —

Wir gehen dazu über, die Bildung der Gleichung des conjugirten Connexes mit Hülfe der symbolischen Hülfsmittel zu erläutern und an einigen Beispielen durchzuführen. Nach den früheren Erörterungen (p. 943 und p. 945) haben wir zu dem Zwecke zunächst die Bedingung dafür aufzustellen, dass eine doppelt binäre Gleichung:

$$\varphi \equiv A_\varkappa^{m} \mathsf{A}_\lambda^{n}=0 \tag{10}$$

eine Doppelwurzel $\varkappa_1:\varkappa_2$ und gleichzeitig eine Doppelwurzel $\lambda_1:\lambda_2$ habe; d. h. wir haben die Grössen $\varkappa$ und λ aus den folgenden vier Gleichungen zu eliminiren:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa_2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=0, \tag{11}$$

welche wegen der doppelten Homogeneität von φ nur die Stelle von dreien vertreten. Die Gleichung des conjugirten Connexes zu $f\equiv a_x^m u_\alpha^n=0$ entsteht dann in bekannter Weise aus der gefundenen binären Form, indem man jeden Factor (AB) derselben durch (abu), jeden Factor (AB) durch $(\alpha\beta x)$ ersetzt. Die Invariante der binären Form φ, deren

*) Ein Beispiel hierfür gibt der lineo-lineare Connex:

$$u_1x_1+u_2x_2-u_3x_3=0,$$

welcher einem Punkte x einen Punkt y durch die Gleichungen zuordnet:

$$\varrho y_1=x_1,\qquad \varrho y_2=x_2,\qquad \varrho y_3=-x_3,$$

und welcher also einen besonderen Fall der perspectivischen Collineation darstellt. Mit derselben ist die inverse Transformation in diesem Falle identisch und da letztere im Allgemeinen durch den ebenfalls lineo-linearen conjugirten Connex dargestellt wird (wie wir später sehen werden), ist hier der conjugirte Connex zum ursprünglichen proportional.

Verschwinden die beregte Bedingung darstellt, soll im Folgenden mit R bezeichnet werden; ihr Grad g in den Coëfficienten von φ ist aus dem Vorstehenden leicht zu bestimmen. In R nämlich sind dann mg Symbolreihen $A, B, \ldots$ und ng Symbolreihen A, B vorhanden, welche sich bez. zu $\frac{1}{2}mg$ und $\frac{1}{2}ng$ symbolischen Factoren der Typen (AB) und (AB) zusammensetzen. Daher wird die Gleichung des conjugirten Connexes vom Grade $\frac{1}{2}mg$ in den u und vom Grade $\frac{1}{2}ng$ in den x; d. h. wir haben wegen (8) und (9):

$$g = 2\,\{mn + 2\,(m-1)\,(n-1)\}\,.$$

Dies ist der Grad derjenigen Invariante der doppelt binären Form (10), *deren Verschwinden aussagt, dass einer Doppelwurzel der einen Reihe von Veränderlichen eine Doppelwurzel der anderen Reihe entsprechen kann.*

Eine besondere Erörterung verlangen diese Verhältnisse dann, wenn die eine der Zahlen m, n gleich 1 ist. Alsdann nämlich kann man bei der einen Reihe nicht mehr von einer eigentlichen Doppelwurzel sprechen; vielmehr tritt bei der Bildung von R der besondere Umstand ein, dass die Coëfficienten der binären Form φ in Bezug auf die linear vorkommende Reihe beide gleich Null gesetzt werden. Ist also etwa:

$$f = \mathsf{X}_1 u_1 + \mathsf{X}_2 u_2 + \mathsf{X}_3 u_3\,,$$

wo die X nur noch von den x allein abhängen, so wird:

$$\varphi = A_x^m \mathsf{A}_\lambda = P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2\,.$$

An Stelle von (11) treten also die Gleichungen:

$$P_1 = 0\,, \quad P_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_1}\lambda_2 = 0\,, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_2}\lambda_2 = 0\,.$$

Die Elimination von λ_1, λ_2 aus den beiden letzten Gleichungen führt auf des Verschwinden der Functionaldeterminante von P_1 und P_2, welches eine bekannte Folge der beiden ersten Gleichungen ist. *In dem Falle also, dass eine der Zahlen m, n gleich Eins ist, reducirt sich R auf die Resultante von P_1 und P_2.*

Um also z. B. den *conjugirten Connex des Connexes* (1, 1) $a_x u_\alpha = 0$ aufzustellen, hat man die Resultante der beiden linearen Formen $A_x \mathsf{A}_1$ und $A_x \mathsf{A}_2$ zu bilden, welche gleich

$$(AB)\,\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 = \frac{1}{2}\,(AB)\,(\mathsf{AB})$$

ist. Die Gleichung des conjugirten Connexes wird daher:

$$(abu)\,(\alpha\beta x) = 0\,. \tag{12}$$

Betrachten wir ferner den Connex (2, 1):

$$f = a_x^2 u_\alpha = b_x^2 u_\beta\,.$$

Hier haben wir die Resultante der Formen $A_x^2 \mathsf{A}_1$, $A_x^2 \mathsf{A}_2$ zu bilden, welche bekanntlich gleich $ST - U^2$ wird, wenn U die simultane Invariante, S und T die besonderen Invarianten beider Formen bedeuten. Um letztere zu bilden benutzen wir bez. die Symbole $AB\mathsf{A}\mathsf{B}$ und $CD\Gamma\Delta$; dann wird:

$$S = (AB)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_1, \quad T = (CD)^2 \Gamma_2 \Delta_2,$$
$$U = (AB)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 = (CD)^2 \Gamma_1 \Delta_2.$$

Mithin haben wir:

$$ST - U^2 = (AB)^2 (CD)^2 \mathsf{A}_1 \Delta_2 (\mathsf{B}\Gamma)$$
$$= \tfrac{1}{2} (AB)^2 (CD)^2 (B\Gamma)(\mathsf{A}\Delta),$$

und *die Gleichung des conjugirten Connexes von $a_x^2 u_a = 0$ wird;*

$$(13) \qquad (abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0.$$

Wir wollen endlich noch zu einem Connexe (2, 2) den conjugirten direct bestimmen. Man hat hier zunächst die Form R für eine binäre Form zu bestimmen, in der zwei Reihen von Veränderlichen vorkommen, und zwar jede zur zweiten Dimension. Ein solche Form sei:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \varphi = A_x^2 \mathsf{A}_\lambda^2 = {} & (a_{11,11} x_1^2 + 2 a_{12,11} x_1 x_2 + a_{22,11} x_2^2) \lambda_1^2 \\ & + 2 (a_{11,12} x_1^2 + 2 a_{12,12} x_1 x_2 + a_{22,12} x_2^2) \lambda_1 \lambda_2 \\ & + (a_{11,22} x_1^2 + 2 a_{12,22} x_1 x_2 + a_{22,22} x_2^2) \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0$$

kann man allgemein durch die folgenden ersetzen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \varrho \cdot x_1 \lambda_1 &= \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_2}, & \varrho \cdot x_2 \lambda_1 &= -\frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_2}, \\ \varrho \cdot x_1 \lambda_2 &= -\frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_1}, & \varrho \cdot x_2 \lambda_2 &= \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_1}, \end{aligned}$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist. Im vorliegenden Falle ist dieses System von Gleichungen gegeben durch:

$$\begin{aligned} (a_{12,12} - \varrho) x_1 \lambda_1 + {} & a_{22,12} x_2 \lambda_1 + a_{12,22} x_1 \lambda_2 + a_{22,22} x_2 \lambda_2 = 0 \\ a_{11,12} x_1 \lambda_1 + {} & (a_{21,12} + \varrho) x_2 \lambda_1 + a_{11,22} x_1 \lambda_2 + a_{21,22} x_2 \lambda_2 = 0 \\ a_{12,11} x_2 \lambda_1 + {} & a_{22,11} x_2 \lambda_1 + (a_{12,21} + \varrho) x_1 \lambda_2 + a_{22,21} x_2 \lambda_2 = 0 \\ a_{11,11} x_1 \lambda_1 + {} & a_{21,11} x_2 \lambda_1 + a_{11,21} x_1 \lambda_2 + (a_{21,21} - \varrho) x_2 \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch Ω die Determinante dieses in Bezug auf die Grössen $x_1 \lambda_1$, $x_2 \lambda_1$, $x_1 \lambda_2$, $x_2 \lambda_2$ linearen Systems, durch $\Omega_{ik,lm}$ die Unterdeterminanten von Ω, so hat man zunächst:

$$(16)\quad \Omega = \begin{vmatrix} a_{12,12}-\varrho & a_{22,12} & a_{12,22} & a_{22,22} \\ a_{11,12} & a_{21,12}+\varrho & a_{11,22} & a_{21,22} \\ a_{12,11} & a_{22,11} & a_{12,21}+\varrho & a_{22,21} \\ a_{11,11} & a_{21,11} & a_{11,21} & a_{21,21}-\varrho \end{vmatrix} = 0;$$

sodann verhalten sich die Quadrate und Producte der obigen vier Grössen, wie die $\Omega_{ik,lm}$, d. h. es ist, wenn μ einen unbestimmten Factor bezeichnet, unter Anderem:

$$\mu \,.\, \varkappa_1 \lambda_1 \,.\, \varkappa_2 \lambda_2 = \Omega_{12,12} = \Omega_{21,21}$$
$$\mu \,.\, \varkappa_1 \lambda_2 \,.\, \varkappa_2 \lambda_1 = \Omega_{12,21} = \Omega_{21,12}\,.$$

Mithin muss der Ausdruck

$$\Omega_{12,21} + \Omega_{21,12} - \Omega_{12,12} - \Omega_{21,21}$$

verschwinden; dieses aber ist nichts anderes als der Differentialquotient von Ω nach ϱ. Man hat daher zu gleicher Zeit:

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = 0,$$

d. h. die Discriminante der in ϱ biquadratischen Gleichung (16) muss verschwinden. *Die gesuchte Bildung R ist folglich gleich dieser Discriminante selbst:*

$$(17)\qquad R = i^3 - 6j^2,$$

wenn i und j die beiden Invarianten der Form Ω bedeuten.

Zur wirklichen Berechnung von R in symbolischer Form bemerken wir Folgendes. In Ω ist der Coëfficient von ϱ^4 gleich Eins, und das Glied mit ϱ^3 fehlt; es ist also:

$$\Omega = \varrho^4 + 6\,U\varrho^2 + 4\,V\varrho + W,$$

und daher:

$$(18)\qquad i = 2\,(W + 3\,U^2), \quad j = 6\,(UW - U^3 - V^2)$$

Die Ausdrücke U, V, W sind Invarianten von φ, welche einen besonderen Charakter haben, denselben, welcher, wie schon oben erwähnt, dem Ausdrucke R zukommt (p. 943). Sie sind nämlich Invarianten, nicht nur, wenn man die Veränderlichen $\varkappa$, λ *derselben* linearen Transformation unterwirft, sondern auch, wenn man auf beide Reihen *verschiedene* lineare Transformationen anwendet. Und zwar sind sie die einzigen dieser Art; denn weil die Zahl der Coëfficienten von φ gleich 9 ist, gibt es 6 von einander unabhängige Invarianten dieser Form in Bezug auf eine den Reihen $\varkappa$, λ gemeinsame lineare Transformation und daher *nur drei Bildungen, welche die Invarianten-Eigenschaft auch in Bezug auf verschiedene Transformationen beider Reihen besitzen.*

Dass in der That diese doppelte Invarianteneigenschaft den Coëfficienten U, V, W der Gleichung $\Omega = 0$ zukommt, beweist man am

einfachsten dadurch, dass man die Unveränderlichkeit von Ω für den Fall nachweist, wo nur eine der Reihen $\varkappa, \lambda$ linear transformirt wird, die andere ungeändert bleibt (vorausgesetzt, dass man statt ϱ gleichzeitig eine Grösse ϱ' passend einführt). Wir benutzen die Transformation:

$$\varkappa_1 = \alpha \varkappa_1' + \beta \varkappa_2', \quad \varkappa_2 = \gamma \varkappa_1' + \delta \varkappa_2', \tag{19}$$

und setzen nun die neuen Gleichungen an:

$$\begin{aligned} \varrho' . \varkappa_1' \lambda_1 &= \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2' \partial \lambda_2}, \quad \varrho' . \varkappa_2' \lambda_1 = -\tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1' \partial \lambda_2}, \\ \varrho' . \varkappa_1' \lambda_2 &= -\tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2' \partial \lambda_1}, \quad \varrho' . \varkappa_2' \lambda_2 = \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1' \partial \lambda_1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Es ist zu zeigen, dass diese Gleichungen auf die Gleichungen (15) zurückkommen. Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa_1'} = \alpha \frac{\partial}{\partial \varkappa_1} + \gamma \frac{\partial}{\partial \varkappa_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \varkappa_2'} = \beta \frac{\partial}{\partial \varkappa_1} + \delta \frac{\partial}{\partial \varkappa_2};$$

daher geben die Gleichungen (20):

$$\begin{aligned} \varrho' . \varkappa_1' \lambda_1 &= \frac{\beta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_2} + \frac{\delta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_2}, \\ \varrho' . \varkappa_2' \lambda_1 &= -\frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_2} - \frac{\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_2}, \\ \varrho' . \varkappa_1' \lambda_2 &= -\frac{\beta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_1} - \frac{\delta}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_1}, \\ \varrho' . \varkappa_2' \lambda_2 &= \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_1} + \frac{\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_1}, \end{aligned}$$

Multiplicirt man jetzt die erste und zweite, bez. dritte und vierte Gleichung einmal mit α, β, einmal mit γ, δ und addirt jedesmal, so kommt wegen (19):

$$\begin{aligned} \varrho' . \varkappa_1 \lambda_1 &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_2}, \quad \varrho' . \varkappa_2 \lambda_1 = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_2}, \\ \varrho' . \varkappa_1 \lambda_2 &= -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_2 \partial \lambda_1}, \quad \varrho' . \varkappa_2 \lambda_2 = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varkappa_1 \partial \lambda_1}; \end{aligned}$$

und dies sind wieder die Gleichungen (15), wenn man noch setzt:

$$\varrho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, \varrho .$$

Da nun ϱ eine Wurzel der Gleichung $\Omega = 0$ war, so genügt ϱ' der Gleichung:

$$\varrho'^4 + 6\, U r^2 \varrho'^2 + 4\, V r^3 \varrho' + W r^4 = 0,$$

wo $r = \alpha\delta - \beta\gamma$ die Substitutionsdeterminante bedeutet.

Eine ganz analoge Betrachtung gilt, wenn man die $\varkappa$ unverändert lässt und nur λ_1, λ_2 linear transformirt. Die Coëfficienten U, V, W von Ω ändern sich daher bez. um die Factoren $r^2 r'^2$, $r^3 r'^3$, $r^4 r'^4$, wenn r die Determinante einer linearen Transformation der $\varkappa_i$, r' die

Determinante einer solchen Transformation der λ_i bedeutet; d. h. *U, V, W sind in der That Invarianten für jede von beiden Transformationen.* Drei solche von einander unabhängige Invarianten der Form $A_x^2 \mathrm{A}_\lambda^2$ sind aber z. B.

$$(AB)^2 (\mathrm{AB})^2, \quad (AB)(BC)(CA)(\mathrm{AB})(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{\Gamma A}),$$
$$(AB)^2 (CD)^2 (\mathrm{A\Gamma})^2 (\mathrm{B\Delta})^2;$$

und da es auch nur drei unabhängige Invarianten der Art gibt, und sich die hier genannten bei linearer Transformation in der That bez. um Factoren $r^2 r'^2$, $r^3 r'^3$, $r^4 r'^4$ ändern, so muss U mit der ersten, V mit der zweiten bis auf einen Zahlenfactor übereinstimmen, während sich W aus der dritten und dem Quadrate der ersten muss zusammensetzen lassen.

In der That kann man den Coëfficienten U von ϱ^2 in Ω auch leicht direct berechnen. Man findet:

$$6U = -2(a_{12,12}^2 - a_{22,12}a_{11,12}) - (a_{11,11}a_{22,22} + a_{22,11}a_{11,22} - 2a_{12,11}a_{12,22})$$
$$= (AB)^2 \{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_1^2\mathrm{B}_2^2\},$$

oder wenn man gleichzeitig A mit B, A mit B vertauscht und die halbe Summe des alten und neuen Ausdruckes bildet:

$$U = -\tfrac{1}{12}(AB)^2(\mathrm{AB})^2. \tag{21}$$

Zur Berechnung von V bemerken wir, dass die zweite der obigen Invarianten in nicht symbolischer Form gegeben ist durch

$$V' = 6\begin{vmatrix} a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,22} \\ a_{12,11} & a_{12,12} & a_{12,22} \\ a_{22,11} & a_{22,12} & a_{22,22} \end{vmatrix} = (AB)(BC)(CA)(\mathrm{AB})(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{\Gamma A}),$$

und dass $V = V'.c$, wenn c einen Zahlenfactor bedeutet. Nun wird aber $V' = 6$, wenn man $a_{11,11} = a_{12,12} = a_{22,22} = 1$ nimmt und alle anderen Coëfficienten von φ verschwinden lässt. Andererseits wird in Folge letzterer Substitution:

$$\Omega = (1-\varrho^2)^2 - (1+\varrho)^2 = \varrho^4 - 3\varrho^2 - 2\varrho,$$

also $4V = -2$; somit folgt $c = -\frac{1}{12}$ und:

$$V = -\tfrac{1}{12}(AB)(BC)(CA)(\mathrm{AB})(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{\Gamma A}). \tag{22}$$

Den dritten Coëfficienten W erhält man aus Ω für $\varrho = 0$. Die so entstehende Determinante entwickeln wir, um für sie den symbolischen Ausdruck zu finden, nach zweigliedrigen Unterdeterminanten in der Form:

$$W = p_{12}q_{34} + p_{34}q_{12} + p_{24}q_{31} + p_{31}q_{24} + p_{23}q_{14} + p_{14}q_{23},$$

wo immer $p_{ik} = -p_{ki}$, $q_{ik} = -q_{ki}$ und z. B.:

$$p_{12} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}a_{22,12} \qquad = -\tfrac{1}{2}(AB)^2 \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2$$
$$p_{13} = a_{12,22}a_{11,12} - a_{11,22}a_{12,12} = -(AB)A_1B_1\mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{34} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}a_{22,12} \qquad = -\tfrac{1}{2}(CD)^2\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es wird dann zunächst:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{4}(AB)^2(CD)^2\{&\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2 + \mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1^2\} \\ -(AB)(CD)\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\{&A_2B_2C_1D_1\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2 - A_1B_1C_2D_2\mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 \\ &-A_2B_1C_1D_2\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2 - A_1B_2C_2D_1\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\}. \end{aligned}$$

Hier lassen sich das dritte und fünfte Glied zusammenziehen zu

$$(AB)(CD)\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2A_2C_1(BD),$$

und ebenso das vierte und sechste, nachdem man in ersterem A mit B und A mit B vertauscht hat, zu

$$-(AB)(CD)\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2A_1C_2(BD);$$

die beiden so entstehenden Glieder endlich geben zusammengenommen den Ausdruck:

$$W' = -(AB)(AC)(BD)(CD)\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Delta_1\Delta_2\Gamma_1^2.$$

Nun ist identisch $(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD)$; und sonach:

$$W' = -(AB)^2(CD)^2\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2 - W'',$$

wo:

$$\begin{aligned} W'' &= (AB)(CD)(BC)(AD)\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2 \\ &= (AD)(BC)(CD)(AB)\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(AB)(CD)\{(AD)(BC) - (BD)(AC)\}\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(AB)^2(CD)^2\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2. \end{aligned}$$

Setzen wir also den Ausdruck W' in W ein, so wird schliesslich:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{4}(AB)^2(CD)^2\{&\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2 + \mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1^2 \\ &+ 2\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 - 4\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\}. \end{aligned}$$

Hierin vertauschen wir gleichzeitig A, A mit B, B, sodann C, Γ mit D, Δ und dann beide zugleich. Man erhält so vier Ausdrücke für W und W selbst gleich ihrer Summe, dividirt durch 4:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{8}(AB)^2(CD)^2\{&(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\Gamma_2\Delta_2 + \mathsf{A}_2\mathsf{B}_2\Gamma_1\Delta_1)^2 \\ &+ \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2(\Gamma_1^2\Delta_2^2 + \Gamma_2^2\Delta_1^2) + \Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2(\mathsf{A}_1^2\mathsf{B}_2^2 + \mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_1^2) \\ &- \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\Gamma_1\Gamma_2(\mathsf{B}_1^2\Delta_2^2 + \mathsf{B}_2^2\Delta_1^2) - \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Delta_1\Delta_2(\mathsf{A}_1^2\Gamma_2^2 + \mathsf{A}_2^2\Gamma_1^2) \\ &- \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\Delta_1\Delta_2(\mathsf{B}_1^2\Gamma_2^2 + \mathsf{B}_2^2\Gamma_1^2) - \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1\Gamma_2(\mathsf{A}_1^2\Delta_2^2 + \mathsf{A}_2^2\Delta_1^2)\}. \end{aligned}$$

Es ist aber identisch:

$$\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2(\Gamma_1^2\Delta_2^2+\Gamma_2^2\Delta_1^2)+\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2(\mathsf{A}_1^2\mathsf{B}_2^2+\mathsf{A}_2^2\mathsf{B}_1^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{-(\mathsf{AB})^2(\Gamma\Delta)^2+(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2\Gamma_1\Delta_2+\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\Gamma_2\Delta_1)^2$$
$$+(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2\Gamma_2\Delta_1+\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\Gamma_1\Delta_2)^2\}\,.$$

Trägt man dies und die ähnlichen Umformungen der entsprechenden Ausdrücke in den Ausdruck von W ein, so erhält man:

$$W=\tfrac{1}{16}(AB)^2(CD)^2\{(\mathsf{A}\Gamma)^2(\mathsf{B}\Delta)^2+(\mathsf{A}\Delta)^2(\mathsf{B}\Gamma)^2-(\mathsf{AB})^2(\Gamma\Delta)^2\}\,.$$

Von den drei Gliedern, welche hier auftreten, sind die beiden ersten einander gleich, das letzte ist gleich $-9\,U^2$; und man hat so endlich

$$W=\tfrac{1}{8}(AB)^2(CD)^2(\mathsf{A}\Gamma)^2(\mathsf{B}\Delta)^2-9\,U^2\,. \tag{23}$$

Die in den Gleichungen (21), (22), (23) gegebenen Werthe hat man in i und j nach (18) einzusetzen, um nach (17) die gesuchte Invariante R zu erhalten. *Die Gleichung des zu dem Connexe $a_x^2u_\alpha^2=0$ conjugirten Connexes ist daher gegeben durch:*

$$8(W+3U^2)^3-216(UW-U^3-V^2)^2=0,$$

wenn:

$$U=-\tfrac{1}{12}(abu)^2(\alpha\beta x)^2$$
$$V=-\tfrac{1}{12}(abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x)$$
$$W=\tfrac{1}{8}(abu)^2(cdu)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\delta x)^2-9\,U^2\,. -$$

Der conjugirte Connex war vermöge der Gleichungen (1) Element für Element *eindeutig* auf den gegebenen Connex $f=0$ bezogen; diese Gleichungen geben also einen speciellen Fall einer *allgemeinen eindeutigen Transformation des Connexes* $f=0$, welche man in den Gleichungen:

$$\rho y_i=\varphi_i\binom{p\ \ q}{x,\ u},\quad \sigma v_i=\psi\binom{r\ \ s}{x;\ u}\qquad (i=1,2,3) \tag{24}$$

ansetzen kann, wenn $\varphi_i=0$ drei beliebige Connexe (p,q), $\psi_i=0$ drei beliebige Connexe (r,s) vorstellen. Die Gleichung $F(y,v)=0$ des neuen Connexes ergibt sich dann durch Elimination von ρ, σ, x_i, u_i aus den Gleichungen (24) und aus $f(x,u)=0$. Für den Fall, dass die Transformationsconnexe $\varphi=0$, $\psi=0$ zu $f=0$ nicht in besonderer Lage sind, bestimmt man leicht Ordnung m' und Klasse n' von $F=0$. Die Ordnung m' nämlich ist offenbar gleich der Zahl der Punkte y, welche bei beliebig gewählten Werthen der v_i gleichzeitig den Gleichungen (24) und $f=0$, $\gamma_y=0$ genügen, wo die γ_i beliebige Grössen sind; d. h. — wegen der Eindeutigkeit der Transformation (24) — gleich der Zahl der Elemente (x,u), welche den vier Connexen:

$$f(x,u)=0,\quad \Sigma\gamma_i\varphi_i=0,\quad v_2\psi_1-v_1\psi_2=0,\quad v_3\psi_2-v_2\psi_3=0$$

gemeinsam sind; und somit haben wir nach Gleichung (4), p. 940:

(25) $$m' = r^2nq + s^2mp + 2rs(mq + np)$$
und ebenso:
(26) $$n' = p^2ns + q^2mr + 2pq(ms + nr).$$

Hieran sind noch Modificationen anzubringen, wenn die Transformationsconnexe φ, ψ zu f in besonderer Beziehung stehen. *Es mögen z. B. die Connexe $\varphi_i = 0$ ein Curvenpaar (d, e), die Connexe $\psi_i = 0$ ein Curvenpaar (δ, ε) mit $f = 0$ gemein haben.* Von dem Curvenpaare, welches den Gleichungen

$$f = 0, \quad v_2\psi_1 - v_1\psi_2 = 0, \quad v_3\psi_2 - v_2\psi_3 = 0$$

gemeinsam ist, und dessen Ordnung und Klasse durch die Gleichungen (3) und (2) p. 940 bestimmt wird, ist dann noch das Curvenpaar (δ, ε) abzuziehen. Es bleibt dann ein Paar von der Ordnung $2rsn + ms^2 - \delta$ und der Klasse $2rsm + nr^2 - \varepsilon$. Nach den Entwicklungen auf p. 940 wird also jetzt *die Ordnung des Connexes $F(y, v) = 0$:*

(27) $$m' = (2nrs + ms^2 - \delta)p + (2mrs + nr^2 - \varepsilon)q$$

und die Klasse desselben:

(28) $$n' = (2npq + mq^2 - d)r + (2mpq + np^2 - e)s.$$

Aus diesen Formeln findet man insbesondere wieder Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes. Die in den Gleichungen (1) an Stelle von φ_i auftretenden Connexe $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ bestimmen nämlich im Allgemeinen ein Curvenpaar der Ordnung $3m(n-1)^2$ und der Klasse $3(n-1)m^2$, welches nach dem Euler'schen Theoreme auch dem Connexe $f = 0$ angehört. Für die Gleichungen (1) wird daher:

$$d = 3m(n-1)^2, \quad e = 3(n-1)m^2,$$

und ebenso:

$$\delta = 3n^2(m-1), \quad \varepsilon = 3(m-1)^2 n$$

ferner:

$$p = m, \quad q = n - 1, \quad r = m - 1, \quad s = n.$$

Setzt man aber diese Werthe in (27) und (28) ein, so findet man in der That wieder die bekannten Zahlen für Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes.

Bei weiteren Untersuchungen über die eindeutigen Transformationen der Connexe wird man besonders auf die Singularitäten derselben zu achten haben (wie bei den Transformationen einer Curve) und auf die Beziehungen zwischen den Singularitäten des gegebenen zu denen des transformirten Connexes. Auch wird man verschiedene Arten von Transformationen unterscheiden müssen, je nachdem dieselben einen ganzen Connex eindeutig in einen anderen überführen, oder nur für die Elemente einer Coincidenz, oder endlich nur für die

eines Curvenpaares eindeutig sind, in analoger Weise, wie man im Raume eindeutige Transformationen einer Fläche und einer einzelnen Curve zu betrachten hat. Die sich hieran knüpfenden Untersuchungen gestalten sich in ganz ähnlicher Weise wie die entsprechenden Theorien in einer beliebigen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen. Insbesondere wird man sowohl für Connexe, wie für Coincidenzen und Curvenpaare eine Zahl, *das Geschlecht dieser Gebilde*, aufstellen können, welche bei allen eindeutigen Transformationen derselben ungeändert bleibt.*) Es ist jedoch zu bemerken, dass *bei den Coincidenzen*, wie bei den algebraischen Flächen, *zwei solche constante Zahlen*, *bei den Connexen*, wie bei Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, *drei solche Zahlen auftreten***); beim Curvenpaare dagegen gibt es, wie bei einer einzelnen Curve (oder überhaupt bei einer algebraischen Mannigfaltigkeit von einer Dimension) nur *eine* solche constante Zahl. Die wirkliche Aufstellung dieser verschiedenen Zahlen (Bestimmung ihrer Abhängigkeit von etwaigen Singularitäten des Connexes, der Coincidenz oder des Curvenpaares) und die Durchführung des Beweises für ihre Erhaltung bei eindeutigen Transformationen, wird in analoger Weise zu geschehen haben wie bei jenen allgemeinen algebraischen Mannigfaltigkeiten. Darauf wollen wir indess hier nicht mehr eingehen. Es sei nur noch erwähnt, wie *für die Connexe und Coincidenzen die dreifachen bez. zweifachen Integrale zu bilden sind, mit deren Untersuchung man die Bestimmung jener Zahlen in Zusammenhang bringen kann.* Die betreffenden Resultate für beliebige Mannigfaltigkeiten (vgl. Nöther a. a. O.) modificiren sich hier nämlich in eigenthümlicher Weise, weil wir es nicht mit einer Gruppe von vier, sondern mit zwei Gruppen von je zwei Veränderlichen zu thun haben.

Es sei (x, u) ein Element des Connexes $f = 0$. Da letzterer ein dreifach unendliches Gebilde darstellt, so sind in ihm drei von einander linear-unabhängige Fortschreitungsrichtungen möglich, die wir, von dem Elemente (x, u) zu einem benachbarten Elemente $(x + dx, u + du)$ übergehend, den Veränderlichen ertheilen können. Indem wir drei solche Differentiale durch die Buchstaben d, d', d'' unterscheiden, ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma f_{x_i}' \, dx_i + \Sigma f_{u_i}' \, du_i &= 0 \\ \Sigma f_{x_i}' \, d'x_i + \Sigma f_{u_i}' \, d'u_i &= 0 \\ \Sigma f_{x_i}' \, d''x_i + \Sigma f_{u_i}' \, d''u_i &= 0, \end{aligned}$$

wo $f_{x_i}' = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{u_i}' = \frac{\partial f}{\partial u_i}$. Nehmen wir die Gleichungen hinzu:

---

*) Vgl. Clebsch: Comptes rendus, Bd. 67, December 1868 und Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, p. 293 ff.

**) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 495 ff.

$$\Sigma x_i f_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i f_{u_i}' = 0,$$

so haben wir fünf Gleichungen, aus denen die Verhältnisse der f_{x_i}', f_{u_i}' bestimmt werden können; und zwar werden sie den aus dem unvollständigen Systeme

$$\left\| \begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''u_1 & d''u_2 & d''u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Determinanten proportional. Ist also Θ eine ganze homogene Function vom Grade $m-3$ in den x_i und vom Grade $n-3$ in den u_i, so stellt der Ausdruck

$$(29) \qquad dI = \frac{\Theta . \begin{vmatrix} dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & x_1 & 0 & \alpha_1 \\ dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & x_2 & 0 & \alpha_2 \\ dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & x_3 & 0 & \alpha_3 \\ du_1 & d'u_1 & d''u_1 & 0 & u_1 & \beta_1 \\ du_2 & d'u_2 & d''u_2 & 0 & u_2 & \beta_2 \\ du_3 & d'u_3 & d''u_3 & 0 & u_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\Sigma \alpha_i f_{x_i}' + \Sigma \beta_i f_{u_i}'}$$

ein Element eines dreifachen Integrals dar, welches von den Grössen α_i, β_i vollständig unabhängig ist. Bestimmt man die Constanten in Θ so, dass dieses Integral für kein Element des Connexes $f=0$ unendlich wird, so gibt die Zahl der willkürlich bleibenden Constanten von Θ das *Geschlecht p des Connexes* an. Besitzt also der gegebene Connex keine Doppel-Coincidenz etc., so hat Θ keiner Bedingung zu genügen; dann wird:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

und dies ist die eine der für einen Connex charakteristischen Zahlen.*)

Eine einfachere Form kann man dem Differentiale dI in doppelter Weise geben. Man kann nämlich zwei der drei Fortschreitungen d, d', d'' so wählen, dass einmal die u_i, einmal die x_i constant bleiben. Alsdann wird etwa:

$$\begin{aligned} d'u_1 &= d'u_2 = d'u_3 = 0 \\ d''x_1 &= d''x_2 = d''x_3 = 0; \end{aligned}$$

*) Die andern beiden Geschlechtszahlen würden durch die Zahlen gegeben werden, welche für eine aus $f=0$ durch einen Connex $\Theta=0$ ausgeschnittene Coincidenz in analoger Weise charakteristisch sind.

und wenn man zugleich einmal die β_i, einmal die α_i verschwinden lässt, ergeben sich die beiden einfachen Formen:

$$dI = \frac{\Theta \,.\, (x\alpha d'x) \,.\, (udud''u)}{\Sigma\alpha_i f_{x_i}'} = -\frac{\Theta \,.\, (xdxd'x)(u\beta d''u)}{\Sigma\beta_i f_{u_i}'}.$$

Es sei noch bemerkt, dass man zu demselben Ausdrucke für dI auch dann noch kommt, wenn man davon ausgeht, f als eine homogene Function von sechs cogredienten Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$ zu betrachten. Nach den allgemeinen Regeln für solche Functionen*) ist dann ein Differential zu betrachten, welches aus (29) entsteht, indem man die Determinante des Zählers ersetzt durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & d'''x_1 \\ \alpha_2 & x_2 & dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & d'''x_2 \\ \alpha_3 & x_3 & dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & d'''x_3 \\ \beta_1 & u_1 & du_1 & d'u_1 & d''u_1 & d'''u_1 \\ \beta_2 & u_2 & du_2 & d'u_2 & d''u_2 & d'''u_2 \\ \beta_3 & u_3 & du_3 & d'u_3 & d''u_3 & d'''u_3 \end{vmatrix},$$

wo durch d, d', d'', d''' verschiedene Fortschreitungsrichtungen angezeigt sind. Beachten wir aber, dass ausser den Gleichungen:

$$\Sigma f_{x_i}' d^{(k)} x_i + \Sigma f_{u_i}' d^{(k)} u_i = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

hier noch die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma x_i f_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i f_{u_i}' = 0,$$

so zeigt sich, dass die Determinante verschwinden muss, welche man durch Elimination der f_{x_i}', f_{u_i}' aus diesen Gleichungen erhält. Man kann deshalb setzen:

$$\begin{aligned} d'''x_i &= \varkappa dx_i + \lambda d'x_i + \mu d''x_i + x_i d\varrho \\ d'''u_i &= \varkappa du_i + \lambda d'u_i + \mu d''u_i + u_i d\sigma, \end{aligned}$$

wo $d\varrho$, $d\sigma$ irgend welche unendlich kleine Grössen bezeichnen. Trägt man dies in die sechsgliedrige Determinante ein, so erhält man wieder nach einer leichten Umformung die in (29) auftretende Determinante bis auf einen nur von $d\sigma$ und $d\varrho$ abhängenden Factor; letzterer aber steht zu dI und f in keiner Beziehung mehr, ist also auch auf weitere Betrachtungen gänzlich ohne Einfluss. So zeigt sich, dass es genügt, das Element eines dreifachen statt desjenigen eines vierfachen Integrals zu untersuchen.

In demselben Sinne wie von dem Geschlechte eines Connexes,

*) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, a. a. O.

kann man von *dem Geschlechte einer Coincidenz* sprechen. Denken wir uns diese als den Durchschnitt zweier Connexe (m, n) bez. (m', n'):

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

so hat man ein Doppelintegral*) zu betrachten, dessen lineare Differentiale den beiden hier noch möglichen Fortschreitungsrichtungen entsprechen. Es seien letztere durch d, d' dargestellt; man hat dann:

$$\Sigma f_{x_i}' dx_i + \Sigma f_{u_i}' du_i = 0, \quad \Sigma f_{x_i}' d' x_i + \Sigma f_{u_i}' d' u_i = 0$$
$$\Sigma x_i f_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i f_{u_i}' = 0;$$

und:

$$\Sigma \varphi_{x_i}' dx_i + \Sigma \varphi_{u_i}' du_i = 0, \quad \Sigma \varphi_{x_i}' dx_i + \Sigma \varphi_{u_i}' du_i = 0,$$
$$\Sigma x_i \varphi_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i \varphi_{u_i}' = 0.$$

Jedes dieser Systeme von Gleichungen kann man als ein lineares System für die Differentialquotienten der darin auftretenden Functionen ansehen. Es folgt dann nach bekannten Sätzen, dass die aus den Reihen:

$$\begin{matrix} f_{x_1}', & f_{x_2}', & f_{x_3}', & f_{u_1}', & f_{u_2}', & f_{u_3}', \\ \varphi_{x_1}', & \varphi_{x_2}', & \varphi_{x_3}', & \varphi_{u_1}', & \varphi_{u_2}', & \varphi_{u_3}', \end{matrix}$$

zu bildenden zweigliedrigen Determinanten den viergliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|$$

einzeln proportional sind. Bezeichnen wir also mit Θ eine ganze Function, welche die x_i homogen zur Ordnung $m + m' - 3$, die u_i homogen zur Ordnung $n + n' - 3$ enthält, so wird:

$$dI = \frac{\Theta \cdot \left[\begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & x_i & 0 & a_i & \alpha_i \\ du_i & d'u_i & 0 & u_i & b_i & \beta_i \end{vmatrix} \right]_{i=1,2,3}}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i f_{x_i}' + \Sigma b_i f_{u_i}' & \Sigma \alpha_i f_{x_i}' + \Sigma \beta_i f_{u_i}' \\ \Sigma a_i \varphi_{x_i}' + \Sigma b_i \varphi_{u_i}' & \Sigma \alpha_i \varphi_{x_i}' + \Sigma \beta_i \varphi_{u_i}' \end{vmatrix}}.$$

ein Differential, welches von den Grössen a_i, α_i, b_i, β_i völlig unabhängig ist. Der in eckige Klammern eingeschlossene Factor des Zählers ist dabei zur Abkürzung für eine sechsgliedrige Determinante gesetzt, deren wirkliche Bildungsweise man leicht übersehen wird.

*) Vgl. die entsprechende Bildung des einfachen Integrals für den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen bei Clebsch: Anwendungen der Abel'schen Functionen auf Geometrie §. 11 ff., Crelle's Journal, Bd. 63. — Es kann übrigens auch Coincidenzen geben, welche nicht als vollständige Schnitte *zweier* Connexe darstellbar sind.

Wird nun Θ so bestimmt, dass das aus dI entstehende Doppelintegral für jedes innerhalb der Coincidenz zu wählende umgrenzte Gebiet endlich bleibt, so ist die Zahl der in Θ übrig bleibenden und durch Benutzung von $f = 0$, $\varphi = 0$ unzerstörbaren, willkürlichen Coëfficienten gleich *dem Geschlechte π der Coincidenz.**) Im Allgemeinen hat man daher:

$$\pi = \frac{(m+m'-1)(m+m'-2)}{2} \cdot \frac{(n+n'-1)(n+n'-2)}{2}$$
$$- \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} \cdot \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Um den Ausdruck dI noch zu vereinfachen, kann man hier nicht mehr Fortschreitungsrichtungen wählen, für welche alle dx_i, bez. alle du_i verschwinden; man kann aber entweder die a, α oder die b, β gleich Null setzen und erhält dann für dI die beiden Darstellungen:

$$dI = \frac{\Theta \,.\, (x\,dx\,d'x) \,.\, (u\,b\,\beta)}{\Sigma b_i f_{u_i}' \,.\, \Sigma \beta_i \varphi_{u_i}' - \Sigma b_i \varphi_{u_i}' \,.\, \Sigma \beta_i f_{u_i}'}$$
$$= \frac{\Theta \,.\, (u\,du\,d'u) \,.\, (x\,a\,\alpha)}{\Sigma a_i f_{x_i}' \,.\, \Sigma \alpha_i \varphi_{x_i}' - \Sigma a_i \varphi_{x_i}' \,.\, \Sigma \alpha_i f_{x_i}'}.$$

Das Geschlecht eines Curvenpaares endlich ist gleich der Zahl, welche nach bekannten Theorien irgend einer der beiden (eindeutig auf einander bezogenen) Curven des Paares als Geschlecht zukommt und mit den zu einer solchen Curve gehörigen Abel'schen Integralen in bekannter Beziehung steht (p. 790 ff.).

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass man auch für die hier aufgestellten Differentiale dreifacher und zweifacher Integrale leicht Gleichungen finden kann, die der Differentialgleichung des Abel'schen Theorems genau analog sind.**) Es lässt sich eine solche Gleichung jedoch nicht in derselben Weise wie das Abel'sche Theorem sofort zu geometrischen Anwendungen benutzen, weil die Eigenschaften mehrfacher algebraischer Integrale mit complexen Grenzen noch nicht näher untersucht sind.

IV. Die Hauptcoincidenz.

Unter den Connexen gibt es einen, welcher eine eigenthümliche Wichtigkeit hat; es ist derjenige lineo-lineare Connex, welcher durch das Verschwinden der identischen Covariante u_x, d. i. durch die Gleichung:

(1) $$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

*) Die zweite Geschlechtszahl der Coincidenz wird gleich dem Geschlechte des Curvenpaares, welches in der Coincidenz $f = 0$, $\varphi = 0$ durch einen Connex $\Theta = 0$ bestimmt wird, welcher den im Texte angedeuteten Forderungen zu genügen hat.

**) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, p. 305, Anmerkung.

gegeben wird; wir nennen ihn kurz den *identischen Connex.* In demselben gehört zu jedem Punkte die Gesammtheit der durch ihn gehenden Geraden, zu jeder Geraden die Gesammtheit der auf ihr liegenden Punkte; d. h. Element des identischen Connexes ist überhaupt jede Combination von Punkt und Gerade in vereinigter Lage. Die zu einem Punkte gehörige Curve K_1 ist also der Punkt selbst, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels betrachtet, die zu einer Geraden gehörige Curve C_1 ist sie selbst, betrachtet als Träger einer Punktreihe.

Durch die Gesammtheit der Elemente, welche einem beliebig gegebenen Connexe $f = 0$ und dem identischen Connexe $u_x = 0$ gemeinsam sind, ist eine für das Studium des Connexes $f = 0$ besonders wichtige covariante Coincidenz gegeben; wir nennen sie die *Hauptcoincidenz des Connexes.* In ihr entsprechen jedem Punkte n durch ihn gehende Strahlen (*„Coincidenzstrahlen“*), die von ihm an die zugehörige K_n gelegten Tangenten; jeder Geraden entsprechen m auf ihr liegende Punkte (*„Coincidenzpunkte“*), ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen C_m.

So gehört zu jedem Connexe eine Hauptcoincidenz; umgekehrt dagegen gibt es unendlich viele Connexe (m, n), denen eine gegebene Hauptcoincidenz (m, n) angehört. Ist nämlich $f = 0$ einer von diesen, so enthalten offenbar alle Connexe:

$$f + M u_x = 0, \tag{2}$$

wo $M = 0$ einen beliebigen Connex $(m - 1, n - 1)$ darstellt, dieselbe Hauptcoincidenz wie f. Alle folgenden Untersuchungen über die Hauptcoincidenz eines Connexes f gelten daher ebenso für alle aus f und u_x wie in (2) zusammengesetzten Zwischenformen.

Die Hauptcoincidenz wird nun dadurch von ganz besonderem Interesse, dass sie zu den *algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung**) in engster Beziehung steht, wie wir sogleich sehen werden. Wenn man durch jeden Punkt der Ebene die n Richtungen der Geraden zieht, welche ihm in der Hauptcoincidenz entsprechen, und diese als Bogenelemente eines Curvensystems betrachtet, so setzt sich aus ihnen ein System von Curven zusammen, von denen n durch jeden Punkt hindurchgehen; und zwar sind die Tangenten derselben in dem Punkte die dem letzteren in der Hauptcoincidenz zugehörigen n Strahlen. Zur Aufsuchung der so entstehenden Curven hat man

———

*) Es wird nicht zu einem Missverständnisse führen können, wenn hier das Wort Ordnung in anderer Bedeutung gebraucht wird als bisher im Texte. Wir verstehen, wie auch sonst üblich, unter Differentialgleichung erster Ordnung eine solche, in der nur die ersten Differentiale dx_i bez. du_i vorkommen, diese aber zu beliebig hoher Dimension.

eine Differentialgleichung zu integriren, die in folgender Weise gefunden wird. Wir setzen wieder $f = a_x^m u_\alpha^n$. Es sei u eine durch den Punkt x gehende Gerade, welche ihm in der Hauptcoincidenz entspricht, so dass $f(x, u) = 0$ und $u_x = 0$. Ein zu x benachbarter Punkt $x + dx$ befriedigt dann die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_{dx} &\equiv u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0, \\ u_x &\equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \end{aligned}$$

woraus man die Verhältnisse der u_i gleich denen der aus den x_i und dx_i gebildeten Determinanten findet. Führt man also letztere in f oder in $f + Mu_x$ ein, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(4)\ f(x_1, x_2, x_3; x_2 dx_3 - x_3 dx_2, x_3 dx_1 - x_1 dx_3, x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \equiv a_x^m (\alpha x dx)^n = 0.$$

Dualistisch entsprechend kann man ausgehen von einem Strahle u und seinen m Coincidenzpunkten. Zieht man durch einen derselben einen zu u benachbarten Strahl $u + du$, so wird auf letzterem sich ein ihm zugeordneter Punkt $x + dx$ befinden; von diesem kann man dann ebenso weiter gehen und erhält so ein System von Curven, von denen m eine beliebige Gerade berühren. Zur Bestimmung derselben treten an Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen:

$$(5)\qquad u_x = 0, \qquad (du)_x \equiv x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0,$$

woraus man an Stelle von (4) die Differentialgleichung findet:

$$(6)\qquad f\big((udu), u\big) \equiv (a u du)^m u_\alpha^n = 0.$$

Dies Curvensystem hat also die Eigenschaft, dass die Tangente einer Curve desselben in einem ihrer Punkte durch einen der Coincidenzstrahlen dieses Punktes gegeben wird. Durch ganz dieselbe Eigenschaft war aber auch das durch die Differentialgleichung (4) gegebene Curvensystem charakterisirt; *beide Systeme sind daher identisch: Die Gleichung* (5) *ist die Differentialgleichung in Liniencoordinaten für dasselbe Curvensystem, dessen Gleichung in Punktcoordinaten durch Integration der Differentialgleichung* (4) *gewonnen wird.* Die hierdurch dargestellten Curven nennen wir die *Hauptcoincidenz-* oder *Integral-Curven des Connexes* $f = 0$.

Die hier auftretenden algebraischen Differentialgleichungen (4) und (5) sind die allgemeinsten ihrer Art, wenn dem Connexe $f = 0$ allgemeine Coëfficienten beigelegt werden; denn *jede Differentialgleichung erster Ordnung mit algebraischen Coëfficienten kann auf diese Weise erhalten werden.* Den Zusammenhang zwischen einer gegebenen Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen und der Hauptcoincidenz eines Connexes kann man nämlich offenbar in folgender Weise darlegen.

Es sei eine algebraische Gleichung zwischen x, y *und* $p = \frac{dy}{dx}$ *gegeben:* $\varphi(x, y, p) = 0$. *Man bringe die Gleichung* $\varphi = 0$ *in die Form:*

$$(7)\qquad f(x,\ y;\ -p,\ xp - y) = 0,$$

was noch auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Dann ist immer

$$(8)\qquad f\left(\frac{x_1}{x_3},\ \frac{x_2}{x_3};\ \frac{u_1}{u_2},\ \frac{u_3}{u_2}\right) = 0$$

die Gleichung eines Connexes, dessen Integralcurven durch die Gleichung $\varphi = 0$ *gegeben werden.* In der That setzt man wieder $u_i = (x\,dx)_i$ und dann $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, so geht die Gleichung (8) wieder in (7) über. Statt (8) könnte man übrigens auch jede Gleichung:

$$f + \frac{u_x}{x_3 u_2} M = 0$$

als zugehörige Connexgleichung wählen, dem entsprechend, dass die Gleichung (7) auf verschiedene Weisen gebildet werden kann.

Wie wir hier in (4) und (5) zwei verschiedene Differentialgleichungen für dieselben Curven vor uns haben, kann man jede algebraische Differentialgleichung durch eine andere ihr äquivalente ersetzen und so die Integration oft vereinfachen.*) Man hat zu dem Zwecke die gegebene Differentialgleichung zunächst auf die Form (7) zu bringen, den zugehörigen Connex (8) aufzustellen und in ihm $x_i = (u\,du)_i$ statt $u_i = (x\,dx)_i$ zu setzen.

Beispiele für die Bestimmung von Integralcurven werden wir weiterhin behandeln; hier betrachten wir nur einen besonders einfachen Fall, nämlich den Connex, welcher durch das Verschwinden der Functionaldeterminante zweier Formen $\varphi = a_x^m$, $\psi = \alpha_x^n$ und der Form u_x dargestellt wird:

$$(9)\qquad (a\alpha u)\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = 0.$$

Derselbe gibt die Differentialgleichung:

$$mn\,(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx})\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} \equiv m\varphi\, d\psi - n\psi\, d\varphi = 0.$$

Seine Hauptcoincidenzcurven sind also:

$$m \log \psi - n \log \varphi = \log \lambda,$$

wenn λ einen Parameter bedeutet, oder:

$$(10)\qquad \psi^m - \lambda \varphi^n = 0.$$

*) Entsprechende Betrachtungen für den Raum (d. i. die Ueberführung einer für Punktcoordinaten gegebenen Differentialgleichung in eine solche für Ebenencoordinaten) findet man bei Plücker: System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, p. 27.

Und hierdurch ist gleichzeitig die Integration der Differentialgleichung:

$$(a\alpha u)\,(a u d u)^{m-1}\,(\alpha u d u)^{n-1} = 0$$

gegeben; wenigstens wird letztere durch Lösung des rein algebraischen Problems geleistet, die Gleichung der Curven (10) in Liniencoordinaten aufzustellen. Man ersieht aus (10), dass in der That durch jeden Punkt der Ebene eine Curve des Systems geht, während jede Gerade von $m+n-2$ Curven berührt wird. Zunächst nämlich würde die Liniencoordinatengleichung der Curve (10) vom Grade $2(mn-1)$ in λ werden; da aber in dem Systeme die Curve ψ m-fach enthalten ist, und so jede beliebige Gerade in jedem ihrer n Schnittpunkte $(m-1)$-fach berührt (vgl. p. 424), so muss die Liniencoordinatengleichung für *jede* Linie die $n(m-1)$-fache Wurzel $\lambda = 0$ und analog die $m(n-1)$-fache Wurzel $\lambda = \infty$ zulassen. Nach Absonderung der entsprechenden Factoren bleibt sie in der That vom Grade

$$2(mn-1) - (m-1)n - (n-1)m = m + n - 2.$$

Dass in (10) algebraische Integralcurven auftreten, ist durch die specielle Natur des gewählten Beispiels bedingt; im Allgemeinen wird man transscendente Curven erhalten, von denen aber auch immer n durch einen beliebigen Punkt gehen, m eine beliebige Gerade berühren. Für diese Curvensysteme kommt also den Zahlen n, m eine Bedeutung zu, ähnlich denjenigen, welche wir früher in der Theorie der Charakteristiken den Zahlen μ, μ' (bez. μ, ν) beilegten; und in der That lassen sich auch verschiedene auf diese Zahlen bezügliche Sätze über Systeme algebraischer Curven unmittelbar auf die allgemeineren *Systeme transscendenter Curven* übertragen, *welche durch eine Differentialgleichung:*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{oder besser:} \quad a_x^m\,(\alpha x d x)^n = 0$$

definirt sind.

Ziehen wir z. B. durch einen festen Punkt alle möglichen Geraden, so wird jede derselben in m Punkten von den Curven des Systems berührt; und die Gleichung $X_y = 0$ des Ortes dieser Berührungspunkte ergibt sich durch Elimination von u aus den Gleichungen:

$$u_x = 0, \qquad u_y = 0, \qquad a_x^m u_\alpha^n = 0,$$

ist also gegeben durch:

$$(11) \qquad X_y = a_x^m\,(\alpha x y)^n = 0;$$

ebenso führt die dualistisch entsprechende Ueberlegung zu der Gleichung:

$$(12) \qquad U_v = (a u v)^m u_\alpha^n = 0;$$

und wir haben die Sätze:

Der Ort der Punkte x, welche durch ihre Verbindungslinien mit einem festen Punkte y zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ist eine Curve der Ordnung $m + n$: $X_y = 0$; und diese Curve hat einen n-fachen Punkt in y.

Die Enveloppe der Strahlen u, welche durch ihre Schnittpunkte mit einem festen Strahle v zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ist eine Curve der Klasse $m + n$: $U_v = 0$; und diese Curve hat v zur m-fachen Tangente.

Die Ordnung der Curve $X_y = 0$ ist also in der That ebenso von den Zahlen n, m abhängig, wie die Ordnung der entsprechend definirten Curve bei algebraischen Systemen nach einem Satze auf p. 414 von den Charakteristiken μ, μ' eines solchen Systems; und auch das Verhalten beider Curven in dem festen Punkte y ist dasselbe.*) —

Unter den Punkten der Ebene sind nun besonders diejenigen ausgezeichnet, für welche zwei der n von ihnen ausgehenden Richtungen zusammenfallen; und da diese Forderung einer Bedingung äquivalent ist, wird es noch einfach unendlich viele Punkte der Art geben, d. h. dieselben werden eine Curve bilden. Ebenso erhält man eine andere Curve als Enveloppe der Geraden, für welche zwei zugehörige Coincidenzpunkte einander benachbart liegen. Wenn zwei der n von einem Punkte x aus an die zugehörige K_n gelegten Tangenten zusammenfallen sollen, so muss der Punkt x offenbar auf der K_n liegen; stellt man also die Gleichung $f(x, u) = 0$ der letzteren in Punktcoordinaten X in der Form $F(x, X) = 0$ dar, so ist $F(x, x) = 0$ die Gleichung des gesuchten Ortes. *Man erhält daher den Ort der Punkte x, welche auf ihrer zugehörigen K_n liegen, und für welche somit zwei der zugehörigen Fortschreitungsrichtungen der Hauptcoincidenz zusammenfallen, indem man die Curve K_n in Punktcoordinaten x darstellt. Dualistisch entsprechend erhält man den Ort der Linien u, welche ihre zugehörige C_m berühren, indem man die letztere in Liniencoordinaten u darstellt.*

Die erstere Curve existirt natürlich nur, wenn $n > 1$, die letztere nur, wenn $m > 1$; die Fälle $m = 1$ oder $n = 1$ verlangen daher noch eine besondere Besprechung; wir kommen auf letztere später zurück.

Für den Connex $a_x u_\alpha^2 = 0$ erhält man z. B.:

$$F(x, X) = a_x b_x (\alpha \beta X)^2,$$

und der Ort der betreffenden Punkte ist folglich gegeben durch die Curve *vierter* Ordnung:

$$F(x, x) \equiv a_x b_x (\alpha \beta x)^2 = 0.$$

*) Ebenso gilt für die Systeme transscendenter Curven auch der Satz, dass eine Curve der Ordnung n' und der Klasse k' von $k'n + n'm$ Curven des Systems berührt wird; vgl. Fouret: Sur les systèmes généraux de courbes planes, Bulletin de la société mathématique de France, t. 2, p. 72 und 96. — Man erkennt, wie auch die weiteren Untersuchungen von Fouret über simultane Curvensysteme der Art in engster Beziehung zur Connextheorie stehen.

Für den Connex $a_x^2 u_\alpha^2 = 0$ findet man:

$$F(x, X) = a_x^2 b_x^2 (\alpha \beta X)^2$$

und somit die Curve *sechster* Ordnung:

$$F(x, x) \equiv a_x^2 b_x^2 (\alpha \beta x)^2 = 0 .$$

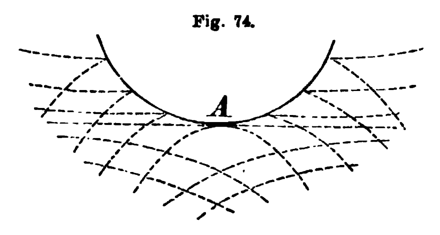
Die hier gemeinten Curven stehen in besonderer und sehr wichtiger Beziehung zu den Integralcurven des Connexes $f = 0$. Betrachten wir die Punkte auf beiden Seiten der Curve $F(x, x) = 0$. Für einen Punkt der letzteren selbst fallen zwei der zugehörigen Zweige der Integralcurven zusammen; nach den bekannten Gesetzen der Continuität müssen diese Zweige daher für Punkte auf der einen Seite der Curve $F(x, x) = 0$ reell, für Punkte auf der anderen Seite dieser Curve imaginär sein. Es haben also in jedem Punkte von $F = 0$ zwei reelle Zweige der Integralcurven dieselbe Tangente, *ohne sich über diesen Punkt fortzusetzen*, d. h. es entsteht eine Spitze der Integralcurve (vgl. Fig. 74). Fügt man die dualistisch entsprechende Ueberlegung und die Umkehrung beider hinzu, so kann man daher die beiden Sätze aussprechen:

*Der Ort der Punkte, welche auf den ihnen im Connexe zugehörigen Curven K_n liegen, ($F = 0$) ist zugleich der Ort der Spitzen der Integralcurven des Connexes.**)

Die Enveloppe der Linien, welche die ihnen im Connexe zugehörigen C_m berühren, ($F' = 0$) ist zugleich der Ort der Wendetangenten der Integralcurven des Connexes.

Die zu den Punkten von $F = 0$ gehörigen Rückkehrtangenten der Integralcurven werden dabei im Allgemeinen eine andere Curve $\Phi = 0$ umhüllen, und ebenso werden die Wendepunkte jener Curven eine neue Curve $\Phi' = 0$ beschreiben. Nur in einzelnen Punkten von F wird es eintreten, dass die einem solchen entsprechende Rückkehrtangente in ihm zugleich Tangente von F ist, wie z. B. im Punkte A in Fig. 74.**) Nur wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung

Fig. 74.



*) Geht man von einer Differentialgleichung in rechtwinkligen Coordinaten: $f(\xi, \eta, p) = 0$ aus, so erhält man offenbar die Curve $F = 0$ durch Bildung der Discriminante von f in Bezug auf die Veränderliche $p = \frac{d\eta}{d\xi}$.

**) Von der in A berührenden Integralcurve sondert sich hier gleichzeitig eine Gerade ab. Dies Beispiel ist zunächst der Theorie der Flächen dritter Ordnung entnommen, deren Haupttangentencurven sich in der Nähe der parabolischen Curve so verhalten. Vgl. Klein: Math. Annalen, Bd. 6. — Auf den Zusammenhang der Curve $F = 0$ mit der singulären Lösung der Differentialgleichung kommen wir im letzten Abschnitte zurück.

$f = 0$ besondere Bedingungen erfüllt sind, wird es vorkommen können, dass die Tangente eines *jeden* Punktes von F auch Tangente der zugehörigen K_n ist. Alsdann wird F in jedem Punkte von einer Integralcurve berührt: die Curve $F = 0$ gibt dann ein singuläres Integral der Differentialgleichung $f = 0$, wie wir später noch näher ausführen werden; ein solches wird dagegen im Allgemeinen nicht auftreten.

Aus dem oben angegebenen Bildungsgesetze von F und F' lassen sich leicht Ordnung, bez. Klasse dieser Curven bestimmen; denn eine Curve n^{ter} Klasse ist im Allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)$, und ihre Punktgleichung vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten der Liniengleichung. *Man findet daher für die Ordnung von F die Zahl $(n-1)(2m+n)$ und für die Klasse von F' die Zahl $(m-1)(2n+m)$.*

Die hier auftretenden Curven $F = 0$ sind aber keineswegs die allgemeinsten Curven der Ordnung $(n-1)(2m+n)$, sie sind vielmehr durch verschiedene Singularitäten ausgezeichnet. Zur Bestimmung der letzteren betrachten wir die Beziehung zwischen den Curven $F = 0$ und $\Phi = 0$ genauer, wo also

$F = 0$ den Ort der Rückkehrpunkte der Integralcurven,
$\Phi = 0$ den Ort der Rückkehrtangenten derselben

darstellt. Beide Curven sind ihrer Definition nach *eindeutig* auf einander bezogen: einem Punkte x von F entspricht als Tangente von Φ eben die Tangente der zu x gehörigen K_n im Punkte x. Nun hat eine solche K_n im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppelpunkte; es wird daher in einer endlichen Zahl von Punkten der Ebene vorkommen können, dass der Punkt x mit einem Doppelpunkte der zugehörigen K_n zusammenfällt; und dann entsprechen ihm zwei verschiedene Tangenten derselben, und somit zwei verschiedene Tangenten von Φ. Dies kann nach den Gesetzen der eindeutigen Transformation nur eintreten, *wenn der betreffende Punkt ein Doppelpunkt von F ist.* Die Zahl solcher Doppelpunkte bestimmen wir hiernach mit Hülfe des Correspondenzprincips von Salmon und Zeuthen (p. 387) folgendermassen.

Jedem Punkte x entsprechen $\alpha = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Punkte y, die Doppelpunkte der zu x gehörigen K_n. Um die Zahl α' der umgekehrt zu y gehörigen Punkte x zu finden, haben wir nach der Zahl der Curven K_n zu fragen, welche in einem gegebenen Punkte y einen Doppelpunkt haben. Jeder durch y gehende Strahl u wird von unendlich vielen K_n berührt; unter ihnen sind m^2 Curven, welche u in y berühren; es gibt daher ausserdem noch:

$$2(n-1)m^2 - 2m^2 = 2nm^2 - 4m^2$$

Curven K_n, welche u berühren und zugleich durch y gehen. An jede der letzteren kann man von y aus noch $n-3$ Tangenten v legen,

deren Berührungspunkte nicht auf u liegen; und so entsprechen jedem Strahle u $2\,m^2\,(n-3)\,(n-2)$ Strahlen v, und ebenso umgekehrt. Fallen zwei entsprechende Strahlen zusammen, so geht die betreffende K_n noch ein zweites Mal durch y, d. h. hat in y einen Doppelpunkt. Da nun je zwei Coincidenzen der Art durch dieselbe K_n veranlasst werden, so ist einfach:

$$\alpha' = 2\,m^2\,(n-2)\,(n-3)\,.$$

Um die Zahl $\alpha + \alpha' + \beta$ der Coincidenzen von Punkten x und y in der Ebene zu finden, müssen wir jetzt noch die Ordnung β der Curve angeben, welche von y durchlaufen wird, wenn x eine Gerade beschreibt. Setzt man aber $x = \xi + \lambda\eta$, so stellt die Gleichung:

$$(a_\xi + \lambda\, a_\eta)^m\, u_a{}^n = 0$$

ein System von Curven K_n dar, von denen $2\,m\,(n-1)$ durch einen beliebigen Punkt gehen und m eine beliebige Gerade berühren. Durch dualistische Uebertragung unserer früheren Untersuchungen über Curvensysteme (p. 416) finden wir daher für die Ordnung des Ortes der Doppelpunkte y den Werth:

$$\beta = 2\,(n-2)\,(n-3)\,nm\,.$$

Die Zahl der Doppelpunkte von F ist somit schliesslich:

$$(13) \qquad \alpha + \alpha' + \beta = \tfrac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)\{(2\,m+n)^2 + 3\,n\}\,.$$

Analog findet man die Zahl der Spitzen von F gleich der Zahl der Punkte x, welche mit einer Spitze y der zugehörigen K_n zusammenfallen. Hier ist:

$$\alpha = 3\,n\,(n-2)\,, \qquad \alpha' = 3\,m^2\,(n-2)\,,$$

wobei letztere Zahl sich durch Betrachtung einer Correspondenz:

$$\big(m^2\,(n-2)\,, \quad 2\,m^2\,(n-2)\big)$$

zwischen den Strahlen eines beliebigen Büschels ergibt. Endlich findet man nach p. 416:

$$\beta = 3\,mn\,(n-2)\,,$$

und somit *die Zahl der Spitzen von $F = 0$ gleich:*

$$(14) \qquad 3\,(n-2)\,(m^2 + mn + n)\,.$$

Um die Klasse von Φ zu bestimmen, gehen wir von den Formeln aus, welche die eindeutige Beziehung der Tangenten von Φ auf die Punkte von F vermitteln. Sei symbolisch $A_x{}^\mu \mathsf{A}_X{}^\nu = 0$ die Gleichung der zu x gehörigen K_n in Punktcoordinaten X, wo $\mu = 2\,m\,(n-1)$, $\nu = n\,(n-1)$, so sind jene Transformationsgleichungen offenbar:

$$(15) \qquad \varrho u_i = A_x{}^\mu \mathsf{A}_x{}^{\nu-1} \mathsf{A}_i \equiv \varphi_i\,(x)\,.$$

Die drei Curven $\varphi_i = 0$ gehen zunächst durch sämmtliche Doppelpunkte und Spitzen von $F = 0$ hindurch, denn wenn x ein Doppelpunkt der Curve $A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$ ist, so verschwinden eben die drei Grössen $\varphi_i(x)$; und wir haben gesehen, dass dann F in x einen Doppelpunkt hat. In unseren allgemeinen Formeln für die eindeutige Transformation (p. 666) müssen wir demnach setzen:

$$(16)\quad \begin{aligned} s &= \mu + \nu - 1 = (n-1)(2m+n) - 1, \\ \tau &= \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\{(2m+n)^2 + 3n\} + 3(n-2)(m^2+mn+n). \end{aligned}$$

Wir haben jetzt noch die Zahl σ der einfachen Punkte von F zu suchen, durch welche die drei Curven $\varphi_i = 0$ gleichzeitig hindurchgehen. Unter den zweifach unendlich vielen Curven K_n wird es einfach unendlich viele geben, die eine Doppeltangente besitzen, und die zugehörigen Punkte x werden eine Curve $P = 0$ bilden, welche sich durch Elimination der u_i aus den Gleichungen:

$$(17)\qquad a_x^m u_\alpha^{n-1} \alpha_i = 0$$

ergibt, welche also von der Ordnung $3m(n-1)^2$ ist. Auf P wird es ferner eine endliche Zahl von Punkten x geben, durch welche die Doppeltangente der zugehörigen K_n hindurchgeht. Diese Punkte liegen dann gleichzeitig auf $F = 0$, denn für sie fallen zwei der entsprechenden n Strahlen der Hauptcoincidenz in die Doppeltangente zusammen; und für sie bestehen gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$A_x^\mu \mathsf{A}_x^{\nu-1} \mathsf{A}_i = 0,$$

denn die Doppeltangente ist als doppelt zählender Zweig der Curve ν^{ter} Ordnung $A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$ aufzufassen. *Durch die so charakterisirten Punkte gehen demnach alle drei Curven $\varphi_i = 0$ hindurch.* Die Zahl der Punkte bestimmt sich in folgender Weise. Die Gleichung der von den Doppeltangenten umhüllten Curve ergibt sich durch Elimination der x_i aus den Gleichungen (17); sie ist also von der Klasse $3m^2(n-1)$. Auf der Curve $P = 0$ haben wir somit zwischen den Punkten x und den Schnittpunkten y der zugehörigen Doppeltangente eine Correspondenz:

$$\left(3m(n-1)^2, \quad 3m^2(n-1)\right)_0 .$$

Die Zahl der gesuchten Punkte von $P = 0$ und somit auch die Zahl der *einfachen Punkte von $F = 0$, welche den φ_i gemeinsam sind*, ist daher gleich:

$$(18)\qquad 3m(n-1)(m+n-1).$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass die Curven $\varphi_i = 0$ die Rückkehrtangenten von $F = 0$ in den betreffenden Rückkehrpunkten berühren. Da nämlich nach dem Obigen die Curve $F \equiv A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$

in einem Doppelpunkte der zu x gehörigen K_n ebenfalls einen Doppelpunkt hat, so sind die Grössen $A_x^\mu \mathsf{A}_x^{\nu-1}\mathsf{A}_i$ und $A_x^{\mu-1}A_i\mathsf{A}_x^\nu$ einander proportional; und folglich kann man die Gleichungen (15) auch ersetzen durch:

$$(19) \qquad \varrho' u_i = A_x^{\mu-1}\mathsf{A}_x^\nu A_i .$$

Sind nun für einen Rückkehrpunkt x von F die dx_i bestimmt durch die Gleichung $v_{dx}{}^2 = 0$, d. i. durch:

$$A_x^{\mu-2}\mathsf{A}_x^{\nu-2}\{\mu(\mu-1)A_{dx}{}^2\mathsf{A}_x{}^2 + 2\mu\nu A_x\mathsf{A}_x A_{dx}\mathsf{A}_{dx} + \nu(\nu-1)A_x{}^2\mathsf{A}_{dx}{}^2\} = 0,$$

wo also die Grössen v_i die Coordinaten der Rückkehrtangente bedeuten, so ist nach (15) die x entsprechende Tangente von Φ bestimmt durch:

$$\varrho u_i = A_x^{\mu-1}\mathsf{A}_x^{\nu-2}\{\mu A_{dx}\mathsf{A}_x + (\nu-1)A_x\mathsf{A}_{dx}\}\mathsf{A}_i$$

und nach (19) durch:

$$\varrho' u_i = A_x^{\mu-2}\mathsf{A}_x^{\nu-1}\{(\mu-1)A_{dx}\mathsf{A}_x + \nu A_x\mathsf{A}_{dx}\}A_i .$$

Also haben wir:

$$(\varrho'\mu + \varrho\nu)\, u_{dx} = v_{dx}{}^2 \quad \text{und:} \quad \varrho'' u_i = v_{dx} \,.\, v_i = 0 .$$

Letztere Gleichungen sagen in der That aus, dass die Curven $\varphi_i(x) = 0$ auch den Punkt $x + dx$ enthalten, d. h. die Linie $v_x = 0$ in x berühren. In unseren allgemeinen Formeln für die eindeutige Transformation (p. 666) haben wir daher die Zahl σ gleich der Summe der Zahl (18) und der Zahl der Rückkehrpunkte zu wählen:

$$(20) \quad \sigma = 3m(n-1)(m+n-1) + 3(n-2)(m^2+mn+n) .$$

Die Klasse von Φ wird daher schliesslich in Rücksicht auf (16) *gleich:*

$$(21) \qquad (\mu+\nu)s - \sigma - 2\tau = m^2 + 2mn - m + n .^{*)}$$

Da somit Klasse und Geschlecht der Curve $\Phi = 0$ bekannt sind, kann man die Zahl ihrer Doppeltangenten leicht berechnen, denn Wendetangenten werden im Allgemeinen nicht vorkommen; diese Rechnung soll hier indess nicht mehr ausgeführt werden.

---

*) Diese Zahl lässt sich auch in folgender Weise finden. Auf jeder Linie u durch y liegen m zugehörige Punkte x der Hauptcoincidenz: die Schnittpunkte von u mit der Curve $X_y \equiv a_x^m(\alpha x y)^n = 0$; von jedem dieser m Punkte gehen noch $n-1$ weitere Strahlen v der Hauptcoincidenz aus; man erhält also eine durch y gehende Tangente von Φ, wenn eine Linie u mit einer der entsprechenden $m(n-1)$ Linien v zusammenfällt. Nun umhüllen die Linien v eine Curve, die sich durch Elimination der x aus den Gleichungen:

$$a_x^m(\alpha x y)^n = 0, \qquad v_x = 0, \qquad a_x^m v_\alpha^n = 0$$

ergibt und also von der Klasse $(m+n)^2$ ist. Von ihr sondert sich aber m-fach zählend der Punkt y ab, und sie hat ausserdem einen n-fachen Punkt in y. Man kann also an sie von y aus noch $(m+n)^2 - m - n(n-1) = m^2 + 2mn - m + n$ Tangenten ziehen; und diese Zahl ist also die *Klasse von* Φ.

Durch dualistische Uebertragung der gewonnenen Resultate erhält man die Eigenschaften der Curven:

$F' = 0$, des Ortes der Wendetangenten der Integralcurven, und

$\Phi' = 0$, des Ortes ihrer Wendepunkte.

Erstere Curve ist von der Klasse $(n-1)(2n+m)$, die Zahl ihrer Doppeltangenten ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)\{(2n+m)^2+3m\},$$

und die Zahl ihrer Wendetangenten gleich:

$$3(m-2)(n^2+nm+m).$$

Die Ordnung von Φ' endlich ist gegeben durch die Zahl:

$$n^2+2nm-n+m.$$

Daraus kann man die übrigen Plücker'schen Zahlen beider Curven berechnen, da ihr Geschlecht dasselbe ist, und da $\Phi' = 0$ im Allgemeinen keine Rückkehrpunkte besitzen wird.

Wir haben die Curven F und Φ hier zunächst in ihrer Beziehung zu der Differentialgleichung der Hauptcoincidenz betrachtet. Unabhängig von diesem Gesichtspunkte sind indess F und Φ offenbar als Covarianten bez. Contravarianten des Connexes $f = 0$ oder auch der Hauptcoincidenz des letzteren aufzufassen. Da aber die Differentialgleichung der Integralcurven unzertrennlich mit der Hauptcoincidenz des Connexes verknüpft ist, so wird man ebenso gut von Functionalinvarianten der Differentialgleichung als von solchen der Hauptcoincidenz sprechen können; und dafür bieten uns dann die Formen F, Φ, F', Φ' die einfachsten Beispiele. Es eröffnet sich so ein neuer Gesichtspunkt für das Studium algebraischer Differentialgleichungen: man wird sich nicht nur darauf beschränken müssen, die Integration derselben zu versuchen, sondern man wird einen wesentlichen Theil seiner Aufmerksamkeit auch auf das Studium ihrer Functionalinvarianten zu verwenden haben, d. i. auf die Untersuchung, wie viel in der Theorie der Differentialgleichungen von linearen Transformationen abhängig ist, wie viel unabhängig von solchen Transformationen bestehen bleibt.

Hat man indess einmal diesen Gesichtspunkt gewonnen, so wird man auch weiter gehen und allgemeine eindeutige Transformationen, wie sie oben kurz betrachtet wurden (p. 956), an Stelle der linearen treten lassen. Es ist aber hervorzuheben, dass nicht jede eindeutige Transformation der Form:

$$(22) \qquad \varrho y_i = \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}), \qquad \sigma v_i = \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}),$$

welche den Connex $f(x, u) = 0$ in einen Connex $F(y, v) = 0$ ver-

wandelt, auch die Hauptcoincidenz des Connexes f in die Hauptcoincidenz des Connexes F überführt; denn für die Coincidenz, welche aus der Hauptcoincidenz von f entsteht, ist die Bedingung $v_y = 0$ nicht nothwendig von selbst erfüllt. Die Hauptcoincidenz von F geht vielmehr aus derjenigen Coincidenz hervor, welche aus $f = 0$ durch den Connex $\Sigma\varphi_i\psi_i = 0$ ausgeschnitten wird. Die Elemente der Hauptcoincidenz, welche in $f = 0$ von den Punkten und Tangenten einer Curve $\chi(x) = 0$ gebildet werden, gehen also im Allgemeinen in die Elemente eines Curven*paares* von $F = 0$ über. Ist jedoch insbesondere die Substitution (22) so beschaffen, dass vermöge $f = 0$ die Bedingung $u_x = 0$ in die Bedingung $v_y = 0$ transformirt wird, so geht die Hauptcoincidenz von f in die Hauptcoincidenz von F über. Das aus einer Curve $\chi = 0$ entstehende Curvenpaar hat also jetzt die Eigenschaft, dass jede Tangente der einen Curve des Paares durch den entsprechenden Punkt der anderen Curve hindurchgeht. Sollen aber die beiden letzteren Curven zusammenfallen, d. h. sollen die Punkte und Tangenten einer Curve $\chi(x) = 0$ übergehen in die Punkte und Tangenten *einer* Curve $X(y) = 0$*), so *müssen in Folge unserer Transformation die beiden Bedingungen* $u_x = 0$ *und* $u_{dx} = 0$ *vermöge* $f = 0$ *bez. übergeführt werden in* $v_y = 0$ *und* $v_{dy} = 0$. Nur in diesem Falle entsteht daher aus einer Integralcurve des Connexes f eine Integralcurve des Connexes F; *nur dieser Fall der Transformation ist daher für die mit der Hauptcoincidenz von* f *zusammenhängende Differentialgleichung von Bedeutung.* Nur in Bezug auf diesen engeren Kreis algebraisch-eindeutiger Transformationen, welcher sich auf die Differentialgleichung als solche bezieht, kann man sonach insbesondere *von dem Geschlechte einer Differentialgleichung sprechen*, indem man unsere früheren Betrachtungen über Coincidenzen auf die Hauptcoincidenz von f anwendet (p. 961). Das Geschlecht ist dann eine Zahl, welche bei den genannten Transformationen immer erhalten bleibt. — Selbstverständlich kann man auch die oben gebildeten Differentiale für die Hauptcoincidenz aufstellen, indem man den Connex $\varphi = 0$ durch den identischen Connex $u_x = 0$ ersetzt. Man erhält einfach, wenn noch $(a\alpha)_i = c_i$ und $(b\beta)_i = \gamma_i$ gesetzt wird:

$$dI = \frac{\Theta . (x\, dx\, d'x)\, u_\gamma}{(\gamma f_u' x)} = \frac{\Theta . (u\, du\, d'u)\, c_x}{(c f_x' u)} .$$

Wir wollen nun die Bedingungen aufstellen, denen die in (22) vorkommenden Functionen φ_i, ψ_i genügen müssen, wenn sie die

*) Letztere kann dabei insbesondere aus einem Punkte und den durch ihn gehenden Strahlen bestehen; dann ist sie allerdings nicht mehr in Punktcoordinaten darstellbar. In dem Falle erscheint also der Punkt als ein Integral der Differentialgleichung.

Hauptcoincidenzcurven von f in diejenigen von F überführen sollen. Zunächst geben die Bedingungen $v_y = 0$, $v_{dy} = 0$ unmittelbar die Gleichungen:

$$\Sigma \varphi_i \psi_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \psi_i d\varphi_i = 0 .$$

Beide müssen bestehen in Folge der Gleichungen $f = 0$, $u_x = 0$. Die erstere führt daher auf die zu erfüllende Identität:

$$\Sigma \varphi_i \psi_i = Kf + Mu_x . \tag{23}$$

Die andere Gleichung aber gibt entwickelt:

$$\Sigma\Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k + \Sigma\Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} du_k = 0 . \tag{24}$$

Da nun gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma x_i du_i = 0 , \qquad \Sigma x_i u_i = 0 , \qquad \Sigma x_i f_{x_i}' \equiv mf = 0 ,$$

so kann man setzen:

$$du_i = \varkappa u_i + \lambda f_{x_i}' . \tag{25}$$

Ferner erhält man aus $f = 0$ durch Differentiation:

$$\Sigma f_{x_i}' dx_i + \Sigma f_{u_i}' du_i = 0 , \tag{26}$$

und hieraus folgt, da $\Sigma u_i f_{u_i}' = 0$, wegen (25) eine Bestimmung von λ allein, während $\varkappa$ unbestimmt bleibt.

Aber in Folge der Gleichung:

$$0 = \Sigma u_i f_{u_i}' \equiv (f_u' x dx)$$

kann man auch setzen:

$$dx_i = \varkappa' x_i + \lambda' f_{u_i}' . \tag{27}$$

Führt man diese Werthe ebenfalls in (26) ein, so bleibt:

$$(\lambda + \lambda') . \Sigma f_{x_i}' f_{u_i}' = 0 . \tag{28}$$

Das Verschwinden des zweiten Factors wollen wir zunächst ausschliessen. Tritt dieses also nicht ein, so hat man $\lambda + \lambda' = 0$, und die Gleichung (24) geht vermöge (25) und (27) über in:

$$(\varkappa' p + \varkappa q)\, \Sigma \varphi_i \psi_i + \lambda' \Sigma\Sigma \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = 0 .$$

Es muss somit, wenn man (23) zu Hülfe nimmt, noch eine Identität der Form bestehen:

$$\sum_i \sum_k \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = K'f + M'u_x . \tag{29}$$

Die Gleichungen (23) und (29) enthalten alle Bedingungen, denen die Functionen φ_i, ψ_i genügen müssen; man kann in Folge derselben unmittelbar zwei dieser Functionen durch die übrigen ausdrücken.

Die Form der letzten Gleichung ist in Bezug auf die φ_i und ψ_i unsymmetrisch. Dass aber diese Functionen in Wahrheit symmetrischen Bedingungen unterworfen sein müssen, folgt aus dem dualen Charakter, der oben für Differentialgleichungen überhaupt nachgewiesen wurde, und in der That erhält man aus (23) und (29) zusammen auch leicht diejenige Form der einen Bedingung, welche zu (29) symmetrisch ist. Unterwirft man nämlich die Gleichung (23) dem Process:

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\right),$$

so erhält man links zwei Theile, deren einer die linke Seite von (29) ist, während der andere durch Vertauschung der φ und ψ aus ihm hervorgeht; auf der anderen Seite aber erhält man die Form $K''f + M''u_x$, also auch den zu (29) symmetrischen Ausdruck ähnlich dargestellt; q. e. d.

Die Bedingungen dafür, dass durch die Transformation (22) *die Differentialgleichung der Integralcurven von $f = 0$ in die Differentialgleichung der Integralcurven von $F = 0$ übergeführt wird*), sind also in symmetrischer Form:*

$$(30)\qquad \begin{aligned} \sum_i \sum_k \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) &= K'f + M'u_x\,, \\ \sum_i \sum_k \varphi_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) &= K''f + M''u_x\,. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch der Ausnahmefall zu untersuchen, in welchem schon eine Gleichung:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = Kf + Mu_x$$

besteht, und daher der linke Theil derselben durch sein Verschwinden das Bestehen der Gleichung (28) herbeiführt. *Wir wollen zeigen, dass in diesem Falle keine eigentliche Differentialgleichung vorliegt.*

Sind zunächst $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ beliebige Grössen, so sieht man, dass das Product:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f'_{u_1} & \xi_1 \\ x_2 & f'_{u_2} & \xi_2 \\ x_3 & f'_{u_3} & \xi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & f'_{x_1} & \eta_1 \\ u_2 & f'_{x_2} & \eta_2 \\ u_3 & f'_{x_3} & \eta_3 \end{vmatrix}$$

für alle Elemente der Coincidenz verschwindet, denn in der durch die Multiplication entstehenden Determinante verschwinden in unserm Falle vier Elemente, welche ein Rechteck bilden. Es muss also einer

*) Man kann auch verlangen, dass der Transformation (22) diese Eigenschaft in Bezug auf *jeden* Connex $f = 0$ zukommt. Dies gibt die sogenannten *Berührungstransformationen;* vgl. darüber den Schluss dieses Bandes.

der Factoren des obigen Products Null sein; d. h. man hat, da die ξ, η beliebig sind, entweder:

(31) $x_2 f_{u_3}' - x_3 f_{u_2}' = 0, \quad x_3 f_{u_1}' - x_1 f_{u_3}' = 0, \quad x_1 f_{u_2}' - x_2 f_{u_1}' = 0,$

oder:

(32) $u_2 f_{x_3}' - u_3 f_{x_2}' = 0, \quad u_3 f_{x_1}' - u_1 f_{x_3}' = 0, \quad u_1 f_{x_2}' - u_2 f_{x_1}' = 0,$

immer unter der Voraussetzung $f = 0$, $u_x = 0$.

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$X_y \equiv f\big(x, (xy)\big) \equiv a_x^m (\alpha x y)^n = 0,$$

welche in den Veränderlichen y das Product der n Geraden darstellt, die in der Hauptcoincidenz von x ausgehen, und aus der die Differentialgleichung entsteht, wenn man die y_i durch die dx_i ersetzt. Durch die Substitution $u_i = (xy)_i$, welche die Bedingung $u_x = 0$ identisch erfüllt, verwandeln sich die Gleichungen (31) in:

$$(33) \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_3} = 0.$$

Diese Gleichungen sollen für alle Werthsysteme x, y bestehen, für welche $X_y = 0$ ist. Ist also X_y irreducibel, so sind sie unmöglich, denn die linken Theile von (33) sind von niedrigerer Ordnung als X_y, mithin nie durch X_y theilbar. Ist aber X_y reducibel etwa gleich $\psi \,.\, \chi \ldots$, wo $\psi, \chi, \ldots$ irreducibel, so verwandeln sich die Gleichungen (33) in:

$$\psi \ldots \frac{\partial \chi}{\partial y_i} + \chi \ldots \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \ldots = 0.$$

Für Werthe, die der Gleichung $\psi = 0$ genügen, gibt dies:

$$\chi \ldots \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0;$$

es muss also entweder einer der Factoren $\chi, \ldots$ gleich ψ sein, oder es müssen alle Ausdrücke $\frac{\partial \psi}{\partial y_i}$ verschwinden. Man erkennt so, dass X_y die Form haben muss:

$$X_y = M^2 \,.\, \mathrm{X},$$

wo X die y nicht mehr enthält. Ist also

$$M = \Psi\big(\overset{\varrho}{x}, \overset{\sigma}{(xy)}\big),$$

so wird:

$$f = \mathrm{X}_{m-2\varrho} \,.\, \Psi^2 (\overset{\varrho}{x}, \overset{\sigma}{u}) + N u_x$$

die allgemeinste Form des zugehörigen Connexes.

In einem solchen Connexe $(m, 2\sigma)$ entspricht jedem Punkte x eine Curve, welche in ihm einen σ-fachen Punkt hat, jeder Geraden

u eine Curve, welche von ihr in ϱ Punkten berührt wird, während die übrigen $m - 2\varrho$ Schnittpunkte auf einer festen Curve $X = 0$ liegen. *Die Hauptcoincidenz des Connexes besteht in diesem Falle aus der singulären Curve* $X = 0$, *gedacht als Ort von Büschelcentren, und aus der doppelt zählenden Hauptcoincidenz des Connexes* $\Psi = 0$.

Nur dualistisch entgegengesetzt verhält sich der Fall, in welchem die Gleichungen (32) an Stelle von (31) treten. —

Die Formeln für die eindeutige Transformation in nicht homogener Form werden, wenn ξ, η die neuen Veränderlichen bedeuten, dadurch erhalten, dass man in den früheren Formeln $y_1 = \xi y_3$, $y_2 = \eta y_3$ setzt. Man hat dann

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi},$$

wo φ, φ_1, φ_2 doppelt homogene Functionen der Reihen $x, y, 1, -p$, $1, xp - y$ sind (p. 965). Die Gleichungen für die v_i erhält man am einfachsten, indem man $\frac{d\eta}{d\xi}$ bildet, für den darin vorkommenden Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ aber seinen aus $\frac{df}{dx} = 0$ fliessenden Werth setzt. Die Gleichung $f = 0$ geht dadurch in eine Gleichung zwischen ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$ über. Wir haben also die allgemeinste Transformation vor uns, bei welcher die neuen Veränderlichen und deren erste Differentialquotienten Functionen der alten und ihrer ersten Differentialquotienten sind.

V. Beispiele für die Bestimmung von Hauptcoincidenzcurven.

Im Folgenden sollen noch einige Beispiele für die Integration der Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven gegeben werden. Dieselben sind dadurch von besonderem Interesse, dass sie zum Theil mit früheren andern Untersuchungen im Zusammenhange stehen.

1) Schon oben wurde bemerkt (p. 937), dass der lineo-lineare Connex, d. i. der Connex (1, 1), uns unmittelbar die Verwandtschaft der Collineation liefert. Da nun die letztere im Allgemeinen in der kanonischen Form:

$$\varrho y_i = \varkappa_i x_i$$

angenommen werden darf (p. 262), so kann der allgemeine Connex $a_x u_\alpha = 0$ auch auf die kanonische Form transformirt werden:

$$\varkappa_1 u_1 x_1 + \varkappa_2 u_2 x_2 + \varkappa_3 u_3 x_3 = 0\,.$$

Hieraus aber erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\varkappa_1 x_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \varkappa_2 x_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + \varkappa_3 x_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0,$$

oder nach einfacher Umformung:

$$(\varkappa_2 - \varkappa_3)\frac{dx_1}{x_1} + (\varkappa_3 - \varkappa_1)\frac{dx_2}{x_2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Die Gleichung der Hauptcoincidenzcurven des lineo-linearen Connexes ist also im Allgemeinen von der Form:

$$x_1^{\varkappa_2 - \varkappa_3} x_2^{\varkappa_3 - \varkappa_1} x_3^{\varkappa_1 - \varkappa_2} = \text{Const.}$$

Sie sind somit insbesondere algebraisch, wenn die Grössen $\varkappa_i$ sich zu einander wie ganze Zahlen verhalten. — Auf diese Curven werden wir beim Studium des Connexes (1, 1) noch zurückkommen.

2) Es seien durch die Gleichungen:

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0, \quad d_x^2 = 0$$

vier von einander unabhängige Kegelschnitte gegeben. In dem dreifach unendlichen Curvensysteme:

$$(1) \qquad \varkappa_1 a_x^2 + \varkappa_2 b_x^2 + \varkappa_3 c_x^2 + \varkappa_4 d_x^2 = 0$$

gibt es dann noch zweifach unendlich viele Curven, die in ein Linienpaar zerfallen; und zwar gibt es zu jedem Punkte der Ebene ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt in dem Punkte selbst liegt, wovon man sich leicht überzeugt (was übrigens auch aus der folgenden algebraischen Entwicklung hervorgeht). Alle diese Linienpaare werden ein System von Curven umhüllen*), von denen zwei durch einen beliebigen Punkt gehen; für sie wollen wir zunächst die Differentialgleichung aufstellen und dieselbe sodann integriren.

Jede Linie u der Ebene wird durch eine andere Linie v zu einem Linienpaare unseres Systems (1) ergänzt. Die Gleichung der Linie v findet man durch Elimination der Grössen $\varkappa_i$ und v_i aus den Gleichungen:

$$\varkappa_1 a_{ik} + \varkappa_2 b_{ik} + \varkappa_3 c_{ik} + \varkappa_4 d_{ik} = u_i v_k + v_i u_k$$
$$0 = v_x,$$

wenn $a_x^2 = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$, etc., in der Form:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & d_{11} & 2u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & d_{22} & 0 & 2u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & d_{33} & 0 & 0 & 2u_3 \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} & d_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ a_{31} & b_{31} & c_{31} & d_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} & u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*) Dies Curvensystem ist für die sogenannte Steiner'sche Fläche von Wichtigkeit; vgl. im Folgenden Clebsch: Ueber die Steiner'sche Fläche, Crelle's Journal, Bd. 67.

Diese Gleichung stellt einen Connex (1, 2) dar; für constante u ist sie die Gleichung der zu u gehörenden Geraden v, für constante x also gibt sie einen Kegelschnitt als Enveloppe der Linien u, deren zugehörige Linien v durch x gehen. Insbesondere bilden die beiden von x aus an diesen Kegelschnitt gehenden Tangenten, d. i. die beiden zu x gehörenden Linien der Hauptcoincidenz, dasjenige Linienpaar unseres Systems, dessen Scheitel in x selbst liegt. Die aus unserem Connexe (2) durch die Substitution $u_i = (x\,dx)_i$ hervorgehende Differentialgleichung ist sonach die Differentialgleichung der von uns gesuchten Curven.

Dieselbe erscheint bei dieser directen Aufstellung in einer Form, welche das Integral nicht unmittelbar erkennen lässt; in passenderer Gestalt dagegen erhält man dieselbe Gleichung durch folgende Ueberlegung. Nach früheren Erörterungen (p. 385) gibt es bekanntlich eine einfach unendliche Schaar von Kegelschnitten*)

$$u_\alpha^2 + \lambda u_\beta^2 = 0, \tag{3}$$

welche sämmtlich mit allen Kegelschnitten des Systems (1) in vereinigter Lage sind, so dass unabhängig von λ die Gleichungen bestehen:

$$a_\alpha^2 + \lambda a_\beta^2 = 0, \quad b_\alpha^2 + \lambda b_\beta^2 = 0, \quad c_\alpha^2 + \lambda c_\beta^2 = 0, \quad d_\alpha^2 + \lambda d_\beta^2 = 0 \tag{4}$$

Soll nun ein Linienpaar mit allen Kegelschnitten (3) vereinigt liegen, d. i. der gegebenen dreifach-unendlichen Schaar (1) angehören, so heisst dies, dass die Linien u und v desselben einander in Bezug auf alle Curven (3) polar conjugirt sind, d. h. dass die Gleichungen bestehen:

$$u_\alpha v_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad u_\beta v_\beta = 0.$$

Eliminirt man jetzt aus ihnen und aus der Gleichung $v_x = 0$ die v, so erhält man den Connex (2) in der einfacheren Gestalt einer Functionaldeterminante:

$$(\alpha\beta x)\, u_\alpha u_\beta = 0.$$

Die Hauptcoincidenzcurven dieses Connexes aber sind uns aus einem früheren Beispiele schon bekannt (p. 965); *es sind eben die Kegelschnitte der Schaar* (3). *Letztere bilden daher das gesuchte Curvensystem.*

3) Wir gehen zu einem Beispiele über, welches dadurch an Interesse gewinnt, dass es sich auf einen Connex $f = 0$ bezieht, für welchen vermöge $f = 0$ und $u_x = 0$ die oben besprochene Bedingung $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ erfüllt wird. Gegeben sei ein Kegelschnitt $a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 = 0$

---

*) Ueber weitere algebraische und geometrische Beziehungen zwischen den Systemen (1) und (3) vgl. die auf p. 519 genannten Aufsätze von Smith und Rosanes.

und eine ihn in zwei getrennten Punkten treffende Gerade $v_x = 0$.*) Zufolge früherer Betrachtungen (p. 74) stellt dann der Kegelschnitt:

$$(5) \qquad (\alpha + 1)^2 (auv)^2 \,.\, b_x^2 - 4\,\alpha \,.\, (auv)\, a_x \,.\, (buv)\, b_x = 0,$$

den Ort der Punkte x dar, deren Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte von u und v den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ so trifft, dass die Punkte x und (uv) mit den Schnittpunkten des Kegelschnittes das Doppelverhältniss α bestimmen. Fügen wir also die Bedingung $u_x = 0$ hinzu, so werden durch (5) auf der Linie u zwei Punkte bestimmt, welche mit x und dem Punkte (uv) das Doppelverhältniss α bilden. Letzteres gilt ebenso, wenn wir die Gleichung (5) unter der Voraussetzung $u_x = 0$ noch weiter umformen. Nun ist identisch:

$$(buv)\, a_x = (auv)\, b_x - (abv)\, u_x + (abu)\, v_x\,,$$

und ferner nach der Identität (IV), p. 283, wegen $u_x = 0$:

$$2\,(abu)\,(avu)\, b_x v_x = (abu)^2\, v_x^2\,.$$

Somit geht die Gleichung (5) über in:

$$(6) \qquad (\alpha - 1)^2 (auv)^2 \,.\, b_x^2 + 2\,\alpha\,(abu)^2\, v_x^2 = 0\,.$$

Man erkennt sofort, dass jede Curve C_2 und K_2 dieses Connexes (2, 2) dem Büschel $a_x^2 + \lambda v_x^2 = 0$ angehört, d. h. die Curve $a_x^2 = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $v_x = 0$ berührt. Es gibt also in dem Connexe (6) nur eine *ein*fach unendliche Schaar von Curven C_2 und ebenso nur eine mit dieser identische *ein*fach unendliche Schaar von K_2 (vgl. p. 118). Je einfach unendlich vielen Punkten x muss daher dieselbe K_2, und je einfach unendlich vielen Geraden u dieselbe C_2 entsprechen. Da ferner jede Gerade der Ebene nur von einem Kegelschnitte des Büschels berührt wird, so bilden alle Punkte, denen dieselbe K_2: $2\,(abu)^2 - \lambda\,(auv)^2 = 0$ vermöge (6) entspricht, den Kegelschnitt: $(\alpha - 1)^2\, b_x^2 + \alpha\lambda v_x^2 = 0$, so dass uns hierdurch eine paarweise Zuordnung der Kegelschnitte unseres Büschels gegeben ist. Unter der Schaar von Connexen (6) ist aber noch besonders ausgezeichnet der für $\alpha = -1$ resultirende:

$$(7) \qquad f = 2\,(auv)^2\, b_x^2 - (abu)^2\, v_x^2 = 0\,.$$

Es besteht nämlich die Identität:

$$f + 2\,(abv)\,(avu)\, b_x \,.\, u_x = 2\,[(avu)\, a_x]^2\,;$$

und dieselbe sagt zufolge unserer allgemeinen Erörterungen aus (p. 977), dass vermöge $f = 0$, $u_x = 0$ die Bedingung $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ erfüllt ist, dass also in unserm Falle *jeder Punkt x auf der zugehörigen K_2 liegt,*

*) Vgl. im Folgenden den auf p. 811 und 826 genannten Aufsatz von Harnack.

und jede Gerade u die zugehörige C_2 berührt. Gleichzeitig folgt, dass *die Hauptcoincidenzcurven des Connexes* (7) doppelt zählend aus denen des Connexes $(avu)\,a_x = 0$ bestehen, d. h. (nach p. 965) eben wieder aus *den Curven C_2, bez. K_2 des Connexes* (7).

Die Gleichung (6) nun kann man auch durch ein Eliminationsverfahren aus einem gewissen Systeme von Gleichungen erhalten, und diese Herleitung derselben führt unmittelbar zur Aufstellung ihrer Integralcurven durch eine Schlussweise, die wir sogleich näher besprechen werden. Setzt man nämlich in (6) $x_i = (udu)_i$, so resultirt die Differentialgleichung:

$$(8) \qquad (\alpha - 1)^2 (auv)^2 (budu)^2 + 2\,\alpha\,(abu)^2 (vudu)^2 = 0;$$

und dies ist nichts anderes, als das Resultat der Elimination der Grösse D aus den beiden in D quadratischen Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} D^2 \,.\, (abu)^2 (cuv)^2 + D \,.\, (abu)^2 (vudu) + (audu)^2 = 0 \\ &\tfrac{1}{2} D^2 \,.\, (abu)^2 (cuv)^2 + D\alpha \,.\, (abu)^2 (vudu) + \alpha^2 (audu)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (9) aber entsteht wieder durch Elimination der x_i aus den drei Gleichungen:

$$D \,.\, a_x\,(avu) + (du)_x = 0\,, \qquad a_x^2 = 0\,, \qquad u_x = 0;$$

und wir können ihr daher leicht eine Bedeutung beilegen. Durch die erste der letzten Gleichungen ist nämlich die Grösse D als das zur Grundcurve $a_x^2 = 0$ gehörige Differential dritter Gattung definirt, dessen Unendlichkeitspunkte in den Schnittpunkten von $v_x = 0$ mit $a_x^2 = 0$ liegen; denn vermöge $u_x = 0$ und $u_{dx} + (du)_x = 0$ ist (vgl. p. 768):

$$D = -\frac{(du)_x}{a_x\,(avu)} = \frac{(cx\,dx)}{v_x \,.\, a_x\, a_c} \text{ für } c_i = (vu)_i\,.$$

Die Gleichung gibt sonach den Werth des Differentials D in den Schnittpunkten der Grundcurve $a_x^2 = 0$ mit $u_x = 0$, wenn man von der Linie u zu einer benachbarten Linie $u + du$ fortschreitet. Folglich ist (8) die Bedingung dafür, dass D und $\frac{1}{\alpha}\,D$ gleichzeitig Wurzeln der ersten Gleichung (9) seien, d. h. dass zwischen den Wurzeln, D_1 und D_2, dieser Gleichung die Relation bestehe:

$$D_2 = \alpha D_1\,,$$

oder wenn w_1, w_2 die Werthe des Integrals $w = \int D$ in den Schnittpunkten von u mit $a_x^2 = 0$ bedeuten, dass die Gleichung bestehe:

$$(10) \qquad w_2 = \alpha w_1 + C\,,$$

wo C eine Integrationsconstante bedeutet.

Nun kann man bekanntlich die Punkte der Curve $a_x^2 = 0$ als rationale Functionen zweiten Grades eines Parameters $x = e^w$ dar-

stellen, wenn wieder $w = \int D$ das logarithmische Integral bedeutet; d. h. wir können für einen Punkt x der C_2 setzen:

$$\sigma x_i = \varphi_i(w),$$

wo dann die φ_i einfach periodische Functionen sind. Besteht jetzt zwischen den zu zwei Punkten x und y der C_2 gehörigen Integralen w_1, w_2 die Relation (10), so wird $\sigma y_i = \varphi_i(\alpha w + C)$, und die Coordinaten der Verbindungslinie beider Punkte sind:

$$(11) \quad \mu u_1 = \varphi_2(w) \cdot \varphi_3(\alpha w + C) - \varphi_3(w) \cdot \varphi_2(\alpha w + C), \quad \text{etc.}$$

Diese Verbindungslinien aber umhüllen zufolge unserer Ableitung der Gleichung (8) aus den Gleichungen (9) die Integralcurven des Connexes (6). *Die Gleichungen* (11) *geben daher die Parameterdarstellung der Integralcurven des Connexes* (6); eliminirt man aus ihnen die Grösse w, so erhält man die Gleichung der Intelgralcurven selbst. Man erkennt sofort, dass letztere *algebraisch* (und dann vom Geschlechte Null) sind, wenn α eine *rationale* Zahl bedeutet, dagegen transscendent, wenn α irrational ist. Für alle Werthe von α geben die Punktcurve $a_x^2 = 0$ und die Doppellinie $v_x^2 = 0$ ein particuläres Integral der Gleichung (8) in Punktcoordinaten, die Klassencurve $(abu)^2 = 0$ und das Punktepaar $(avu)^2 = 0$ ein particuläres Integral in Liniencoordinaten.

4) Es fällt sofort der Zusammenhang in die Augen, welcher zwischen den letzten Erörterungen und früheren Untersuchungen über die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung besteht (p. 619 ff.); denn jetzt, wie damals, benutzten wir die Relationen zwischen Punktepaaren auf einer Grundcurve, um die Umhüllungsgebilde der Verbindungslinien je zweier zusammengehörigen (durch eine transscendente Relation verbundenen) Punkte zu bestimmen. Die Coordinaten u_i der Tangente stellten wir damals als elliptische Functionen eines Parameters dar, und für die entsprechende Darstellung traten im letzten Beispiele in ganz analoger Weise einfach-periodische Functionen auf. Wie nun hier eine Relation zwischen den Parameterwerthen zweier Punkte des Kegelschnitts die Bestimmung der Integralcurven eines gewissen Connexes ermöglicht, so können wir auch bei den Curven dritter Ordnung eine entsprechende Relation zur Integration algebraischer Differentialgleichungen verwerthen. Es kann dies geschehen, indem man zunächst die Gleichung aufstellt, welche die Werthe des Differentials erster Gattung:

$$D = \frac{(cx\,dx)}{a_x^2 a_c}$$

in den Schnittpunkten einer Linie $u_x = 0$ mit der Grundcurve $a_x^3 = 0$ liefert, vorausgesetzt, dass die Punkte $x + dx$ auf einer benachbarten

Geraden $u + du$ liegen: eine Gleichung, die dann genau der ersten von obigen Gleichungen (9) entspricht.*)

Zur Aufstellung der erwähnten Gleichung haben wir die Grössen x_i und dx_i aus den folgenden Gleichungen zu eliminiren (vgl. p. 810):

$$a_x^2 a_c D = (c x d x), \quad a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_{dx} = 0, \quad u_x = 0, \quad (du)_x + u_{dx} = 0.$$

Vermöge der letzten Gleichungen können wir aus der ersten die dx_i entfernen, indem wir $c_i = (ru)_i$ setzten, wo die r_i ganz willkürlich sind, denn es ist dann wegen $u_x = 0$:

$$(c x d x) = - r_x (du)_x .$$

Ferner können wir die zweite und dritte Gleichung durch eine der ersten analog gebildete ersetzen, in der nur willkürliche Grössen s_i statt der r_i stehen, denn beide Gleichungen sind eben *nur* äquivalent, wenn $a_x^3 = 0$ und $a_x^2 a_{dx} = 0$. Schliesslich erwächst also die Aufgabe, aus den zwei Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varrho_x^2 &\equiv \varrho_x'^2 \equiv a_x^2 (a r u) \,.\, D + r_x (du)_x = 0 \\ \sigma_x^2 &\equiv \sigma_x'^2 \equiv a_x^2 (a s u) \,.\, D + s_x (du)_x = 0 \end{aligned}$$

und aus $u_x = 0$ die x_i zu eliminiren. Das Resultat ist bekanntlich gegeben durch die Gleichung (vgl. p. 281):

$$(13) \qquad (\varrho \varrho' u)^2 \,.\, (\sigma \sigma' u)^2 - (\varrho \sigma u)^2 \,.\, (\varrho' \sigma' u)^2 = 0 .$$

Statt indessen den links stehenden Ausdruck direct nach (12) zu berechnen, verfährt man hier besser in folgender Weise. Auf der Linie $u_x = 0$ werden durch die Schnittpunkte mit den Curven $\varrho_x^2 = 0$ und $\sigma_x^2 = 0$ zwei binäre quadratische Formen dargestellt; die Resultante beider muss verschwinden, wenn die Gleichung (13) besteht; diese Resultante ist aber identisch mit der Discriminante der Functionaldeterminante der beiden Formen (p. 218), und das Punktepaar der letzteren wird auf $u_x = 0$ durch die Jacobi'sche Curve $(\varrho \sigma u) \varrho_x \sigma_x = 0$ ausgeschnitten. Soll daher die genannte Discriminante verschwinden, so muss der Kegelschnitt $(\varrho \sigma u) \varrho_x \sigma_x = 0$ von der Linie $u_x = 0$ berührt werden; d. h. die Gleichung (13) ist identisch mit der Liniencoordinaten-Gleichung des letzteren Kegelschnitts, geschrieben in Coordinaten u_i. Nun ist nach (12) in unserm Falle, wenn $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$:

$$\begin{aligned} (\varrho \sigma u) \varrho_x \sigma_x = \tfrac{1}{2} (r s u) \{ (du)_x^2 + a_x (a u d u) D + \Theta D^2 \} \\ - u_x \{ \tfrac{1}{2} (r s d u) (du)_x + \tfrac{1}{2} a_x (a r s) (a u d u) D \} . \end{aligned}$$

*) Vgl. im Folgenden Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 31 ff. und p. 218 ff. In dem vorhin genannten Aufsatze (id. ib. p. 407) wird insbesondere gezeigt, wie die frühere Gleichung aus der jetzt zu betrachtenden entsteht, wenn die C_3 in eine C_2 und eine Gerade zerfällt.

Lassen wir den die willkürlichen Grössen r, s enthaltenden Factor (rsu) fort, so haben wir also wegen $u_x = 0$ die Liniengleichung des Kegelschnittes:

$$(du)_x^2 + a_x^2 (audu) D + \Theta D^2 = 0$$

zu bilden; und diese ist in Rücksicht auf Gleichung (5) und (6) p. 544 gegeben durch:

$$D^3 . F + 3 D . \Theta' + 2 f' = 0, \tag{14}$$

wo Θ', f' aus Θ, f entstehen, wenn man $x_i = (udu)_i$ setzt, wo also:

$$\Theta' = (abu)^2 (audu) (budu), \qquad f' = (audu)^3$$

und:

$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu).$$

Dass in der Gleichung (14) der Coëfficient von D^2 verschwinden muss, war nach dem Abel'schen Theoreme vorauszusehen, denn er ist proportional zu der Summe der drei Werthe von D in den Schnittpunkten von $a_x^3 = 0$ mit $u_x = 0$.*)

Von der Gleichung (14) werden wir nun durch folgende Ueberlegungen zu unserm Ausgangspunkte zurückgeführt. Nimmt man zwischen den Wurzeln D_1, D_2, D_3 derselben, ausser der Gleichung des Abel'schen Theorems: $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, eine zweite lineare Relation an:

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0,$$

in der die m_i irgend welche rationale oder irrationale Zahlen bedeuten, oder wegen jener ersten Gleichung:

$$D_1 - \varrho D_2 = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = -\frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3}, \tag{15}$$

so muss neben (14) die Bedingung erfüllt sein:

$$\varrho^3 D^3 . F + 3 \varrho D . \Theta' + 2 f' = 0;$$

und die Elimination von D aus beiden Gleichungen gibt:

$$F . f'^2 + \frac{3\sigma - 2}{\sigma^3} \Theta'^3 = 0, \quad \text{wenn} \quad \sigma = \frac{2}{3} . \frac{\varrho^2 + \varrho + 1}{\varrho(\varrho + 1)}, \tag{16}$$

wo man statt ϱ auch die Werthe

$$-\frac{1}{1+\varrho} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \quad \text{oder} \quad -\frac{1+\varrho}{\varrho} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}$$

setzen kann, ohne den Werth von σ zu ändern. Die Gleichung (16) ist die Differentialgleichung für die Hauptcoincidenzcurven eines Connexes (6, 6), deren Integration vermöge (15) auf eine Quadratur zurückgeführt ist, wie man nach Analogie der Behandlung des vorhergehenden Beispiels sofort erkennt.

---

*) Vgl. die zweite Anmerkung auf p. 811.

Die Gleichung des Connexes (6, 6) selbst können wir noch in etwas anderer Form schreiben. Auf der Linie $u_x = 0$ nämlich wird durch $f = 0$ eine binäre Form dritter Ordnung bestimmt, deren Hesse'sche Form durch den Kegelschnitt $\Theta = 0$, deren cubische Covariante durch die Curve:

$$Q \equiv (abu)^2 (cau)\, c_x^2 b_x = 0$$

auf $u_x = 0$ bestimmt wird (p. 543 f.). Nun besteht zwischen der binären Grundform f, deren Hesse'scher Form Δ, deren Invariante R und deren Covariante Q die Identität (p. 223):

$$-2\,Q^2 = Rf^2 + \Delta^3 .$$

Zwischen den ternären Formen f, Θ, F und Q besteht also auch vermöge $u_x = 0$ die Identität:

$$\Theta^3 + Ff^2 = -2\,Q^2 , \tag{17}$$

und folglich gibt (16) auch die Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven für den andern Connex:

$$2\,\sigma^3 Q^2 + (\sigma^3 - 3\,\sigma + 2)\,\Theta^3 = 0 . \tag{18}$$

Schliesslich können wir somit den Satz aussprechen:

Sind die Coordinaten der Punkte einer Fundamentalcurve dritter Ordnung durch doppelt-periodische Functionen $\varphi_i(v)$ eines Parameters v dargestellt, so erhält man die Parameterdarstellung für die Tangenten der Hauptcoincidenzcurven des Connexes (18), *indem man aus den Coordinaten zweier Curvenpunkte mit den Argumenten v und $\varrho v + c$:*

$$x_i = \varphi_i(v) \quad \textit{und} \quad y_i = \varphi_i(\varrho v + c)$$

die Coordinaten $u_i = (xy)_i$ ihrer Verbindungslinie zusammensetzt; durch den Werth von ϱ (oder $-(1+\varrho)$, $-\frac{1+\varrho}{\varrho}$ und deren reciproke Werthe) ist alsdann der zugehörige Connex charakterisirt, durch c die Integrationsconstante geliefert.

Für allgemeine Werthe des Moduls sind die Hauptcoincidenzcurven nur dann *algebraisch,* wenn ϱ eine *rationale* Zahl ist; und zwar werden sie, wie wir früher sahen (p. 622), von der Klasse $2(m^2 + mn + n^2)$, wenn $\varrho = \frac{n}{m}$, wo m und n ganze Zahlen sind. Insbesondere sind sie also *von der sechsten Klasse für $\varrho = 1$, d. i. für den Connex $Q = 0$**), *und die Hauptcoincidenzcurven des letzteren stehen zu den Systemen von* Steiner'*schen Punktepaaren auf der Grundcurve $f = 0$ in der früher erörterten Beziehung* (p. 621). Für $\varrho = 1$ hat man indess als uneigent-

*) In Betreff des Eliminationsproblems, welches die Gleichung dieses Curvensystems in Linien- und Punkt-Coordinaten liefert, vgl. Harnack a. a. O. p. 226 und 233.

liche Lösung noch die Bedingung $F = 0$ zu berücksichtigen, denn die Discriminante der Gleichung (14) ist zunächst gleich:

$$F(\Theta^3 + Ff^2) = -2FQ^2.$$

Für den Connex $\Theta = 0$ insbesondere wird $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ also ϱ gleich den complexen Werthen von $\sqrt[3]{1}$; die *Hauptcoincidenzcurven von Θ sind also im Allgemeinen (d. h. abgesehen von besonderen Werthen des Moduls) transscendent.* —

Auf jeder Tangente einer Integralcurve des Connexes $Q = 0$ liegt bekanntlich ihr Berührungspunkt harmonisch zu ihren drei Schnittpunkten mit $f = 0$, und der Berührungspunkt der Tangente einer Hauptcoincidenzcurve von $\Theta = 0$ ist äquianharmonisch zu den betreffenden Punkten von $f = 0$ (vgl. p. 225). Ganz analog kann man nun auch die Integralcurven eines beliebigen Connexes der Schaar (18) durch eine Doppelverhältnissrelation charakterisiren. Soll nämlich im binären Gebiete ein Punkt mit den Coordinaten $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ mit den Verschwindungspunkten einer cubischen Form $a_x^3 = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$ das Doppelverhältniss α bilden, so hat man die Bedingung aufzustellen, dass die entsprechende biquadratische Form das Doppelverhältniss α besitze, d. h. man hat für letztere Form die Invarianten i und j zu bilden. Für diese nun findet man (p. 300):

$$i = \tfrac{3}{2}(a_1^2 - a_2 a_0), \qquad j = \tfrac{3}{8}(2a_1^3 + a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2).$$

In diese Formen gehen aber bis auf Zahlenfactoren die Covarianten Δ und Q von a_x^3 über, wenn man in ihnen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ setzt; da wir es mit Invariantenrelationen zu thun haben, müssen wir also allgemein setzen:

$$M^2 i = -\tfrac{3}{4}\Delta, \qquad M^3 j = \tfrac{3}{8} Q,$$

wo M eine unbestimmte Grösse bedeutet, und die gesuchte Bedingung wird*):

$$\frac{\Delta^3}{Q^2} = -8\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Diese Gleichung endlich ist identisch mit der Gleichung (18), wenn man Δ durch Θ ersetzt, unter Q den zu $f = 0$ gehörigen Connex versteht, $\alpha = -\varrho$ setzt und für ϱ wieder σ einführt. Also:

Die Tangenten der 6 Hauptcoincidenzcurven des Connexes (18), *welche durch einen beliebigen Punkt x gehen, in diesem Punkte schneiden die Curve $f = 0$ je in drei Punkten, welche mit x zusammen das Doppelverhältniss $-\varrho$ bilden.*

---

*) Dieselbe Gleichung ergibt sich aus der Theorie der typischen Darstellung binärer Formen, vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, p. 351.

Durch diesen Satz ist die ganze Klasse von Connexen geometrisch charakterisirt, deren Integralcurven mit dem elliptischen Integrale erster Gattung einer Curve dritter Ordnung in so einfachem Zusammenhange stehen.

VI. Der Connex erster Ordnung und erster Klasse.

Genauer untersucht ist bisher allein der Connex erster Ordnung und erster Klasse, und zwar einerseits in geometrischer Hinsicht (denn derselbe stellt ja eine Collineation dar, vgl. p. 937), andererseits auch vom Standpunkte der Invariantentheorie. Die letztere gibt uns hier neue Gesichtspunkte für die Theorie der Collineationen, die wir schon früher mehr geometrisch betrachteten (p. 250); wir wollen daher im Folgenden besonders die algebraischen Theorien hervorheben.*)

Die Gleichung des gegebenen Connexes sei:

$$(1)\qquad f = a_x u_\alpha = b_x u_\beta = \ldots \Sigma\Sigma a_{ik} u_i x_k = 0\,,$$

wo im Allgemeinen $a_{ik} \gtrless a_{ki}$; die zugehörige Collineation ist dann, wenn $f = \varrho u_y$, durch die Gleichungen gegeben:

$$(2)\qquad \varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

oder in Liniencoordinaten, indem $f = \sigma v_x$, durch die transponirte Substitution:

$$(3)\qquad \sigma u_i = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3\,.$$

Sollen diese Gleichungen eine eigentliche Collineation darstellen, so darf *ihre Determinante* Δ nicht verschwinden; die Determinante ist also jedenfalls eine Invariante des Connexes (1, 1). Indess lässt sich dieselbe noch durch niedrigere Invarianten ausdrücken; setzen wir nämlich:

$$i = a_\alpha\,, \quad i_1 = b_\alpha a_\beta\,, \quad i_2 = b_\alpha a_\gamma c_\beta\,,$$

und berücksichtigen, dass symbolisch:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & c_3\gamma_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (\alpha\beta\gamma)\,,$$

so folgt, wenn man die Symbolpaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in jeder Weise permutirt und den sechsten Theil der Summe bildet:

$$(4)\qquad \Delta = \tfrac{1}{6}(abc)(\alpha\beta\gamma) = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = \frac{i^3 + 2\,i_2 - 3\,i i_1}{6}.$$

*) Vgl. im Folgenden besonders Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 1, p. 359 ff. Es wird hier auch insbesondere gezeigt, dass die im Texte weiterhin erwähnten Functionalinvarianten das „vollständige System“ von f bilden.

Durch die drei hier auftretenden Invarianten i, i_1, i_2 niedrigsten Grades lassen sich aber auch alle anderen Invarianten von f ausdrücken, denn der Connex f hängt nur von zwei absoluten Constanten ab und kann also nur zwei absolute Invarianten, d. h. drei von einander unabhängige Invarianten, zulassen. In der That kann ja f im Allgemeinen auf die kanonische Form gebracht werden (vgl. p. 978):

$$f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 X_2 U_2 + \varkappa_3 X_3 U_3, \tag{5}$$

und in ihr sind nur zwei absolute Constante enthalten.

Wir wollen sogleich noch die drei Invarianten für die kanonische Form (5) bilden; aus ihr ersieht man dann gleichzeitig, dass sie im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Es geschieht dies am einfachsten, wenn man zuvor die covarianten Zwischenformen

$$\begin{aligned} f_1 &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\beta b_\alpha, \\ f_2 &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \Sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\gamma b_\alpha c_\beta \end{aligned} \tag{6}$$

einführt; dann erhält man nämlich für jene Invarianten die nicht symbolischen Bildungsgesetze:

$$i = \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_i}, \quad i_1 = \Sigma \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_i}, \quad i_2 = \Sigma \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial u_i}. \tag{7}$$

In der kanonischen Form aber wird zunächst nach (5) und (6):

$$f_1 = \varkappa_1^2 X_1 U_1 + \varkappa_2^2 X_2 U_2 + \varkappa_3^2 X_3 U_3, \quad f_2 = \varkappa_1^3 X_1 U_1 + \varkappa_2^3 X_2 U_2 + \varkappa_3^2 X_3 U_3 \tag{8}$$

und also nach (7):

$$\begin{aligned} i = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \quad & i_1 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2, \\ & i_2 = \varkappa_1^3 + \varkappa_2^3 + \varkappa_3^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir kennen sonach drei symmetrische Functionen der Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und können daher eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln dieselben sind. Man findet nämlich:

$$\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_2 \varkappa_3 + \varkappa_3 \varkappa_1 = \frac{i^2 - i_1}{2}, \quad \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 = \frac{i^3 - 3 i i_1 + 2 i_2}{6}. \tag{10}$$

Zur Bestimmung von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ hat man folglich die Gleichung:

$$\varkappa^3 - \varkappa^2 . i + \tfrac{1}{2}(i^2 - i_1)\varkappa - \tfrac{1}{6}(i^3 - 3 i i_1 + 2 i_2) = 0, \tag{11}$$

welche wir früher in der Form fanden (p. 261):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varkappa & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

Nachdem man $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ bestimmt hat, kann man leicht die Transformation herstellen, welche den Connex f in die Form (5) überführt;

man hat eben nur die Producte der X_i, U_i aus den drei Gleichungen (5) und (8) zu berechnen. Bezeichnet man die Determinante dieser drei Gleichungen mit K, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&K \,.\, U_1 X_1 = (x_2 - x_3)\left\{(x_2 + x_3) f - x_2 x_3 u_x - f_1\right\}\\
(12)\qquad &K \,.\, U_2 X_2 = (x_3 - x_1)\left\{(x_3 + x_1) f - x_3 x_1 u_x - f_1\right\}\\
&K \,.\, U_3 X_3 = (x_1 - x_2)\left\{(x_1 + x_2) f - x_1 x_2 u_x - f_1\right\},
\end{aligned}$$

wo also:

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Die Gleichungen (12) bestimmen die gesuchten Substitutionscoëfficienten mit Hülfe der Wurzeln von (11), soweit dies hier überhaupt möglich und nöthig ist; soweit nämlich, dass nur noch alle Coëfficienten desselben X_i mit einem beliebigen gemeinsamen Factor behaftet werden können, welcher dann bei den Coëfficienten von U_i reciprok auftritt.

Die gemeinsamen Elemente der drei hier auftretenden Connexe $f = 0$, $f_1 = 0$, $u_x = 0$ bilden unseren allgemeinen Erörterungen zufolge ein Curvenpaar dritter Ordnung und dritter Klasse (p. 941), dessen Ordnungs- und Klassencurve bez. durch die Gleichungen gegeben wird:

$$\begin{aligned}
&\varphi = (\alpha\beta x)\, a_x c_x b_\gamma \equiv \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_x}{\partial u_3} = 0\\
(13)\qquad &\psi = (a b u)\, u_\alpha u_\gamma b_\gamma \equiv \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_x}{\partial x_3} = 0.
\end{aligned}$$

Für die kanonische Form ergibt sich hieraus, wenn r die Determinante der Substitution (12) bezeichnet, welche hier wegen der Klammerfactoren $(\alpha\beta x)$ bez. $(a b u)$ hinzuzufügen ist:

$$\varphi = r \,.\, \begin{vmatrix} x_1 X_1 & x_2 X_2 & x_3 X_3 \\ x_1^2 X_1 & x_2^2 X_2 & x_3^2 X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = r \,.\, X_1 X_2 X_3 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

und ebenso:

$$\psi = r \,.\, U_1 U_2 U_3 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Jede der cubischen Formen φ, ψ zerfällt also in drei lineare Factoren, welche bez. die Seiten und Ecken des Fundamentaldreiecks darstellen. Die Zerlegung dieser Formen in ihre Factoren (p. 597) ist also durch die Transformation (12) schon mit gegeben.

Die geometrische Bedeutung des Connexes $f_1 = 0$ ist aus der kanonischen Form sofort ersichtlich, *er stellt diejenige Collineation dar,*

welche man durch zweimalige Anwendung der Collineation $f=0$ *erhält;* und man bestätigt dies auch leicht direct. Ebenso entsteht die Collineation des in (6) und (8) vorkommenden Connexes $f_2=0$ durch dreimalige Anwendung der Collineation $f=0$, u. s. f. Allgemein ist die durch $(h+1)$-malige Anwendung von $f=0$ erhaltene Collineation gegeben durch den Connex:

$$(14)\qquad f_h \equiv \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f_{h-1}}{\partial u_i} \equiv \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_i} = 0.$$

Es ist aber zu bemerken, dass sich alle so entstehenden Formen f_h linear durch die Formen f, f_1 und u_x ausdrücken lassen. In der That beziehen sich ja alle Collineationen $f_h=0$ auf dasselbe Fundamentaldreieck; da aber alle zu demselben Dreiecke gehörigen Collineationen nur eine zweifach unendliche Schaar bilden, so müssen sie sämmtlich in der Form

$$f+\varkappa f_1+\lambda u_x=0$$

darstellbar sein. Um dies auch durch die Rechnung zu bestätigen, nimmt man am besten eine andere Zwischenform zu Hülfe:

$$(15)\qquad g=(abu)\,(\alpha\beta x),$$

welche, wie uns schon bekannt ist, gleich Null gesetzt, den zu $f=0$ conjugirten Connex darstellt (p. 950), und auf deren geometrische Bedeutung wir sogleich zurückkommen. *Auch diese Form* g *ist durch* f, f_1 *und* u_x *ausdrückbar,* denn wir haben direct:

$$(16)\quad g\equiv(abu)\,(\alpha\beta x)=\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_x \end{vmatrix} \equiv (i^2-i_1)\,u_x-2\,if+2\,f_1.$$

Nun ist weiter:

$$\Sigma\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}=(abu)\,(\alpha\beta\gamma)\,c_x=\tfrac{1}{3}(\alpha\beta\gamma)\{(abu)\,c_x-(acu)b_x-(cbu)\,a_x\}$$
$$=\tfrac{1}{3}\,(\alpha\beta\gamma)\,(abc)\,u_x;$$

und bildet man dieselbe Form aus der rechten Seite von (16), so ergibt sich in Rücksicht auf (4) für f_2 die Identität:

$$\tfrac{1}{3}\,(i^3+2\,i_2-3\,ii_1)\,u_x=(i^2-i_1)\,f-2if_1+2f_2.$$

Ebenso findet man dann hieraus durch Wiederholung desselben Processes:

$$\tfrac{1}{3}\,(i^3+2\,i_2-3\,ii_1)f=(i^2-i_1)\,f_1-2if_2+2f_3,$$
$$\tfrac{1}{3}\,(i^3+2\,i_2-3\,ii_1)f_1=(i^2-i_1)\,f_2-2if_3+2f_4,$$

u. s. f., woraus man jede Form f_h in Function aller vorhergehenden Formen berechnen kann.

Der Reihe von Connexen $f_h = 0$ stellt sich eine Reihe von Connexen $g_h = 0$ an die Seite, welche aus g ebenso zu bilden sind, wie f_h aus f, so dass:

$$g_{h+1} = \Sigma \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g_h}{\partial u_i} = \Sigma \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g_h}{\partial x_i}.$$

Ihre geometrische Bedeutung ist ebenfalls leicht zu erkennen. *Der Connex $g = 0$ zunächst gibt die zu $f = 0$ inverse Transformation*, welche, bezogen auf das Fundamentaldreieck, in der Form $\sigma Y_1 = x_2 x_3 X_1$, etc. erscheint. In der That erhält man auch für die kanonische Form aus der Identität (16) vermöge (8), (9) und (10) für g den Werth:

$$\tfrac{1}{2} g = x_2 x_3 U_1 X_1 + x_3 x_1 U_2 X_2 + x_1 x_2 U_3 X_3.$$

Und hieraus findet man weiter:

$$\tfrac{1}{2} g_h = (x_2 x_3)^{h+1} U_1 X_1 + (x_3 x_1)^{h+1} U_2 X_2 + (x_1 x_2)^{h+1} U_3 X_3.$$

Die Connexe $g_h = 0$ stellen also bez. die inversen Transformationen zu den Transformationen $f_h = 0$ dar.

Aus einem Punkte x erhalten wir durch alle diese Collineationen eine Reihe von discreten Punkten, welche vorwärts und rückwärts beliebig fortgesetzt werden kann. Indem wir den Punkt x selbst durch die Zahl 0 bezeichnen, können wir die Punkte auf der einen Seite von x durch die Zahlen 1, 2, 3 ..., die auf der andern durch — 1, — 2, — 3, ... unterscheiden, so dass ihnen bez. die folgenden darunter stehenden Gleichungen entsprechen:

$$(17) \quad \begin{array}{cccccc} \ldots(-2), & (-1), & 0, & 1, & 2, & \ldots \\ \ldots g_1 = 0, & g = 0, & u_x = 0, & f = 0, & f_1 = 0, & \ldots; \end{array}$$

und der Punkt λ hat dann in der kanonischen Form die Gleichung:

$$(18) \qquad x_1^\lambda U_1 X_1 + x_2^\lambda U_2 X_2 + x_3^\lambda U_3 X_3 = 0.$$

Jede solche Gleichung wird aber zugleich die Gleichung eines collinearen Systems, welches unmittelbar von dem Punkte 0 auf den Punkt λ führt. So entspricht also der Punktreihe (17) die Reihe (18) von collinearen Systemen.

Von besonderem Interesse wird für uns der Umstand, dass *alle Punkte der Reihe auf einer (im Allgemeinen transscendenten) Curve liegen, welche sich durch Elimination von ϱ und λ aus den Gleichungen:*

$$(18^*) \qquad \varrho Y_1 = x_1^\lambda X_1, \quad \varrho Y_2 = x_2^\lambda X_2, \quad \varrho Y_3 = x_3^\lambda X_3$$

ergibt, nämlich:

$$(19) \quad \log \frac{Y_1}{X_1} \cdot \log \frac{x_2}{x_3} + \log \frac{Y_2}{X_2} \cdot \log \frac{x_3}{x_1} + \log \frac{Y_3}{X_3} \cdot \log \frac{x_1}{x_2} = 0,$$

oder wenn wir unter C einen Parameter (Integrationsconstante) verstehen und

$$k_1 = \log \frac{x_2}{x_3}, \quad k_2 = \log \frac{x_3}{x_1}, \quad k_3 = \log \frac{x_1}{x_2}$$

setzen:

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3} = C,$$

wobei $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Diese Gleichung ist von derselben Form wie die der Hauptcoincidenzcurven von $f = 0$ (vgl. p. 979):

$$(20) \qquad X_1^{x_2 - x_3} X_2^{x_3 - x_1} X_3^{x_1 - x_2} = C.$$

Dem Connexe $f = 0$ und gleichzeitig allen Connexen $f_h = 0$ oder $g_h = 0$, d. i. allen Connexen der durch (18) *dargestellten Schaar, ist so ein gewisser Connex:*

$$U_1 X_1 \log x_1 + U_2 X_2 \log x_2 + U_3 X_3 \log x_3 = 0$$

zugeordnet, dessen Hauptcoincidenzcurven die Curven (19) *liefern, auf welchen alle Punkte einer der obigen Reihen liegen.*

Die Curven (19) sind von ebenso allgemeiner Natur wie die Curven (20), und umgekehrt; die ersteren eignen sich aber, wie wir weiterhin sehen werden, besser zum Studium der Hauptcoincidenzcurven, da sich deren wesentliche Eigenschaften aus der Entstehungsweise der Gleichung (19) direct ergeben.

Die Curven (19) sind insbesondere algebraisch, wenn die Grössen $\log \frac{x_i}{x_k}$ sich wie positive oder negative ganze Zahlen verhalten. Ist dies nicht der Fall, so kann man sich doch die Frage stellen, unter welchen Umständen gewisse Punkte der Reihe auf einer *algebraischen* Curve liegen? Durch diese Forderung wird man dann zu einer bestimmten Invariantenrelation für den Connex $f = 0$ geführt, wie hier an einigen Beispielen erläutert werden möge.*)

Dass die Punkte 0, 1, 2 auf einer Geraden liegen sollen, kann man im Allgemeinen nicht verlangen, denn dann würden alle Punkte der aus 0 entstehenden Reihe auf derselben Geraden liegen. In der That würde ja dann auch die oben mit K bezeichnete Determinante verschwinden müssen, und folglich die Gleichung (11) zwei gleiche Wurzeln haben, was wir vorläufig ausgeschlossen haben.

Sollen dagegen die Punkte 0, 1, 3 auf einer Geraden liegen, so muss die Gleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

*) In Betreff einer allgemeinen Erledigung der sich hier bietenden Probleme vgl. Clebsch und Gordan a. a. O.

Die linke Seite ist offenbar durch die Determinante K theilbar; der übrig bleibende Factor ist linear und symmetrisch in $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, also zu der Summe $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$ proportional. *Die Bedingung dafür, dass die Punkte* 0, 1, 3 *auf einer Geraden liegen, ist somit:*

$$(21) \qquad i \equiv \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0\,.^{*)}$$

Selbstverständlich liegen dann auch der r^{te}, $(r+1)^{\text{te}}$ und $(r+3)^{\text{te}}$ Punkt auf einer Geraden, wo r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. In ähnlicher Weise findet man, wenn die Punkte 0, 1, 4 auf einer Geraden liegen sollen, die Invariantenrelation:

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_2 \equiv \tfrac{1}{2}(i^2 + i_1) = 0, \quad \text{u. s. f.}$$

Fordert man dagegen, dass die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen offenbar auch *alle* Punkte der aus Null entstehenden Reihe auf demselben Kegelschnitte liegen, d. h. die Curven (20) müssen in diesem Falle aus einem Systeme von Kegelschnitten bestehen; und die Bedingung dafür ist:

$$\begin{array}{lllll} & k_1 = k_2 = 1\,, & k_3 = -2\,, & \text{also:} & \varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_3^2 = 0 \\ \text{oder:} & k_2 = k_3 = 1\,, & k_1 = -2\,, & \text{„} & \varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_1^2 = 0 \\ \text{„} & k_3 = k_1 = 1\,, & k_2 = -2\,, & \text{„} & \varkappa_3\varkappa_1 - \varkappa_2^2 = 0. \end{array}$$

Die entsprechende Invariantenrelation verlangt somit das Verschwinden des Ausdrucks:

$$\begin{aligned} &(\varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_1^2)(\varkappa_3\varkappa_1 - \varkappa_2^2)(\varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_3^2) \\ &= (\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_2)^3 - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)^3\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\,, \end{aligned}$$

woraus wegen (9) und (10) folgt: *Die Curven* (19) *bestehen aus einem Büschel von Kegelschnitten der Form* $x_i x_k - C x_l^2 = 0$, *sobald:***)

$$(22) \qquad 3(i^2 - i_1)^3 - i^3(i^3 - 3ii_1 + 2i_2) = 0\,.$$

Die *Hauptcoincidenzcurven* von $f = 0$ bleiben jedoch in diesem Falle im Allgemeinen transscendent. *Sollen dagegen die letzteren aus Kegelschnitten bestehen, so muss sein:*

---

*) Wenn man den Begriff von Polarconnexen einführt (d. i. Connexen der Form $a_x^{m-\varkappa} a_y^{\varkappa} u_\alpha^{n-\lambda} v_\alpha^{\lambda} = 0$), so kann man mit Hülfe dieser Invariantenrelation auch solchen algebraischen Bildungen eine Deutung geben, deren geometrischer Sinn durch die Polarentheorie der Curven oder durch das Uebertragungsprincip nicht unmittelbar gegeben wird (p. 316); doch ist dies praktisch meist von wenig Nutzen, und soll deshalb nicht weiter ausgeführt werden. Immerhin kann man sich so z. B. die Bedeutung der simultanen Invarianten zweier Kegelschnitte ableiten (p. 295).

**) Dieser Fall der Collineation ist für die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie von besonderem Interesse, vgl. den auf p. 151 genannten Aufsatz von Klein, Math. Annalen, Bd. 4.

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)(x_3 + x_1 - 2x_2) = 0$$

oder:

$$2i^3 - 9ii_1 + i_2 = 0. \tag{23}$$

Unter den in (19) enthaltenen Curven sei noch die *logarithmische Spirale* besonders hervorgehoben; ihr Auftreten ist nicht durch eine Invarianteneigenschaft des Connexes bedingt, sondern durch besondere Lage zweier Ecken des Fundamentaldreiecks in metrischer Beziehung; für die projectivische Geometrie kann sie also als Repräsentant der allgemeinen Integralcurven des Connexes (1, 1) betrachtet werden. Lässt man nämlich zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in die beiden imaginären Kreispunkte fallen*) und führt sodann Polar-Coordinaten ein mittelst der Substitution:

$$X_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad X_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi), \quad X_3 = 1,$$

so wird, wenn man endlich noch $k_1 = p + iq$, $k_2 = -p + iq$ voraussetzt, die Gleichung der Curven (19):

$$r^{2iq} e^{2\varphi p i} = C$$

oder, wenn γ und ϱ neue Constanten bezeichnen:

$$r = \gamma e^{\varrho\varphi},$$

in der That die Gleichung eines Systems von logarithmischen Spiralen mit dem Parameter γ. —

Zu fruchtbringenden Gesichtspunkten für die Untersuchung der Curvensysteme (19) und (20) werden wir nun geführt, wenn wir in der Connex-Schaar (18) dem Parameter λ nicht mehr ganzzahlige Werthe beilegen, sondern ihn als einen *continuirlich* veränderlichen Parameter auffassen. Auch dann stellt jeder Connex (18) eine Collineation dar, freilich nicht immer eine solche, die durch endlichmalige Wiederholung der Transformation $f = 0$ oder $g = 0$ erzeugt werden kann. Für das System der Connexe (18) oder Transformationen (18*) bleiben auch dann folgende beiden Sätze gültig:

Zwei beliebige Transformationen des Systems geben, hinter einander angewandt, unabhängig von ihrer Reihenfolge dieselbe neue Transformation. — Diese neue Transformation ist selbst eine Transformation des Systems.

Mit Rücksicht auf die erste Eigenschaft sollen die Transformationen des Systems *vertauschbar*, mit Rücksicht auf die zweite soll das System *geschlossen* genannt werden. Wir haben es demnach hier mit einem *geschlossenen Systeme von einfach unendlich vielen, vertauschbaren,*

*) Es bleiben dann bei der Transformation alle Winkel erhalten; man hat eine „*Aehnlichkeitstransformation*". In Rücksicht hierauf ergeben sich leicht mit Hülfe der weiterhin erwähnten Schlussweise die zahlreichen metrischen Eigenschaften der logarithmischen Spirale; vgl. Holzmüller: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16.

linearen Transformationen zu thun.*) Und zwar sind dies die einzigen Transformationen der Art, die es gibt; in der That führt die directe Aufsuchung derselben zu einer Differentialgleichung (24), die wir sogleich aufstellen werden, und deren Integration nur die Transformationen (18*) gibt.

In dem Systeme ist nun besonders eine Transformation enthalten, welche entsteht, wenn man λ unendlich klein, also etwa gleich $d\lambda$, nimmt, und die wir als die *unendlich kleine* Transformation des Systems bezeichnen wollen. Sie ordnet jedem Punkte X einen benachbarten Punkt $Y = X + dX$ zu, der nach (18*) bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$\sigma\, dX_i = X_i \,.\, \log \varkappa_i\,, \tag{24}$$

wo die Grösse $d\lambda$ in σ enthalten sein mag. Für diese Transformation fällt offenbar die zu X gehörige Richtung der Hauptcoincidenz mit der Tangente der durch X gehenden Curve (19) zusammen. Der für $\lambda = d\lambda$ aus (18) resultirende Connex ist also *derjenige, dessen Hauptcoincidenzcurven durch die Curven* (19) *gegeben werden;* in der That ist die Gleichung desselben ja wieder $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$.

Es ist evident, dass man jede Transformation des Systems durch unendlich-malige Wiederholung dieser unendlich-kleinen Transformation erzeugen kann. Alle einem Punkte X entsprechenden Punkte werden dabei eine bestimmte Curve beschreiben; diese hat ihrer Entstehung nach die Eigenschaft, dass jeder Punkt derselben durch eine Transformation (24) wieder in einen ihrer Punkte (und zwar einen benachbarten) übergeht. Auch wenn man die unendlich kleine Transformation unendlich oft wiederholt, bleibt daher der Punkt X immer auf derselben Curve; d. h. die letztere geht durch jede der Transformationen unseres Systems in sich über. Ihre Gleichung ergibt sich sonach wieder durch Elimination von λ aus (18*), d. h. sie ist durch (19) gegeben, wie man auch durch Integration der Differentialgleichung (24) bestätigt.

Jede Integralcurve eines Connexes (1, 1) *hat also die Eigenschaft durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich überzugehen, und zwar durch die Transformationen* $\varrho\, Y_i = \varkappa_i^\lambda X_i$, *wenn der Connex in der Form* $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$ *gegeben ist.***)

*) Vgl. im Folgenden Klein und Lie: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Comptes rendus: 6. und 13. Juni 1870, und: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen, Bd. 4.

**) Diese Curven bestehen nach einem bekannten Satze der Kinematik aus Kreisen, wenn die Transformation mit einer Bewegung der Ebene in sich äquivalent

Aus dieser Eigenschaft lässt sich mit Leichtigkeit eine grosse Zahl anderer ableiten. Die dabei zu benutzende einfache Schlussweise möge an einem Beispiele erläutert werden. Denken wir uns mehrere demselben Systeme (20) angehörige Curven gegeben und an eine derselben eine Tangente gezogen. Bei Anwendung der zugehörigen linearen Transformationen bleiben die Curven selbst ungeändert, während die Tangente nach und nach die Lage jeder anderen Tangente derselben Curve annimmt. Dabei gehen der Berührungspunkt mit der einen Curve und die Schnittpunkte mit den anderen bez. in den Berührungspunkt und die Schnittpunkte der neuen Tangente mit denselben Curven über; daher der Satz, dass *die Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte eine Punktreihe bilden, welche, für beliebige Lagen der Tangente an derselben Curve, immer derselben Punktreihe projectivisch ist.* — Als Corollar folgt, da die drei Seiten des Fundamentaldreiecks auch immer als Curven des Systems zu betrachten sind, der Satz: *Das Doppelverhältniss des Berührungspunktes einer Tangente einer Curve* (20) *und ihrer drei Schnittpunkte mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist constant.* Die hierin ausgesprochene Eigenschaft könnte man auch umgekehrt zur Definition des Curvensystems benutzen.

Durch ein analoges Verfahren leitet man ferner die folgenden Sätze ab, deren Anführung genügen möge, um die Fruchtbarkeit der erwähnten, auch sonst oft anwendbaren Methode zu zeigen:*)

Man schneide eine Curve des Systems durch irgend eine gerade Linie und construire in beliebigen n ihrer Schnittpunkte die Tangenten; von den weiteren Schnittpunkten dieser n Tangenten liegen dann jedesmal n wieder auf einer Geraden.

Curven des Systems können sich nur in Eckpunkten des Fundamentaldreiecks schneiden.

Sie besitzen in keinem ihrer Punkte, ausser etwa in den drei Fundamentalpunkten, irgend eine solche Singularität, wie sie bei algebraischen Curven vorkommt.

---

ist. In der That liegen dann zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in den Kreispunkten, die dritte beliebig in der Ebene; letztere bleibt also fest, und folglich ist die Bewegung durch eine Rotation um sie zu ersetzen. Diese geht insbesondere in eine Translation über, wenn das Centrum der Rotation unendlich weit liegt. Die zahlreichen Untersuchungen über kinematische Geometrie sind so den Untersuchungen über die im Texte betrachteten Transformationen untergeordnet und können daher sofort projectivisch verallgemeinert werden, indem man die specielle Collineation der Bewegung immer durch eine allgemeine Collineation ersetzt. Vgl. darüber: Burmester: Kinematisch geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher Systeme, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 19 und 20. Vgl. auch die Anmerkung auf p. 262. — Die Curven (19) werden von Burmester passend als *Selbsthüllcurven* bezeichnet.

*) Wegen weiterer Ausführungen vgl. Klein und Lie a. a. O.

Jede zu ihnen covariante Curve ist eine Curve desselben Systems (denn sie muss durch dieselben Transformationen in sich übergehen).

Wenn man auf eine beliebige Curve, die nur nicht selbst einem Systeme von Curven (20) mit demselben Fundamentaldreiecke angehört, die Transformationen unseres geschlossenen Systems anwendet, so besteht die Umhüllungscurve der dadurch erzeugten Curvenreihe aus lauter Curven des gegebenen Systems. —

Es sollen im Folgenden noch kurz die Ausnahmefälle angedeutet werden, welche dadurch eintreten, dass zwei oder drei Wurzeln der cubischen Gleichung (11) einander gleich werden.*)

1) Ist $\varkappa_2 = \varkappa_3$, so fallen zwei Seiten des Fundamentaldreiecks zusammen, während die dritte ($X_1 = 0$) davon getrennt bleibt. Es ist daher für die Collineation jedenfalls die kanonische Form möglich:

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} &\varrho Y_1 = \varkappa_1 X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \\ &\varrho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 . \end{aligned}$$

Bildet man dann aber jene cubische Gleichung in der Form:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 - \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 - \varkappa & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

so erkennt man, dass $\gamma = \varkappa_2$ sein muss. Setzt man nun noch:

$$Y_3 + \frac{\alpha}{\varkappa_1 - \varkappa_2} Y_1 \quad \text{für} \quad Y_3 \quad \text{und} \quad X_3 + \frac{\beta}{\varkappa_1 - \varkappa_2} X_1 \quad \text{für} \quad X_3,$$

so gehen die Gleichungen (25) über in:

$$\text{(26)} \qquad \varrho Y_1 = \varkappa_1 X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \quad \varrho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa_2 X_3,$$

und *der Connex $f = 0$ erscheint in der kanonischen Form:*

$$f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + \beta X_2 U_3 .$$

Zwei Ecken des Fundamentaldreiecks sind hier in den Punkt $U_3 = 0$ zusammengefallen; der Punkt $U_1 = 0$ dagegen ist der Schnittpunkt der beiden benachbart liegenden Seiten des Dreiecks.

Durch λ-malige Wiederholung der Transformation erhält man an Stelle von (18*) die Gleichungen:

$$\text{(27)} \quad \varrho Y_1 = \varkappa_1^{\lambda} X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2^{\lambda} X_2, \quad \varrho Y_3 = \varkappa_2^{\lambda} X_3 + \lambda \beta \varkappa_2^{\lambda - 1} X_2,$$

und durch Elimination von λ findet man an Stelle von (19) die Gleichung:

$$\varkappa_2 (Y_3 X_2 - Y_2 X_3) \log \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \left(\log \frac{Y_1}{X_1} - \log \frac{Y_2}{X_2}\right) \beta Y_2 X_2 = 0 .$$

---

*) Vgl. Clebsch und Gordan a. a. O., sowie die geometrische Discussion dieser Fälle bei Hirst in den auf p. 944 genannten Aufsätzen.

Für $Y_2 = X_2 = 1$, $X_1 = x$, $X_3 = y$ erhält man also insbesondere die *logarithmische Linie:* $y = A \log Bx$, wo A, B Constante bedeuten. — Die Gleichung der Hauptcoincidenzcurven von $f = 0$ findet man dagegen in der Form:

$$(\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C.$$

2) In dem Falle, wo ausserdem $\beta = 0$ wird, geben die Gleichungen (26):

$$Y_1 X_2 - Y_2 X_1 = 0;$$

wir haben eine *perspectivische Transformation,* die schon früher eingehend behandelt wurde (p. 264). Man kann dieselbe algebraisch dadurch charakterisiren, dass die Formen φ und ψ identisch Null sind. — Alle Curven (28) bestehen aus Geraden durch das Collineationscentrum.

3) Wenn alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich werden, so kann man für die entsprechende Collineation nur noch *eine* Gleichung in der Form

$$(28) \qquad \varrho Y_1 = \varkappa X_1$$

annehmen; die beiden anderen hat man zunächst in der Form:

$$(29) \qquad \begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + (b + \varkappa) X_2 + c X_3 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 \qquad + (\gamma + \varkappa) X_3 . \end{aligned}$$

Damit jetzt aber die in z cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varkappa - z & 0 & 0 \\ a & b + \varkappa - z & c \\ \alpha & \beta & c + \varkappa - z \end{vmatrix} = 0$$

die Wurzel $z = \varkappa$ dreimal zulasse, muss man haben:

$$(30) \qquad b + \gamma = 0, \quad b\gamma - c\beta = 0.$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt, wenn man

$$c = \mu^2, \quad \beta = -\nu^2, \quad b = \mu\nu, \quad \gamma = -\mu\nu$$

setzt; und dadurch verwandeln sich die Gleichungen (29) in:

$$\begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + \varkappa X_2 + \mu (\nu X_2 + \mu X_3) \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \varkappa X_3 - \nu (\nu X_2 + \mu X_3) . \end{aligned}$$

Hieraus aber ergibt sich:

$$\varrho (\nu Y_2 + \mu Y_3) = (a\nu + \alpha\mu) X_1 + \varkappa (\nu X_2 + \mu X_3) .$$

Setzt man also jetzt wieder Y_2 für $\nu Y_2 + \mu Y_3$, und X_2 für $\nu X_2 + \mu X_3$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(31) \qquad \varrho Y_2 = a X_1 + \varkappa X_2 ,$$

welche aus den Gleichungen (29) immer abgeleitet werden kann. Man darf daher annehmen, dass eine der Gleichungen (29) die Form (31) bereits habe, d. h. dass $b = c = 0$. Die Gleichungen (30) geben dann $\gamma = 0$, während β beliebig bleibt. Die dritte Gleichung (29) wird also:

(32) $$\varrho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \varkappa X_3 .$$

Verändert man nun noch Y_3 und X_3, indem man statt derselben bez. $Y_3 - \frac{\alpha}{a} Y_2$, $X_3 - \frac{\alpha}{a} X_2$ setzt, so fällt in (32) noch das Glied mit X_1 fort; und es bleibt:

(33) $$\varrho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa X_3 ,$$

wo man noch, ohne die Allgemeinheit zu stören, $\beta = a$ nehmen kann.

Aus (28), (31), (33) findet man also *die Gleichung des Connexes in der kanonischen Form:*

$$f \equiv \varkappa (U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + a (X_1 U_2 + X_2 U_3) = 0 .$$

Für die Hauptcoincidenzcurven hat man hier wegen $U_X = 0$ einfach die Differentialgleichung:

$$X_1 (X_3 d X_1 - X_1 d X_3) + X_2 (X_1 d X_2 - X_2 d X_1) = 0 ,$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$C X_1^2 + X_2^2 - 2 X_1 X_3 = 0 ,$$

wenn C die Integrationsconstante bedeutet. *Die Integralcurven bilden also einen Büschel von Kegelschnitten, welche sich sämmtlich in einem Punkte dreipunktig berühren* (vgl. p. 141); und zwar ist der Berührungspunkt der Punkt $U_3 = 0$, in welchen die Ecken des Dreiecks zusammengerückt sind; die gemeinsame Tangente in ihm ist die dreifach zählende Dreiecksseite.

Ein ebensolches System von Kegelschnitten ergibt sich für die Curven, welche durch die Collineation (32) in sich übergeführt werden. In der That erhält man nach λ-maliger Wiederholung der Transformation die Formeln:

$$\varrho Y_1 = \varkappa^\lambda X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa^\lambda X_2 + a \varkappa^{\lambda-1} X_1$$
$$\varrho Y_3 = \varkappa^\lambda X_3 + a \varkappa^{\lambda-1} X_2 + \tfrac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) a^2 \varkappa^{\lambda-2} X_1 ;$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $\varkappa^{\lambda-2}$ dividirt:

$$\varrho Y_1 = \varkappa^2 X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa^2 X_2 + \lambda a \varkappa X_1$$
$$\varrho Y_3 = \varkappa^2 X_3 + \lambda a \varkappa X_2 + \tfrac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) a^2 X_1 .$$

Diese Gleichungen stellen aber eben die Coordinaten Y der Punkte einer solchen Curve in Function eines Parameters $\varkappa$ dar.

4) In Gleichung (31) und (32) kann noch eine der Constanten a, β verschwinden. Nehmen wir $\beta = 0$, so haben wir die Collineation:

(34) $$\varrho Y_1 = \varkappa X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa X_2 + a X_1 , \quad \varrho Y_3 = \varkappa X_3 .$$

Es folgt $Y_1 X_3 - X_1 Y_3 = 0$; die beiden Punktsysteme, Y und X sind also perspectivisch; das Collineationscentrum liegt im Punkte $X_1 = 0$, $X_3 = 0$, die Collineationsaxe*) geht durch diesen Punkt. Die oben betrachteten Curven sind die Geraden des Büschels $X_1 + \lambda X_3$.

5) Verschwinden endlich in (31), (33) gleichzeitig α und β, so hat man identische Punktsysteme, deren entsprechende Punkte immer zusammenfallen.

VII. Ueber die Connexe $(m, 1)$ oder $(1, n)$, insbesondere für den Fall $n = 2$.

Einige unserer allgemeinen Untersuchungen über die Connexe (m, n) verlangen eine besondere Betrachtung, wenn eine der Zahlen m, n gleich 1 wird. Schon beim conjugirten Connexe hatten wir Gelegenheit dies zu bemerken (p. 950); ein Element (y, v) des letzteren ist für $n = 1$ dadurch definirt, dass v gemeinsame Tangente für *alle* Curven C_m sei, welche zu den durch y gehenden Linien u gehören, und dualistisch entsprechend für $m = 1$ dadurch, dass y gemeinsamer Punkt *aller* Curven K_n sei, welche den Punkten x von v im Connexe $f = 0$ zugehören. Für den Fall $m = 1$, auf den wir uns im Folgenden beschränken, tritt ferner die Besonderheit ein, dass die oben mit $F' = 0$, $\Phi' = 0$ bezeichneten Curven nicht existiren, denn da eine beliebige Linie u nur mit *einem* ihrer Punkte ein Element der Hauptcoincidenz bildet, kann von einem Zusammenfallen zweier solchen Punkte von u nicht mehr die Rede sein. Statt dessen treten hier im Allgemeinen Linien u auf, welche durch *jeden* ihrer Punkte zu einem Elemente der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ein Umstand, der für $n > 1$, $m > 1$ nur in besonderen Fällen als Singularität vorkommen kann (vgl. p. 937). Für $m = 1$ nämlich können wir setzen:

$$f = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 ,$$

wo A_1, A_2, A_3 Functionen n^{ter} Klasse in den u_i sind. Hier wird die Linie u in der Weise ausgezeichnet sein, sobald die Gleichung $f = 0$ für $x_i = (uv)_i$ unabhängig von den v_i erfüllt ist, d. h. wenn gleichzeitig:

$$A_1 u_2 - A_2 u_1 = 0 , \quad A_2 u_3 - A_3 u_2 = 0 , \quad A_3 u_1 - A_1 u_3 = 0 .$$

Diese Gleichungen erlauben nach bekannten Regeln (p. 389) $n^2 + n + 1$ gemeinsame Lösungen, und somit haben wir den Satz:

In einem Connexe $(1, n)$ gibt es $n^2 + n + 1$ Gerade, welche je mit allen ihren Punkten Elemente der Hauptcoincidenz bilden. Dieselben sollen *Grundstrahlen* des Connexes bez. seiner Hauptcoincidenz genannt werden.

---

*) Ist dieselbe die unendlich ferne Gerade, so hat man den Fall der Translation, vgl. die zweite Anmk. auf p. 996.

Offenbar wird auch die Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven, welche aus $f = 0$ für $x_i = (udu)_i$ hervorgeht, durch jeden dieser Grundstrahlen unabhängig von den Differentialen du_i erfüllt. *Die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen eines Connexes $(1, n)$ werden also von allen seinen Hauptcoincidenzcurven berührt.* *)

Die Grundstrahlen stehen ferner in besonderer Beziehung zu den oben betrachteten, eindeutig auf einander bezogenen Curven $F = 0$, $\Phi = 0$ (vgl. p. 969). Die damals gegebene Bestimmung der Singularitäten der letzteren bleibt auch für $m = 1$ bestehen. Es ist also *F von der Ordnung $(n - 1)(n + 2)$, die Zahl der Doppelpunkte von F gleich*

$$\tfrac{1}{2}(n - 2)(n - 3)\{(n + 2)^2 + 3n\},$$

die Zahl der Spitzen gleich

$$3(n - 2)(2n + 1),$$

und daher findet man für *das Geschlecht von F die Zahl:*

$$\tfrac{1}{2} n (7n - 11).$$

Hieraus ergibt sich die Klasse von F gleich $3n^2$, die Zahl der Wendepunkte gleich $12n(n - 1)$, die der Doppeltangenten gleich $\frac{1}{2}(9n^4 - 40n^2 + 35n + 2)$.

Die Curve Φ dagegen wird von der Klasse $3n$, das Geschlecht derselben stimmt mit dem von F überein; *die Zahl ihrer Doppeltangenten* ergibt sich daher gleich

$$\tfrac{1}{2}(3n - 1)(3n - 2) - \tfrac{1}{2} n (7n - 11) = n^2 + n + 1,$$

denn Wendetangenten werden im Allgemeinen nicht auftreten.

Wir werden sehen, dass diese Doppeltangenten eben die Grundstrahlen unseres Connexes $(1, n)$ sind.

Im vorliegenden Falle nämlich können wir die Gleichung der Curve $\Phi = 0$ leicht direct aufstellen. Wir gehen zu dem Zwecke aus von dem Gewebe der Curven $(n + 1)^{\text{ter}}$ Klasse (vgl. p. 966):

$$U_v = (auv)\, u_a^n = \Sigma A_i (uv)_i = 0. \tag{1}$$

Eine jede Curve desselben berührt die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen und ausserdem die Linie v, zu welcher sie gehört; und der Berührungspunkt y von v ist der zu v gehörige Punkt der Hauptcoincidenz. Von jedem Punkte von v kann man ausser v selbst noch n weitere Tangenten an die Curve $U_v = 0$ legen, und dies sind die n zu dem betreffenden Punkte von v gehörigen Strahlen der Hauptcoincidenz; für den Punkt y selbst aber fällt einer dieser n Strahlen mit der Linie

*) Vgl. auch die Bemerkungen über singuläre Lösungen am Schlusse dieser Abtheilung.

v zusammen. Ist nun v eine Tangente der Curve $\Phi = 0$, so ist y ein Punkt von $F = 0$, und es fällt noch ein weiterer der von y ausgehenden n Strahlen der Hauptcoincidenz (Tangenten von $U_v = 0$) in die Linie v; d. h. v wird Rückkehrtangente der Curve $U_v = 0$. Die Bedingung hierfür ist, dass v gleichzeitig die Hesse'sche Curve von $U_v = 0$ berührt. Sei also $U_v = u_\pi^{n+1}$, so ist die Gleichung der Curve $\Phi = 0$ durch

$$(\pi\pi'\pi'')^2 u_\pi^{n-1} u_{\pi'}^{n-1} u_{\pi''}^{n-1} = 0$$

gegeben, wenn man links $u = v$ setzt. Die linke Seite dieser Gleichung ist vom Grade $3n$ in den u_i und vom dritten Grade in den Coëfficienten von f. Versucht man eine solche Contravariante symbolisch zu bilden, so hat man nur die Wahl zwischen den drei Formen:

$$(abc)\,u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n, \quad (abu)\,c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n, \quad a_\alpha u_\alpha^{n-1} (bcu)\,u_\beta^n u_\gamma^n.$$

Die erste von diesen verschwindet identisch, da sie bei Vertauschung von b, β und c, γ ihr Zeichen ändert; gleiches gilt von der letzten (welche überdies in zwei getrennte Factoren zerfällt); *die Gleichung der Curve* $\Phi = 0$ *ist also:*

$$\Phi \equiv (abu)\,c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n = 0. \tag{2}$$

Ist nun u ein Grundstrahl des Connexes, so verschwinden die Grössen $(bu)_i u_\beta^n$, und folglich ist auch Φ selbst Null. Aber auch die Differentialquotienten von Φ verschwinden, denn es ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = (ab)_i\, c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n$$
$$+ (abu)\,c_\alpha u_\alpha^{n-2} u_\beta^{n-1} u_\gamma^{n-1} \{(n-1)\alpha_i u_\beta u_\gamma + n u_\alpha (u_\beta \gamma_i + u_\gamma \beta_i\}.$$

Auf der rechten Seite verschwindet das zweite und dritte Glied wegen der Factoren $(abu)\,u_\beta^n$; das vierte ist gleich

$$u_\gamma^n \beta_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} \{(acu)\,b_\alpha + (cbu)\,a_\alpha + (abc)\,u_\alpha\},$$

ist also ebenfalls Null. Das erste Glied endlich ist gleich

$$\tfrac{1}{2}(ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (c_\alpha u_\beta - c_\beta u_\alpha) = \tfrac{1}{2}(ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (cuw).$$

wenn $w_i = (\alpha\beta)_i$; dasselbe verschwindet also auch wegen der Factoren $(cuw)\,u_\gamma^n$. Wir haben so den Satz:

Die $n^2 + n + 1$ *Grundstrahlen eines Connexes* $(1, n)$ *sind Doppeltangenten der zugehörigen Curve* $\Phi = 0$; *und letztere hat im Allgemeinen keine anderen singulären Tangenten.*

Dieselben Grundstrahlen sind auch Doppeltangenten der Curve $F = 0$, wie sich durch näheres Studium der Curvensysteme $U_v = 0$ und

$$X_y \equiv a_x\,(\alpha x y)^n = 0 \tag{3}$$

ergeben wird. Wir verweilen zunächst bei dem Gewebe der Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse $U_v = 0$. Eine Curve desselben ist im Allgemeinen

bestimmt durch zwei beliebige Tangenten u', u'', indem sich die Parameter v_i dann durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad (a u' v)\, u'^{\,n}_{\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad (a u'' v)\, u''^{\,n}_{\alpha} = 0$$

berechnen lassen. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, wenn der Schnittpunkt y von u' und u'' gleichzeitig Coincidenzpunkt für beide Linien ist, d. h. wenn die Gleichungen bestehen:

$$a_y u'^{\,n}_{\alpha} = 0, \quad a_y u''^{\,n}_{\alpha} = 0, \quad u'_y = 0, \quad u''_y = 0;$$

dann nämlich sind beide Gleichungen (4) sowohl für $v = u'$ als für $v = u''$ erfüllt, dienen somit nicht mehr zur Bestimmung von v. Es gibt also noch eine lineare Schaar von Curven U_v, welche alle die Linien u', u'' und ebenso die $n - 2$ anderen Strahlen berühren, denen derselbe Coincidenzpunkt y zukommt. Dies können wir in dem Satze aussprechen:*)

Die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen des Connexes $(1, n)$ bilden zusammen mit n Coincidenzstrahlen, welche einem beliebigen Punkte in der Hauptcoincidenz entsprechen, ein System von solchen $(n + 1)^2$ Geraden, die von unendlich vielen Curven $(n + 1)^{ter}$ Klasse $(U_v = 0)$ berührt werden.

Hierdurch ist das Gewebe $U_v = 0$ vor einem beliebigen Gewebe $(n + 1)^{ter}$ Klasse wesentlich ausgezeichnet. In der That würde letzteres ja schon durch $\frac{1}{2} n (n + 5)$ feste Tangenten völlig bestimmt sein, während wir hier $n^2 + n + 1$ solche Tangenten haben. Die Grundstrahlen sind also nicht von einander unabhängig, sie bilden vielmehr ein besonderes Liniensystem, welches den früher kurz erwähnten Systemen von R Punkten dualistisch gegenübersteht, durch welche noch ∞^q Curven einer gegebenen ∞^t-Schaar von C_n hindurchgehen, wenn $q > t - R$ (vgl. p. 757). In unserm Falle haben wir n durch $n + 1$ zu ersetzen und

$$t = \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 4), \quad q = 2, \quad R = n^2 + n + 1.$$

Nach den damaligen Resultaten genügen also die Coordinaten der $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen einem Systeme von Gleichungen, welches mit

$$(q + 1)(R - t + q) = \tfrac{3}{2}(n - 1)(n - 2)$$

unabhängigen Relationen äquivalent ist. In unserm Falle kommt dann noch die weitere Eigenschaft hinzu, dass die n weiteren gemeinsamen Tangenten zweier Curven desselben sich in einem Punkte schneiden. Ob indess letztere Eigenschaft eine Folge der ersteren ist, ob zwischen den $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen noch weitere Relationen bestehen, bedarf einer näheren Untersuchung.

---

*) Die folgenden Betrachtungen sind Verallgemeinerungen der von Godt über den Connex (1, 2) angestellten Untersuchungen; vgl. dessen Inauguraldissertation: Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse, Göttingen 1873.

In dem Gewebe $U_v = 0$ werden nun unendlich viele Curven mit einer Doppeltangente enthalten sein, ferner eine endliche Zahl von Curven mit zwei Doppeltangenten oder einer Wendetangente. Alle diese ausgezeichneten Curven stehen zu der Curve $F = 0$ in enger Beziehung. Die $n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$ einfachen Schnittpunkte von v mit U_v nämlich sind dadurch charakterisirt, dass in ihnen zwei der zugehörigen n Richtungen der Hauptcoincidenz (Tangenten von U_v) zusammenfallen; diese Eigenschaft kommt aber nur Punkten von $F = 0$ zu. *Die* $(n-1)(n+2)$ *Schnittpunkte von* $U_v = 0$ *mit* v *sind daher identisch mit den* $(n-1)(n+2)$ *Schnittpunkten von* v *mit* F.*) Soll U_v eine Doppeltangente haben, so müssen zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen in den Schnittpunkt von v mit der Doppeltangente, d. h. v wird Tangente von F; und umgekehrt hat U_v immer eine Doppeltangente, wenn v Tangente von F ist. Andernfalls nämlich müsste v selbst dann Doppeltangente von $U_v = 0$ sein, wir würden also auf v zwei, und somit unendlich viele Coincidenzpunkte haben, d. h. v wäre ein Grundstrahl unseres Connexes. Andererseits erkennt man aus dem Ausdrucke U_v sofort, dass in der That jeder Grundstrahl v Doppeltangente seiner Curve U_v ist; folglich ist er nach vorstehender Ueberlegung auch Doppeltangente von F. Wir haben so folgende Sätze:

Die Geraden v, *deren Curven* U_v *eine Doppeltangente haben, umhüllen die Curve* $F = 0$. *Die Discriminante der Form* U_v *gibt also, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Curve* F *in Liniencoordinaten.* In der That wird sie auch vom Grade $3n^2$ in den v_i.

Die $n^2 + n + 1$ *Grundstrahlen sind Doppeltangenten von* F; *in den beiden Berührungspunkten werden sie gleichzeitig von den zugehörigen Curven* U_v *berührt.*

Ferner leitet man aus den letzten Entwicklungen ohne Schwierigkeit die folgenden Sätze ab:

Die Doppeltangenten der Curven $U_v = 0$ *umhüllen die in* (2) *gegebene Curve* $\Phi = 0$; letztere (welche nach Obigem ebenfalls die Grundstrahlen zu Doppeltangenten hat) ist also auch vermöge dieses Satzes eindeutig auf $F = 0$ bezogen.

Den $\frac{3}{2} n(n-1)(3n^2 + 3n - 11)$ *Doppeltangenten von* F, *welche nicht Grundstrahlen des Connexes sind, entsprechen als Linien* v *Curven* U_v *mit zwei Doppeltangenten; letztere gehen durch die beiden Berührungspunkte von* v *mit* F.

---

*) Ebenso wird im Connexe (m, n) die Curve U_v, die v zur m-fachen Tangente hat, von v in

$$(m+n-1)(m+n) - m(m-1) - 2m = (n-1)(n+2m)$$

einfachen Punkten getroffen, welche gleichzeitig die Schnittpunkte von F mit v sind.

Die $12n(n-1)$ *Wendetangenten von* F *sind diejenigen Linien, welchen Curven* U_v *mit einer Wendetangente zugehören.*

In ähnlicher Weise steht das in (3) gegebene System der Curven $X_y = 0$ mit der Curve $F = 0$ in Beziehung. Jede Curve desselben hat in dem Punkte y einen n-fachen Punkt, dessen n Tangenten die zu y gehörigen Coincidenzstrahlen sind und durch die Gleichung $a_y (\alpha x y)^n = 0$ dargestellt werden. *Sollen daher zwei dieser* n *Tangenten zusammenfallen, so muss* y *auf der Curve* F *liegen.* Während y die Curve F durchläuft, umhüllen die zugehörigen doppelt zählenden Tangenten die Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Klasse $\Phi = 0$. Verbindet man also y mit den $(n^2-1)(n+2)$ Schnittpunkten von $X_y = 0$ mit $F = 0$, so sind unter den Verbindungslinien jedenfalls doppelt zählend die $3n$ durch y gehenden Tangenten von Φ; und da auf jeder der letzteren nur ein Coincidenzpunkt liegt, so fallen von jenen $(n^2-1)(n+2)$ Schnittpunkten $6n$ paarweise zusammen; wir haben also den Satz:

Jede Curve $X_y = 0$ *berührt die Curve* F *in* $3n$ *Punkten, trifft sie also ausserdem noch in* $n^3 + 2n^2 - 7n - 2$ *Punkten.* Letztere Zahl gibt gleichzeitig die Klasse der Curve, welche von den $n-2$ einfachen zu einem Punkte von F gehörigen Strahlen der Hauptcoincidenz umhüllt wird.

Wir können leicht noch eine dritte Curve angeben, welche durch die Berührungspunkte von $X_y = 0$ und $F = 0$ hindurchgeht, so dass diese $3n$ Punkte (welche kein vollständiges Schnittpunktsystem bilden) als die gemeinsamen Punkte von 3 Curven bestimmt sind. Zwei Curven X_y und X_z nämlich schneiden sich in $(n+1)^2$ Punkten. Von diesen liegt immer einer auf der Linie $\overline{yz}$, nämlich der ihr in der Hauptcoincidenz zugeordnete Punkt. Lassen wir nun z auf der Geraden $\overline{yz}$ beliebig nahe an y heranrücken, so bleibt der auf $\overline{yz}$ gelegene Schnittpunkt fest, die anderen n^2+2n Punkte verschieben sich auf X_y. Die Verbindungslinien derselben mit y und z werden dann einander benachbart (soweit die Punkte nicht selbst an y heranrücken), werden also zu Tangenten von Φ; es können folglich nur $3n$ dieser Schnittpunkte getrennt liegen, die übrigen $(n+1)^2 - 3n - 1$ müssen sich in y vereinigen. *Die Berührungspunkte von* F *mit* X_y *sind also die einfachen nicht auf* $\overline{yz}$ *gelegenen Schnittpunkte der Curven* $X_y = 0$ *und* $X_{y+\varepsilon z} = 0$, wo ε unendlich klein ist, d. h. der Curven $X_y = 0$ und

$$(5) \qquad a_x (\alpha x y)^{n-1} (\alpha x z) = 0\,.$$

In der That erkennt man auch aus den Gleichungen, dass $n^2 - n$ Schnittpunkte beider in den Punkt y zusammenfallen.

Liegt der Punkt y insbesondere auf einem Grundstrahle des Connexes, so muss sich zufolge der Definition der Curve X_y von ihr

der Grundstrahl selbst absondern. *Den Punkten eines Grundstrahles entspricht so eine Reihe von Curven n^{ter} Ordnung, von denen jede die Curve F in $3n - 2$ Punkten berührt.* Dem Schnittpunkte zweier Grundstrahlen entspricht daher eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche F in $3n - 4$ Punkten berührt. —

Die vorstehenden Entwicklungen wollen wir jetzt insbesondere für den Fall $n = 2$, d. i. für den Connex (1, 2), verwerthen.*) Für denselben wird die Curve $F = 0$ von der vierten Ordnung und hat keine singulären Punkte; sie ist dann überhaupt die *allgemeine* Curve vierter Ordnung, denn die Zahl der Constanten, von denen die Hauptcoincidenz des Connexes (1, 2) abhängt, ist gleich 14, also gleich der Zahl der Constanten einer allgemeinen C_4. Man erkennt so, dass die Theorie des Connexes (1, 2) aufs Engste mit der *Theorie einer allgemeinen* C_4 verknüpft ist; und dadurch wird der Fall $n = 2$ von besonderem Interesse. In der That brauchen wir in obigen Sätzen nur immer $n = 2$ zu nehmen, um sofort eine Reihe von Theoremen über die *Doppeltangenten einer* C_4 zu erhalten, wie wir sogleich noch sehen werden. Zuvor sei bemerkt, dass man in diesem einfachen Falle, wo $m = 1$ und $n = 2$, leicht einige der covarianten Curven wirklich aufstellen kann, welche früher beispielsweise erwähnt wurden (p. 944); in der That haben wir es hier ja, wenn wir x_1, x_2, x_3 als Parameter auffassen, nur mit einem Gewebe von Kegelschnitten K_2 zu thun, und mit einem solchen beschäftigten wir uns schon früher (p. 519). Wir können daher sofort die folgenden Sätze aussprechen:

Alle Punkte x, deren zugehörige K_2 in ein Punktpaar zerfallen, bilden die Curve dritter Ordnung:

$$P \equiv a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2 = 0. \tag{6}$$

Die Doppeltangenten der zerfallenden K_2 umhüllen die Curve dritter Klasse

$$I \equiv (abc)(\alpha\beta\gamma)\, u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0 \tag{7}$$

d. i. die Jacobi'*sche Curve des Gewebes* $a_x u_\alpha^2 = 0$.

Die Punktepaare der zerfallenden K_2 bilden die Curve dritter Ordnung:

$$H \equiv (abc)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x) = 0, \tag{8}$$

d. i. die Hermite'*sche Curve des Gewebes.*

Die Beziehungen der Curven $I = 0$ und $H = 0$ auf einander sind aus der Theorie der Kegelschnittgewebe bekannt. Die Curve $P = 0$ ist vermöge der Gleichungen:

$$a_x u_\alpha \alpha_1 = 0, \quad a_x u_\alpha \alpha_2 = 0, \quad a_x v_\alpha \alpha_3 = 0,$$

---

*) Vgl. im Folgenden Godt a. a. O.

linear auf die Curve $I = 0$ bezogen; beide haben also dieselbe absolute Invariante. Drei Punkten von $P = 0$, welche in gerader Linie u liegen, entsprechen drei Punktepaare von $H = 0$, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden; die Seiten des letzteren sind die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittschaar $a_y u_\alpha^2 + \lambda a_z u_\alpha^2 = 0$, wenn y und z zwei Punkte von u sind. Jede dieser vier Seiten bildet dann ein Connexelement mit *jedem* Punkte von u; d. h. liegt x auf einer der vier Seiten, so bilden x und u zusammen ein Element des conjugirten Connexes (p. 1001). *Die Gleichung des letzteren, nämlich* (p. 951):

$$(abu)\,(cdu)\,(\alpha\delta x)^2\,(\beta\gamma x)^2 = 0\,,$$

stellt daher das Product der gemeinsamen Tangenten aller Kegelschnitte dar, welche im Connexe (1, 2) *zu den Punkten von u gehören.* —

Wir geben nun im Folgenden eine Zusammenstellung der aus unseren allgemeinen Erörterungen über den Connex (1, n) resultirenden Sätze; und zwar lassen wir letztere in derselben Reihenfolge, in welcher sie oben abgeleitet wurden; nur bei einzelnen fügen wir unter Benutzung bekannter Resultate aus der Theorie der Curven dritter Ordnung bez. Klasse einige Erörterungen hinzu:

Es gibt 7 *Strahlen, welche mit allen ihren Punkten Elemente der Hauptcoincidenz eines Connexes* (1, 2) *bilden („Grundstrahlen desselben“).*

Die Curve $F = 0$, d. i. der Ort der Punkte x, welche auf den zugehörigen K_2 $a_x u_\alpha^2 = 0$ liegen, ist die allgemeine Curve 4ter Ordnung und gegeben durch die Gleichung: $a_x b_x\,(\alpha\beta x)^2 = 0$.

Die Curve $\Phi = 0$, d. i. die Enveloppe der Tangenten, welche man in Punkten von $F = 0$ an die zugehörigen K_2 ziehen kann, ist von der 6ten Klasse und gegeben durch die Gleichung: $(abu) c_\alpha u_\alpha u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0$.

Die 7 Grundstrahlen sind Doppeltangenten der Curve Φ, letztere hat keine anderen Doppeltangenten.

Die Grundstrahlen bilden zusammen mit den zwei Strahlen, die in der Hauptcoincidenz einem beliebigen Punkte x entsprechen (d. i. Tangenten von x an die K_2 $a_x u_\alpha^2 = 0$), ein System von 9 Geraden, welche eine Curve dritter Klasse nicht bestimmen.

Die Gleichung $U_v \equiv (auv)\,u_\alpha^2 = 0$ stellt das allgemeine Gewebe von Curven dritter Klasse mit 7 gemeinsamen Tangenten (den Grundstrahlen) dar.

Die ternäre absolute Invariante einer Curve $U_v = 0$ ist gleich der binären absoluten Invariante der vier Punkte, in welchen F von v geschnitten wird. Die Invarianten S_v und T_v von U_v sind also proportional zu den Contravarianten $(ABv)^4$ und $(ABv)^2\,(BCv)^2\,(CAv)^2$ von $F = A_x^4$.

Insbesondere ist die Gleichung der Curve F in Liniencoordinaten v: $S_v^3 - 6\,T_v^2 = 0$.

*Die 7 Grundstrahlen sind Doppeltangenten von $F = 0$.**)

Den übrigen 21 Doppeltangenten von F entsprechen Curven U_v mit zwei Doppeltangenten, d. h. Curven, welche in einen Kegelschnitt und einen Punkt zerfallen. Ersterer kann nur 5 der 7 Grundstrahlen berühren; der Punkt fällt daher in den Schnittpunkt der beiden anderen Grundstrahlen. Also:

Jeder der übrigen 21 Doppeltangenten von F ist ein bestimmter von den Schnittpunkten der 7 Grundstrahlen zugeordnet der Art, dass die zu jener Doppeltangente gehörige U_v in den Punkt und in einen Kegelschnitt zerfällt, welcher die 5 nicht durch den Punkt gehenden Grundstrahlen berührt.

Die beiden Tangenten, welche man von dem Punkte an den Kegelschnitt legen kann, sind die Doppeltangenten der betreffenden U_v, sie gehen also durch die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente v mit F.**)

Es gibt 24 Curven U_v mit Wendetangente, entsprechend den gemeinsamen Tangenten der beiden Curven: $S_v = 0$ und $T_v = 0$.

Die Gleichung $X_y \equiv a_x (\alpha x y)^2$ stellt ein System von Curven dritter Ordnung dar, deren jede in dem betreffenden Punkte y einen Doppelpunkt hat; die Tangenten des letzteren sind die Strahlen, welche mit $\bar{y}$ Elemente der Hauptcoincidenz bilden. Sind S_y, T_y die beiden Invarianten der Curve X_y, so ist die Bedingung $S_y^3 - 6\,T_y^2 = 0$ hier für y identisch erfüllt. Da ferner S_y und T_y gleichzeitig verschwinden, wenn y auf $F = 0$ liegt, indem dann die Curve $X_y = 0$ einen Rückkehrpunkt in y hat, so *unterscheiden sich die Invarianten S_y, T_y von X_y bez. nur um Zahlenfactoren von dem Quadrate und dem Cubus der Form $F = a_y b_y (\alpha \beta y)^2$.*

Jede Curve X_y berührt die Curve F in 6 Punkten, d. i. in allen Punkten, wo sie ihr begegnet.

Durch die 6 Berührungspunkte von X_y geht auch die Curve $a_x (\alpha x y)(\alpha x z) = 0$. Diese aber ist symmetrisch in y und z; somit folgt:

Die 12 Berührungspunkte zweier Curven X_y und X_z liegen auf der Curve dritter Ordnung:

$$(9) \qquad a_x (\alpha x y)(\alpha x z) = 0\,.\text{***})$$

---

*) Die Theorie des Gewebes dritter Klasse, welches durch 7 Doppeltangenten einer C_4 bestimmt wird, ist zuerst von Aronhold studirt: Berliner Monatsberichte 1864, p. 499. — Ueber die Doppeltangenten der C_4 vgl. oben p. 850.

**) Da diese Linien auch Tangenten von $\Phi = 0$ sind, hat man also durch dualistische Uebertragung den Satz: Sind 7 beliebige Punkte in der Ebene gegeben, so liegen die 42 Punkte, in denen die Verbindungslinie je zweier von ihnen den durch die 5 übrigen bestimmten Kegelschnitt schneidet, in einer Curve 6ter Ordnung, welche alle 7 Punkte zu Doppelpunkten hat.

***) Dieselbe ist der Ort der Punkte x, deren zugehörige Strahlenpaare der Hauptcoincidenz die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte y und z harmonisch theilen.

Die zu den Punkten y eines der 7 Grundstrahlen gehörigen Curven X_y zerfallen in diesen Grundstrahl selbst und in ein System von einfach unendlich vielen Kegelschnitten, deren jeder die C_4 F in 4 Punkten berührt.

Die dem Schnittpunkte y zweier Grundstrahlen entsprechende Curve X_y zerfällt in die beiden Grundstrahlen und eine der übrigen 21 Doppeltangenten von F. *Jedem Schnittpunkte y zweier Grundstrahlen* (7 *Doppeltangenten von F*) *ist so eine bestimmte weitere Doppeltangente v von F zugeordnet, so dass man hierdurch alle* 28 *Doppeltangenten von F erhält.* Zu der Doppeltangente v gehört dann der Punkt y als ein Theil der betreffenden Curve U_v in der oben besprochenen Weise (p. 1009).

Jeder Grundstrahl nun wird von 6 anderen geschnitten. *In jeder Reihe von Berührungskegelschnitten, die einem Grundstrahle zugehört, sind also* 6 *Paare von Doppeltangenten enthalten;* von jedem Paare ist eine Doppeltangente eben einer der 6 übrigen Grundstrahlen.

Liegen y und z beide auf demselben Grundstrahle, so muss jede Curve $X_{y+\lambda z} = 0$ diesen Strahl enthalten, und folglich auch die Curve (9). Es folgt so, dass *die* 8 *Berührungspunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems immer auf einem Kegelschnitte liegen* (vgl. p. 842). —

Die meisten der hier ausgesprochenen Sätze beziehen sich allein auf die sieben Grundstrahlen und die Curve vierter Ordnung, sie gelten ganz unabhängig davon, dass wir durch den Connex $a_x u_\alpha^2 = 0$ auf sie geführt werden. Man kann daher auch umgekehrt von einer beliebigen Curve vierter Ordnung ausgehen, man hat dann Relationen zwischen 7 beliebigen Doppeltangenten (von denen keine vier zerfallende Kegelschnitte desselben Systems von Berührungskegelschnitten bilden dürfen) und den 21 übrigen Doppeltangenten der C_4. Man kann aber auch weiter von 7 beliebigen Geraden der Ebene ausgehen und aus ihnen die übrigen 21 Doppeltangenten sowie deren Berührungspunkte mit der C_4 construiren. Zu dieser Construction wird man von unserm Connexe aus am einfachsten geführt, indem man von einem andern Connexe ausgeht, welcher mit dem gegebenen dieselbe Hauptcoincidenz hat und von besonders einfacher Natur ist. Dies ist ja erlaubt, da die Curve $F = 0$ allein von der Hauptcoincidenz des Connexes (1, 2) abhängt.

Wir nehmen drei der sieben Grundstrahlen zu Seiten des Coordinatendreiecks. Dann muss die Gleichung des Connexes erfüllt werden durch jedes der drei Werthsysteme:

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad x_1 = 0$$
$$u_3 = 0, \quad u_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Es müssen also die Glieder mit den Factoren $x_1 u_2^2$, $x_1 u_3^2$, $x_2 u_3^2$, $x_2 u_1^2$, $x_3 u_1^2$, $x_3 u_2^2$ fehlen; durch Hinzufügen des Productes von u_x mit einem in den u linearen Ausdrucke kann man ferner auch die Glieder mit $x_1 u_1^2$, $x_2 u_2^2$, $x_3 u_3^2$ zerstören. *Die Hauptcoincidenz eines allgemeinen Connexes* (1, 2) *kann daher immer dargestellt werden als Hauptcoincidenz eines Connexes der Form:*

$$(10) \qquad a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0,$$

dessen Gleichung auf drei der sieben Grundstrahlen bezogen ist; und es gibt 35 solche Connexe, entsprechend den 35 Arten, wie man 3 Grundstrahlen auswählen kann.

Der Connex (10) ist dadurch ausgezeichnet, dass alle seine Curven K_2 die Seiten des Coordinatendreiecks berühren. Die Curve $I = 0$ zerfällt daher in die drei Ecken des Dreiecks, die Curve $H = 0$ in die drei Seiten (vgl. p. 525), und für die Curve $P = 0$, deren Gleichung sich durch Elimination der u aus den Gleichungen

$$b_x u_3 + c_x u_2 = 0, \quad c_x u_1 + a_x u_3 = 0, \quad a_x u_2 + b_x u_1 = 0$$

ergibt, findet man:

$$\begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x \\ c_x & 0 & a_x \\ b_x & a_x & 0 \end{vmatrix} = 2\, a_x b_x c_x = 0.$$

Die Gleichung der Curve vierter Ordnung endlich ist durch die Punktcoordinatengleichung des Kegelschnittes (10) gegeben; *sie nimmt also die einfache Gestalt an:*

$$(11) \qquad \tfrac{1}{2} F = - \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x & x_1 \\ c_x & 0 & a_x & x_2 \\ b_x & a_x & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bilden wir ferner X_y, indem wir y in die Ecke $u_1 = 0$ des Coordinatendreiecks legen, so wird, indem $y_1 = 1$:

$$X_y = - a_x x_2 x_3.$$

Die in (10) *auftretenden Linien* $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ *sind daher diejenigen Doppeltangenten von F, die den Ecken des Dreiecks als Schnittpunkten von Grundstrahlen in obiger Weise zugeordnet sind.*

Alle sechs linearen Formen, welche in der Determinante (11) auftreten, bedeuten also, gleich Null gesetzt, Doppeltangenten von $F = 0$. Man verificirt dies auch leicht an der Gleichung (11) direct. Setzt man in ihr nämlich z. B. $c_x = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$(a_x x_1 - b_x x_2)^2 = 0,$$

und dasselbe Resultat ergibt sich für $x_3 = 0$. Die Linien $c_x = 0$,

$x_3 = 0$ berühren daher $F = 0$ in den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte $a_x x_1 - b_x x_2 = 0$. Letzterer geht durch die Schnittpunkte von $a_x = 0$ mit $b_x = 0$ und $x_2 = 0$, von $b_x = 0$ mit $x_1 = 0$ und von $x_1 = 0$ mit $x_2 = 0$. Dies gibt den sogleich noch zu verwerthenden Satz, welcher wieder unabhängig von der Gleichungsform unseres Connexes ist:

Sind s_1, s_2, s_3 drei unter 7 von einander unabhängigen Doppeltangenten von F, welche sich bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3 schneiden, und sind σ_1, σ_2, σ_3 die den p_i zugeordneten Doppeltangenten, welche sich in π_1, π_2, π_3 schneiden, so liegen die Berührungspunkte von s_1 und σ_1 mit den Punkten p_1 und π_1 sowie mit den Schnittpunkten von s_2 mit σ_3 und s_3 mit σ_2 in einem Kegelschnitte, etc.; und die so entstehenden drei Kegelschnitte gehen, wie man aus ihren Gleichungen:

$$(12) \qquad x_2 b_x - x_3 c_x = 0, \quad x_3 c_x - x_1 a_x = 0, \quad x_1 a_x - x_2 b_x = 0$$

sofort erkennt, durch dieselben vier Punkte. —

Indem wir nun zu 7 beliebig gegebenen Geraden zunächst einen der speciellen Connexe (1, 2) von der Form (10) aufsuchen, können wir die folgende Aufgabe ohne wesentliche Schwierigkeiten lösen:

Es sind sieben beliebige Gerade als Grundstrahlen eines allgemeinen Connexes (1, 2) *gegeben, man soll die Hauptcoincidenz des letzteren construiren.*

Wir benutzen 3 beliebige der 7 Strahlen als Fundamentalstrahlen eines Connexes der Form (10). Sie seien s_1, s_2, s_3, und ihre Schnittpunkte p_1, p_2, p_3 genannt; die 4 übrigen Strahlen mögen mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, ihre Schnittpunkte bez. mit p_{12}, p_{13}, etc. Da alle Connexkegelschnitte K_2 die Linien s_i berühren müssen, so sind durch die Auswahl dieser Linien mehrere Connexkegelschnitte sofort bestimmt. Es entsprechen nämlich den Punkten eines Grundstrahls Kegelschnitte, die ihn selbst berühren, also den Schnittpunkten je zweier Geraden t Kegelschnitte, welche beide berühren, für die also fünf Tangenten bekannt sind. Man kennt so von vornherein die Kegelschnitte, welche zu den Ecken des vollständigen Vierseits der Linien t_i gehören.

Nun kann man aber auch zu allen anderen Punkten der Geraden t_i die Kegelschnitte finden. Die zu den Punkten von t_1 gehörende Schaar von K_2 z. B. ist projectivisch zu der Reihe ihrer Berührungspunkte auf t_1; und diese projectivische Beziehung ist dadurch festgelegt, dass die drei den Punkten p_{12}, p_{13}, p_{14} zugehörenden K_2 und somit auch deren Berührungspunkte π_{12}, π_{13}, π_{14} bekannt sind. Man kann daher zu jedem beliebigen Punkte p von t_1 den zugehörigen Berührungspunkt π construiren und, wenn man diesen erst gefunden hat, auch den zu p gehörenden Kegelschnitt, welcher dann durch die

vier Tangenten s_1, s_2, s_3, t_1 und den Berührungspunkt π auf t_1 in bekannter Weise bestimmt ist. An ihn kann noch durch lineare Construction von p aus die andere Tangente gezogen werden, welche mit t_1 zusammen das zu p gehörige Strahlenpaar der Hauptcoincidenz bildet.

Es kommt ferner darauf an, die für den Connex (10) wichtigen Linien $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ zu construiren. Jeder Punkt von s_1 bildet nun mit dem Schnittpunkte p_1 von s_2 und s_3 einen Kegelschnitt, welcher als Curve K_2 zu einem bestimmten Punkte von $a_x = 0$ gehört. Dadurch sind die Punkte von s_1 und $a_x = 0$ einander projectivisch zugeordnet. Von letzterer Linie aber kennt man die vier Punkte, welche den Schnittpunkten von s_1 mit den Linien t_i entsprechen, nach den eben gemachten Bemerkungen, denn diese Schnittpunkte bilden mit p_1 zusammen Kegelschnitte der schon bekannten Schaaren, welche den Punkten der Geraden t_i entsprechen. Es ist hierdurch die Linie $a_x = 0$ bestimmt und gleichzeitig die projectivische Zuordnung ihrer Punkte zu den Punkten von s_1. Analoges gilt für die Linien $b_x = 0$ und $c_x = 0$; man kann daher alle zerfallenden Kegelschnitte und die Punkte, zu denen sie als K_2 gehören, construiren.

Die nun noch zu lösenden Hauptaufgaben, zu einem beliebigen Strahle u die Connexgerade C_1 und zu einem beliebigen Punkte x den Connexkegelschnitt K_2 zu construiren, erledigen sich einfach.

Zu einem Strahle u die Connexgerade finden, heisst diejenige Gerade bestimmen, deren Punkten x die den Strahl u berührenden K_2 zugeordnet sind. Solche K_2 sind nun offenbar die drei Schnittpunkte von u mit s_1, s_2, s_3, bez. zusammengenommen mit den gegenüberliegenden Ecken p_1, p_2, p_3; die zugehörigen Punkte x liegen auf den Geraden a, b, c, sind also nach Vorstehendem bekannt; sie liegen aber auch selbst in einer Geraden, eben der gesuchten C_1, welche zu u gehört.

Um zu einem Punkte x den Kegelschnitt K_2 zu finden, ziehe man eine Gerade v durch x; man kennt dann die zerfallenden Kegelschnitte, welche den Schnittpunkten der Geraden mit $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ entsprechen, folglich auch den zu x gehörigen, denn die Schaar der zu den Punkten x von v gehörenden K_2 ist projectivisch zu der Reihe dieser Punkte x.

In Folge dieser Constructionen ist der Connex (10) als völlig bekannt zu betrachten; man kennt daher auch seine Hauptcoincidenz, d. i. die Hauptcoincidenz eines beliebigen Connexes, welcher die 7 gegebenen Geraden zu Grundstrahlen hat.*)

*) Man kann hier die Lösung mancher anderen Aufgaben anschliessen. Um z. B. die 9te gemeinsame Tangente zweier Curven dritter Klasse zu finden, wenn

Mit Hülfe der Construction dieser Hauptcoincidenz löst man ferner leicht folgende wichtige Aufgabe.*)

Es sind 7 von einander unabhängige Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung gegeben, man soll die 21 anderen und die Berührungspunkte aller 28 construiren.

Man benutze die 7 gegebenen Doppeltangenten als Grundstrahlen einer Hauptcoincidenz (1, 2), die man in angegebener Weise construiren kann. Zieht man dann von dem Schnittpunkte je zweier der 7 Strahlen das Tangentenpaar an den durch die 5 anderen bestimmten Kegelschnitt und sucht auf den Tangenten jedes Paares die Coincidenzpunkte, so ist jedesmal die Verbindungslinie der Coincidenzpunkte eines Paares ebenfalls eine Tangente des benutzten Kegelschnittes, ausserdem aber eine der 21 gesuchten Doppeltangenten, und die Coincidenzpunkte sind ihre Berührungspunkte (vgl. die Sätze auf p. 1009). Um ferner die Berührungspunkte auf den drei gegebenen Doppeltangenten zu finden, welche bei Construction der Hauptcoincidenz (1, 2) als Strahlen s_1, s_2, s_3 benutzt werden, braucht man nach einem obigen Satze nur ihre Schnittpunkte mit den drei Kegelschnitten (12) zu bestimmen, die leicht construirt werden können. Um endlich die Berührungspunkte der vier noch übrigen Doppeltangenten t_1, t_2, t_3, t_4 zu erhalten, bemerke man, dass dies diejenigen Punkte der vier Geraden sind, die auf ihren zugehörigen K_2 liegen. Man hat dann nur die sich selbst entsprechenden Punkte der auf diesen Geraden in einander liegenden (schon oben benutzten) projectivischen Punktreihen zu construiren, was in bekannter Weise geschieht (p. 51). Damit ist dann die gestellte Aufgabe gelöst.

VIII. Zur Theorie der Differentialgleichungen.

Wir haben gesehen, wie die Hauptcoincidenz eines algebraischen Connexes aufs Engste mit einer bestimmten algebraischen Differentialgleichung zusammenhängt, und wir haben darauf aufmerksam gemacht, wie aus der Invariantentheorie der Connexe neue Gesichtspunkte für die Theorie der Differentialgleichungen entspringen müssen; überdies führten wir in einigen Beispielen die Integration der betreffenden Differentialgleichungen wirklich aus. Die Anschauungsweise der Invariantentheorie, insbesondere die durch sie geforderte Homogeneität der Gleichungen, ist aber nicht nur für die rein algebraischen Diffe-

---

8 solche Tangenten gegeben sind, bestimme man die zu 7 der letzteren gehörige Hauptcoincidenz (1, 2) und in ihr den Coincidenzpunkt der 8ten. Von letzterem ziehe man dann die zweite Tangente an die zugehörige K_2; sie ist die gesuchte Gerade.

*) Vgl. Aronhold a. a. O.

rentialgleichungen von Nutzen, sie bietet vielmehr auch für den Fall wesentliche Vortheile, dass die Potenzen der Differentiale dx, dy in transscendente Functionen multiplicirt scheinen, oder dass auch diese Differentiale selbst in transscendenter Weise vorkommen, d. i. für die ganz allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0\,.$$

In der That kann man ja jede solche Function Φ in eine homogene Function nullter Ordnung verwandeln, indem man setzt: $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$; und dann gilt wieder das für die homogenen Functionen so nützliche Euler'sche Theorem, zunächst in der Form:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}x_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}x_3=0.$$

Im Folgenden sollen nun kurz einige Punkte bezeichnet werden, zu deren Erörterung die Anwendung projectivischer Denkweise unmittelbar Veranlassung gibt, und welche in neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen besonders in den Vordergrund treten; doch müssen wir uns hier auf eine kurze, keineswegs vollständige Einleitung in diese Theorien beschränken, zumal letztere noch im Entstehen begriffen sind. Insbesondere ist es auch der Zweck des Folgenden, den Zusammenhang der neueren Anschauungsweise mit der gewöhnlichen Theorie hervorzuheben; und deshalb gehen wir vom Gebrauche rechtwinkliger Coordinaten aus. — Die hier zu besprechenden Gegenstände können in folgender Weise näher bezeichnet werden:

1) Begriff des Integrals einer Differentialgleichung.
2) Begriff der allgemeinen Berührungstransformationen und Aufstellung derselben.
3) Die singuläre Lösung einer Differentialgleichung.

Wenn man in der Gleichung

$$\varphi(x,\ y,\ p)=0,\quad \text{wo}\quad p=\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

x, y als Punktcoordinaten in der Ebene deutet, so wird durch sie im Allgemeinen jedem Punkte x, y eine Richtung p oder eine endliche Zahl solcher Richtungen zugeordnet werden, und die Aufgabe der Integration derselben kommt darauf hinaus, Curven

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0$$

(wo α ein Parameter) zu finden, welche in jedem ihrer Punkte von einer der zugehörigen Richtungen p berührt werden, oder — anders

ausgedrückt — die von den einzelnen Punkten x, y ausgehenden Bogenelemente x, y, p zu Curven an einander zu reihen.

Fortan wollen wir x, y, p die *Coordinaten* des betreffenden Bogenelementes nennen, und es möge sogleich als ein Grundgedanke des Folgenden hervorgehoben werden, dass diese Coordinaten immer als *gleichberechtigte* Veränderliche gedacht werden. Die Bogenelemente, welche $\varphi = 0$ genügen, sollen die *Hauptelemente der Gleichung* (statt Elemente der Hauptcoincidenz) heissen, und die Curven $f = 0$, welche die Integrale von $\varphi = 0$ vorstellen, die zugehörigen *Integralcurven.* Aus den ∞^3 Hauptelementen (d. i. Elementen des identischen Connexes $u_x = 0$), welche es überhaupt gibt, hebt die Gleichung $\varphi = 0$ ∞^2 heraus, und diese erscheinen durch die Integralcurven in ∞^1 Gruppen von je ∞^1 Hauptelementen zerlegt. Dabei besitzen die ∞^1 Hauptelemente, welche sich an dieselbe Integralcurve anschliessen, eine bestimmte ausgezeichnete Gruppirung. Insofern man nämlich eine Tangente der Curve als Verbindungslinie zweier successiven Punkte derselben auffasst, kann man sagen, dass von zwei auf einander folgenden Hauptelementen einer Integralcurve

$$x,\ y,\ p \quad \text{und} \quad x + dx,\ y + dy,\ p + dp$$

die Gerade des einen durch den Punkt des andern hindurchgeht, was analytisch in der Gleichung:

$$dy - p\,dx = 0, \tag{2}$$

d. i. in der Definitionsgleichung von p seinen Ausdruck findet. Da diese Gleichung weiterhin sehr häufig vorkommt, so soll die Beziehung zweier benachbarten Hauptelemente, welche ihr genügen, mit dem besonderen Namen der *vereinigten Lage* beider Elemente belegt werden.

Wenden wir jetzt auf den hier erörterten, gewöhnlichen Begriff der Integralcurve die eine Grundanschauung der projectivischen Geometrie an, dass alle Vorkommnisse als gleichberechtigt gedacht werden, welche durch *Collineation* (Projection) oder *dualistische Umformung* (Princip der Dualität) aus einander hervorgehen. Die Einführung der Collineationen verlangt nicht eigentlich eine besondere, wenigstens nicht eine aussergewöhnliche Erweiterung der zur Sprache gebrachten Begriffe. Immerhin ist indess hervorzuheben, dass man ihr zufolge ebensowohl von unendlich fernen Hauptelementen reden darf, als von im Endlichen gelegenen, wie eben bei Benutzung homogener Coordinaten am besten hervortritt; auch wird man selbstverständlich imaginäre Hauptelemente von vornherein zulassen. Es ist ferner deutlich, wie man von der Fortsetzung einer Integralcurve durchs Unendliche (durch die unendlich ferne Gerade) hindurch zu denken hat, dass insbesondere z. B. die unendlich ferne Gerade selbst als Integralcurve

auftreten kann, etc. Weiter schon geht es über die gewöhnliche Auffassungsweise hinaus, wenn man consequenter Weise verlangt, dass z. B. auch bei den Untersuchungen über singuläre Lösungen unendlich ferne Vorkommnisse gleichmässig berücksichtigt werden sollen. Ein neuer Gedanke wird indess durch Betrachtung der dualistischen Umformungen eingeführt. Durch sie entstehen aus den Hauptelementen, welche sich an eine Curve anschliessen, im Allgemeinen die Hauptelemente einer neuen Curve. Letztere artet jedoch in einen Punkt aus, wenn erstere aus einer Geraden besteht; und so wird man dazu geführt, neben der Geraden auch *den Punkt* oder, wenn man will, *den Strahlbüschel als mögliche Form einer Integralcurve anzusehen.* Diese Auffassung ist in der That in Uebereinstimmung mit der Gleichung (2), welche für zwei consecutive Hauptelemente einer Integralcurve charakteristisch ist; dieselbe ist eben auch erfüllt, wenn man $dx = dy = 0$ setzt, während p beliebig bleibt, d. h. wenn sich ein Hauptelement um einen festen Punkt dreht.

Ein Beispiel hierfür gibt die Schaar der Integralcurven eines Connexes (1, 1), welche im Allgemeinen in der Form:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} = \text{Const.}$$

dargestellt werden können (p. 979), wo $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Hier bilden die drei Seiten des Fundamentaldreiecks eine Curve der Schaar; ebenso sind aber auch die drei Ecken desselben als Integrale aufzufassen, denn die Liniencoordinaten-Gleichung der Curven wird von ganz derselben Form. So gut es ferner Differentialgleichungen gibt, deren Integralcurven aus geraden Linien bestehen (z. B. die der Gleichung $p = 0$), wird man auch Gleichungen concipiren, als deren Integralcurven nur Punkte auftreten. Analytisch sind das einfach diejenigen Gleichungen, welche p nicht enthalten, d h. Gleichungen der Form $\varphi(x, y) = 0$ oder einfach $x = 0$. Ihr genügen alle Hauptelemente, deren Punkte auf einer festen Curve liegen (p. 937 f.), und die Integralcurven, welche sich aus ihnen bilden lassen, sind eben diese Punkte selbst, aufgefasst als Träger von Strahlbüscheln — ausserdem noch die von den Punkten gebildete Curve, welche als singuläre Lösung zu betrachten ist.*)

Den hier genannten Forderungen der projectivischen Geometrie werden wir genügen, wenn wir (zunächst unter Nicht-Berücksichtigung des Unendlich-Weiten) eine Integralcurve in folgender Weise definiren:**)

*) Vgl. das letzte Beispiel am Schlusse dieser Abtheilung.

**) Vgl. Lie: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Göttinger Nachrichten, 1872, p. 473.

Eine einfach unendliche Reihe von Hauptelementen x, y, p soll eine Integralcurve oder besser (damit der Ausdruck Curve kein Missverständniss hervorruft) eine Integral-Mannigfaltigkeit von einer Dimension („Integral-M_1") genannt werden, wenn für je zwei consecutive, im Endlichen gelegene Hauptelemente x, y, p und $x + dx$, $y + dy$, $p + dp$ die Bedingung (2) *erfüllt ist, nämlich:*

$$dy - p\,dx = 0.$$

Die Aufgabe, eine Gleichung $\varphi(x, y, p) = 0$ zu integriren, lässt sich dann, unter Einschluss des Falles, dass p in φ nicht vorkommt, dahin formuliren, dass *die* ∞^2 *Hauptelemente der Gleichung* $\varphi = 0$ *in* ∞^1 *Integral-M_1 zusammengefasst werden sollen.*

Analytisch wird man daher, um alle Fälle zu umfassen, verlangen, eine zutretende Gleichung, die einen willkürlichen Parameter α enthält:

$$\psi(x, y, p, \alpha) = 0 \tag{3}$$

aufzustellen der Art, dass vermöge $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, unabhängig von dem Werthe des Parameters α, die Bedingung (2) erfüllt ist, sei es, dass dies für alle Hauptelemente, welche den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ genügen, oder nur für einen Theil derselben eintritt. In der That bilden ja für einen gegebenen Werth von α die beiden Gleichungen gemeinsamen Hauptelemente eine einfach unendliche Schaar; und man erhält die Gleichung der Integralcurven in Punktcoordinaten

$$f(x, y, \alpha) = 0, \tag{4}$$

falls die Aufstellung einer solchen überhaupt möglich ist, durch Elimination von p aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$. Man kann aber auch die Gleichung (4) selbst als eine Gleichung der Form (3) auffassen, insofern sie zusammen mit der hinzugedachten Gleichung

$$p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

die Combination der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vollkommen vertritt. Enthält die Gleichung (1) die Grösse p nicht, so genügt auch nicht eine Gleichung der Form (4), um die Integral-M_1 darzustellen. Man wird vielmehr mit der Gleichung $\varphi = 0$ eine Gleichung (3) combiniren müssen, so dass in diesem Falle unsere neue Formulirung des Integrationsproblems in der That *nothwendig* wird. Dabei ist von selbst deutlich, dass diejenigen Gleichungen (3), welche jetzt zur Darstellung der Integral-M_1 von $\varphi = 0$ anwendbar werden, eben solche Gleichungen sind, welche p nicht enthalten, wohl aber einen Parameter α.

Es kommt dann ja nur darauf an, die Punkte der Curve $\varphi = 0$ darzustellen, und dies geschieht am einfachsten durch den Schnitt von $\varphi = 0$ mit einer einfach unendlichen Schaar anderer Curven.

Die Eigenschaften, denen eine Function ψ genügen muss, um in der geschilderten Weise eine Integral-M_1 von φ zu bestimmen, lassen sich durch eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellen. Man muss nämlich dann zu jedem gemeinsamen Hauptelemente von φ und ψ ein benachbartes Hauptelement finden können, welches mit ihm in vereinigter Lage ist (p. 1016) und auch beiden Gleichungen angehört; d. h. es müssen die drei Gleichungen zusammenbestehen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = 0. \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp = 0. \\ &p\,dx - dy \qquad\qquad\qquad = 0; \end{aligned}$$

und aus ihnen folgt die Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + p\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right\} = 0.$$

*Dies ist die Bedingung dafür, dass die gemeinsamen Hauptelemente von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (oder auch nur ein abtrennbarer Theil dieser Hauptelemente) eine Integral-M_1 für beide Gleichungen bilden.**) Auszuschliessen hat man selbstverständlich, allgemein zu reden, den Fall, wo zwei der Gleichungen (5) mit einander übereinstimmen, also wenn:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial p},$$

was z. B. für $\varphi = \psi +$ Const. eintritt, sowie den Fall, in welchem

---

*) Vgl. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, Berlin 1866, p. 172 und 237 ff. — Die Gleichung (6) nämlich geht in die Jacobi'sche Bedingungsgleichung über, wenn man noch den Quotienten $p : q$ statt $-p$ einführt, wo dann p, q ganz wie Liniencoordinaten zu behandeln sind. Man hat dann die Grössen dx, dy, dp, dq aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq = 0 \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq = 0 \\ &p\;dx + q\;dy \qquad\qquad\qquad = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad x\;dp + y\;dq = 0, \end{aligned}$$

zu eliminiren, und dies gibt in Rücksicht darauf, dass φ, ψ in p, q homogen sind, die Jacobi'sche Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Vgl. auch unten die Behandlung mit homogenen Coordinaten.

die Gleichung (6) durch das Verschwinden der einzelnen Differentialquotienten von φ oder ψ befriedigt wird. Auf diese Ausnahmefälle werden wir weiterhin beim Gebrauche homogener Coordinaten zurückkommen.

Dasselbe Resultat können wir in einer andern Form ableiten und aussprechen, welche später für uns von Nutzen sein soll. Die Gleichungen (5) nämlich sagen aus, dass der Ausdruck $p\,dx - dy$ verschwindet in Folge der Gleichungen $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$; und dies tritt offenbar immer ein, wenn man eine Function $\chi(x, y, p)$ so bestimmen kann, dass

$$(7) \qquad d\varphi - \chi\, d\psi = (dy - p\,dx)\,\varrho,$$

und umgekehrt. Wir wollen daher jetzt die Bedingung aufstellen, welchen die Functionen φ, ψ, χ genügen müssen, damit eine Gleichung dieser Art möglich ist. Die Gleichung (7) zerfällt unmittelbar in die folgenden Relationen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varrho, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\varrho p$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0.$$

Hieraus findet man durch Elimination von χ und ϱ in der That wieder die Gleichung (6). Letztere erhalten wir in anderer Gestalt durch Einführung totaler Differentialquotienten; da nämlich:

$$(8) \qquad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y},$$

so gibt die zweite Gleichung in Rücksicht auf die erste:

$$\frac{d\varphi}{dx} - \chi \frac{d\psi}{dx} = 0;$$

in Verbindung mit der dritten Gleichung folgt ferner:

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} = 0;$$

eine Gleichung, die sich vermöge (8) auch direct aus (6) ergibt. *Sollen also* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *eine Integral-*M_1 *gemein haben, d. h. soll eine Gleichung der Form* (7) *bestehen, so muss die Bedingung* (9) *erfüllt sein*, in welcher im Gegensatze zu (6) totale Differentialquotienten vorkommen.

Diese allgemeinen Betrachtungen gewinnen nun ungemein an Symmetrie und Uebersichtlichkeit der Darstellung, wenn man homogene Coordinaten, und zwar gleichzeitig Punkt- und Liniencoordinaten, einführt. Es geschieht dies im allgemeinen Falle ebenso, wie früher insbesondere für algebraische Gleichungen erläutert wurde (p. 965), indem man die Differentialgleichung in eine Gleichung zwischen

Punkt- und Liniencoordinaten verwandelt und dann die Bedingungen $u_x = 0$, $u_{dx} = 0$ hinzunimmt, also durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad p = -\frac{u_1}{u_2}, \quad xp - y = \frac{u_3}{u_2}.$$

In den so entstehenden homogenen Functionen *nullter Dimension* werden zunächst die Nenner x_3, u_2 eine ausgezeichnete Rolle spielen; es sind indess keineswegs nur Functionen mit solchen Nennern zu betrachten, es wird vielmehr vortheilhaft sein, dieselben durch die *allgemeinsten* Functionen nullter Ordnung und nullter Klasse zu ersetzen. Hat man es also insbesondere mit algebraischen Differentialgleichungen zu thun, so wird man nicht nothwendig von solchen Functionen ausgehen, deren Nenner durch Potenzen von u_2 und x_3 gebildet wird, sondern man wird statt dessen Quotienten zweier algebraischen Functionen wählen, in denen Zähler und Nenner von gleicher Allgemeinheit sind, so dass, wenn z. B. Φ gleich dem Quotienten der Connexe $a_x^m u_\alpha^n$ und $a'^m_x u_{\alpha'}^n$ gesetzt wird, die Gleichung $\Phi =$ Const. die allgemeinste lineare Schaar von Connexen darstellt.

Die Bedingung (2) *der vereinigten Lage* zweier benachbarten Elemente x, u und $x + dx$, $u + du$ ist jetzt durch die beiden Gleichungen zu ersetzen:

$$\Sigma u_i dx_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma x_i du_i = 0, \tag{10}$$

von denen vermöge $u_x = 0$, $(u + du)_{x+dx} = 0$ jede eine Folge der andern ist. In der That sagt ja die erste Gleichung (10) in Verbindung mit $u_x = 0$ dasselbe aus, wie Gleichung (2), nämlich, dass von dem Punkte x eine Fortschreitungsrichtung u ausgeht, welche durch den Punkt $x + dx$ bestimmt wird; Analoges gilt für die zweite Gleichung (10).

Setzen wir nunmehr voraus, dass eine in x und u homogene Gleichung nullter Dimension vorliegt:

$$\Phi(x, u) = 0$$

und suchen die Bedingung, dass dieselbe mit einer anderen, $\Psi(x, u) = 0$, eine Integral-M_1 gemein habe, d. h. dass die den Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$ genügenden Hauptelemente eine Integralcurve (Hauptcoincidenzcurve) von $\Phi = 0$ bilden. An Stelle von (5) haben wir dann die Bedingungen:

$$\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} du_i = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} du_i = 0$$

$$\Sigma u_i dx_i = 0, \quad \Sigma x_i du_i = 0;$$

und aus ihnen ergibt sich durch Elimination der dx_i, du_i, wenn mit

den Indices 1, 2, 3 die Differentiation nach x_1, x_2, x_3 mit I, II, III die nach u_1, u_2, u_3 bezeichnet wird, und wenn man die absoluten Werthe der x, u durch die Gleichungen $k_x = 1$, $u_l = 1$ festlegt (so dass noch: $\Sigma k_i dx_i = 0$, $\Sigma l_i du_i = 0$), die Bedingungsgleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi_1 & u_1 & k_1 & \Psi_1 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & u_2 & k_2 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ \Phi_3 & u_3 & k_3 & \Psi_3 & 0 & 0 \\ \Phi_{\mathrm{I}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{I}} & x_1 & l_1 \\ \Phi_{\mathrm{II}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{II}} & x_2 & l_2 \\ \Phi_{\mathrm{III}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{III}} & x_3 & l_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 \,.\, \Sigma \pm \Psi_{\mathrm{I}} x_2 l_3 - \Sigma \pm u_1 k_2 \Psi_3 \,.\, \Sigma x_1 l_2 \Phi_{\mathrm{III}}\,.$$

Bezeichnen wir nun mit i die Indices 1, 2, 3, mit j die Indices I, II, III, so ist in Rücksicht auf das Euler'sche Theorem:

$$\Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 \,.\, \Sigma \pm \Psi_{\mathrm{I}} x_2 l_3 = \begin{vmatrix} \Sigma\Psi_j\Phi_i & \Sigma\Psi_j u_j & \Sigma\Psi_j k_j \\ \Sigma\Phi_i x_i & u_x & k_x \\ \Sigma\Phi_i l_i & u_l & k_l \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\Psi_j\Phi_i & 0 & \Sigma\Psi_j k_j \\ 0 & 0 & 1 \\ \Sigma\Phi_i l_i & 1 & k_l \end{vmatrix} = -\Sigma\Psi_j\Phi_i\,.$$

Eine analoge Gleichung gilt für das Product der beiden anderen Determinanten, und somit erhalten wir die Bedingung:

$$(11) \qquad \Sigma\Phi_j\Psi_i - \Sigma\Psi_j\Phi_i \equiv \sum \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) = 0,$$

welche vermöge $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$ bestehen muss.

Diese partielle Differentialgleichung tritt an Stelle von (6) oder (9); sie ist, wie wir uns ausdrücken wollen, die nothwendige Bedingung dafür, dass *die Gleichungen* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ *„in involutorischer Lage" sind* (eine Integral-M_1 gemein haben). Die Gleichung (11) ist indess auch erfüllt für singuläre Hauptelemente von Φ und Ψ, für welche alle Grössen Φ_i, Φ_j oder Ψ_i, Ψ_j verschwinden (z. B. wenn $\Psi = f^2$), ferner auch, wenn die Grössen Φ_i, Φ_j bez. den Grössen Ψ_i, Ψ_j proportional werden. Nur mit Ausschluss solcher Fälle darf man daher auch den Satz aussprechen:

Das Problem, die Gleichung $\Phi = 0$ *zu integriren, coincidirt mit der Aufgabe, eine in* x *und* u *homogene Function* Ψ *nullter Dimension zu finden, welche der partiellen Differentialgleichung* (11) *genügt und einen Parameter* α *enthält.*

Die Vortheile, welche der Gebrauch homogener Coordinaten gegenüber der früheren Darstellung bietet, sind schon an diesen

Resultate evident. Zunächst nämlich ist die Gleichung (11) im Gegensatze zu (6) und (9) durchaus symmetrisch, und sie enthält allein partielle Differentialquotienten*); ferner bedürfen jetzt die unendlich fernen Elemente keine besondere Betrachtung mehr; es bleiben nur die soeben schon genannten, im Wesen der Sache begründeten, Ausnahmefälle zu berücksichtigen.

Von besonderem Interesse und für spätere Anwendung von besonderem Nutzen wird nun das in Gleichung (7) gegebene Problem, wenn man es unter Anwendung homogener Punkt- und Liniencoordinaten behandelt. Da der Ausdruck $dy - p\,dx$ alsdann durch u_{dx} resp. $(du)_x$ unter der Bedingung $u_x = 0$ zu ersetzen ist, so haben wir offenbar folgende Aufgabe: Es sollen die Bedingungen angegeben werden, welchen die Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, F_1, F_2, F_3 genügen müssen, damit eine Gleichung der Form besteht:

$$(12)\qquad \Phi_1 dF_1 + \Phi_2 dF_2 + \Phi_3 dF_3 = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3,$$

aus der dann wegen $u_x = 0$ die symmetrische Gleichung folgt:

$$(13)\qquad F_1 d\Phi_1 + F_2 d\Phi_2 + F_3 d\Phi_3 = x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3.$$

Auf der rechten Seite von (12) könnten wir, wie in (7) noch einen Factor ϱ hinzufügen, doch wollen wir uns denselben in den Φ_i enthalten denken; und zwar möge er immer so bestimmt werden, dass alle Functionen Φ_i und F_i von der nullten Dimension in x und u sind.

Die Gleichung (12) schreiben wir in der Form:

$$\sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} du_k = u_{dx},$$

woraus man sofort findet:

$$(14)\qquad \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = u_k, \quad \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 0.$$

Durch Differentiation ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0,$$

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 1019.

und also durch Ausführung:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_k}\right) = 1, \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h}\frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right) = 0.$$

Diese vier Relationen sagen aus, dass aus den sechs Gleichungen $(i = 1, 2, 3)$

$$v_i = \sum_k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial F_i}{\partial u_k} z_k\right),$$

$$w_i = \sum_k \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} z_k\right)$$

die sechs weiteren Gleichungen folgen:

$$y_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right)$$

$$-z_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right).$$

Setzt man also diese Werthe von y_h, z_h in die vorhergehenden Gleichungen ein, so müssen Identitäten herauskommen; und in dieser Weise findet man, dass auch die folgenden Relationen bestehen:

$$(15) \qquad (F_i F_k) = 0, \quad (F_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1,$$

wo allgemein das Symbol (PQ) den Ausdruck bezeichnet, dessen Verschwinden nach (11) die Bedingung der involutorischen Lage für die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ gibt, wo also:

$$(16) \qquad (PQ) = \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial u_i} - \frac{\partial P}{\partial u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right).$$

Dieselbe Schlussweise lässt sich auch umgekehrt verfolgen; somit hat man den wichtigen Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (12) *oder* (13), *sind unter Hinzunahme von* $u_x = 0$ *durch die partiellen Differentialgleichungen* (15) *gegeben, deren Bedeutung aus* (16) *erhellt.**)

---

*) Vgl. S. Lie: Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 3. Mai 1872 u. 21. Mai 1873 und Math. Annalen, Bd. 8, wo der Beweis aus dem Pfaff'schen Probleme abgeleitet wird. Für die Herleitung des Textes vgl. A. Mayer: Göttinger Nachrichten, April 1874 oder Math. Annalen, Bd. 8, p. 304 und Lie: ib. Bd. 9, p. 257. — Fügt man auf der rechten Seite von (12) der Allgemeinheit wegen einen Factor ϱ hinzu, so tritt an Stelle der letzten Gleichung (15) die Gleichung: $(F_i \Phi_i) = \varrho$, alles andere bleibt ungeändert; vgl. Mayer a. a. O. In Mayer's Formeln hat man nämlich nur immer z constant zu nehmen, um die des Textes zu erhalten.

Gerade die letzten Entwicklungen, insbesondere die Gleichungen (15) werden nun von grossem Nutzen, wenn es sich darum handelt, alle möglichen sogenannten *Berührungstransformationen* aufzustellen. Unter den letzteren versteht man solche Transformationen der Ebene, welche Curven, die sich berühren, in Curven mit derselben Eigenschaft überführen, *Transformationen also, denen gegenüber Berührung eine invariante Eigenschaft ist.**) Dahin gehören zunächst die Collineationen der Ebene und überhaupt alle eigentlichen *Punkttransformationen*, d. i. Transformationen der Form:

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y), \tag{16}$$

ferner auch alle *dualistischen Umformungen.* Schon bei letzteren kann es eintreten, dass eine Curve (Gerade) in einen Punkt verwandelt wird; und etwas Analoges tritt überhaupt in dem allgemeineren Falle ein, wo man nicht den Punkt, sondern das Hauptelement (p. 1016) der Coordinatenbestimmung zu Grunde legt und demgemäss als Curve jede einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Hauptelementen bezeichnet, von denen je zwei benachbarte in vereinigter Lage sind. Diese Auffassung führt dann zu den allgemeinsten Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Eine Berührungstransformation können wir nämlich offenbar auch so definiren, dass *sie vereinigt gelegene benachbarte Elemente wieder in solche überführt.*

Wir wollen zunächst wieder nicht-homogene Coordinaten für die analytische Darstellung benutzen. Nach unserer letzten Definition erhalten wir dann die allgemeinste Berührungstransformation, wenn wir die Coordinaten x, y, p eines Hauptelementes durch solche Functionen der neuen Coordinaten x', y', p' ersetzen, dass die Ausdrücke

$$dy' - p'dx' \quad \text{und} \quad dy - p\,dx$$

immer zugleich verschwinden. Setzen wir also:

$$x' = \varphi(x, y, p), \quad y' = \psi(x, y, p) \quad p' = \chi(x, y, p), \tag{17}$$

so muss zwischen φ, ψ, χ die Gleichung (7) bestehen; und aus unseren früheren Entwicklungen folgt dann:

Die Gleichungen (17) *stellen eine Berührungstransformation dar, wenn die Bedingung* (6) *oder* (9) *erfüllt ist, d. h. wenn:*

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

wo $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial y}$.

*) Dieselben sind von Lie eingeführt worden (wenngleich auch vorher gelegentlich von Plücker und Jacobi betrachtet); vgl. besonders dessen Aufsatz: Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Math. Annalen, Bd. 8, wo die Resultate verschiedener früheren Arbeiten zusammengefasst sind.

Neben diese allgemeinste Darstellung, bei der nicht unterschieden wird, ob den Punkten x, y wieder Punkte oder Curven entsprechen, stellen sich speciellere.

Entsprechen nämlich den Punkten x, y ∞^2 Curven, so mögen diese durch die Gleichung (Aequatio directrix):

$$\Omega(x, y, x', y') = 0 \tag{18}$$

gegeben sein, vermöge deren den ∞^1 Hauptelementen x, y, p, die den Punkt x, y enthalten, die ∞^1 Hauptelemente x', y', p' entsprechen, welche sich an die Curve $\Omega = 0$ anschliessen. Den Punkten einer Curve $f(x, y) = 0$ entspricht dann eine Schaar von Curven $\Omega = 0$, und die Enveloppe der letzteren (welche auch aus einzelnen Punkten bestehen kann) ist die der Curve $f = 0$ zugehörige Curve.*) Ein Element x, y, p, welches die beiden Punkte x, y und $x + dx$, $y + dy$ enthält, welches also die Bedingung $dy - p\,dx = 0$ befriedigt, hat dasjenige Element zum entsprechenden, welches den Curven

$$\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0$$

gemeinsam ist; ist also x', y' ein Schnittpunkt beider Curven, so ist das zugehörige p' offenbar gegeben durch:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + p' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0.$$

Zugleich ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0$$

oder:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0.$$

Jede Berührungstransformation, welche nicht eine blosse Punkttransformation ist, kann folglich auch dargestellt werden durch Gleichungen der Form:

$$\Omega(x, y, x', y') = 0$$

$$p = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}, \quad p' = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}}. \tag{19}$$

Berührungstransformationen dagegen, welche blosse Punkttransformationen sind, können durch die Gleichungen (16) dargestellt werden:

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y);$$

---

*) Vgl. Plücker: Analytisch geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, p. 251. — Ein Beispiel gibt der auf p. 365 f. betrachtete Fall, wo die Curven $\Omega = 0$ durch die ersten Polaren einer festen Curve gegeben werden.

man hat dann:

$$(20) \qquad p' = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} p}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p}.$$

Die hier gegebenen analytischen Definitionen der Berührungstransformationen lassen sich nun unmittelbar für die homogenen Coordinaten x, u aussprechen, wenn man sich erinnert, dass die Bedingung $dy - p dx = 0$ durch $u_{dx} = 0$, bez. $(du)_x = 0$ zu ersetzen ist, und dass dann die Bedingung (7) in die Gleichung (12) übergeht. Wir haben so zunächst den Satz, welcher alle Fälle umfasst:

Durch die Gleichungen:

$$(21) \qquad y_i = F_i(x, u), \quad v_i = \Phi_i(x, u)$$

in denen die F_i, Φ_i homogene Functionen nullter Dimension sind, wird eine Berührungstransformation dargestellt, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$(F_i F_k) = 0, \quad (F_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i \Phi_k) = 0,$$
$$(F_i \Phi_i) = 1.$$

In der That wird ja dann vermöge $v_y = 0$, $u_x = 0$:

$$\Sigma v_i dy_i = \Sigma u_i dx_i, \quad \Sigma y_i dv_i = \Sigma x_i du_i.$$

Die Gleichungen (19) dagegen geben jetzt den Satz: *Jede Berührungstransformation, die keine Punkttransformation ist, kann dargestellt werden durch Gleichungen der Form:*

$$(22) \qquad \begin{gathered} \Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0 \\ \sigma u_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}, \quad \tau v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}. \end{gathered}$$

Wenn endlich eine *Punkttransformation* vorliegt, so kann man folgende Darstellung anwenden. Man gehe von zwei Gleichungen zwischen den x_i und y_i:

$$\Omega'(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Omega''(x, y) = 0$$

aus und bestimme ein durch x gehendes Hauptelement mittelst eines Parameters λ durch die Gleichungen:

$$\varrho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i}.$$

Das entsprechende durch y gehende Hauptelement ist dann bestimmt durch:

$$\sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i};\text{*)}$$

---

*) Vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, p. 470 und Lie: Math. Annalen, Bd. 8, p. 223.

und *die Gleichungen:*

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0$$

$$\varrho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i}, \quad \sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i}$$

stellen zusammen die Berührungstransformation dar. —

Die fundamentale Bedeutung der Berührungstransformationen für die Theorie der Differentialgleichungen ist schon aus ihrer Definition evident und wird im Folgenden noch mehr hervortreten. In der That erhellt aus unserer Definition der Integral-M_1 einer Differentialgleichung (p. 1018) unmittelbar:

Die Berührungstransformationen sind identisch mit denjenigen Transformationen einer Differentialgleichung (oder eines Connexes), bei welchen die Integral-M_1 der gegebenen Gleichung in die Integral-M_1 der neuen Gleichung übergehen.

Das gilt gleichzeitig für *jede beliebige* Differentialgleichung, und hierdurch ist zunächst ein Unterschied der allgemeinen Berührungstransformationen gegenüber denjenigen Transformationen bedingt, welche wir früher betrachteten, und welchen nur die beschränkende Bedingung auferlegt war, die Integral-M_1 *einer* gegebenen Gleichung $f = 0$ in die Integral-M_1 der transformirten Gleichung überzuführen, welche sich also zu den allgemeinen Berührungstransformationen ähnlich verhalten, wie die eindeutigen Transformationen einer einzelnen Curve zu den Cremona'schen Transformationen der ganzen Ebene. Wenn wir bei diesen früheren Betrachtungen ausserdem die Eindeutigkeit der Transformation voraussetzen, so ist dies für die nunmehr vorliegenden Fragen irrelevant; in der That gelten unabhängig davon die damaligen Entwicklungen, denen zufolge die Transformation (21) folgenden beiden partiellen Differentialgleichungen genügen muss, um zu einer Gleichung $f(x, u) = 0$ in besagter Beziehung zu stehen (p. 976):

$$\sum_i \Phi_i (F_i f) = K f + L u_x$$

$$\sum_i F_i (\Phi_i f) = K' f + L' u_x.$$

Sollen diese Bedingungen unabhängig von $f = 0$ vermöge $u_x = 0$ erfüllt sein, so erhält man aus ihnen in der That wieder die Gleichungen (14), aus denen die Gleichungen (15) hervorgingen. Man hat nämlich zu dem Zwecke nur auf der rechten Seite der ersten Gleichung f bis auf einen Zahlenfactor durch $\Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} u_i$ und in der zweiten Gleichung durch $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ zu ersetzen. Lässt man alsdann die Coëfficienten der Grössen $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial u_i}$ einzeln Null sein, so folgen aus

der ersten Gleichung wieder die Bedingungen (14) bis auf den rechts auftretenden Factor K und aus der zweiten Gleichung die dualistisch entsprechenden Bedingungen:

$$\sum_i F_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} = K x_k, \quad \sum_i F_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = 0. —$$

Erwähnen wir hier namentlich sofort den folgenden wichtigen Satz:

*Jede Differentialgleichung erster Ordnung kann durch Berührungstransformation in jede andere Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt werden;**) *sie hat also gegenüber diesen Transformationen keine Invarianten.*

Zum Beweise hat man nur zu zeigen, dass man die Integral-M_1 der einen Gleichung in die der andern überführen kann; und dass dies möglich ist, wird sofort deutlich, wenn man beachtet, dass jede zweifach unendliche Curvenschaar in die zweifach unendlich vielen Punkte der Ebene und also jede einfach unendliche Curvenschaar in die Punkte einer Geraden, etwa $x_1 = 0$, transformirt werden kann. Die Möglichkeit nämlich, jede Differentialgleichung in jede andere zu transformiren, erwächst aus der hiermit bewiesenen Möglichkeit, jede Gleichung in die kanonische Form $x_1 = 0$ zu bringen. Mit der Transformation der Differentialgleichung in diese einfachste Form würde dann selbstverständlich auch ihre Integration geleistet sein, denn die Integralcurven der Gleichung $x_1 = 0$ sind bekannt, sie bestehen nach dem Obigen aus den Punkten der Linie $x_1 = 0$, aufgefasst als Träger von Strahlbüscheln. Dies ist eine bemerkenswerthe Formulirung des Integrationsproblems. —

Da gegenüber den Berührungstransformationen Punkte und Curven nicht wesentlich verschieden sind, wird man, um volle Allgemeinheit zu erreichen, auch nicht mehr von Punktcoordinaten sprechen. Vielmehr wollen wir jetzt schliesslich unter x_1, x_2, x_3 die homogenen Parameter irgend einer zweifach unendlichen Schaar von Curven (M_1) verstehen, die „ausgezeichnet" heissen sollen. Eine Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

soll dann diejenige Curve darstellen, welche von den ausgezeichneten M_1 umhüllt wird, deren Parameter x_i die Gleichung $\varphi = 0$ befriedigen. Die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

stellt, wenn die x_i als Parameter gedacht werden, eine neue, *lineare*, zweifach unendliche Schaar von M_1 dar, welche zu der ursprünglichen

*) Für Gleichungen höherer Ordnung gilt dies nicht mehr; vgl. Lie: Göttinger Nachrichten, 1872.

Schaar *conjugirt* heissen mag. Legt man den Grössen x_i, u_i solche feste Werthe bei, dass diese Gleichung erfüllt ist, so sollen sie wieder die Coordinaten eines *Hauptelementes* heissen. Aus der Bedeutung, welche wir soeben einer Gleichung $\varphi(x) = 0$ beilegten, erhellt sofort, dass dann je zwei Curven der beiden einander conjugirten Schaaren, welche ein Hauptelement bilden, sich gegenseitig berühren; so drückt sich also hier geometrisch in sich selbst dualistischem Sinne die Bedingung aus, welche an Stelle der Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade tritt. Ueberhaupt fällt bei unserer jetzigen Coordinatenbestimmung die ausgezeichnete Stellung fort, welche sonst Punkt und Gerade gegen einander einnehmen. Auch die Zweitheilung der Berührungstransformationen in eigentliche Punkt- (bez. Linien-) Transformationen und allgemeinere Element-Transformationen verliert ihren principiellen Charakter. Es bleibt natürlich eine solche Zweitheilung in den Formeln immer bestehen, aber sie ist nicht mehr durch den geometrischen Inhalt bedingt; die Sonderung ist nur noch eine relative, auf das gewählte Coordinatensystem bezügliche, keine absolute.

Für die so definirten Hauptelemente gelten nun wieder alle die obigen Sätze, wenn man noch die vereinigte Lage benachbarter Elemente durch die Bedingung $u_{dx} = -(du)_x = 0$ definirt. Insbesondere heisst eine Gleichung $\varphi(x, u) = 0$, welche die x und u je homogen in irgend einer Weise enthält und mit $u_x = 0$ verbunden gedacht wird, eine Differentialgleichung. Die letztere integriren heisst eine neue Gleichung aufstellen:

$$\psi(x, u, \alpha) = 0$$

welche einen Parameter α enthält, so dass vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $u_x = 0$ auch

$$u_{dx} = 0, \quad \text{bez.} \quad (du)_x = 0$$

wird (p. 1021), u. s. f. Doch wollen wir diese allgemeinste Formulirung hier nicht weiter durchführen. —

Wie wir oben unendlich kleine lineare Transformationen betrachteten (p. 996), kann man nun auch *unendlich kleine Berührungstransformationen* aufstellen. Eine solche wollen wir darstellen in der Form:

$$(23) \qquad y_i = x_i + \varepsilon\varphi_i(x, u), \quad v_i = u_i + \varepsilon\psi_i(x, u),$$

wenn ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet, und wenn die φ_i vom nullten Grade in den u_i, vom ersten in den x_i, die ψ_i vom ersten Grade in den u_i, vom nullten in den x_i sind. Im Gegensatze zu unseren früheren Annahmen benutzen wir also jetzt *Functionen erster*

*Dimension.**) Die rechten Seiten der Gleichungen (23) müssen hier wieder den Bedingungen (15) genügen, wenn man setzt:

$$F_i = x_i + \varepsilon \varphi_i, \quad \Phi_i = u_i + \varepsilon \psi_i.$$

Dann aber findet man durch Entwicklung und Auslassung infinitesimaler Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial u_i},$$

wo i, k alle Werthe 1, 2, 3, insbesondere auch beide denselben Werth annehmen dürfen. Diese Gleichungen sagen aus, dass es eine Function H gibt, für welche:

$$\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen müssen von demselben Grade in x, u sein, wie die rechten Seiten von (23); es ist also:

$$\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H}{\partial u_k}\right) = 0, \quad \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial x_k},$$

woraus:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial x_k},$$

und durch Integration, unter Auslassung einer unwesentlichen Constanten:

$$\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = H \quad \text{und ebenso:} \quad \sum_i x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = H;$$

d. h. H muss eine Function erster Dimension in den x_i und u_i sein. Setzt man noch in (23) $x + dx$ statt y, $u + du$ statt v und dt statt ε, so resultirt also der Satz:

*Ist H eine Function erster Dimension in den x_i und u_i, so kann jede unendlich kleine Berührungstransformation dargestellt werden in der Form:***)

$$(24) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Vermöge dieser Gleichungen wird jedem Hauptelemente einer Gleichung $\Phi = 0$ ein benachbartes Hauptelement zugeordnet. Insbe-

---

*) Eine Function erster Dimension in den x wird allgemein von der Form $\Sigma A_i x_i$ sein, wenn die A_i beliebige Functionen nullter Dimension in x und u sind. Man sieht leicht, dass die Gleichungen (15) auch für Functionen von nicht nullter Dimension bestehen.

**) Vgl. Lie: Göttinger Nachrichten 1874, p. 537 und Math. Annalen, Bd. 8, p. 239.

sondere kann es dabei eintreten, dass das letztere ebenfalls der Gleichung $\Phi = 0$ angehört; und dann wird offenbar diese Gleichung durch die Transformation (24) in sich selbst übergeführt, wie wir es früher auch bei den linearen Transformationen gesehen haben (p. 906). Eine Gleichung $\Phi = 0$ von dieser Eigenschaft ist zunächst die Gleichung $H = 0$ selbst. In der That, setzt man in H $x + dx$ statt x und $u + du$ statt u, so geht in Rücksicht auf (24) H über in:

$$H + \Sigma \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial H}{\partial u_i} du_i = H, \text{ q. e. d.}$$

Wendet man dagegen die Transformation H, d. i. die Transformation (24), auf eine beliebige Gleichung $\Phi = 0$ an, so wird:

$$\Phi + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} du_i = \Phi + dt\, \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial u_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right);$$

Φ geht also in sich selbst über, sobald $(\Phi, H) = 0$ vermöge $\Phi = 0$ (oder identisch $= 0$, aber nicht erst vermöge $H = 0$).

Das Problem der Integration der Gleichung $\Phi = 0$ ist in diesem Sinne identisch mit dem Probleme der Bestimmung einer unendlich kleinen Transformation, welche Φ in sich überführt. Aber nicht gibt umgekehrt jede Function H, welche eine mit Φ involutorische Differentialgleichung darstellt, auch unmittelbar eine unendlich kleine Transformation von Φ in sich selbst. Man erkennt aus diesem Satze, wie die weitere Untersuchung dieser Transformationen von besonderem Interesse wird; doch gehen wir auch hierauf nicht mehr ein.*)

An diese Erörterungen über den begrifflichen Inhalt einer Differentialgleichung fügen wir schliesslich noch einige Bemerkungen über deren *singuläre Lösungen* an. — Man pflegt letztere gewöhnlich in folgender Weise einzuführen.**) Sind durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3; \alpha) = 0,$$

in der α ein Parameter ist, einfach unendlich viele Curven dargestellt, so betrachte man den Ort der Schnittpunkte consecutiver Curven, dessen Gleichung sich durch Elimination von α aus

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha} = 0 \tag{25}$$

*) Insbesondere ergibt sich hier eine neue Auffassung des sogenannten Jacobi-Poisson'schen Theorems (vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, p. 268); es gelingt ferner, die Theorie des Integrabilitätsfactors geometrisch aufzufassen. In letzterer Beziehung vgl. einen Aufsatz von Lie: Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1874, p. 242 ff.

**) In Betreff einer zusammenhängenden Darstellung dieser Theorien in ihrer üblichen Fassung, insbesondere nach ihrer historischen Entwicklung vgl. Boole: A treatise on differential equations, 2. ed. Cambridge and Dublin 1865, p. 163 ff. und: Supplementary volume, p. 28 ff.

ergibt. Derselbe wird, wenn zwischen den Constanten der Function f keine besondere Relationen bestehen, die *Umhüllungscurve* der Curven $f = 0$ darstellen; und sie ist es, welche als singuläre Lösung derjenigen Differentialgleichung gilt, deren Integralcurven eben durch $f = 0$ gegeben sind. Es kann aber eintreten, dass die so gefundene Curve keine eigentliche Umhüllungscurve ist, sondern durch den Ort der Doppelpunkte der Curven $f = 0$ (oder anderer beweglichen singulären Punkte) ganz oder theilweise absorbirt wird, oder dass sich überhaupt keine Curve ergibt, wie z. B. wenn

$$f = \varphi + \alpha \psi,$$

d. h. wenn $f = 0$ einen Curvenbüschel darstellt. Allerdings wird man in letzterem Falle in Folge unserer allgemeinen Definition der Integralcurven (p. 1018) die Grundpunkte eines Büschels, jeden als Träger eines Strahlbüschels gedacht, noch als Umhüllungsgebilde gelten lassen und in dem Sinne noch von einer singulären Lösung sprechen. Rücken dagegen die Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ z. B. paarweise zusammen, so berühren sich alle Integralcurven in den betreffenden Punkten, und es gibt eine endliche Anzahl ausgezeichneter Hauptelemente, aber keine von ihnen gebildete singuläre Lösung.

Gegenüber diesen verschiedenen Möglichkeiten wird man zunächst die Frage aufwerfen: *Was tritt im Allgemeinen ein**), d. h. wenn die Coëfficienten der gegebenen Differentialgleichung keinen besonderen Relationen genügen? Es ist zunächst klar, dass für jeden Punkt der singulären Integralcurve zwei der zugehörigen Fortschreitungsrichtungen (Hauptelemente) zusammenfallen. Der Ort der Punkte aber, für welche dies eintritt, ist im Allgemeinen der Ort der Spitzen der Integralcurven, und nicht eine eigentliche Umhüllungscurve, wie wir schon früher bei den algebraischen Differentialgleichungen gesehen haben (p. 968) und wie man für andere Gleichungen ganz ebenso beweist. Andererseits ist selbstverständlich, dass man aus den Gleichungen (25) eine eigentliche Umhüllungscurve erhält, wenn die Coëfficienten von $f = 0$ allgemeiner Natur sind.**) Wir können dies in folgendem Satze aussprechen:

*) Vgl. im Folgenden: Darboux: Sur les solutions singulières des équations aux dirivées ordinaires du premier ordre, Comptes rendus, t. 71 und Bulletin des sciences mathématiques, t. 4, 1873, sowie Clebsch, Math. Annalen, Bd. 6, p. 211.

**) Selbstverständlich können in besonderen Fällen noch Ausnahmen anderer Art eintreten. Von der aus (25) erhaltenen Curve wird sich z. B. der Ort der Doppelpunkte der Curven $f = 0$ absondern (wie schon oben gemerkt), wenn ein solcher vorhanden ist; die Curve könnte auch möglicherweise ganz durch einen solchen Ort absorbirt werden, und dann hat man keine Umhüllungscurve mehr. Mit dem Orte der Spitzen dagegen steht ein solcher Ort von Doppelpunkten nicht weiter in Zusammenhang, denn für einen Punkt des letztern fallen keineswegs zwei der zugehörigen Coincidenzstrahlen zusammen.

Die Constanten in einer Differentialgleichung erster Ordnung müssen besonderen Bedingungen genügen, wenn die Integralcurven eine eigentliche Umhüllungscurve haben sollen; andernfalls bestehen zwischen den Constanten der Integralgleichung solche Relationen, dass statt dessen ein Ort von Spitzen auftritt. Welcher von beiden Fällen im Allgemeinen vorkommt, hängt sonach davon ab, ob man die Differentialgleichung oder die Integralgleichung allgemein voraussetzt.*)

Es bleibt uns übrig, die Bedingungen anzugeben, unter welchen eine eigentliche Umhüllungscurve erhalten wird. Unsere frühere Schlussweise, welche zu dem Orte von Spitzen $F=0$ führte, wird nur ungültig, wenn die zu einem Punkte von $F=0$ gehörige, doppelt zählende Fortschreitungsrichtung mit der Tangente von F in diesem Punkte zusammenfällt, denn dann kann sich eine Integralcurve diesem Punkte nähern und sich wieder von ihm entfernen, ohne die Curve F zu überschreiten und ohne doch eine Spitze zu bilden, nämlich eben, indem sie F in dem Punkte berührt; die von den Geraden der doppelt zählenden Hauptelemente (deren Punkte auf $F=0$ liegen) umhüllte Curve $\Phi=0$ muss also mit $F=0$ zusammenfallen. Die Bedingung der eigentlichen Berührung aber ist sich selbst dualistisch; dieselbe Curve F muss daher auch von denjenigen Geraden umhüllt werden, welche im Allgemeinen die Wendetangenten der Integralcurven (Tangenten von $F'=0$) sind, d. h. welche durch einen doppelt zählenden Punkt zu einem doppelt zählenden Hauptelemente der Differentialgleichung ergänzt werden; und endlich muss dann auch der Ort $\Phi'=0$ der letzteren Punkte mit $F=0$ identisch sein.

Wenn also eine singuläre Lösung (eigentliche Umhüllungscurve) entstehen soll, muss der Ort der Rückkehrpunkte der Integralcurven $F=0$ oder ein Theil desselben mit dem Orte der Wendetangenten dieser Curven ($F'=0$) oder einem Theile desselben zusammenfallen. Mit der Enveloppe fallen dann auch der Ort der Wendepunkte und die Enveloppe der Wendetangenten bez. Theile derselben zusammen.

Die Bildung der Gleichung $F=0$, $F'=0$ kann in der oben geschilderten Weise geschehen, denn die betreffenden Regeln sind ebenso auf transscendente wie auf algebraische Curven anwendbar. An diesen Gleichungen kann man dann sofort erkennen, ob eine singuläre Lösung vorhanden ist und diese selbst angeben; es *muss eben F einen Factor enthalten, welcher, in Liniencoordinaten dargestellt, mit einem Factor von F' identisch ist.* Besondere Untersuchungen bedürfen dann nur noch etwaige lineare Factoren von F und F', da

*) Dass ein Ort der Spitzen auftritt, wenn eine eigentliche Umhüllungscurve nicht vorhanden ist, zeigte auch schon De Morgan: On some points of the integral calculus, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 9, part. 2.

dieselben immer nur in der einen Art von Coordinaten darstellbar sind. In dem Vorhergehenden sind die Principien enthalten, nach denen man solche Vorkommnisse am zweckmässigsten beurtheilt.

Wir erwähnen nur noch die Möglichkeit, dass, in besonderen Fällen, eine noch innigere Beziehung der Integralcurven zur Curve $F = 0$ eintreten kann. Bestehen z. B. die Integralcurven aus den Krümmungskreisen einer ebenen Curve, so ist die letztere eine Osculations-Enveloppe; sie wird von den Integralcurven gleichzeitig berührt und durchsetzt. Gehören ferner etwa die Integralcurven einem Netze an:

$$A + B\lambda^p + C\lambda^q = 0,$$

so ist die Jacobi'sche Curve des Netzes ein Ort nicht für Spitzen, sondern für Selbstberührungspunkte der Integralcurven, ohne doch eine Umhüllungscurve zu sein (p. 382), etc.

Es sollen diese Erörterungen zum Schlusse noch an einer *Reihe von Beispielen* erläutert werden.*)

1) Es ist schon früher hervorgehoben, dass die Integralcurven des allgemeinen Connexes $(1, n)$ die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen desselben zu gemeinsamen Tangenten haben (p. 1002); die Grundstrahlen stellen hier also eine singuläre Lösung dar; ausserdem gibt es einen Ort von Spitzen $F = 0$; hingegen keine Curve $F' = 0$.

Dualistisch entsprechend haben die Integralcurven des allgemeinen Connexes $(m, 1)$ $m^2 + m + 1$ gemeinsame Punkte, welche eine singuläre Lösung darstellen (p. 1033). Einen Specialfall hiervon erhält man durch die Differentialgleichung:

$$\psi dy - \varphi dx = 0 \tag{26}$$

wenn φ und ψ von der m^{ten} Ordnung sind. Hier hat man m^2 feste Basispunkte; die Gleichung (26) entsteht also nur dann aus einem *allgemeinen* Connexe $(m - 1, 1)$, wenn $m - 1$ Schnittpunkte der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ auf der unendlich fernen Geraden liegen, d. h. wenn

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 y, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_3 x$$

wo die φ_i von der $(m - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. In der That erhält man dann aus dem allgemeinen Connexe $\Sigma \varphi_i u_i = 0$ für $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, die Differentialgleichung:

$$dx\,(\varphi_2 - \varphi_3 y) + dy\,(\varphi_3 x - \varphi_1) = 0;$$

und von den m^2 Schnittpunkten der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ fallen $m - 1$ in die Schnittpunkte von $\varphi_3 = 0$ mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

*) Man findet weitere Beispiele bei Darboux a. a. O. behandelt.

2) Es sei die Differentialgleichung gegeben:

$$(27)\qquad x\,dy = y\,dx \log y,$$

oder homogen:

$$(28)\qquad \frac{x_1}{x_2}\frac{u_1}{u_2} + \log\frac{x_2}{x_3} = 0.$$

Hier ist offenbar der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, d. i. $x = 0$, $y = 1$ allen Integralcurven (welche durch $y = e^{Cx}$ dargestellt werden) gemeinsam.*) Da die u_i linear vorkommen, gibt es keinen Ort der Spitzen. Um die Enveloppe der Wendetangenten $F' = 0$ zu erhalten, hat man die Punktgleichung (28) in Liniencoordinaten v darzustellen, d. h. ϱ und v_i aus den Gleichungen:

$$\varrho v_1 = \frac{1}{x_2}\frac{u_1}{u_2},\quad \varrho v_2 = -\frac{x_1}{x_2^2}\frac{u_1}{u_2} + \frac{1}{x_2},\quad \varrho v_3 = -\frac{1}{x_3}$$

und aus (28) zu eliminiren. Dies gibt:

$$\log\left(-\frac{v_3}{v_1}\frac{u_1}{u_2}\right) - \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{u_2}{u_1}\right) = 0.$$

Hieraus entsteht F' für $u = v$; es ist also:

$$(29)\qquad F' \equiv u_3 + u_2 = 0$$

die gesuchte Curve. Dieselbe fällt mit dem gemeinsamen Punkte der Integralcurven zusammen und gibt eine singuläre Lösung. In der That kann man die Gleichung (29) nicht durch einen speciellen Werth von C aus der Gleichung der Integralcurven in Liniencoordinaten:

$$\Psi = \log\left(-\frac{1}{C}\frac{u_1}{u_2}\right) - C\frac{u_3}{u_1} + 1 = 0$$

erhalten; sie ergibt sich dagegen auch durch Elimination von C aus $\Psi = 0$ und $\frac{d\Psi}{dC} = 0$.

3) Die Differentialgleichung**)

$$(30)\qquad y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}y^3\frac{dy}{dx} + a^2 = 0$$

hat das allgemeine Integral:

$$4a^2x^2 - 2Cy^2 + C^2 = 0,$$

und also die singuläre Lösung:

$$(31)\qquad 4a^2x^2 - y^4 \equiv (2ax - y^2)(2ax + y^2) = 0.$$

Aus (30) erhalten wir den Connex:

$$a^2u_2^2x_3x_1 - x_2^2u_3u_1 = 0.$$

---

*) Ueber das particuläre Integral $y = 0$ dieser Gleichung vgl. Boole a. a. O. Supplementary volume, p. 14 und 17.

**) Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, 3. Ausg., Bd. 1, p. 509.

Die Form F entsteht daher aus:

$$4 v_1 v_3 u_1 u_3 - a^2 u_2^2 v_2^2 = 0,$$

wenn man $u = v$ setzt, gibt also:

$$F \equiv 4 u_1^2 u_3^2 - a^2 u_2^4 = 0;$$

und ebenso findet man:

$$F' \equiv 4 a^2 x_1^2 x_3^2 - x_2^4 = 0.$$

Die beiden letzteren Gleichungen stellen in der That dieselbe Curve (31) dar.

4) Die Integralcurven der Differentialgleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y}$ bilden ein System von Curven dritter Ordnung mit Spitzen:

$$(x + Cy)^2 y = 1 \quad \text{oder:} \quad (x_1 + Cx_2)^2 x_2 = x_3^3.$$

Die Spitzen erfüllen die Linie $x_3 = 0$. Wir erhalten den Connex:

$$u_1^2 x_2 - u_2^2 x_3 = 0.$$

Die Curve F, d. i. der Ort der Punkte, für welche zwei Werthe von $u_1 : u_2$ zusammenfallen, besteht aus $x_3 = 0$, dem Orte der Spitzen, und $x_2 = 0$, der festen Wendetangente; der Schnittpunkt beider Linien ist der gemeinsame Wendepunkt; er stellt keine singuläre Lösung dar, weil zu ihm nur *eine* ausgezeichnete Fortschreitungsrichtung gehört.

5) Die Differentialgleichung*):

$$(32) \qquad y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + (1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Integralcurven:

$$y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$$

aus den Tangenten eines festen Kegelschnittes bestehen; sie entspricht also dualistisch einer solchen Gleichung, welche die Differentiale der Coordinaten nicht enthält**), und deren Integrale dann aus den sämmtlichen Punkten einer festen Curve bestehen (p. 1017). Der Connex, zu welchem die Gleichung (32) gehört, darf daher die Punktcoordinaten x nicht enthalten, und in der That findet man für ihn die Gleichung:

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Er stellt gleichzeitig die singuläre Lösung von (32) in Liniencoordinaten dar.

---

*) An ihr entwickelte Lagrange zuerst seine Theorie der singulären Lösungen; vgl. Boole a. a. O. p. 149 und 165.

**) Auch Plücker machte darauf aufmerksam, dass bei Umformung einer Differentialgleichung von Punkt- in Ebenençoordinaten die Differentialquotienten ganz verschwinden können, und dass die so entstehende Flächengleichung eine singuläre Lösung ist. Vgl. dessen System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, p. 27.

Index.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten; An. bedeutet Anmerkung, C_n Curve n^{ter} Ordnung, K_n Curve n^{ter} Klasse.

Zusätze und Verbesserungen.

Seite 13, Zeile 6 v. u. lies $a_{,}' a_{,,}'' a_{,,,}'''$ statt $a_{,}''' a_{,,}'' a_{,,,}'$.
„ 28, „ 6 v. u. lies „gilt für“ statt „gibt“.
„ 39, „ 16 v. o. lies $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ statt $\alpha^2 - \alpha + 1 = 1$.
„ 41, „ 1 u. 2 v. u. lies: Also wird $\mu' = \frac{\pm \mu\sqrt{3} - c}{\mu \pm c\sqrt{3}} \cdot c$, und dies ist immer und nur dann eine reelle Grösse, wenn μ reell ist.
„ 60, „ 6, 4 u. 3 v. u. lies $-au' - bv'$ statt $-au - bv$.
„ 61, „ 14 u. 15 v. o. lies $(a \sin\alpha - b\cos\alpha)v' + 1$ statt $(a\sin\alpha + b\cos\alpha)v'$.
„ 68, „ 22 v. o. lies $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$ statt $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$.
„ 69, „ 2 v. u. sind die Worte „Punkt“ und „Linie“ zu vertauschen.
„ 79, „ 11 v. o. lies $-\frac{1}{a^2}$ statt $-\frac{2}{a^2}$.
„ 81, „ 21 v. o. lies a statt b und b statt a.
„ 83, „ 17 v. u. ist $+1$ zu streichen.
„ 88, „ 3 v. o. lies $Q = 0$ statt (10).
„ 96, „ 11 u. 12 v. u. sind α und β zu vertauschen.
„ 98, „ 1 v. o. lies $x' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2mp}$ statt $y' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2m}$.
„ 3 v. o. lies $x' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2mp} = x''$ statt $y' + \frac{a_{33}}{2p} = \frac{q^2}{2m} - y''$.
„ 102, lies $\xi + \lambda x$ statt $x + \lambda\xi$.
„ 104, Zeile 1—4 v. u. ist der Factor μ zu unterdrücken.
„ 107, „ 8 ff. lies: so müssen nach unseren allgemeinen Betrachtungen zwei der vier Punkte zusammenfallen; es muss daher ....
„ 109, „ 11 v. u. lies $z + \lambda y$ statt $y + \lambda z$ und Zeile 7 v. u. lies $-4\alpha Q^2$ statt $= 4\alpha Q^2$.
„ 111, „ 9 v. u. lies $\mu v_i + w_i$ statt $v_i + \mu w_i$.
„ 125, „ 8 u. 10 v. o. lies $\lambda' - \lambda'''$ statt $\lambda''' - \lambda'$.
„ 136, In Fig. 23 ist der Punkt $v_3 = 0$ mit P, der Punkt $v_2 = 0$ mit Q zu bezeichnen.
Zeile 1 v. u. lies $y_1 y_3$ statt $y_1 y_2$.
„ 140, „ 3 v. u. lies $P - 2\lambda' Q + \lambda'^2 S = 4\lambda'^2 B \,.\, v_3^2$.
„ 2 v. u. lies $P - \lambda'^2 S = -4\lambda'^2 B \,.\, v_2 v_3$.
„ 1 v. u. lies $P + \lambda'^2 S = 2\lambda'^2 B \,.\, (v_2^2 + v_3^2 + 2 v_1 v_3)$.
„ 143, „ 6 v. u. lies $\lambda' b_{11}$ statt $\lambda'' b_{11}$ und $\lambda' - \lambda''$ statt $\lambda'' - \lambda'$.
„ 4 u. 2 v. u. lies $+(a_{11} - \lambda' b_{11})$ statt $-(a_{11} - \lambda'' b_{11})$.
„ 146, „ 10 u. 11 v. o. lies $2bBC$ statt $2bAC$.
„ 147, „ 20 v. u. lies $= -i$ statt $= i$ und Zeile 13 v. u. α statt x.
„ 148, „ 6 u. 7 v. u. lies $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$ statt $u + \lambda v$, $u' + \lambda v'$.

Seite 162, Zeile 3 v. o. lies $a^2u^2 + b^2v^2 - 1$ statt $a^2u^2 + b^2v^2$.
„ 13 u. 14 v. o. lies (3) und (4) statt (2) und (3).
„ 165, „ 10 v. u. lies „die Gleichung (5) von der aus ihr durch Vertauschung von λ und μ entstandenen" statt „dieselben von einander".
„ 172, „ 20 v. u. lies bex_1 statt bcx_1.
„ 175, Auf der linken Seite der letzten Gleichung ist y statt x zu setzen.
„ 179, Zeile 4 v. o. lies $\gamma = cx_2^{-n}(p_2p_2^{(1)} \dots p_2^{(n-1)})^{-1}$.
„ 191, „ 19 v. u. lies $-n^2(n-1)^2$ statt $n^2(n-1)^2$.
„ 200, In (13) lies bez. $-k+\sqrt{l}$ und $-k-\sqrt{l}$ statt $k+\sqrt{l}$.
Zeile 12 u. 13 v. u. lies $2(ab)$ statt (ab).
„ 201, „ 3 v. o. lies $-\varrho$ statt $+\varrho$. — Es sind immer c und c' zu vertauschen.
„ 211, Ein vereinfachter Beweis für die Endlichkeit des Formensystems binärer Formen ist neuerdings von Gordan gegeben in der Schrift: Ueber das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875.
„ 213, Zeile 4 v. o. lies „zweite" statt „erste".
„ 215, „ 16 v. o. lies D' statt D''.
„ 20 v. o. lies „Subtraction" statt „Substitution".
„ 219, „ 18 v. u. lies (7) statt (9).
Auf die Invarianteneigenschaft der Bildungen R, Δ, Q bei einer binären cubischen Form machte zuerst Eisenstein aufmerksam: Crelle's Journal, Bd. 27; vgl. auch Cayley, ib. Bd. 28.
„ 224, In (19) lies $-\eta^3$ statt $+\eta^3$.
„ 227, In (24) lies $(\varkappa^2 + \frac{1}{2}R\lambda^2)^2$ statt $(\varkappa^2 + \frac{1}{2}R\lambda^2)$.
„ 228, Zeile 6 u. 7 v. o. Die Factoren ξ_1, ξ_2 auf den linken Seiten der Gleichungen sind zu streichen.
„ 230, In (6) und (12) lies $-\mathsf{P}$ statt P.
„ 232, Zeile 7 v. o. lies $-\frac{1}{12}iH$ statt iH.
„ 237, „ 2 v. u. lies $\frac{1}{2}i^3 + \frac{1}{3}j^2$ statt $\frac{1}{2}i^3 + \frac{1}{3}j^2$.
„ 240, „ 5 v. o. lies $-\frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2$ statt $(m_1 - m_2)^2$.
„ 241, „ 11 v. o. lies $\frac{4}{3}D^2$, $\frac{2}{3}D^3$, $\frac{1}{3}Df$ bez. statt D^2, D^3, Df.
„ 243, Anmk. Für die vollständigere geometrische Darstellung der Theorie der binären biquadratischen Form auf einer Kugelfläche, insbesondere für die Construction der Grundpunkte der Hesse'schen Form aus denen der Grundform vgl. eine Note von Wedekind: Math. Annalen, Bd. 9.
„ 244, Zeile 1 v. u. und Seite 245, Zeile 3, 4, 9 u. 12 v. o. Das Vorzeichen von l_i und l ist zu ändern.
„ 251 ff. Lies immer A_{ki} statt A_{ik}.
„ 257, Zeile 13 v. o. Im Zähler ist m statt n zu setzen.
„ 259, „ 2 v. o. lies $k^2\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2\}$ statt $k(x'-x)^2 + (y'-y)^2$.
„ 260, „ 10 v. o. lies $\varrho = -m$ statt $\varrho = m(m+n)$.
„ 261, „ 11 v. o. lies $-A_{13}\cos\varphi$ statt $A_{13}\cos\varphi$.
„ 272. „ 16 u. 17 v. o. Die Klammern und das Wort „Invariante" sind zu streichen.
„ 273, „ 1—4 v. u. lies: also eine *Zwischenform*. Denkt man sich nun die Form Π in eine Reihe entwickelt, deren einzelne Glieder vollständige Polarenbildungen der Formen des zu Π äquivalenten Systems sind (vgl. p. 269 u. 927), so findet man in der That, dass die Bedingung des identischen Verschwindens von Π vollständig

durch die Forderung ersetzt werden kann, dass eine gewisse Zahl von Zwischenformen (eben den Formen jenes äquivalenten Systems) identisch gleich Null sei. Dann folgt aber ...

Seite 285, In Gleichung (2) lies 2 statt $\frac{1}{2}$.

„ 286, Zeile 6 v. o. lies 2 (abc) statt (abc) und Zeile 10 lies $(abc)\,u_x$ statt (abc).

„ 295, „ 16 v. u. lies f' statt f.

„ 300, „ 3 v. u. und Seite 301, Zeile 1 v. o. lies $3\,A_{112}^2$ statt A_{112}^2.

„ 301, In Gl. (25) u. (26) lies $\mathsf{A}_1 - 1$ und $\mathsf{A}_2 - 1$ statt $\mathsf{A}_1 - 3$ und $\mathsf{A}_2 - 3$; und 1 statt 27; vgl. auch p. 987.

„ 304, Der hier gegebene Beweis des Satzes über das identische Verschwinden der Jacobi'schen Determinante, welcher darauf beruht, dass die Gleichung in Zeile 17 v. u. unabhängig von den u besteht, wird illusorisch für den Fall, dass sich von den drei Formen $N_{\varphi f}$, $N_{\varphi\psi}$, $N_{\psi f}$ ein gemeinsamer, die u enthaltender Factor absondert, wie es z. B. eintritt, wenn $f = x_1^2$, $\varphi = 2x_1x_2$, $\psi = x_2^2$. In diesem Beispiele verschwindet die Jacobi'sche Determinante identisch, ohne dass man $f = \varphi + \lambda\psi$ setzen könnte.

„ 315, Zeile 13—15 v. o. lies u_2, u_3, u_1 statt v_2, v_3, v_1.

„ 318, „ 16 v. o. lies $a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,c_x^{n-2}$ statt $a_x b_x c_x$.

„ 325, „ 11 der Anmk. lies $y\,f_y^{(3)}$ statt $f_y^{(3)}$.

„ 328, „ 13 u. 10 v. u. lies $2b$ statt b.

„ 329, In Betreff der Untersuchung singulärer Punkte sei noch auf einen Aufsatz von Stolz verwiesen: Math. Annalen, Bd. 8.

„ 337, In Gl. (21) ist vor das Wurzelzeichen der Factor y zu setzen.

„ 340, Zeile 4 v. u. lies $k = q + r - 2$ statt $k' = k + 1 = q + r - 1$.

„ 1 v. u. lies $P = \frac{1}{2}(r + 2q)(r - 1)$.

„ 341, „ 2 v. o. lies $Q = \frac{1}{2}\{r(r-1) + q(q-1)\}$.

„ 341, In Betreff eines exacten Beweises der in Zeile 12—6 v. u. angegebenen Umkehr des vorhergehenden Satzes sei auf den angeführten Aufsatz von Nöther verwiesen.

„ 347, Zeile 17 v. u. lies (2) statt (3) und (3) statt (2).

„ 356, „ 2 u. 4 v. o. lies $+$ statt $-$.

„ 357, „ 10 v. o. lies a_z^2 statt a_x^2.

„ 360, „ 12 v. u. lies $3(n-2)(abc)^2$ statt $3(abc)^2$.

„ 1 v. u. und Seite 361, Zeile 1—4. Ein Beweis dafür, dass die Hesse'sche Curve im Allgemeinen keine Singularitäten hat, liegt jedoch darin, dass im Folgenden die Singularitäten der Steiner'schen Curve unabhängig von denen der Hesse'schen Curve bestimmt werden, und dass beide Curven eindeutig auf einander bezogen, also von gleichem Geschlechte sind.

„ 3 der zweiten Anmerkung lies „Klasse" statt „Ordnung".

„ 363, „ 8 v. u. lies $v_x\,d\mu$ statt $d\mu$ und Zeile 2 v. u. lies $\varrho v_y\,dx_k$ statt $\varrho\,dx_k$.

„ 371, „ 18 v. u. lies „also" statt „aber".

„ 373, „ 10 v. o. lies „*umschrieben*" statt „*eingeschrieben*".

„ 376, Zu der in Zeile 19—22 v. o. ausgesprochenen Behauptung vgl. die Entwicklungen auf p. 760 ff.

„ 377, Der in der ersten Anmerkung ausgesprochene Satz erleidet Ausnahmen, wenn die drei Grundcurven theilweise aus mehrfach zählenden Zweigen bestehen; vgl. den Zusatz zu p. 304 und

zwei Noten von Gordan und Nöther in den Sitzungsberichten der physikalisch medicinischen Gesellschaft zu Erlangen, 1875, sowie einen Aufsatz derselben in Bd. 10 der Math. Annalen.

Seite 388, Zeile 8 v. o. lies $(\alpha' + \beta)$ statt $(\alpha + \beta)$.

„ 397, In Fig. 55, *b* sind in dem untern Winkel zwischen u und v die Buchstaben φ und ψ zu vertauschen.

„ 405, Zeile 18 v. u. lies „endliche" statt „unendliche".

„ 12 v. u. Die Zahlen γ', δ sind nicht nur von der Reihe R_1, sondern auch von der Reihe R_2 unabhängig. Nach dem Satze auf p. 400 nämlich hängen diese Zahlen von dem Grade derjenigen Bedingung in den Coëfficienten der Reihe R_1 ab, welche aussagt, dass ein Schnittpunkt zweier zusammengehörigen C_2 der beiden Reihen auf einer beliebig gewählten Geraden u liegt. Diese Bedingung ist eben die Resultante der Gleichung $u_x = 0$ und der Gleichungen der beiden Reihen und also vom zweiten Grade in den Coëfficienten jeder der beiden letzteren. Die Coëfficienten α_{ik} von R_2 aber lassen sich in Folge unserer Construction eindeutig durch die Coëfficienten a_{ik} von R_1 ausdrücken. Der Grad der Resultante in diesen wird also abhängen von dem Grade der α_{ik} in den a_{ik}; und dieser Grad wiederum hängt allein von der Art ab, wie die eindeutige Beziehung von R_1 auf R_2 vermittelt wird, nicht von diesen Reihen selbst, derselbe ist daher durch bestimmte Zahlen gegeben, und also sind auch γ', δ reine Zahlenfactoren. Die Zahlen a, b, c in $\gamma\mu + \delta\nu$ hängen daher nur noch von den Zahlen α, β und somit nur noch von der gegebenen ∞^3-Reihe ab.

„ 417, Zeile 2 v. o. lies $199\,n$ statt $196\,n$, und Zeile 19 v. o. lies 5, 5, 5 statt 5, 4, 4.

„ 428, „ 14 v. o. lies $\frac{1}{2}m(m+3) - 1$ statt $\frac{1}{2}m(m+3)$..

„ 434, „ 21 v. u. lies *residual* statt *äquivalent*.

„ 436, „ 11 v. u. lies $n - 2 - r$ statt $n - 3 - r$.

„ 451, „ 12 v. u. lies $\frac{1}{2}k_x^2$ statt k_x^2.

In Zeile 6 u. 5 v. u. lies $(n-1)(T_2 - T_1)$ statt $T_2 - T_1$.

„ 453, Zeile 9 v. o. Der Factor γ ist vor die eckige Klammer zu setzen.

„ 457, „ 8 v. o. lies: $(\gamma(n-1), \gamma(n-1))_\gamma$, welche einem Punkte von f die $\gamma(n-1)$ Schnittpunkte der von ihm . . . .

„ 459, Zu dem Zeuthen'schen Satze vgl. die zweite Anmerkung auf p. 681.

„ 469, Zeile 15 v. u. lies $(q+1)$ statt $(q-1)$.

„ 474, „ 7 v. o. Dass als Zahlenfactor bei $(q-1)$ kein anderer als $+1$ oder -1 auftreten kann, übersieht man leicht.

„ 478, „ 10 v. o. lies $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ statt $\frac{1}{2}n(n+3)$.

„ 484 ff. Der hier bewiesene Satz ist (nach einer Mittheilung von Frahm an den Herausgeber) auch eine unmittelbare Folge des später gegebenen Satzes über die Ersetzbarkeit der Cremona'schen Transformationen durch quadratische.

„ 489, Zeile 3 der Anmk. Das Wort „somit" ist zu streichen.

„ 493, „ 16 v. o. lies: in jedem Factor $f_{i+r}(x_1, x_2)$ von $r = 1$ bis $r = l_1$ mindestens . . .

„ 19 v. o. und Zeile 16 v. u. lies immer l statt i.

„ 494, „ 18 v. o. lies $2(n-1)^2$ statt $\frac{1}{2}(n-1)(2n-1)$.

Seite 498, Zeile 6 v. o. lies „Collineation" statt „Combination".
„ 517, „ 8 v. u. lies $-4b^3$ statt $-4b^2$.
„ 522, In Gl. (11) lies u_h statt u_h^2; vgl. hierzu p. 550.
Zeile 15 v. u. lies „u und v" statt „v und w".
„ 525, In Gl. (19) lies 8 statt $\frac{1}{8}$.
„ 540, Zeile 8. v. u. lies α statt γ.
„ 557, „ 1. v. o. lies e_y statt d_y und Zeile 7 lies (14) statt (20).
„ 560, „ 16 v. o. lies $G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}$ statt $G_1 a_{ikh} - G_2\alpha_{ikh}$.
„ 573, In Gl. (33) sind ε und ε^2 zu vertauschen.
„ 578, Zeile 10 v. o. lies $v_2 - \varepsilon^i v_1$ statt $v_1 - \varepsilon^i v_2$.
„ 587, „ 1 v. u. lies $6\lambda\mu^2$ u. $6\lambda^2\mu$ bez. statt $\lambda\mu^2$ u. $\lambda^2\mu$.
„ 588, „ 2 u. 5 v. o. lies $6\lambda^2\mu^2$ statt $\lambda^2\mu^2$ und Zeile 7 lies $36u_1u_2$ statt u_1u_2.
„ 593, „ 1 v. o. lies πi statt $2\pi i$.
„ 598, Der in der Anmerkung gegebene Beweis bedarf noch einer Ergänzung für den Fall, dass die Polaren vielfache Zweige besitzen; doch gilt auch dann immer noch der Hesse'sche Satz; vgl. den Zusatz zu p. 377 und die dort genannten Arbeiten von Gordan und Nöther.
„ 602, In Gl. (1) und (2) ist in den Klammern x_1 und x_2 zu vertauschen.
„ 624, Zeile 12 v. u. lies $b_{3m-1}\,sc\Delta$ statt $b_{3m-1}\,c\Delta$; und in der letzten Verticalreihe der Determinante R ist immer $sc\Delta$ statt $c\Delta$ zu setzen.
„ 627, Zeile 16 u. 15 v. u. sind x_1 und x_2 zu vertauschen.
„ 629, „ 14 v. o. lies $sc\Delta f(s^2)$ statt $c\Delta f(s^2)$.
„ 634, „ 2 v. o. lies Δ_2 statt Δ_3 und Zeile 3 lies $\frac{1}{3}Tf - \frac{1}{6}S\Delta$ statt $\frac{1}{12}S^2f - \frac{1}{3}T\Delta$.
„ 636, „ 6 v. u. lies $\delta S = 4T$ statt $\delta S = T$.
„ 637, „ 8 v. u. lies u_n statt u_x.
„ 642, In den letzten beiden Gl. (49) lies Γ^2 statt Γ.
„ 644, Zeile 9 v. u. lies $\frac{2}{3}\psi\xi$ statt $\frac{2}{3}\xi$.
„ 649—654, Lies immer $x' - x'''$ statt $x''' - x'$.
„ 650 f. Lies $-(r\alpha p)$ statt $(r\alpha p)$.
„ 653, Zeile 7 v. o. lies $p^{(4)} = 120p^3 - 36Sp + 16T$.
„ 654, „ 1 v. u. lies: $p(3u) = p - 4p'^2 \dfrac{12pp'^2p'' - 4p'^4 - p''^3}{(12pp'^2 - p''^2)^2}$.
„ 655, „ 2 v. o. lies: $\left\{\left(\frac{4\psi}{\Delta^2} - p\right)\left(12pp'^2 - p''^2\right) + 4p'^2p''\right\}\left(12pp'^2 - p''^2\right) - 16p'^6 = 0$.
„ 659, „ 2 und 10 v. u. lies 1536 statt 384.
„ 667, „ 8 v. o. lies π statt p und in der ersten Anmk. $\nu + p - 1$ statt $\nu + p - 2$.
„ 676, In (22) lies $\geq$ statt $\leq$ und Zeile 17 u. 19 v. o. lies ν statt n.
„ 680, Zeile 11 u. 10 v. u. sind die Buchstaben C und U zu vertauschen; und Zeile 6 v. u. lies n statt ν.
„ 711, „ 6 u. 7 v. u. lies $p - 2$ statt $p - 3$.
„ 719, „ 11 v. o. lies $y_3 = 0$ statt $y_2 = 0$.
„ 723, „ 17 v. o. lies $ns - \Sigma a_i t_i$ statt $s(ns - \Sigma a_i t_i)$.
„ 729, „ 15 v. u. lies $-r\Sigma a_i' t_i' - \Gamma n$ statt $-r\Sigma a_i t_i'$.

Seite 738, Zeile 4 v. u. Das Glied $-2\gamma\gamma'$ auf der rechten Seite der Gleichung ist zu streichen.

„ 1 u. 2 v. u. lies: $= nk_x - 2x = \alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma'p$, wo $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1$. Es bleiben also die auf p. 732 und 736 gefundenen Resultate auch hier richtig.

„ 739, „ 3 v. u. lies (32) statt (25).

„ 743, „ 12 v. u. lies z statt x.

„ 744, „ 8 v. u. lies „Quadrupel" statt „Tripel".

„ 753, Die Zahlen in Zeile 16 und 19 v. o. sind zu vertauschen.

„ 759, Zeile 16 u. 5 v. u. sind die Zahlen n und p, bez. n und q in den Klammern zu vertauschen.

„ 761 f. Der hier gegebene Beweis bezieht sich nur auf den Fall $n > 2m$; ein analoger für $n \leq 2m$ ist leicht durchzuführen.

„ 763, In den Gl. (12) lies: $\lambda = \frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{2}r(r-3)$ und: $\varkappa = \frac{1}{2}(n-r)(n-3r+3)$.

„ 805, Zeile 1 v. u. lies $\varphi_\nu(\xi)$ statt $\varphi_\lambda(\xi)$.

„ 825, Für die Behandlung homogener Differentialausdrücke, insbesondere bei Ableitung des Abel'schen Theorems vgl. auch: Cremona: Sugli integrali a differenziale algebraico, Memorie dell' academia delle scienze dell' Istituto di Bologna, Serie 2, t. 10, 1870.

8

